

# Экономичные разностные схемы для многомерных задач математической физики

Как известно, явные схемы, в которых оператор, содержащий производные по пространственным координатам, аппроксимируется на слое, где решение уже известно, просты в применении, но являются условно устойчивыми. Для их устойчивости требуется достаточно маленький шаг по времени. Неявные схемы, в которых оператор дифференцирования по пространственной переменной аппроксимируется на новом слое по времени, как правило безусловно устойчивы, но приводят к необходимости решать систему уравнений относительно значений искомой сеточной функции на новом временном слое.

Применение неявных схем для многомерных задач затруднено тем, что получающаяся при этом система для значений искомой функции на новом временном слое может быть достаточно сложной и требовать для своего решения большого числа действий. Поэтому при численном решении многомерных задач часто используют так называемые *экономичные* разностные схемы.

Экономичными разностными схемами называют схемы, сочетающие в себе лучшие качества явной и неявной схем. Они являются безусловно устойчивыми, как неявная схема, и требуют при переходе со слоя на слой затраты числа арифметических операций  $Q$ , пропорционального числу узлов сетки, так что  $Q = O(1/h^p)$ , где  $h = \min_{1 \leq i \leq p} h_i$ ,  $p$  — размерность области,  $h_i$  — шаг сетки по направлению  $i$ .

Основная идея большинства экономичных схем состоит в сведении перехода со слоя на слой к последовательному решению ряда одномерных задач по каждому из координатных направлений. При этом для каждой из промежуточных задач строится безусловно устойчивая схема, требующая для своего решения числа действий, пропорционального числу узлов сетки на каждом временном слое.

# 1 Продольно-поперечная схема для уравнения теплопроводности с переменными коэффициентами в прямоугольной области

## 1.1 Структура схемы

Одной из первых экономичных разностных схем является продольно-поперечная схема, или схема переменных направлений, предложенная в 1955 году Писменом и Рекфордом, а также Дугласом, для уравнения теплопроводности в прямоугольной области. Мы рассмотрим эту схему для линейного уравнения достаточно общего вида с переменными коэффициентами.

Рассмотрим начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности в прямоугольной области  $\bar{G} = \{x = (x_1, x_2) : 0 \leq x_\alpha \leq l_\alpha, \alpha = 1, 2\}$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f(x, t), & x \in G, \quad t \in (0, T], \\ u(x, t) = \mu(x, t), & x \in \partial G, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \bar{G}, \end{cases} \quad (1.1)$$

где

$$L = L_1 + L_2, \quad L_\alpha = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( k_\alpha(x, t) \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \right), \quad \alpha = 1, 2,$$

$k_1(x, t)$  и  $k_2(x, t)$  — строго положительные функции во всей расчетной области.

Введем в области  $\bar{G}$  равномерную сетку  $\bar{\omega}_h$ :

$$\bar{\omega}_h = \{(x_n^1, x_m^2) : x_n^1 = nh_1, n = 0, 1, \dots, N, Nh_1 = l_1; x_m^2 = mh_2, m = 0, 1, \dots, M, Mh_2 = l_2\}.$$

Множество граничных узлов  $\gamma_h$  сетки  $\bar{\omega}_h$  составляют узлы, соответствующие  $n = 0$ ,  $n = N$ ,  $m = 0$  и  $m = M$ .

Заменим операторы  $L_\alpha$  их разностными аналогами  $\Lambda_\alpha$ :

$$\Lambda_\alpha u = (a^{(\alpha)} u_{\bar{x}^\alpha})_{x^\alpha}, \quad \alpha = 1, 2,$$

где

$$a_{n,m}^{(1)} = k_1(x_n^1 - 0.5h_1, x_m^2, t), \quad a_{n,m}^{(2)} = k_2(x_n^1, x_m^2 - 0.5h_2, t).$$

