

# Глава 2. Некоторые классические задачи математической физики

## 1. Уравнение Гельмгольца ( $\Delta u + cu = -f$ ) в неограниченной области

### 1. Поведение решения на бесконечности при различных $c$ .

1)  $C = -\alpha^2 < 0$

$$u^\pm(M) = \frac{1}{4\pi} \int_D \frac{e^{\pm\alpha r_{QM}}}{r_{QM}} f(Q) dV_Q,$$

(1)

где  $f(M)$  – финитная функция,  $\text{supp } f \subset D$ .

## Теорема 1.

### Классическое решение уравнения

$$\Delta u - \alpha^2 u = -f(M) \quad (2)$$

равномерно стремящееся к нулю на бесконечности,  
единственно.

Доказательство:

$$u_1(M) \neq u_2(M) \Rightarrow V(M) = u_1(M) - u_2(M) \Rightarrow$$

$\Delta V - \alpha^2 V = 0$ . Так как  $V \rightarrow 0$  равномерно,

то  $\forall \varepsilon > 0, \exists R > 0: |V(M)| < \varepsilon, r \geq R$

Применим к шару  $K^r$  принцип максимума:  $|V(M)| < \varepsilon, M \in K^r$ .

В силу произвольности  $\varepsilon$  и  $r$  получим, что

$$V(M) \equiv 0 \Rightarrow u_1(M) \equiv u_2(M).$$

**Единственное решение, равномерно стремящееся к нулю на бесконечности:**

$$u(M) = \frac{1}{4\pi} \int_D \frac{e^{-\alpha r_{QM}}}{r_{QM}} f(Q) dV_Q. \quad (3)$$

2)  $C = k^2$ ,  $k = \bar{k} + i\bar{k}$ ,  $\bar{k} > 0$

**Единственное решение, равномерно стремящееся к нулю на бесконечности**

$$u(M) = \frac{1}{4\pi} \int_D \frac{e^{ikr_{QM}}}{r_{QM}} f(Q) dV_Q. \quad (4)$$

При временной зависимости  $e^{-i\omega t}$  это решение соответствует **расходящейся волне**.

$$3) C = k^2 > 0$$

$$u^\pm(M) = \frac{1}{4\pi} \int_D \frac{e^{\pm ik r_{QM}}}{r_{QM}} f(Q) dV_Q. \quad (5)$$

Оба решения  $u^\pm(M)$  уравнения Гельмгольца

$\Delta u + k^2 u = -f(M)$  **одинаково убывают на бесконечности.**

## 2. Условия излучения Зоммерфельда

Из двух фундаментальных решений

$$v^\pm(M) = \frac{e^{\pm ik r_{M_0M}}}{r_{M_0M}} \quad (6)$$

нужно выбрать решение, соответствующее **расходящейся волне** (временная зависимость  $e^{-i\omega t}$  ).

$$1) M_0 \equiv 0 \Rightarrow r_{M_0 M} = r_M = r$$

$$\frac{dv^\pm}{dr} = \pm ik \frac{e^{\pm ikr}}{r} - \frac{e^{\pm ikr}}{r^2} = \pm ikv^\pm + o\left(\frac{1}{r}\right). \quad (7)$$

**Расходящейся сферической волне** соответствует  $v^+(M)$ ,  
а **сходящейся**  $v^-(M)$ .

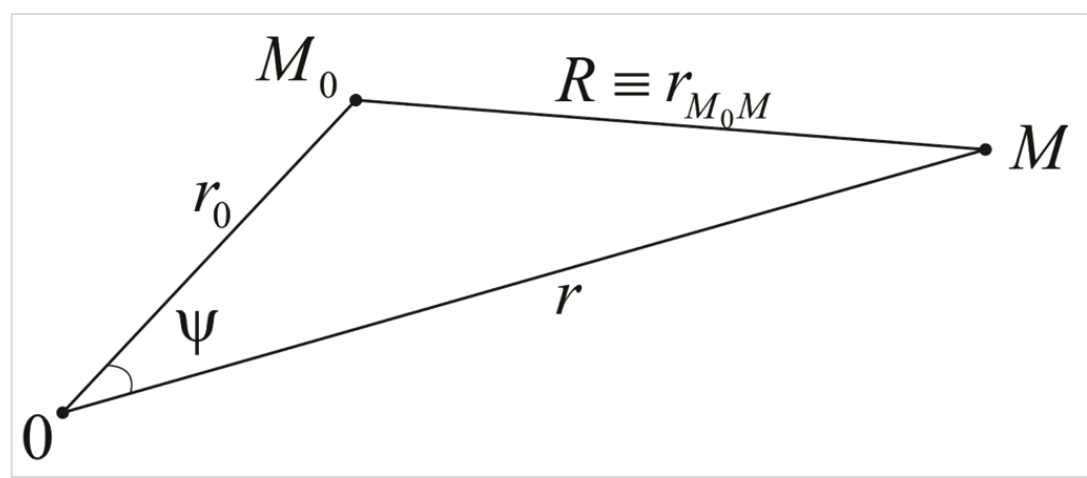
**Расходящаяся сферическая волна** должна удовлетворять  
соотношению

$$\frac{\partial u}{\partial r} - iku = o\left(\frac{1}{r}\right), \quad u = v^+(M)e^{-i\omega t}, \quad (8)$$

