

Глава 4. Методы исследования математических моделей

1. Вариационные методы решения краевых задач и определения собственных значений

1. Принцип Дирихле

Рассмотрим функционал:

$$D(u(x, y)) = \int_D F(x, y, u, u_x, u_y) dx dy. \quad (1)$$

Уравнение Эйлера:

$$F_u - \frac{\partial}{\partial x} \{F_p\} - \frac{\partial}{\partial y} \{F_q\} = 0, \quad p = u_x, q = u_y. \quad (2)$$

Уравнение Лапласа $\Delta u(x, y) = 0$ есть **уравнение Эйлера**

задачи на минимум **интеграла Дирихле**

$$D(u) = \int_D (u_x^2 + u_y^2) dx dy. \quad (3)$$

Непрерывные в \bar{D} функции, кусочно-непрерывно дифференцируемые в \bar{D} , которые принимают на кривой Γ внутри D

заданные непрерывные значения $\phi(x, y)$ и интеграл Дирихле

от которых конечен, называются **допустимыми функциями**.

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & M \in D, \\ u(p) = \phi(p), & p \in \Gamma. \end{cases} \quad (4)$$

Первая вариационная задача: среди допустимых функций найти такую, которая **доставляет минимум интегралу Дирихле**.

Теорема.

Если заданная на кривой Γ функция $\phi(p)$ такова, что класс допустимых функций не является пустым, то задача Дирихле (4), (5) и первая вариационная задача эквивалентны.

Доказательство:

1) Пусть $u(x, y) \in C^{(2)}(D) \cap C^{(1)}(\bar{D})$ - **решение первой вариационной задачи.** Класс допустимых функций ищем в

виде:

$$u(x, y) + \varepsilon h(x, y), \quad (6)$$

где $h(x, y) \in C^{(2)}(D) \cap C^{(1)}(\bar{D})$, интеграл (3) от h конечен и

$h(p) = 0, p \in \Gamma, \varepsilon$ - произвольная постоянная.

$$D(u + \varepsilon h) = D(u) + 2\varepsilon D(u, h) + \varepsilon^2 D(h) \geq 0, \quad (7)$$

где

$$D(u, h) = \int_D (u_x h_x + u_y h_y) dx dy. \quad (8)$$

Функция u доставляет минимум интегралу (3), следовательно

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} D(u + \varepsilon h) \right|_{\varepsilon=0} = 2D(u, h) = 0 \Rightarrow D(u, h) = 0.$$

Запишем **первую формулу Грина** для функций u и h :

$$\int_D h \Delta u dx dy = \int_{\Gamma} h \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma - \int_D \text{grad } u \text{ grad } h dx dy. \quad (9)$$

Из (9) и $h(p) = 0, p \in \Gamma \Rightarrow \int_D h \Delta u dx dy = -D(u, h) = 0,$ (10)

$u(M) \in C^{(2)}(D) \Rightarrow \Delta u \in C(D), h(x, y)$ - **произвольная функция** \Rightarrow

$$\Delta u(x, y) = 0. \quad (11)$$

2) Пусть теперь $u(x, y)$ - **решение задачи (4),(5),**

а $u(x, y) + \varepsilon h(x, y)$ - **класс допустимых функций, причем для**
 $u(x, y)$ и $h(x, y)$ **имеет место формула**

$$D(u, h) = \int_{\Gamma} h \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma - \int_D h \Delta u dx dy. \quad (12)$$

Из (12) и того, что $h(p) = 0, p \in \Gamma$ и $u(M)$ гармоническая функция следует, что $D(u, h) = 0$. Поэтому из (7) =>

$$D(u) \leq D(u + \varepsilon h), \quad (13)$$

то есть функция u минимизирует интеграл Дирихле и является решением первой вариационной задачи.

Замечание

Существуют и другие краевые задачи для уравнения Лапласа, которые имеют эквивалентные им вариационные задачи для интеграла Дирихле, например задача Неймана.

Метод сведения краевых задач для уравнения Лапласа к эквивалентным им вариационным задачам носит название принципа Дирихле.

2. Задача о собственных значениях

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0, M \in D, & (14) \\ u(P) = 0, p \in \Gamma, & (15) \\ u(M) \in C^{(2)}(D) \cap C^{(1)}(\bar{D}). & (16) \end{cases}$$

Вторая вариационная задача: среди допустимых функций, удовлетворяющих условию (15), найти ту, для которой функционал

$$J(u) = \frac{D(u)}{H(u)}, \quad (17)$$

где

$$H(u) = \int_D u^2(x, y) dx dy, \quad (18)$$

принимает наименьшее значение.