В случае, когда функции  $k_1$  и  $k_2$  являются непрерывно дифференцируемыми, разностный оператор  $\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2$  аппроксимирует исходный дифференциальный оператор  $L$  со вторым порядком погрешности на любой гладкой функции  $u$ :

$$\Lambda u - Lu = O(h_1^2 + h_2^2).$$

На отрезке  $[0, T]$  введем равномерную сетку по времени:

$$\bar{\omega}_\tau = \{t_j = j\tau, j = 0, 1, \dots, J, J\tau = T\}.$$

Начальные и граничные условия задачи (1.1) на выбранной сетке аппроксимируются точно:

$$y_{n,m}^0 = y(x_n^1, x_m^2, 0) = u_0(x_n^1, x_m^2), \quad (x_n^1, x_m^2) \in \bar{\omega}_h, \quad (1.2)$$

$$y_{n,m}^j = y(x_n^1, x_m^2, t_j) = \mu(x_{n,m}, t_j), \quad x_{n,m} = (x_n^1, x_m^2) \in \gamma_h, \quad t_j \in \bar{\omega}_\tau. \quad (1.3)$$

Для того чтобы аппроксимировать дифференциальное уравнение в задаче (1.1), введем вспомогательные слои  $(j + 0.5)$  и будем осуществлять переход со слоя  $j$  на слой  $j + 1$  в два этапа, на каждом из которых по одному из координатных направлений используется неявная схема. При этом для краткости будем пользоваться следующими обозначениями:  $y$  — значения сеточной функции  $y$  на слое  $j$ ,  $\hat{y}$  — значения функции  $y$  на слое  $(j + 1)$ ,  $\bar{y}$  — значения функции  $y$  на вспомогательном слое  $(j + 0.5)$ . Тогда разностную схему можно записать следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{\bar{y} - y}{0.5\tau} = \bar{\Lambda}_1 \bar{y} + \Lambda_2 y + \bar{f}, & x \in \omega_h, \\ \bar{y} = \bar{\mu}, & x \in \gamma_h, \end{cases} \quad (1.4)$$

$$\begin{cases} \frac{\hat{y} - \bar{y}}{0.5\tau} = \bar{\Lambda}_1 \bar{y} + \hat{\Lambda}_2 \hat{y} + \bar{f}, & x \in \omega_h, \\ \hat{y} = \hat{\mu}, & x \in \gamma_h, \end{cases} \quad (1.5)$$

где использованы следующие обозначения:  $\bar{\Lambda}_1 = \Lambda_1(t_j + 0.5\tau)$ ,  $\Lambda_2 = \Lambda_2(t_j)$ ,  $\hat{\Lambda}_2 = \Lambda_2(t_{j+1})$ ,  $\bar{f} = f(x_n^1, x_m^2, t_j + 0.5\tau)$ .

Значение функции  $\bar{\mu}$  в правой части граничного условия на вспомогательном слое определяется через значения функции  $\mu$  на слоях  $j$  и  $(j + 1)$ .

Выражая из уравнений (1.4)-(1.5) промежуточное значение  $\bar{y}$  через  $y$  и  $\hat{y}$ , получаем:

$$\bar{y} = \frac{\hat{y} + y}{2} - \frac{\tau^2}{4} (\Lambda_2 y)_t, \quad (\Lambda_2 y)_t = \frac{\hat{\Lambda}_2 \hat{y} - \Lambda_2 y}{\tau}. \quad (1.6)$$

Равенство (1.6) должно выполняться вплоть до границы расчетной области, что позволяет найти функцию  $\bar{\mu}$ :

$$\bar{\mu} = \frac{\hat{\mu} + \mu}{2} - \frac{\tau^2}{4} (\Lambda_2 \mu)_t. \quad (1.7)$$

Схема (1.4) неявна по направлению  $x_1$  и явна по направлению  $x_2$ , а схема (1.5), наоборот, явна по направлению  $x_1$  и неявна по направлению  $x_2$ . Если значения функции  $y$  на