а **сходящаяся** - соотношению

$$\frac{\partial u}{\partial r} + iku = o\left(\frac{1}{r}\right), \quad u = v^-(M)e^{-i\omega t}. \quad (9)$$

2)  $M_0 \neq 0$



$$\frac{\partial}{\partial r} \frac{e^{ikR}}{R} = \frac{\partial}{\partial R} \frac{e^{ikR}}{R} \frac{\partial R}{\partial r}, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} &= \frac{1}{\sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos \psi}} = \frac{1}{r} \frac{1}{\sqrt{1 + \left\{ \left( \frac{r_0}{r} \right)^2 - 2 \left( \frac{r_0}{r} \right) \cos \psi \right\}}} = \\ &= \frac{1}{r} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{r_0}{r} \right)^2 - 2 \left( \frac{r_0}{r} \right) \cos \psi \right] + \dots \right\} = \frac{1}{r} \left( 1 + \underline{\underline{O}} \left( \frac{1}{r} \right) \right) \end{aligned} \quad (11)$$

$$\frac{\partial R}{\partial r} = \frac{r - r_0 \cos \psi}{R} = 1 + \underline{\underline{O}} \left( \frac{1}{r} \right) \quad (12)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \frac{e^{ikR}}{R} = ik \frac{e^{ikR}}{R} \frac{\partial R}{\partial r} - \frac{e^{ikR}}{R^2} \frac{\partial R}{\partial r} \quad (13)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \frac{e^{ikR}}{R} - ik \frac{e^{ikR}}{R} = o\left(\frac{1}{r}\right).$$

И в этом случае **расходящиеся сферические волны** удовлетворяют соотношению

$$\frac{\partial u^+}{\partial r} - ik u^+ = o\left(\frac{1}{r}\right), \quad u^+ = e^{-i\omega t} \frac{e^{ikR}}{R}, \quad (14)$$

**а сходящиеся** - соотношению

$$\frac{\partial u}{\partial r} + ik u = o\left(\frac{1}{r}\right), \quad u = e^{-i\omega t} \frac{e^{-ikR}}{R}. \quad (15)$$

**Замечание 1.** В силу специального выбора ядер введенные выше потенциалы удовлетворяют **условиям излучения**

**Зоммерфельда:** 
$$u(M) = \underline{\underline{O}}(1/r), \quad (16)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} - iku = o\left(\frac{1}{r}\right). \quad (17)$$

**Замечание 2.** Для **двумерных задач** условия излучения Зоммерфельда имеют вид:

$$u(M) = \underline{\underline{O}}(1/\sqrt{r}), \quad (18)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left( \frac{\partial u}{\partial r} - iku \right) = 0. \quad (19)$$

**Замечание 3.** И.Н. Векуа показал, что **условие (18)** является **следствием условия(19).**



### 3) Теорема единственности:

**Теорема 2.**

**Классическое решение уравнения Гельмгольца**

$$\Delta u + k^2 u = -f(M), \quad M \in \mathbb{R}^3, \quad (20)$$

**где  $k$  – вещественное, удовлетворяющее условиям излучения Зоммерфельда (16), (17), единственно.**

**Доказательство.**

$$u_1(M) \neq u_2(M) \Rightarrow V(M) = u_1(M) - u_2(M) \Rightarrow \Delta V + k^2 V = 0,$$

$$V(M) = \underline{\underline{O}}(1/r), \quad \frac{\partial V}{\partial r} - ikV = \overline{\overline{o}}(1/r).$$

**Рассмотрим шар  $K^R$  и запишем для точки  $M \in K^R$  третью формулу Грина:**

$$\begin{aligned}
V(M) &= \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma^R} \left\{ \frac{e^{ikr_{PM}}}{r_{PM}} \frac{\partial V}{\partial r} - V(P) \frac{\partial}{\partial r_P} \left( \frac{e^{ikr_{PM}}}{r_{PM}} \right) \right\} d\sigma_P = \\
&= \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma^R} \left\{ \frac{e^{ikr_{PM}}}{r_{PM}} \frac{\partial V}{\partial r} - ikV \frac{e^{ikr_{PM}}}{r_{PM}} + ikV \frac{e^{ikr_{PM}}}{r_{PM}} - V(P) \frac{\partial}{\partial r_P} \left( \frac{e^{ikr_{PM}}}{r_{PM}} \right) \right\} d\sigma_P = \\
&= \frac{1}{4\pi} \left[ \int_{\Sigma^R} \left( \frac{\partial V}{\partial r} - ikV \right) \frac{e^{ikr_{PM}}}{r_{PM}} d\sigma_P - \int_{\Sigma^R} V(P) \left( \frac{\partial}{\partial r_P} \left( \frac{e^{ikr_{PM}}}{r_{PM}} \right) - ik \frac{e^{ikr_{PM}}}{r_{PM}} \right) d\sigma_P \right] = \\
&= \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma^R} \left( \frac{e^{ikr_{PM}}}{r_{PM}} \overset{=}{o} \left( \frac{1}{r} \right) - V(P) \overset{=}{o} \left( \frac{1}{r} \right) \right) d\sigma_P = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma^R} \overset{=}{o} \left( \frac{1}{r^2} \right) d\sigma_P \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$V(M) \equiv 0 \Rightarrow u_1(M) \equiv u_2(M).$$

