

3. Общая задача Коши. Функция Римана

1. Функция Римана

Рассмотрим задачу:

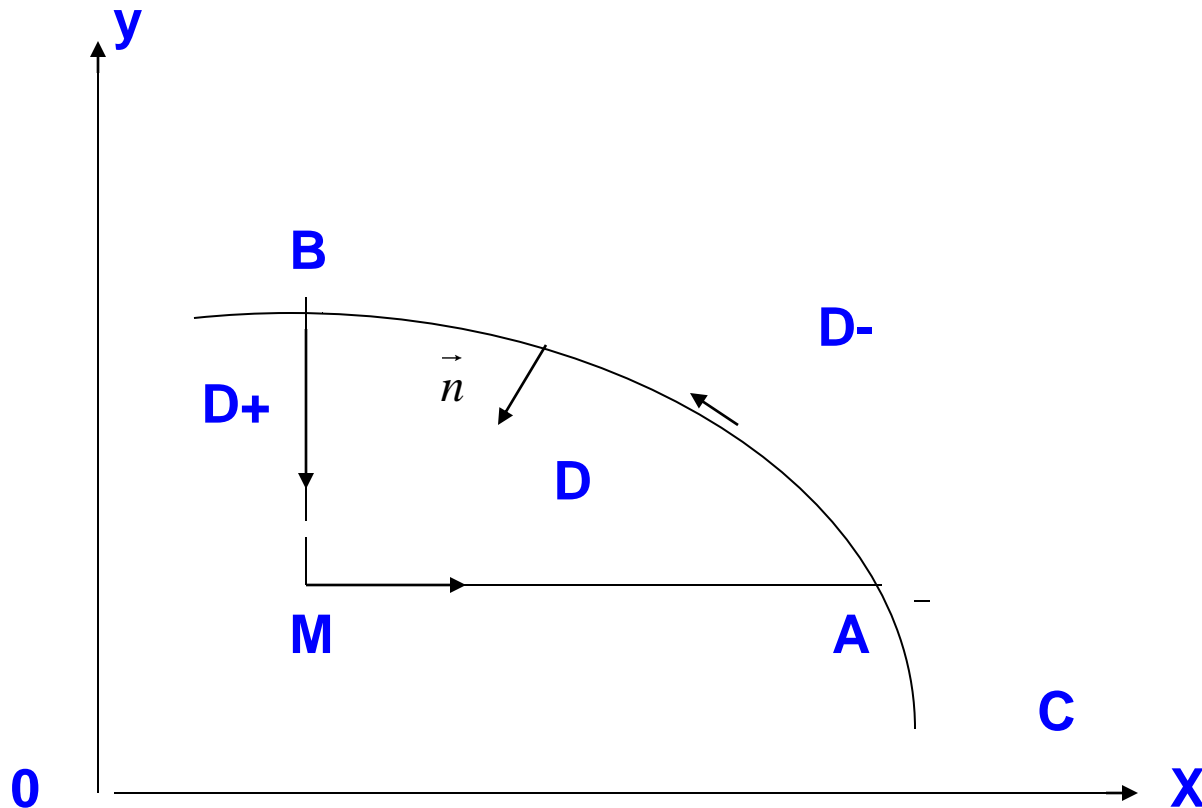
$$\left\{ \begin{array}{l} u_{xy} = f(x, y), \quad (x, y) \in D^+, \quad (1) \\ u(x, y) = \varphi(x, y), \quad (x, y) \in C, \quad (2) \\ \frac{\partial u}{\partial n}(x, y) = \psi(x, y), \quad (x, y) \in C. \quad (3) \end{array} \right.$$

Кривая C – бесконечно гладкая кривая, делящая плоскость (x, y) на две криволинейные полуплоскости D^+ и D^- и удовлетворяющая условиям:

- а) кривая C не является характеристикой уравнения (1);
- б) любая характеристика уравнения (1) пересекает кривую C только 1 раз.

В формуле (3) $\frac{\partial}{\partial n}$ - производная по нормали к кривой C , направленная внутрь области $D+$.

Построим формулу, выражающую решение задачи (1) – (3) в любой точке M области $D+$.