слое  $j$  известны, то система (1.4) при каждом фиксированном  $m = 1, 2, \dots, M - 1$  может быть решена методом прогонки, что потребует  $O(1/h_1)$  действий при каждом фиксированном  $m$ . Таким образом, для нахождения  $\bar{y}$  всего понадобится  $O(1/(h_1 h_2))$  действий. Когда значения  $\bar{y}$  найдены, решается система (1.5). Она, опять же, может быть решена методом прогонки при каждом фиксированном  $n = 1, 2, \dots, N - 1$ . Для нахождения  $\hat{y}$  при  $n = 0$  и  $n = N$  используются граничные условия задачи. Переход с вспомогательного слоя  $(j + 0.5)$  на новый слой  $(j + 1)$  также требует  $O(1/(h_1 h_2))$  действий. Следовательно, для нахождения решения на всех слоях по времени необходимо  $O(1/(h_1 h_2 \tau))$  действий, что и требуется для экономичности схемы. Остается показать, что схема безусловно устойчива.

## 1.2 Аппроксимация и устойчивость продольно-поперечной схемы

Подставляя выражение (1.6) в уравнение (1.4), получаем:

$$\frac{\hat{y} - y}{\tau} - \frac{\tau}{2}(\Lambda_2 y)_t = \frac{1}{2}\bar{\Lambda}_1 y + \frac{1}{2} \underbrace{\bar{\Lambda}_1 \hat{y}}_{\tau \bar{\Lambda}_1 y_t + \bar{\Lambda}_1 y} - \frac{\tau^2}{4}\bar{\Lambda}_1(\Lambda_2 y)_t + \Lambda_2 y + \bar{f},$$

или же в каноническом виде:

$$(E - 0.5\tau\bar{\Lambda}_1)[(E - 0.5\tau\Lambda_2)y]_t = (\bar{\Lambda}_1 + \Lambda_2)y + \bar{f}. \quad (1.8)$$

Введем обозначения  $A_1 = -\Lambda_1$ ,  $A_2 = -\Lambda_2$ ,  $\bar{B}_1 = E + 0.5\tau\bar{A}_1$ ,  $B_2 = E + 0.5\tau A_2$ . Тогда схема (1.4)- (1.5) с начальными условиями (1.2) эквивалентна схеме

$$\begin{cases} \bar{B}_1 [B_2 y]_t + (\bar{A}_1 + A_2)y = \bar{f}, & x \in \omega_h, t \in \omega_\tau, \\ y = \mu, & x \in \gamma_h, t \in \omega_\tau, \\ y^0 = u_0. \end{cases} \quad (1.9)$$

Найдем порядок аппроксимации схемой (1.9) (или, что то же самое, схемой (1.4)- (1.5)) исходной задачи. Пусть  $u(x, t)$  — точное решение задачи (1.1),  $z_{n,m}^j = y_{n,m}^j - u_{n,m}^j$  — погрешность решения на целых слоях по времени,  $\bar{z} = \bar{y} - \bar{u}$ , где

$$\bar{u} = \frac{\hat{u} + u}{2} - \frac{\tau^2}{4}(\Lambda_2 u)_t.$$

Сеточная функция  $z$  удовлетворяет однородным начальным и граничным условиям. Подставляя  $y = z + u$ ,  $\bar{y} = \bar{z} + \bar{u}$  и  $\hat{y} = \hat{z} + \hat{u}$  в уравнения (1.4)- (1.5), получаем:

$$\frac{\bar{z} - z}{0.5\tau} = \bar{\Lambda}_1 \bar{z} + \Lambda_2 z + \psi_1, \quad x \in \omega_h, \quad (1.10)$$

$$\frac{\hat{z} - \bar{z}}{0.5\tau} = \bar{\Lambda}_1 \bar{z} + \hat{\Lambda}_2 \hat{z} + \psi_2, \quad x \in \omega_h, \quad (1.11)$$

где

$$\psi_1 = \bar{f} - \frac{\bar{u} - u}{0.5\tau} + \bar{\Lambda}_1 \bar{u} + \Lambda_2 u, \quad \psi_2 = \bar{f} - \frac{\hat{u} - \bar{u}}{0.5\tau} + \bar{\Lambda}_1 \bar{u} + \hat{\Lambda}_2 \hat{u}.$$