**Следствие. Единственным решением** уравнения Гельмгольца (20) при **вещественном**  $k^2 > 0$ , удовлетворяющим условиям излучения Зоммерфельда (16),(17), является интеграл

$$u(M) = \frac{1}{4\pi} \int_D \frac{e^{ikr_{QM}}}{r_{QM}} f(Q) dV_Q, \quad (21)$$

где  $f(M)$  – финитная функция,  $\text{supp } f \subset D$ .

### 3. Принцип предельного поглощения

Пусть  $f(M)$  – финитная функция,  $\text{supp } f \subset D$ .

Единственное решение уравнения Гельмгольца с

**КОМПЛЕКСНЫМ** коэффициентом  $k = \bar{k} + i\bar{k}$ ,  $\bar{k} > 0$ ,

равномерно стремящееся к нулю на бесконечности, имеет

**ВИД:**

$$u(M) = \frac{1}{4\pi} \int_D \frac{e^{ikr_{QM}}}{r_{QM}} f(Q) dV_Q = \frac{1}{4\pi} \int_D \frac{e^{i\bar{k}r_{QM}} e^{-\bar{k}r_{QM}}}{r_{QM}} f(Q) dV_Q \quad (22)$$

**Функция**

$$\bar{u}(M) = \lim_{\bar{k} \rightarrow 0} u(M) = \frac{1}{4\pi} \int_D \frac{e^{i\bar{k}r_{QM}}}{r_{QM}} f(Q) dV_Q \quad (23)$$

является решением уравнения Гельмгольца с

**ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМ ВЕЩЕСТВЕННЫМ** коэффициентом  $\bar{k}^{-2}$ :

$$\Delta \bar{u} + \bar{k}^{-2} \bar{u} = -f(M)$$

(24)

Дополнительным условием, позволяющим выделить решение уравнения Гельмгольца (24), соответствующее **расходящимся волнам**, является требование, чтобы функция  $\bar{u}(M)$  являлась пределом **ограниченного решения** уравнения Гельмгольца с комплексным коэффициентом при  $\bar{k} \rightarrow 0$ , где  $k = \bar{k} + i\bar{\epsilon}$ .

## 4. Принцип предельной амплитуды

Рассмотрим уравнение колебаний с периодической правой частью:

$$u_{tt} = a^2 \Delta u + F(M, t), \quad F(M, t) = f(M) e^{-i\omega t}, \quad (25)$$

$$u(M, 0) = 0, \quad u_t(M, 0) = 0; \quad M \in \mathbb{R}^3. \quad (26)$$

Со временем в системе установятся колебания с частотой вынуждающей силы:

$$u(M, t) = V(M) e^{-i\omega t}, \quad (27)$$

где  $V(M)$  – **предельная амплитуда** колебаний

$$V(M) = \lim_{t \rightarrow \infty} u(M, t) e^{i\omega t}, \quad (28)$$

$$\Delta V + k^2 V = -f(M), \quad k = \frac{\omega}{a}. \quad (29)$$

Требование, чтобы  $V(M)$  было **предельной амплитудой** колебаний с нулевыми начальными условиями, представляет то дополнительное условие, которое нужно присоединить к волновому уравнению Гельмгольца для выделения единственного решения.