Теорема 1.

Если $u(x,y)$ - решение второй вариационной задачи, то $u(x,y)$ является решением задачи (14) - (16).

Доказательство:

Пусть u - решение второй вариационной задачи, причем наименьшее значение $J(u)$ удовлетворяет условию:

$$J(u) = \frac{D(u)}{H(u)} = \lambda > 0. \quad (19)$$

Для класса допустимых функций $u(x, y) + \varepsilon h(x, y)$, где ε - произвольная постоянная, $h(x,y)$ - произвольная допустимая функция, $h(p) = 0$, $p \in \Gamma$, имеем

$$F(\varepsilon) = \frac{D(u + \varepsilon h)}{H(u + \varepsilon h)} = \frac{D(u) + 2\varepsilon D(u, h) + \varepsilon^2 D(h)}{H(u) + 2\varepsilon H(u, h) + \varepsilon^2 H(h)} \geq \lambda, \quad (20)$$

где

$$H(u, h) = \int_D u h \, dx dy. \quad (21)$$

Так как $F(\varepsilon)$ при $\varepsilon=0$ имеет минимум, то

$$F'(0) = 2 \frac{H(u)D(u, h) - D(u)H(u, h)}{H^2(u)} = 0. \quad (22)$$

$$(19) \Rightarrow D(u) = \lambda H(u). \quad (23)$$

Подставляем (23) в (22):

$$H(u)D(u, h) - D(u)H(u, h) = H(u) \{D(u, h) - \lambda H(u, h)\} = 0. \quad (24)$$

Так как $H(u) \neq 0$, то из (24) \Rightarrow

$$D(u, h) - \lambda H(u, h) = 0. \quad (25)$$

Если $u, h \in C^{(2)}(D) \cap C^{(1)}(\bar{D})$ и контур Γ достаточно гладкий,

то

$$D(u, h) = \int_D (u_x h_x + u_y h_y) dx dy = - \int_D \Delta u h dx dy \quad (26)$$

и из (26) получаем:

$$\begin{aligned} D(u, h) - \lambda H(u, h) &= - \int_D (\Delta u + \lambda u) h dx dy = \\ &= -H(\Delta u + \lambda u, h) = 0. \end{aligned} \quad (27)$$

Поскольку $u \in C^{(2)}(D) \Rightarrow \Delta u \in C(D)$ и h -

произвольная функция, то из (27) следует, что

$$\Delta u + \lambda u = 0. \quad (28)$$

Теорема 2.

Среди собственных значений задачи (14) – (16) найденное собственное значение является минимальным.

Доказательство:

Пусть $\tilde{\lambda} \neq \lambda$ некоторое собственное значение и $\tilde{u}(x, y)$ – соответствующая собственная функция. Тогда:

$$\begin{aligned} H(\Delta\tilde{u} + \tilde{\lambda}\tilde{u}, \tilde{u}) &= \int_D \Delta\tilde{u}\tilde{u}dxdy + \tilde{\lambda} \int_D \tilde{u}^2 dxdy = \\ &= \int_{\Gamma} \frac{\partial\tilde{u}}{\partial n} \tilde{u} d\sigma - \int_D (\tilde{u}_x^2 + \tilde{u}_y^2) dxdy + \tilde{\lambda}H(\tilde{u}) = \\ &= -D(\tilde{u}) + \tilde{\lambda}H(\tilde{u}) = 0 \end{aligned} \quad (29)$$

и из (29) получаем, что

$$\tilde{\lambda} = J(\tilde{u}) = \frac{D(\tilde{u})}{H(\tilde{u})}, \quad (30)$$

а так как

$$\lambda = \min_{u \in P} J(u), \quad (31)$$

где P – класс допустимых функций, то

$$\lambda < \tilde{\lambda}. \quad (32)$$

2. Некоторые алгоритмы проекционного метода

1. Общая схема алгоритмов

Рассмотрим уравнение:

$$Lu = Au + Bu = f, \quad f \in H, \quad (1)$$

где A, B – линейные операторы в гильбертовом пространстве H ; $D(A), D(B)$ – области их определения. $D(A)$, - плотно в H .

Введем оператор $K: D(K) \supset D(A)$.