Покажем прежде всего, что  $\psi_1 = \psi_2$ . В самом деле:

$$\psi_2 - \psi_1 = -\frac{\hat{u} + u}{0.5\tau} + \frac{\bar{u}}{\tau} + (\hat{\Lambda}_2 \hat{u} - \Lambda_2 u) = \frac{1}{0.5\tau} \left( 2\bar{u} - (\hat{u} + u) + \frac{\tau^2}{2} (\Lambda_2 u)_t \right) = 0.$$

Оценим величину погрешности  $\psi = \psi_1 = \psi_2$ , предполагая, что решение  $u(x, t)$  исходной задачи является достаточно гладкой функцией:

$$\begin{aligned} \psi &= \bar{f} - \frac{\hat{u} - u}{\tau} + \frac{\tau}{2} (\Lambda_2 u)_t + \bar{\Lambda}_1 \left( \frac{\hat{u} + u}{2} - \frac{\tau^2}{4} (\Lambda_2 u)_t \right) + \Lambda_2 u = \\ &= \bar{f} - \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=t_j+0.5\tau} + \frac{\tau}{2} (\Lambda_2 u)_t + (\Lambda_1 u)|_{t=t_j+0.5\tau} + (\Lambda_2 u)|_{t=t_j+0.5\tau} - \frac{\tau}{2} (\Lambda_2 u)_t + O(\tau^2) = \\ &= \left( f - \frac{\partial u}{\partial t} + Lu \right) \Big|_{t=t_j+0.5\tau} + O(\tau^2 + h_1^2 + h_2^2). \end{aligned}$$

Итак, если решение задачи (1.1) является достаточно гладкой функцией, то на решении схема (1.4)-(1.5) обладает вторым порядком погрешности аппроксимации по координатам и времени.

Исследуем схему (1.4)-(1.5) (или, что то же самое, схему (1.9)) на устойчивость. Погрешность  $z$  схемы является решением задачи

$$\begin{cases} \bar{B}_1 [B_2 z]_t + (\bar{A}_1 + A_2)z = \psi, & x \in \omega_h, t \in \omega_\tau, \\ z = 0, & x \in \gamma_h, t \in \omega_\tau, \\ z^0 = 0. \end{cases} \quad (1.12)$$

Введем сеточное пространство  $H_h$ , все элементы которого ограничены по норме, порождаемой скалярным произведением

$$(v, w) = \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{m=1}^{M-1} v_{nm} w_{nm} h_1 h_2,$$

и обращаются в ноль в граничных узлах  $\gamma_h$  сетки  $\bar{\omega}_h$ . В этом пространстве операторы  $A_1$  и  $A_2$  являются самосопряженными положительно определенными операторами. В самом деле, пользуясь сеточной формулой Грина, получаем

$$(A_1 v, w) = -((a^{(1)} v_{\bar{x}^1})_{x^1}, w) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^{M-1} a_{n,m}^{(1)} v_{\bar{x}^1, nm} w_{\bar{x}^1, nm} h_1 h_2 = (v, A_1 w),$$

$$(A_2 v, w) = -((a^{(2)} v_{\bar{x}^2})_{x^2}, w) = \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{m=1}^M a_{n,m}^{(2)} v_{\bar{x}^2, nm} w_{\bar{x}^2, nm} h_1 h_2 = (v, A_2 w),$$

для любых  $v, w \in H_h$ , причем  $A_1 > 0$  и  $A_2 > 0$ , так как  $a^{(1)}$  и  $a^{(2)}$  — строго положительные функции.