Рассмотрим выражение

$$Vu_{xy} - uV_{xy} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right\}, \quad (4)$$

где

$$P[u, V] = V_x u - V u_x, \quad (5)$$

$$Q[u, V] = V u_y - V_y u. \quad (6)$$

Формула Грина:

$$\begin{aligned} \int_D (Vu_{xy} - uV_{xy}) dx dy &= \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Gamma} P dx + Q dy, \end{aligned} \quad \text{где} \quad \bar{D} = D \cup \Gamma.$$

Рассмотрим интегралы вдоль характеристик **AM** и **BM**:

$$\int_M^A P dx = \int_M^A (V_x u - V u_x) dx = (Vu)_M - (Vu)_A + 2 \int_M^A V_x u dx \quad (7)$$

$$\int_B^M Q dy = \int_B^M (u_{yV} - u V_y) dy = (Vu)_M - (Vu)_B - 2 \int_B^M u V_y dy \quad (8)$$

(6)-(8) \Rightarrow

$$\int_D (Vu_{xy} - uV_{xy}) dx dy = (Vu)_M - \frac{(Vu)_A + (Vu)_B}{2} + \frac{1}{2} \int_A^B P dx + Q dy + \int_M^A V_x u dx - \int_B^M u V_y dy$$

Пусть $u(x,y)$ -решение задачи (1)-(3), а $V(x,y)$ -решение задачи (10) с данными на характеристиках (задача Гурса):

$$V_{xy} = 0, (x, y) \in D,$$

$$V_x|_{AM} = 0, V_y|_{BM} = 0, V(M) = 1$$

Функция $V=1$ в области D удовлетворяет всем условиям задачи (10) и представляет собой частный случай функции Римана.

Подставим $V=1$ в (9) \Rightarrow

$$\int_D u_{xy} dx dy = u(M) - \frac{u(A)+u(B)}{2} + \frac{1}{2} \int_A^B (-u_x dx + u_y dy)$$

(1)-(3) \Rightarrow

$$u(M) = \frac{\varphi(A)+\varphi(B)}{2} + \frac{1}{2} \int_A^B (-u_x dx + u_y dy) + \int_D f(x, y) dx dy \quad (11)$$

На дуге АВ известны выражения

$$u_x = u_\tau \cos(\tau, x) + u_n \cos(n, x), \quad u_y = u_\tau \sin(\tau, x) + u_n \sin(n, x)$$

Формула (11) даёт решение задачи (1)- (3) через входные данные.

Замечание. Из формулы (11) следует:

- 1) Теорема единственности решения задачи (1)-(3);
- 2) Теорема устойчивости решения задачи (1)-(3);
- 3) Теорема существования решения задачи (1)-(3) (при выполнении условия гладкости входных данных).

Рассмотрим более общую задачу:

$$L[u] \equiv u_{xy} + a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + c(x, y)u = f(x, y), (x, y) \in D^+ \quad (12)$$

$$u(x, y) = \varphi(x, y), (x, y) \in C, \quad (13)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x, y) = \psi(x, y), (x, y) \in C. \quad (14)$$

Определение. Два дифференциальных оператора L и K называются сопряженными, если разность $VL[u] - uK[V]$ является разностью первых частных производных по X и Y от некоторых выражений P и Q :

$$VL[u] - uK[V] = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right), \quad (15)$$

Причем P не содержит производной U_y , а Q не содержит производной U_x .

Сопряженным к оператору L будет оператор K :

$$K[V] = V_{xy} - (aV)_x - (bV)_y + cV \quad (16)$$

Для операторов L и K выполняется (15) при

$$P[u, V] = uV_x - u_x V - 2buV, \quad Q[u, V] = Vu_y - V_y u + 2auV \quad (17)$$

Формула Грина:

$$\begin{aligned} \int_D \{VL[u] - uK[V]\} dx dy &= \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} P dx + Q dy = \\ &= \frac{1}{2} \int_M^A P dx + \frac{1}{2} \int_{AB} P dx + Q dy + \frac{1}{2} \int_B^M Q dy \end{aligned} \quad (18)$$

Интегрируем по частям:

$$\begin{aligned} \int_M^A P dx &= u(M)V(M) - u(A)V(A) + 2 \int_M^A P[V] u dx, \\ \int_B^M Q dy &= u(M)V(M) - u(B)V(B) - 2 \int_B^M Q[V] u dx, \end{aligned} \quad (19)$$