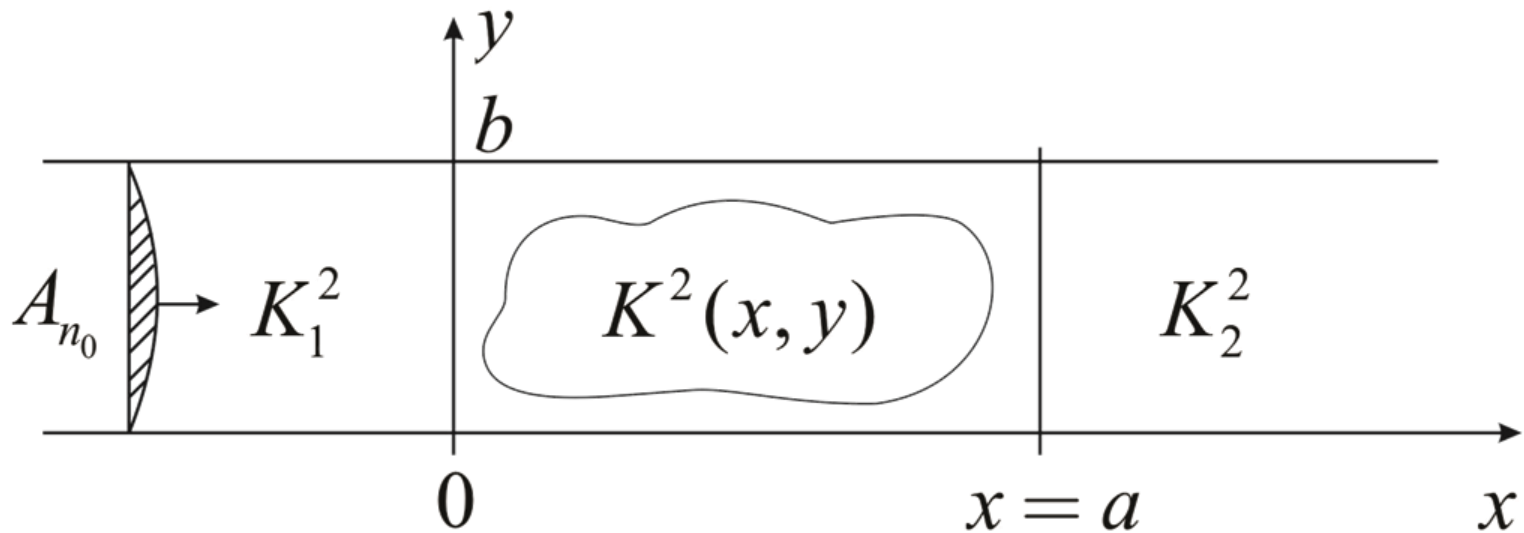
То есть нужно найти решение уравнения Гельмгольца (29), являющееся **предельной амплитудой** для решения уравнения колебаний (25) с начальными условиями (26):

$$u(M, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{K_M^{at}} \frac{F(Q, t - r_{QM}/a)}{r_{QM}} dV_Q = \frac{1}{4\pi} \int_{K_M^{at}} \frac{f(Q)}{r_{QM}} e^{-i\omega t - r_{QM}/a} dV_Q,$$

$f(M)$  – финитная функция,  $\text{supp } f \subset D$ .

$$V(M) = \lim_{t \rightarrow \infty} u(M, t) e^{i\omega t} = \frac{1}{4\pi} \int_D f(Q) \frac{e^{ikr_{QM}}}{r_{QM}} dV_Q.$$

## 5. Парциальные условия излучения



Рассмотрим плоский волновод с **локальной нерегулярностью**.

При  $x \leq 0$ ,  $x \geq a$  волновод **регулярный**: его заполнение однородно и геометрия сечения постоянна.



**Нормальные волны (моды) – частные решения вида**

$$u(x, y) = e^{i\gamma x} \psi(y), \quad (30)$$

где  $\gamma$  – **постоянная распространения**,  $\psi(y)$  – **функция сечения**.

Поле  $u(x, y)$  в волноводе удовлетворяет уравнению Гельмгольца:

$$\Delta u + k^2 u = 0, \quad (x, y) \in V \equiv \mathbb{R}^1 \times (0, b), \quad (31)$$

где  $k^2(x, y) = \bar{k}^2(x, y) + i\bar{k}^2(x, y)$ ,

$$k^2(x, y) = \begin{cases} k_1^2 = const, & x < 0, \\ k^2(x, y), & 0 < x < a, \\ k_2^2 = const, & x > a. \end{cases} \quad (32)$$

**Электродинамический случай:**  $k^2(x, y) = k_0^2 \varepsilon(x, y)$ , где

$k_0 = \frac{\omega}{c}$  - волновое число,  $\varepsilon(x, y)$  - диэлектрическая проницаемость.

$$u(x, 0) = 0, \quad u(x, b) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^1 - \quad (33)$$

- граничные условия (например, **идеально проводящие** стенки).

(30), (31), (33) =>

$$\begin{cases} \psi''(y) + \lambda\psi(y) = 0, & 0 < y < b, \end{cases} \quad (34)$$

$$\begin{cases} \psi(0) = 0, & \psi(b) = 0, \end{cases} \quad (35)$$

где  $\lambda = k^2 - \gamma^2$ .

(34), (35) =>

$$\psi_n(y) = \sqrt{\frac{2}{b}} \sin \frac{\pi n y}{b}, \quad \lambda_n = \left( \frac{\pi n}{b} \right)^2, \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (36)$$

Существует **счетное множество** нормальных волн (мод) вида:

$$u_n(x, y) = e^{i\gamma_n x} \psi_n(y), \quad \gamma_n = \sqrt{k^2 - \lambda_n}, \quad (n = 1, 2, \dots)$$

при  $(x \leq 0, x \geq a)$ . (37)

Пусть на неоднородность падает слева нормальная волна индекса  $n_0$  с амплитудой  $A_{n_0}$ . В сечении  $x = 0$  **парциальные условия излучения при** временной зависимости  $e^{-i\omega t}$  имеют вид:

$$\int_0^b \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} + i\gamma_n^{(1)} u \right\}_{x=0} \cdot \psi_n(y) dy = 2i\gamma_{n_0}^{(1)} A_{n_0} \cdot \delta_{n,n_0}, \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (38)$$

Аналогично ставятся условия в сечении  $x = a$ .

Условия (38) – **нелокальные**.