В частном случае, когда  $k_1 = const$  и  $k_2 = const$ , операторы  $A_1$  и  $A_2$  являются перестановочными, а для оператора  $B = (E + 0.5\tau A_1)(E + 0.5\tau A_2)$  выполняется условие

$$B - 0.5\tau A = E + \frac{\tau^2}{4} A_1 A_2 > E,$$

где  $A = A_1 + A_2$ , так как  $A_1 A_2$  — положительно определенный оператор:

$$\begin{aligned} (A_1 A_2 v, v) &= (A_2 v, A_1 v) = k_1 k_2 (v_{\bar{x}^1 x^1}, v_{\bar{x}^2 x^2}) = -k_1 k_2 \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^{M-1} v_{\bar{x}^1, nm} (v_{\bar{x}^1 \bar{x}^2})_{x^2, nm} h_1 h_2 = \\ &= k_1 k_2 \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M (v_{\bar{x}^1 \bar{x}^2, nm})^2 h_1 h_2 \geq 0, \quad \forall v \in H_h. \end{aligned}$$

Но тогда для решения задачи

$$\begin{cases} Bz_t + Az = \psi, & x \in \omega_h, t \in \omega_\tau, \\ z = 0, & x \in \gamma_h, t \in \omega_\tau, \\ z^0 = 0, \end{cases}$$

к которой сводится задача (1.12) в случае уравнения с постоянными коэффициентами, справедлива оценка

$$\|z^{j+1}\|_A^2 \leq \frac{1}{2} \sum_{p=0}^j \tau \|\psi^p\|^2,$$

из которой следует, что схема переменных направлений является безусловно устойчивой, сходится и имеет второй порядок точности по  $\tau$ ,  $h_1$  и  $h_2$ .

В более общем случае, когда операторы  $A_1$  и  $A_2$  зависят от координат и времени, они не являются перестановочными, а оператор  $A_1 A_2$  не обязан быть положительно определенным. При этом использованный выше способ доказательства устойчивости продольно-поперечной схемы уже не применим. Получим оценку погрешности  $z$  решения другим способом. Для этого перепишем систему (1.10)-(1.11) в виде

$$\begin{cases} (E + 0.5\tau \bar{A}_1) \bar{z} = (E - 0.5\tau A_2) z + 0.5\tau \psi, \\ (E + 0.5\tau \hat{A}_2) \hat{z} = (E - 0.5\tau \bar{A}_1) \bar{z} + 0.5\tau \psi, \end{cases}$$

и применим к ней неравенство треугольника:

$$\begin{cases} \|(E + 0.5\tau \bar{A}_1) \bar{z}\| \leq \|(E - 0.5\tau A_2) z\| + 0.5\tau \|\psi\|, \\ \|(E + 0.5\tau \hat{A}_2) \hat{z}\| \leq \|(E - 0.5\tau \bar{A}_1) \bar{z}\| + 0.5\tau \|\psi\|. \end{cases} \quad (1.13)$$

Так как  $A_1$  и  $A_2$  — самосопряженные положительно определенные операторы, то

$$\begin{aligned} \|(E+0.5\tau A_\alpha)z\| - \|(E-0.5\tau A_\alpha)z\| &= \|z\|^2 + \frac{\tau^2}{4}\|A_\alpha z\|^2 + \tau(A_\alpha z, z) - \|z\|^2 - \frac{\tau^2}{4}\|A_\alpha z\|^2 + \tau(A_\alpha z, z) = \\ &= 2\tau(A_\alpha z, z) \geq 0, \quad \alpha = 1, 2. \end{aligned}$$

Следовательно, складывая неравенства (1.13), получаем:

$$\underbrace{\|(E + 0.5\tau \bar{A}_1)\bar{z}\| - \|(E - 0.5\tau \bar{A}_1)\bar{z}\|}_{\geq 0} + \|(E + 0.5\tau \hat{A}_2)\hat{z}\| \leq \underbrace{\|(E - 0.5\tau A_2)z\|}_{\leq \|(E + 0.5\tau A_2)z\|} + \tau\|\psi\|. \quad (1.14)$$

Из неравенства (1.14) следует, что

$$\|(E + 0.5\tau \hat{A}_2)\hat{z}\| \leq \|(E + 0.5\tau A_2)z\| + \tau\|\psi\|,$$