Введём систему базисных (координатных) функций:

$$\left\{ \phi_i^{(N)} \right\}, \quad \phi_i^{(N)} \in D(A), \quad i = 1, 2, \dots, N; \quad N = 1, 2, \dots,$$

H_N – линейная оболочка $\phi_i^{(N)}, i = 1, 2, \dots, N, \left\{ \phi_i^{(N)} \right\}$ - базис в H_N .

Предположим, что:

1) при любом N функции $\phi_i^{(N)}, i = 1, 2, \dots, N$ **линейно независимы;**

2) последовательность подпространств $\{H_N\}$ **предельно полна в H :**

для $\forall u \in H \quad \exists \tilde{u}_N \in H_N, N = 1, 2, \dots,$ что

$$\|u - \tilde{u}_N\| = \inf_{\omega} \|u - \omega\| \leq \varepsilon(u, N), \quad \omega \in H_N, \quad (2)$$

$\varepsilon(u, N) \rightarrow 0, N \rightarrow \infty, \varepsilon(u, N)$ - **оценка погрешности аппроксимации.**

Введем также базисные функции: $\{\psi_i\}, \psi_i \in D(K)$

Ищем приближенное решение (1) в виде

$$u_N = \sum_{i=1}^N a_i \phi_i, \quad (3)$$

где $a_i, i = 1, 2, \dots, N$ определяется из системы уравнений:

$$(Au_N + Bu_N - f, K\psi_j) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (4)$$

где (u, v) - скалярное произведение в H и $\|u\| = (u, u)^{1/2}$.

Разрешимость системы (4) и сходимость u_N к u при $N \rightarrow \infty$ зависят от свойств операторов A, B и выбора оператора K и систем функций $\{\phi_i\}, \{\psi_j\}$.

2. Метод Рунца

Пусть дано уравнение: $Au = f$, $f \in H$, (5)

где $(Au, v) = (u, Av)$, $(Au, u) \geq \gamma^2 \|u\|^2$, $\gamma > 0$, $u, v \in D(A)$.

1) Выбирается базис $\{\phi_i\}$, $\phi_i \in D(A)$, $i = 1, 2, \dots, N$;

2) Приближенное решение ищется в виде (3).

3) Коэффициенты a_i находятся из системы уравнений

$$(Au_N, \phi_j) = (f, \phi_j), \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (6)$$

$$\hat{A}a = b, \quad \hat{A} = \{A_{i,j}\}, \quad A_{i,j} = (A\phi_i, \phi_j),$$

$$a = (a_1, \dots, a_N)^T, \quad b = (f_1, \dots, f_N)^T, \quad f_i = (f, \phi_i), \quad (7)$$

$$i, j = 1, 2, \dots, N.$$

Вариационная трактовка метода Ритца.

Рассмотрим квадратичный функционал энергии

$$F(u) = (Au, u) - 2(u, f). \quad (8)$$

Теорема. Для того, чтобы некоторый элемент $u_0 \in D(A)$ сообщал минимальное значение функционалу энергии $F(u)$, необходимо и достаточно, чтобы этот элемент удовлетворял уравнению (5). Такой элемент единственный.

Вариационная задача: найти функцию u_N такую, что

$$F(u_N) = \min_{\nu} F(\nu), \quad u_N, \nu \in H_N. \quad (9)$$

Так как $\nu = \sum_{j=1}^N a_j \phi_j$, то $F(u_N) = \min_{a_i} F(\nu)$,

где $F(\nu) = F(a_1, \dots, a_N) = \sum_{i,j=1}^N a_i a_j (A\phi_i, \phi_j) - 2 \sum_{j=1}^N a_j (f, \phi_j) \Rightarrow$

$$\frac{\partial F(\nu)}{\partial a_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (10)$$

Из (10) следует (7) и (6) \Rightarrow

$$\frac{\partial F(a_1, a_2, \dots, a_N)}{\partial a_j} = 0, j = 1, 2, \dots, N \Rightarrow$$

$$2 \sum_{i=1}^N a_i (A\phi_i, \phi_j) - 2(f, \phi_j) = 0 \Rightarrow$$

$$\left(A \sum_{i=1}^N a_i \phi_i, \phi_j \right) - (f, \phi_j) = 0 \Rightarrow$$

$$(Au_N, \phi_j) - (f, \phi_j) = 0$$

$$(j = 1, 2, \dots, N)$$

Теорема.