где

$$P[V] = V_x - bV, \quad Q[V] = V_y - aV \quad (20)$$

Рассмотрим задачу с данными на характеристиках (задачу Гурса):

$$K[V] = 0 \quad (x, y \in D),$$

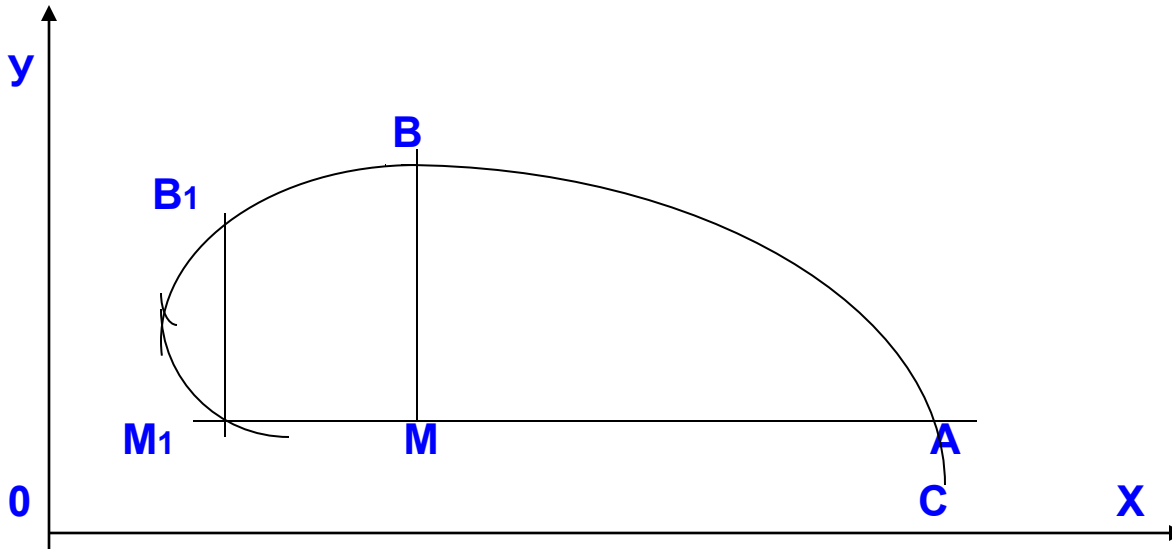
$$\tilde{P}[V] = 0 \quad \text{на } AM, \quad \tilde{Q}[V] = 0 \quad \text{на } MB, \quad V|_M = 1.$$

Можно показать, что решение задачи (21) всегда существует. Она называется функцией Римана. Функция $V(M, M_1)$ удовлетворяет по координатам точки M_1 задаче (21) и зависит от точки M как от параметра.

$$(18) - (21), (12) \Rightarrow u(M) = \frac{(\varphi V)_A + (\varphi V)_B}{2} + \\ = + \int_D V(M, M_1) f(M_1) d\sigma_1 - \frac{1}{2} \int_{AB} Pdx + Qdy$$

Интеграл по AB легко вычисляется, поскольку функции V, φ, ψ известны.

Замечание. Любая характеристика уравнения (12) должна пересекать кривую C не более одного раза. Если характеристика пересекает кривую C в двух точках A и M_1 , то значение $U(M_1)$ не может быть задано произвольно, а определяется по формуле:



Если характеристика пересекает кривую C в двух точках A и M₁, то значение U(M₁) не может быть задано произвольно, а определяется по формуле:

$$u(M_1) = \frac{u(A)V(A) + u(B_1)V(B)_1}{2} + \int_{D_1} V f dx dy - \frac{1}{2} \int_A^{B_1} P dx + Q dy \quad (23)$$

с начальным значением, заданным на дуге AB₁ и функцией f(x,y), заданной в области D₁ – криволинейном треугольнике M₁B₁A.

2. Физический смысл функции Римана

Рассмотрим задачу:

$$L[u] = f, \quad (x, y) \in D^+, \quad u|_C = 0, \quad u_n|_C = 0.$$

$$(22) \Rightarrow u(M) = \int_D V(M, M_1) f(M_1) d\sigma_{M_1} \quad (24)$$

Пусть $f_\varepsilon(M)$ локальная функция точки M_1 : $f_\varepsilon(M) = 0, M \notin S_{M_1}^\varepsilon$,

где $S_{M_1}^\varepsilon$ - окрестность точки M_1 .