откуда получаем:

$$\begin{aligned} \|(E + 0.5\tau A_2^{j+1})z^{j+1}\| &\leq \|(E + 0.5\tau A_2^j)z^j\| + \tau\|\psi^j\| \leq \|(E + 0.5\tau A_2^{j-1})z^{j-1}\| + \tau(\|\psi^j\| + \|\psi^{j-1}\|) \leq \\ &\leq \|(E + 0.5\tau A_2^0)z^0\| + \tau(\|\psi^j\| + \|\psi^{j-1}\| + \dots + \|\psi^0\|) = \sum_{p=0}^j \|\psi^p\|\tau, \end{aligned}$$

поскольку  $z^0 = 0$ . Так как  $\|(E + 0.5\tau A_2^{j+1})z^{j+1}\| \geq \|z^{j+1}\|$ , окончательно получаем

$$\|z^{j+1}\| \leq \sum_{p=0}^j \|\psi^p\|\tau, \quad \|\psi^p\| = O(\tau^2 + h_1^2 + h_2^2), \quad p = 0, 1, \dots, j. \quad (1.15)$$

Следовательно, схема переменных направлений безусловно устойчива, а значит является экономичной.

### 1.3 Пример исследования на устойчивость схемы со смешанными граничными условиями

Приведенное выше доказательство устойчивости схемы переменных направлений применимо не только в случае задачи Дирихле. Однако граничные условия, содержащие производные, должны быть включены в структуру операторов соответствующей операторно-разностной схемы, так как они являются естественными граничными условиями в отличие от условий Дирихле, являющихся главными.

В качестве примера рассмотрим схему переменных направлений для начально-краевой задачи

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left( k_1(x_1, x_2) \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( k_2(x_1, x_2) \frac{\partial u}{\partial x_2} \right), \quad x_1 \in (0, 1), \quad x_2 \in (0, 2), \quad t \in (0, T], \\ u(x_1, x_2, 0) = \varphi(x_1, x_2), \\ \frac{\partial u}{\partial x_1} \Big|_{x_1=0} = \mu_1(x_2, t), \quad u|_{x_1=1} = \mu_2(x_2, t), \\ u|_{x_2=0} = \mu_3(x_1, t), \quad \frac{\partial u}{\partial x_2} \Big|_{x_2=2} = \mu_4(x_1, t), \end{array} \right. \quad (1.16)$$

где  $k_1(x_1, x_2) > 0$  и  $k_2(x_1, x_2) > 0$ . Введем в расчетной области равномерную сетку

$$\bar{\omega}_h = \{(x_n^1, x_m^2), \quad n = 0, 1, \dots, N, \quad m = 0, 1, \dots, M\}, \quad \bar{\omega}_\tau = \{t_j = j\tau, \quad j = 0, 1, \dots, J\}$$

и следующие обозначения:

$$\Lambda_1 u = (a^{(1)} u_{\bar{x}^1})_{x^1}, \quad a_{n,m}^{(1)} = k_1(x_n^1 - 0.5h_1, x_m^2),$$

$$\Lambda_2 u = (a^{(2)} u_{\bar{x}^2})_{x^2}, \quad a_{n,m}^{(2)} = k_2(x_n^1, x_m^2 - 0.5h_2),$$

$$l_1 u = \frac{u(x_1^1, x_m^2, t) - u(x_0^1, x_m^2, t)}{h_1}, \quad l_2 u = \frac{u(x_n^1, x_M^2, t) - u(x_n^1, x_{M-1}^2, t)}{h_2}.$$

Поставим в соответствие задаче (1.16) разностную схему

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\bar{y} - y}{0.5\tau} = \Lambda_1 \bar{y} + \Lambda_2 y, \quad x = (x_n^1, x_m^2) \in \omega_h, \\ l_1 \bar{y} = \bar{\mu}_1, \quad \bar{y}|_{x_1=1} = \bar{\mu}_2, \\ \frac{\hat{y} - \bar{y}}{0.5\tau} = \Lambda_1 \bar{y} + \Lambda_2 \hat{y}, \quad x = (x_n^1, x_m^2) \in \omega_h, \\ \hat{y}|_{x_2=0} = \hat{\mu}_3, \quad l_2 \hat{y} = \hat{\mu}_4 \end{array} \right. \quad (1.17)$$