Если для любой функции $u \in D(A)$ можно построить такую последовательность элементов $\tilde{u}_N = \sum_{i=1}^N \tilde{a}_i \phi_i \in H_N$, $N = 1, 2, \dots$, что $\|A(u - \tilde{u}_N)\| \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$, то приближенные решения u_N сходятся к точному решению u_0 уравнения (5) при $N \rightarrow \infty$ и имеет место оценка

$$\|u_0 - u_N\| \leq C \min_{\tilde{a}_i} \|A(u_0 - \tilde{u}_N)\|,$$

где $C > 0$ не зависит от u_0 и \tilde{u}_N .

Доказательство:

Пусть $v \in D(A)$ - произвольная функция.

$$\begin{aligned}(A(u_0 - v), u_0 - v) &= (Au_0, u_0) + (Av, v) - 2(Au_0, v) = \\ &= (Au_0, u_0) + (Av, v) - 2(f, v) = F(v) + (Au_0, u_0) - \\ &- F(u_0) + F(u_0) = F(v) - F(u_0) + 2(Au_0, u_0) - 2(u_0, f) = \\ &= F(v) - F(u_0) \Rightarrow (A(u_0 - v), u_0 - v) = F(v) - F(u_0)\end{aligned}$$

Поскольку u_0 минимизирует функционал $F(v)$ на $D(A)$, а u_N минимизирует $F(v)$ на H_N , то

$$\begin{aligned}(A(u_0 - u_N), u_0 - u_N) &= F(u_N) - F(u_0) \leq \\ &\leq F(v_N) - F(u_0) = (A(u_0 - v_N), u_0 - v_N)\end{aligned}$$

при произвольной функции $v_N = \sum_{i=1}^N C_i \phi_i$ из $H_N \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \gamma^2 \|u_0 - u_N\|^2 &\leq (A(u_0 - u_N), u_0 - u_N) \leq \\ &\leq (A(u_0 - v_N), AA^{-1}(u_0 - v_N)) \leq \|A^{-1}\| \cdot \|A(u_0 - v_N)\|^2 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\|u_0 - u_N\|^2 \leq \frac{\|A^{-1}\|}{\gamma^2} \|A(u_0 - v_N)\|^2$$

В силу произвольности выбора коэффициентов $C_i, i=1,2,\dots,N$ в разложении v_N , положив $v_N = \tilde{u}_N$ получаем утверждение теоремы.

Замечание. При рассмотрении классической формулировки метода Ритца решение вариационной задачи может не существовать.

Введем в $D(A)$ **энергетическое скалярное произведение и норму**

$$[u, v] = (Au, v), \quad [u] = [u, u]^{1/2} \quad (11)$$

и пополним $D(A)$ по энергетической норме.

Получим энергетическое пространство H_A , порождаемое оператором A . В H_A могут появиться предельные элементы не принадлежащие $D(A)$.

Расширим функционал энергии на H_A :

$$F(u) = [u, u] - 2(f, u) \quad (12)$$

и будем искать его минимум на H_A :

Пусть минимум достигается на $u_0 \in H_A$. Если $u_0 \notin D(A)$, то u_0 - **обобщенное решение (5)**, если $u_0 \in D(A)$, то u_0 - **классическое решение (5)**.

Креповые условия которым удовлетворяют элементы из $D(A)$, называются **естественными** для оператора A , а креповые условия, которым удовлетворяют как элементу из $D(A)$, так и элементы из H_A , называются **главными**. **Базисные функции** выбираются из H_A .

3. Метод Галёркина

Основной недостаток метода Ритца: он применим только для самосопряженных положительно определенных операторов.

Метод Бубнова - Галёркина

$$Lu = Au + Bu = f, f \in H, \quad (13)$$

- 1) **Выбирается базис $\{\phi_i\}$, $\phi_i \in D(A)$, $i = 1, 2, \dots, N$;**
- 2) **Приближенное решение ищется в виде (3);**
- 3) **Коэффициенты a_i находятся из условия ортогональности невязки $Lu_N - f$ к $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N$:**

$$(Lu_N - f, \phi_i) = 0, i = 1, 2, \dots, N \quad (14)$$

Замечание. Если коэффициенты a_i определяются из условия

$$(Lu_N - f, \psi_i) = 0, i = 1, 2, \dots, N \quad (15)$$

где $\{\psi_i\} \subset H$, некоторый базис, то метод называется **методом Галёркина - Петрова.**