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n(x) \psi_n(y), \quad (39)$$

$$Z_n(x) = \int_0^b u(x, y) \psi_n(y) dy \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (40)$$

Из (38), (40) следует, что парциальные условия излучения – это условия, которые накладываются на **коэффициенты Фурье  $Z_n(x)$**

в разложении функции  $U(x,y)$  по функциям сечения  $\psi_n(y)$ :

$$Z_n'(0) + i\gamma_n^{(1)} Z_n(0) = 2i\gamma_{n_0}^{(1)} A_{n_0} \delta_{n,n_0} \quad (41)$$

Пусть  $D$ -область между сечениями  $x=0$  и  $x=a$ :  $\bar{D} \equiv \{0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$ .

Краевая задача имеет вид:

$$\Delta u + k^2(x, y)u = 0, \quad (x, y) \in D, \quad (42)$$

$$u(x,0)=0, \quad u(x,b) = 0, \quad 0 \leq x \leq a, \quad (43)$$

$$\int_0^b \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} + i\gamma_n^{(1)} u \right\}_{x=0} \psi_n(y) dy = 2i\gamma_{n_0}^{(1)} A_{n_0} \delta_{n,n_0} \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (44)$$

$$\int_0^b \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} - i\gamma_n^{(2)} u \right\}_{x=a} \psi_n(y) dy = 0 \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (45)$$

где  $\gamma_n^{(l)} = \sqrt{k_l^2 - \lambda_n}$  ( $n = 1, 2, \dots; l = 1, 2$ ) – **постоянные распространения нормальных волн.**

$$u(x, y) = \vec{A}_n e^{i\gamma_n^{(1)}x} \psi_n(y) + \vec{B}_n e^{-i\gamma_n^{(1)}x} \psi_n(y)$$

$$\int_0^b \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} + i\gamma_n^{(1)}u \right\} \Big|_{x=0} \psi_n(y) dy = \left( i\vec{A}_n \gamma_n^{(1)} + i\vec{A}_n \gamma_n^{(1)} \right) \int_0^b \psi_n^2(y) dy +$$

$$+ \left( -i\vec{B}_n \gamma_n^{(1)} + i\vec{B}_n \gamma_n^{(1)} \right) \int_0^b \psi_n^2(y) dy = 2i\gamma_n^{(1)} \vec{A}_n = 2i\gamma_{n_0}^{(1)} \vec{A}_{n_0} \Rightarrow$$

$$\vec{A}_n = 0, \quad n \neq n_0, \quad \vec{A}_{n_0} \neq 0, \quad \vec{B}_n \neq 0, \quad n=1,2,\dots$$

$$\int_0^b \psi_n^2(y) dy = \frac{2}{b} \int_0^{\frac{b}{2}} \sin^2 \frac{\pi ny}{b} dy = \frac{2}{b} \frac{1}{2} \int_0^{\frac{b}{2}} \left( 1 - \cos \frac{2\pi ny}{b} \right) dy = \frac{1}{b} \int_0^{\frac{b}{2}} dy = 1$$

$$u(x, y) = \vec{C}_n e^{i\gamma_n^{(2)}x} \psi_n(y) + \vec{D}_n e^{-i\gamma_n^{(2)}x} \psi_n(y)$$

$$\int_0^b \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} - i\gamma_n^{(2)} u \right\} \Big|_{x=0} \psi_n(y) dy = \left( i\vec{C}_n \gamma_n^{(2)} - i\vec{C}_n \gamma_n^{(2)} \right) \int_0^b \psi_n^2(y) dy +$$

$$+ \left( -i\vec{D}_n \gamma_n^{(2)} - i\vec{D}_n \gamma_n^{(2)} \right) \int_0^b \psi_n^2(y) dy = -2i\gamma_n^{(2)} \vec{D}_n = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\vec{C}_n \neq 0, \quad \vec{D}_n = 0, \quad n=1, 2, \dots$$

$$\int_0^b \psi_n^2(y) dy = \frac{2}{b} \int_0^b \sin^2 \frac{\pi n y}{b} dy = \frac{2}{b} \frac{1}{2} \int_0^b \left( 1 - \cos \frac{2\pi n y}{b} \right) dy = \frac{1}{b} \int_0^b dy = 1$$

Условия (45) означают отсутствие волн приходящих из  $+\infty$  (то есть справа).

**Теорема 3. Пусть**  $k^2 = \bar{k}^2 + i\bar{\bar{k}}^2$ ,  $\bar{k} \neq 0$ ,  $\gamma_n^{(l)} = \bar{\gamma}_n^{(l)} + i\bar{\bar{\gamma}}_n^{(l)}$ ,  $\bar{\gamma}_n^{(l)} > 0$  ( $n = 1, \dots; l = 1, 2$ ).

**Тогда классическое решение задачи (42)-(45) единственно.**

### Доказательство

Предположим существование двух решений:  $u_1(x, y) \neq u_2(x, y) \Rightarrow$   
 $\Rightarrow u(x, y) = u_1(x, y) - u_2(x, y) \Rightarrow (42) - (45)$ ,  $A_{n_0} = 0$ .