с начальными условиями

$$y_{n,m}^0 = \varphi(x_n^1, x_m^2), \quad n = 0, 1, \dots, N, \quad m = 0, 1, \dots, M,$$

где использованы обозначения

$$\bar{\mu}_\alpha = \frac{\hat{\mu}_\alpha + \mu_\alpha}{2} - \frac{\tau}{4} \Lambda_2 (\hat{\mu}_\alpha - \mu_\alpha), \quad \alpha = 1, 2,$$

$$\hat{\mu}_\alpha = \mu_\alpha|_{t=t_{j+1}}, \quad \alpha = 3, 4.$$



Пусть  $u$  — точное решение задачи (1.16),  $z = y - u$  — погрешность схемы (1.17), причем

$$\bar{z} = \bar{y} - \bar{u}, \quad \bar{u} = \frac{\hat{u} + u}{2} - \frac{\tau^2}{4} \Lambda_2 u_t.$$

Тогда функция  $z$  является решением системы

$$\begin{cases} \frac{\bar{z} - z}{0.5\tau} = \Lambda_1 \bar{z} + \Lambda_2 z + \psi, & x = (x_n^1, x_m^2) \in \omega_h, \\ l_1 \bar{z} = \bar{v}^{(1)}, \quad \bar{z}|_{x_1=1} = 0, \\ \frac{\hat{z} - \bar{z}}{0.5\tau} = \Lambda_1 \bar{z} + \Lambda_2 \hat{z} + \psi, & x = (x_n^1, x_m^2) \in \omega_h, \\ \hat{z}|_{x_2=0} = 0, \quad l_2 \hat{z} = \hat{v}^{(4)}, \end{cases} \quad (1.18)$$

где  $\psi = O(\tau^2 + h_1^2 + h_2^2)$  в случае достаточно гладкой функции  $u$ , а величины  $\bar{v}^{(1)}$  и  $\hat{v}^{(4)}$  имеют порядки  $O(h_1)$  и  $O(h_2)$  соответственно, если сетка  $\omega_h$  выбрана так, что

$$x_n^1 = nh_1, \quad n = 0, 1, \dots, N, \quad Nh_1 = 1, \quad x_m^2 = mh_2, \quad m = 0, 1, \dots, M, \quad Mh_2 = 2,$$

и порядки  $O(h_1^2)$  и  $O(h_2^2)$ , если выбрана сетка с фиктивными узлами:

$$x_n^1 = (n-0.5)h_1, \quad n = 0, 1, \dots, N, \quad (N-0.5)h_1 = 1, \quad x_m^2 = mh_2, \quad m = 0, 1, \dots, M, \quad Mh_2 = 2+0.5h_2.$$

Введем сеточное функциональное пространство  $H_h$  со скалярным произведением

$$(v, w) = \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{m=1}^{M-1} v_{n,m} w_{n,m} h_1 h_2,$$

состоящее из функций, ограниченных по норме  $\|v\| = \sqrt{(v, v)}$ , и удовлетворяющих *главным* граничным условиям  $v|_{x_1=1} = 0$  и  $v|_{x_2=0} = 0$ .

Умножим первое уравнение системы (1.18) скалярно на произвольную функцию  $v \in H_h$ , такую что  $\|v\| = 1$ :

$$\begin{aligned} (\bar{z}, v) - (z, v) &= 0.5\tau(\Lambda_1 \bar{z}, v) + 0.5\tau(\Lambda_2 z, v) + 0.5\tau(\psi, v) = \\ &= -0.5\tau \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^{M-1} a_{n,m}^{(1)} \bar{z}_{\bar{x}^1, nm} v_{\bar{x}^1, nm} h_1 h_2 - 0.5\tau \sum_{m=1}^{M-1} a_{1,m}^{(1)} \underbrace{\bar{z}_{\bar{x}^1, 1m}}_{\bar{v}_m^{(1)}} v_{0,m} - \\ &- 0.5\tau \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{m=1}^M a_{n,m}^{(2)} z_{\bar{x}^2, nm} v_{\bar{x}^2, nm} h_1 h_2 + 0.5\tau \sum_{n=1}^{N-1} a_{n,M}^{(2)} \underbrace{z_{\bar{x}^2, nM}}_{v_n^{(4)}} v_{n,M}. \end{aligned}$$