Условие нормировки

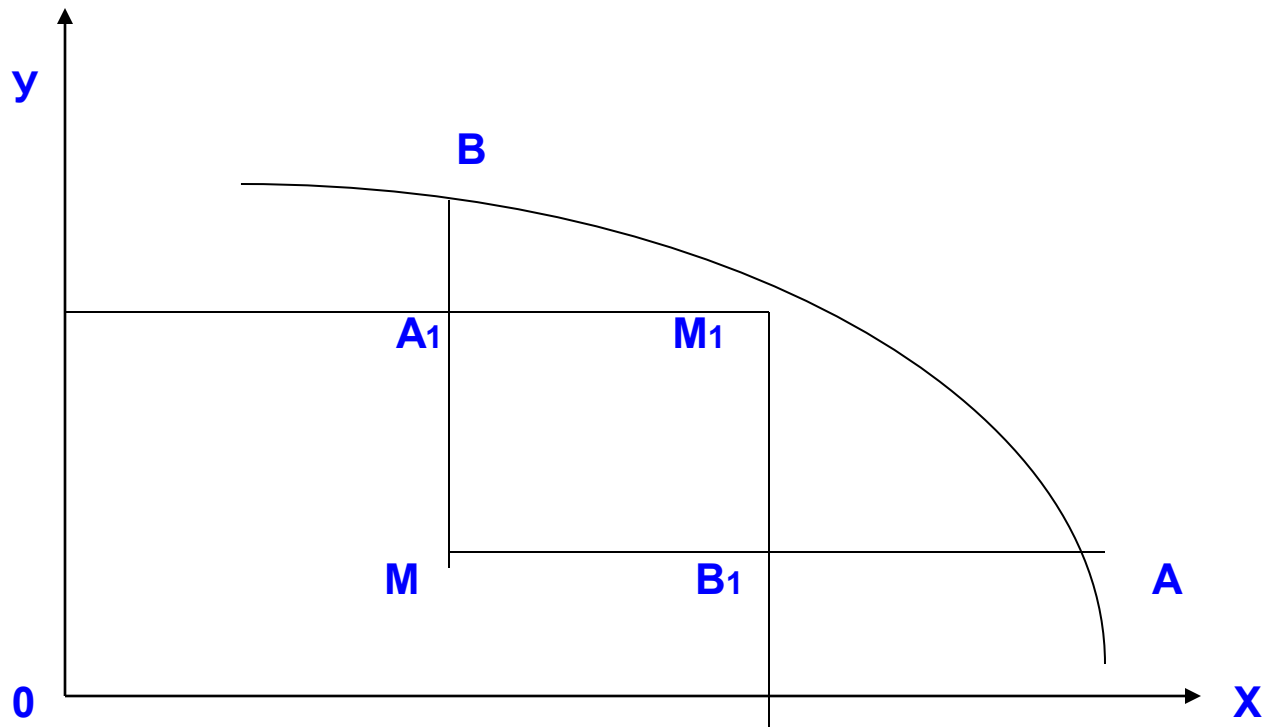
$$\int_{S_{M_1}^\varepsilon} f_\varepsilon(M_1) d\sigma_{M_1} = 1, \quad \forall \varepsilon > 0 \quad (25)$$

$$\begin{aligned}
u_\varepsilon(M) &= \int_{S_{M_1}^\varepsilon} V(M, M_1) f_\varepsilon(M_1) d\sigma_{M_1} = \\
&= V(M, M^*) \int_{S_{M_1}^\varepsilon} f_\varepsilon(=V(M, M^*)), \quad M^* \in S_{M_1}^\varepsilon. \quad (26) \\
(26) \Rightarrow u_0(M) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_\varepsilon(M) = V(M, M_1) \Rightarrow
\end{aligned}$$

$V(M_1)$ - функция влияния единичного точечного импульса, приложенного в точке M_1 .

Рассмотрим функцию $U=U(M, M_1)$, зависящую от точки M_1 как от параметра и удовлетворяющую по координатам точки M следующей задаче Гурса:

$$\begin{cases} L[u] = 0, \\ u_x + bu = 0 \quad (x, y) \in M_1 A_1, \\ u_y + au = 0 \quad (x, y) \in B_1 M_1, \\ u|_{M_1} = 1. \end{cases} \quad (27)$$



Задача (27) полностью определяет функцию U в четырехугольнике $MB_1M_1A_1$, образованном отрезками характеристик.

Проинтегрируем формулу Грина (18) по четырехугольнику $MB_1M_1A_1$, учитывая формулы (21) и (27).

(18), (21), (27) \Rightarrow

$$\begin{aligned}
 & \int_{MB_1M_1A_1} (VL[u] - uK[V]) dx dy = \\
 & = \frac{1}{2} \int_M^{B_1} P dx + \frac{1}{2} \int_{A_1}^M Q dy + \frac{1}{2} \int_{M_1}^{A_1} (uV_x - Vu_x - 2buV) dx + \quad (28) \\
 & + \frac{1}{2} \int_{B_1}^{M_1} (Vu_y - uV_y + 2auV) dy = (uV)_M - (uV)_{M_1} = 0.
 \end{aligned}$$

Òàê êàê $V|_M = 1, u|_{M_1} = 1, \text{ òî } u(M, M_1) = V(M, M) \quad (29)$

3. Уравнения с постоянными коэффициентами

1. Функция Римана для уравнения $u_{xy} + cu = 0$.