Умножим (42) на  $u^*$  и проинтегрируем по области  $D$  (интегрирование по частям):

$$\int_0^a \int_0^b (\Delta u u^* + k^2 u u^*) dx dy = \int_0^b u_x u^* \Big|_{x=a} dy - \int_0^b u_x u^* \Big|_{x=0} dy -$$

$$- \int_0^a \int_0^b (|u_x|^2 + |u_y|^2) dx dy + \int_0^a \int_0^b k^2 |u|^2 dx dy = 0, \quad (46)$$

$$u^*(a, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n^* \psi_n(y), \quad C_n^* = \int_0^b u^*(a, y) \psi_n(y) dy \quad (n=1, 2, \dots) \quad (47)$$

$$\begin{aligned} \int_0^b u_x u^* \Big|_{x=a} dy &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n^* \int_0^b u_x(a, y) \psi_n(y) dy = \\ &= i \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^{(2)} C_n^* \int_0^b u(a, y) \psi_n(y) dy = i \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^{(2)} C_n^* C_n = \\ &= i \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^{(2)} |C_n|^2. \end{aligned} \quad (48)$$

**Аналогично получаем:**

$$\int_0^b u_x u^* \Big|_{x=0} dy = -i \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^{(1)} |B_n|^2, \quad (49)$$



где

$$u^*(0, y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n^* \psi_n(y), \quad B_n^* = \int_0^b u^*(0, y) \psi_n(y) dy \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (50)$$

$$(46), (48), (49) \Rightarrow i \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^{(2)} |C_n|^2 + i \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^{(1)} |B_n|^2 - \int_0^a \int_0^b |\text{grad } u|^2 dx dy + \int_0^a \int_0^b k^2 |u|^2 dx dy = 0 \quad (51)$$

**Возьмём в (51) мнимую часть:**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \bar{\gamma}_n^{(2)} |C_n|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\gamma}_n^{(1)} |B_n|^2 + \int_0^a \int_0^b \bar{k}^2 |u|^2 dx dy = 0 \quad (52)$$

$$(52) \Rightarrow u = 0, \quad (x, y) \in D; \quad C_n = 0 \quad (n = 1, 2, \dots) \Rightarrow u(a, y) = 0;$$

$$B_n = 0 \quad (n = 1, 2, \dots) \Rightarrow u(0, y) = 0 \Rightarrow u(x, y) = 0 \Rightarrow u_1(x, y) = u_2(x, y),$$

$$(x, y) \in \bar{D}.$$

**Замечание.** Пользуясь принципом предельного поглощения, можно показать, что единственность имеет место и в случае вещественного коэффициента  $k^2(x, y)$ .

## 6. Излучение волн. Квадрупольный излучатель

Поверхность шара радиуса  $a$  колеблется так, что радиальная составляющая скорости  $\tilde{V}_r$  на поверхности  $r = a$  равна

$$\tilde{V}_a = \frac{V_0}{4} (1 + 3 \cos 2\theta) e^{-i\omega t} \quad (53)$$

Вычислить интенсивность и мощность такого **излучателя второго порядка – квадрупольного излучателя.**

Звуковое давление  $\tilde{p}(M, t)$  удовлетворяет уравнению колебаний:

$$\frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial t^2} = c^2 \Delta \tilde{p}, \quad \text{где} \quad c^2 = \gamma \frac{p_0}{\rho_0}, \quad (54)$$

$c$  – скорость звука,  $p_0$  и  $\rho_0$  – давление и плотность среды в невозмущенном состоянии,  $\gamma$  – показатель адиабаты.

Установившийся процесс:  $\tilde{p}(M, t) = p(M)e^{-i\omega t}$ .

Радиальная составляющая скорости:

$$\frac{\partial \tilde{V}_r}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial r} \Rightarrow V_r = \frac{1}{i\omega\rho_0} \frac{\partial p}{\partial r}, \quad (55)$$

где  $\tilde{V}_r = V_r e^{-i\omega t}$ . Для полинома Лежандра  $P_2(x)$  имеет место формула:

$$P_2(x) = \frac{3x^2 - 1}{2} \Rightarrow \frac{1 + 3\cos 2\theta}{4} = P_2(\cos \theta) \Rightarrow \quad (56)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta p + k^2 p = 0, \quad r > a, \end{array} \right. \quad (57)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial p}{\partial r} = i\omega\rho_0 V_0 P_2(\cos \theta), \quad r = a, \end{array} \right. \quad (58)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} p = \underline{O}\left(\frac{1}{r}\right), \end{array} \right. \quad (59)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial p}{\partial r} - ikp = \overline{O}\left(\frac{1}{r}\right), \quad k = \frac{\omega}{c}. \end{array} \right. \quad (60)$$

**Симметрия по**  $\varphi \Rightarrow p(M) = p(r, \theta) \Rightarrow$

$$p(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \zeta_n^{(1)}(kr) P_n(\cos \theta), \quad (61)$$