Если $(Au, v) = (u, Av)$, $(Au, u) \geq \gamma^2 \|u\|^2$, $\gamma > 0$, $u, v \in D(A)$, **то можно ввести энергетическое пространство** H_A . Тогда (14) \Rightarrow

$$[u, v] + (Bu, v) = (f, v), \quad v \in H_A. \quad (16)$$

1) Выбираем базис $\{\phi_i\}$, $\phi_i \in D(A)$, $i = 1, 2, \dots, N$;

2) Приближенное решение ищется в виде (3);

3) Коэффициенты a_i определяются из системы уравнений:

$$[u_N, \phi_i] + (Bu_N, \phi_i) = (f, \phi_i) \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (17)$$

$$\hat{L}a = b, \quad \hat{L} = (L_{i,j}), \quad L_{i,j} = [\phi_i, \phi_j] + (B\phi_i, \phi_j), \quad (18)$$

$$a = (a_1, \dots, a_N)^T, \quad b = (f_1, \dots, f_N)^T, \quad f_i = (f, \phi_i), \quad i, j = 1, 2, \dots, N$$

4. Обобщенный метод моментов

$$Au + Bu = f, \quad f \in H,$$

$$(Au, Ku) \geq \gamma^2 \|u\|^2, \quad (Au, Ku) \geq \beta^2 \|Ku\|^2; \quad \gamma, \beta > 0,$$

$u \in D(A) \subset D(K)$ - оператор A является **K -положительно определенным**.

- 1) Выбирается базис $\{\phi_i\}$, $\phi_i \in D(A)$, $i = 1, 2, \dots, N$;
- 2) Приближенное решение ищется в виде (3);
- 3) Коэффициенты a_i определяются из системы уравнений:

$$(Au_N + Bu_N - f, K\phi_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (19)$$

Замечание. Метод моментов широко используется для решения интегральных уравнений:

$$u(x) - \lambda \int_a^b K(x, \xi) u(\xi) d\xi = f(x), \quad a \leq x \leq b \quad (20)$$

Ищем приближенное решение в виде разложения по полной системе функций $\{\phi_i(x)\}$:

$$u_N(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^N a_i \phi_i(x). \quad (21)$$

Коэффициенты a_i определяются из ортогональности невязки ко всем функциям $\{\phi_i(x)\}$:

$$\int_a^b \left\{ u_N(x) - \lambda \int_a^b K(x, \xi) u_N(\xi) d\xi - f(x) \right\} \phi_j(x) dx = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (22)$$

что приводит к системе:

$$\hat{A}a = b, \quad \hat{A} = (A_{i,j}), \quad i, j = 1, 2, \dots, N,$$
$$A_{i,j} = \int_a^b \phi_i(x)\phi_j(x)dx - \int_a^b \int_a^b K(x, \xi)\phi_i(\xi)\phi_j(x)dxd\xi, \quad (23)$$

$$a = (a_1, \dots, a_N)^T, \quad b = (b_1, \dots, b_N)^T,$$

$$b_i = \int_a^b \int_a^b K(x, \xi)\phi_i(x)f(\xi)dxd\xi, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Замечание. Если система $\{\phi_i(x)\}$ ортогональная, то метод моментов эквивалентен замене ядра на специальное вырожденное ядро:

$$\tilde{K}(x, \xi) = \sum_{i=1}^N \phi_i(x)\hat{O}_i(\xi); \quad \hat{O}_i(\xi) = \int_a^b K(x, \xi)\phi_i(x)dx \quad (24)$$

5. Метод наименьших квадратов

Пусть оператор в (5) имеет ограниченный обратный A^{-1} .

- 1) Выбирается базис $\{\phi_i\}$, $\phi_i \in D(A)$, $i = 1, 2, \dots, N$;
- 2) Приближенное решение ищется в виде (3);
- 3) Коэффициенты a_i определяются из системы уравнений:

$$(Au_N, A\phi_i) = (f, A\phi_i), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (25)$$

$$\hat{A}a = b, \quad \hat{A} = (A_{i,j}), \quad A_{i,j} = (A\phi_i, A\phi_j), \quad \hat{A} = \hat{A}^T,$$

$$i, j = 1, 2, \dots, N, \quad a = (a_1, \dots, a_N)^T, \quad b = (f_1, \dots, f_N)^T,$$

$$f_i = (f, A\phi_i), \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Замечание. Соотношения (25) можно получить из условия минимизации функционала невязки $J(u) = \|Au - f\|^2$ на H_N .