Так как оператор $L[u] \equiv u_{xy} + cu \equiv K[u]$ - самосопряженный,

то (21) \Rightarrow

$$\begin{cases} V_{xy} + CV = 0 & (x, y) \in D, \\ V_x = 0 & \text{íà } M_0A, \\ V_y = 0 & \text{íà } BM_0, \\ V|_{M_0} = 1 & \Rightarrow \end{cases} \quad (30)$$

$$\begin{cases} V_{xy} + CV = 0 & (x, y) \in D, \\ V = 1 & \text{íà } M_0A, \text{ íà } \hat{A} \hat{I}_0. \end{cases} \quad (31)$$

Ищем функцию Римана в виде $V = V(z)$, где

$$z = \sqrt{(x - x_0)(y - y_0)}, \quad M_0 = \{x_0, y_0\}, \quad M = \{x, y\}.$$

$$(31) \Rightarrow \quad V(0) = 1 \quad (32)$$

$$V_x = V' \frac{y - y_0}{2z}, \quad V_{xy} = \frac{1}{4} V'' + \frac{1}{4z} V' \Rightarrow V'' + \frac{1}{z} V' + 4CV = 0 \quad (33)$$

$$V(M, M_0) = V(x, y, x_0, y_0) = J_0(2\sqrt{C(x - x_0)(y - y_0)}) \quad (34)$$

2. Задача Коши для уравнения колебаний.

Рассмотрим задачу:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{zz} + au_t + bu_z + gu = 0, & -\infty < z < \infty, t > 0, \\ u|_{t=0} = \varphi(z), \quad u_t|_{t=0} = \psi(z), & -\infty < z < \infty. \end{cases} \quad (35)$$

Замена:

$$u = Ue^{-\frac{a}{2}t + \frac{b}{2}z} \quad (36)$$

$$\begin{cases} U_{tt} - U_{zz} + CU = 0, & -\infty < z < \infty, t > 0, \\ U|_{t=0} = \varphi(z)e^{-\frac{b}{2}z} = \varphi_1(z), \\ U_t|_{t=0} = (\psi(z) + \frac{a}{2}\varphi(z))e^{-\frac{b}{2}z} = \psi(z), & -\infty < z < \infty, \end{cases} \quad (37)$$

$$C = -\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} + g.$$

Перейдем к переменным X и Y :

$$x = t + z, \quad y = t - z \Rightarrow t = \frac{x+y}{2}, \quad z = \frac{x-y}{2}. \quad (38)$$

$$\begin{cases} W_{xy} + \frac{c}{4}W = 0, \\ W|_{x+y=0} = \varphi_1\left(\frac{x+y}{2}\right), \\ (W_x + W_y)|_{x+y=0} + \psi\left(\frac{x-y}{2}\right) \end{cases} \quad (39)$$

$$t = 0 \Rightarrow y = -x, dx = dz, dy = -dz$$

$$(22) \Rightarrow W(x_0, y_0) = \frac{\varphi_1(-y_0) + \varphi(x_0)}{2} \quad \mathbf{y = -x}$$

$$-\frac{1}{2} \int_{AB} (VW_y - WV_y) dy + (WV_x - W_x V) dx \quad (40)$$

$$W_x = \frac{1}{2} (U_t + U_z), \quad U_y = \frac{1}{2} (U_t - U_z) \quad (41)$$

$$(34), (40), (41) \Rightarrow U(z_0, t_0) = \frac{\varphi_1(z_0 + t_0) + \varphi_1(z_0 - t_0)}{2} +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{z_0 - t_0}^{z_0 + t_0} \left\{ \psi_1(z) J_0(\sqrt{C} \sqrt{t_0^2 - (z - z_0)^2}) - \varphi_1(z) \frac{J_1(\sqrt{C} \sqrt{t_0^2 - (z - z_0)^2})}{\sqrt{t_0^2 - (z - z_0)^2}} \sqrt{C} t_0 \right\} dz \quad (42)$$

При $C=0$ из (40) получаем формулу Даламбера:

$$U(z_0, t_0) = \frac{\varphi_1(z_0 + t_0) + \varphi_1(z_0 - t_0)}{2} + \frac{1}{2} \int_{z_0 - t_0}^{z_0 + t_0} \psi_1(z) dz \quad (43)$$