где

$$\zeta_n^{(1)}(kr) = \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(kr). \quad (62)$$

$$(58), (61) \Rightarrow C_2 = ic \rho_0 V_0 \frac{1}{\zeta_2^{(1)'}(ka)} \Rightarrow \quad (63)$$

$$p(r, \theta) = ic \rho_0 V_0 \frac{\zeta_2^{(1)}(kr)}{\zeta_2^{(1)'}(ka)} P_2(\cos \theta), \quad (64)$$

$$V_r(r, \theta) = V_0 \frac{\zeta_2^{(1)'}(kr)}{\zeta_2^{(1)'}(ka)} P_2(\cos \theta). \quad (65)$$

Рассмотрим **длинноволновый случай** ( $ka \ll 1$ ) и **дальнюю (волновую) зону** ( $kr \gg 1$ ):

$$\begin{aligned}
 x \rightarrow 0 \quad \zeta_2^{(1)}(x) &\simeq -i \frac{3}{x^3}, \quad \zeta_2^{(1)'}(x) \simeq i \frac{9}{x^4}, \\
 x \rightarrow \infty \quad \zeta_2^{(1)}(x) &\simeq -\frac{1}{x} e^{ix} e^{-i\frac{\pi}{2}}, \\
 \zeta_2^{(1)'}(x) &\simeq -\frac{i}{x} e^{ix} e^{-i\frac{\pi}{2}}.
 \end{aligned} \tag{66}$$

$$p(r, \theta) = ic\rho_0 V_0 \frac{-1 e^{ikr} e^{-i\frac{\pi}{2}}}{kr \frac{9}{(ka)^4}} P_2(\cos \theta) = -\frac{c\rho_0 V_0 k^3 a^4}{9r} e^{ikr} e^{-i\frac{\pi}{2}} P_2(\cos \theta), \tag{67}$$

$$V_r(r, \theta) = -\frac{V_0 k^3 a^4}{9r} e^{ikr} e^{-i\frac{\pi}{2}} P_2(\cos \theta), \tag{68}$$

$$\begin{aligned}\bar{P}(r, \theta, t) &= \operatorname{Re}\left(p(r, \theta)e^{-i\omega t}\right) = \\ &= -\frac{c\rho_0 V_0 k^3 a^4}{9r} P_2(\cos\theta) \cos(\omega t - kr + \frac{\pi}{2}),\end{aligned}\quad (69)$$

$$\begin{aligned}\bar{V}_r(r, \theta, t) &= \operatorname{Re}\left(V_r(r, \theta)e^{-i\omega t}\right) = \\ &= -\frac{V_0 k^3 a^4}{9r} P_2(\cos\theta) \cos(\omega t - kr + \frac{\pi}{2}).\end{aligned}\quad (70)$$

**Интенсивность излучения квадруполья  $\bar{Y}$  :**

$$\bar{Y} = \frac{1}{T} \int_0^T \bar{P}(r, \theta, t) \bar{V}_r(r, \theta, t) dt, \quad T = \frac{2\pi}{\omega}, \quad (71)$$

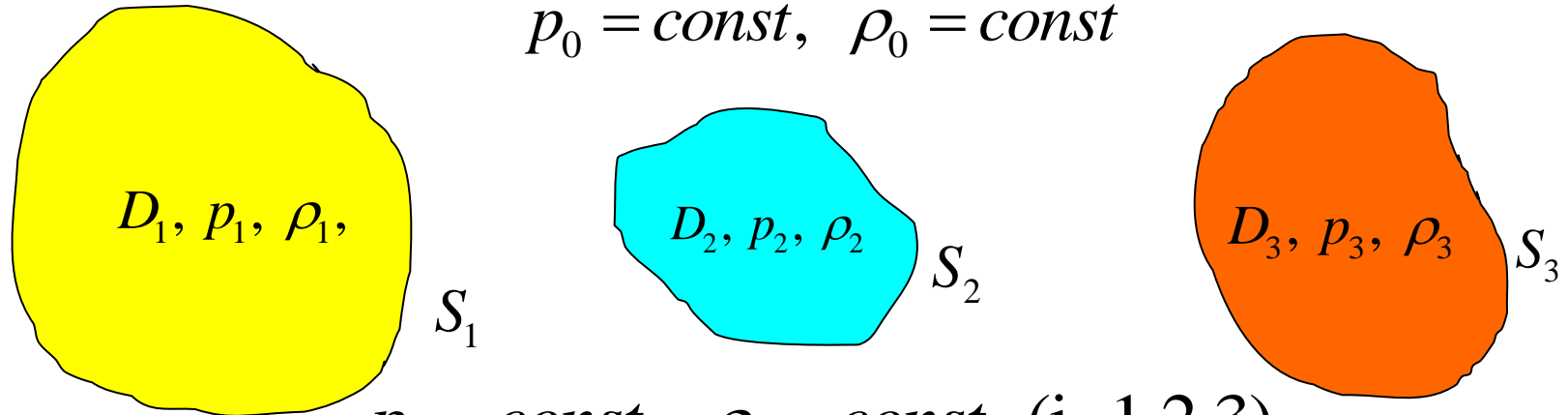
$$\bar{Y} = \frac{c\rho_0 V_0^2 k^6 a^8 P_2^2(\cos\theta)}{162r^2} \quad (72)$$

**Мощность излучения квадруполья  $\Pi$  :**

$$\Pi = r^2 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \bar{Y} \sin\theta d\theta d\varphi = \frac{2\pi c\rho_0 V_0^2 k^6 a^8}{405} \quad (73)$$

## 7. Задачи математической теории дифракции

$$p_0 = \text{const}, \quad \rho_0 = \text{const}$$



$$p_i = \text{const}, \quad \rho_i = \text{const} \quad (i=1,2,3)$$

$$\Delta V_i + k_i^2 V_i = -f_i, \quad M \in D_i \quad (i=0,1,2,3) \quad (74)$$

$$V_i = V_0, \quad M \in S_i, \quad (75)$$

$$p_i \frac{\partial V_i}{\partial n} = p_0 \frac{\partial V_0}{\partial n}, \quad M \in S_i \quad (i=1,2,3), \quad (76)$$

$$V_0(M) = \underline{O}\left(\frac{1}{r}\right), \quad (77)$$

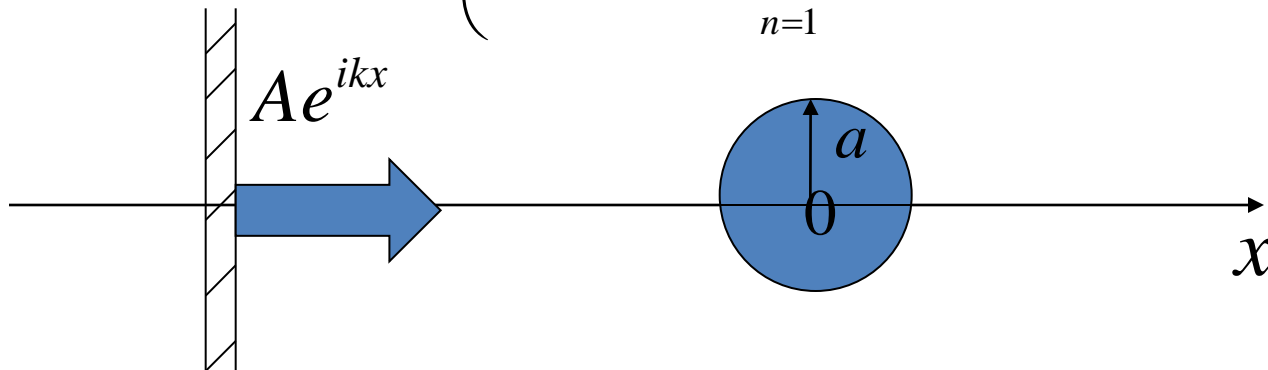
$$\frac{\partial V_0}{\partial r} - ik_0 V_0 = \overline{O}\left(\frac{1}{r}\right), \quad k_i^2 = \frac{\rho_i}{p_i} \omega^2 \quad (i=0,1,2,3) \quad (78)$$

# Дифракция звуковой волны на бесконечном жёстком цилиндре

На цилиндр радиуса  $a$  падает плоская звуковая волна, давление  $p_0(x)$

в которой можно представить в виде:

$$p_0 = Ae^{ikx} = Ae^{ikr \cos \varphi} = A \left( J_0(kr) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n J_n(kr) \cos n\varphi \right) \quad (79)$$



Обозначим:  $p(r, \varphi) = p_0(r, \varphi) + p_s(r, \varphi)$  - **полное давление**,  $p_0(r, \varphi)$  - **давление в падающей волне**,  $p_s(r, \varphi)$  - **давление в отраженной волне**.



Тогда получим задачу:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta p_s + k^2 p_s = 0, \quad r > a, \end{array} \right. \quad (80)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial p}{\partial r} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial p_s}{\partial r} = -\frac{\partial p_0}{\partial r}, \quad r = a, \end{array} \right. \quad (81)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} p_s = \underline{O}\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right), \end{array} \right. \quad (82)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial p_s}{\partial r} - ikp_s = \overline{O}\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right). \end{array} \right. \quad (83)$$

$$p_s(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n H_n^{(1)}(kr) \cos n\varphi. \quad (84)$$

(79), (81), (84)  $\Rightarrow$

$$C_0 = \frac{J_1(ka)}{H_0^{(1)'}(ka)} A, \quad C_n = -\frac{2(-i)^n J_n'(ka)}{H_n^{(1)'}(ka)} A, \quad (85)$$

( $n=1,2,\dots$ ).

**Радиальная составляющая скорости в рассеянной волне:**

$$V_{sr}(r, \varphi) = \frac{1}{ic\rho_0} \sum_{n=0}^{\infty} C_n H_n^{(1)'}(kr) \cos n\varphi \quad (86)$$

**Волновая (дальняя) зона ( $kr \gg 1$ ) :**

$$H_n^{(1)}(kr) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{i(kr - \frac{\pi}{2}n - \frac{\pi}{4})} \quad (87)$$

$$p_s(r, \varphi) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{i(kr - \frac{\pi}{4})} \sum_{n=0}^{\infty} C_n (-i)^n \cos n\varphi \quad (88)$$