Введем операторы  $A_1$  и  $A_2$ , которые на любой элемент  $w \in H_h$  действуют следующим образом:

$$(A_1 w, v) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^{M-1} a_{n,m}^{(1)} w_{\bar{x}^1, nm} v_{\bar{x}^1, nm} h_1 h_2, \quad \forall v \in H_h,$$

$$(A_2 w, v) = \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{m=1}^M a_{n,m}^{(2)} w_{\bar{x}^2, nm} v_{\bar{x}^2, nm} h_1 h_2, \quad \forall v \in H_h.$$

Очевидно, что операторы  $A_1$  и  $A_2$  являются самосопряженными и положительно определенными. Заметим, кроме того, что существует единственный элемент  $\bar{\zeta}^{(1)} \in H_h$ , такой что

$$(\bar{\zeta}^{(1)}, v) = \sum_{m=1}^{M-1} a_{1,m}^{(1)} \bar{\nu}_m^{(1)} v_{0,m},$$

и единственный элемент  $\zeta^{(4)} \in H_h$ , такой что

$$(\zeta^{(4)}, v) = \sum_{n=1}^{N-1} a_{n,M}^{(2)} \nu_n^{(4)} v_{n,M},$$

причем  $\|\bar{\zeta}^{(1)}\| \leq \max(a^{(1)}) \|\nu^{(1)}\|$  и  $\|\zeta^{(4)}\| \leq \max(a^{(2)}) \|\nu^{(4)}\|$ .

Следовательно, первое уравнение системы (1.18) можно записать в виде

$$(\bar{z} + 0.5\tau A_1 \bar{z}, v) = (z - 0.5\tau A_2 z, v) + 0.5\tau(\psi + \zeta^{(4)} - \bar{\zeta}^{(1)}, v)$$

для любого  $v \in H_h$ ,  $\|v\| = 1$ .

Аналогично можно записать второе уравнение системы (1.18):

$$(\hat{z} + 0.5\tau A_2 \hat{z}, v) = (\bar{z} - 0.5\tau A_1 \bar{z}, v) + 0.5\tau(\psi + \hat{\zeta}^{(4)} - \bar{\zeta}^{(1)}, v), \quad \forall v \in H_h, \|v\| = 1.$$

Итак, система (1.18) эквивалентна системе

$$\begin{cases} (E + 0.5\tau A_1) \bar{z} = (E - 0.5\tau A_2) z + 0.5\tau(\psi + \zeta^{(4)} - \bar{\zeta}^{(1)}), \\ (E + 0.5\tau A_2) \hat{z} = (E - 0.5\tau A_1) \bar{z} + 0.5\tau(\psi + \hat{\zeta}^{(4)} - \bar{\zeta}^{(1)}), \end{cases}$$

где  $A_1$  и  $A_2$  — самосопряженные положительно определенные операторы, а  $\|\psi + \zeta^{(4)} - \bar{\zeta}^{(1)}\|$  имеет порядок  $O(\tau^2 + h_1 + h_2)$  или  $O(\tau^2 + h_1^2 + h_2^2)$  в зависимости от выбора сетки. Следовательно, оценивая  $\|\hat{z}\|$  точно также, как при доказательстве устойчивости схемы переменных направлений в случае задачи с условиями Дирихле, получаем, что схема (1.18) безусловно устойчива.

## 2 Экономичные факторизованные схемы

### 2.1 Понятие факторизованной схемы

Рассмотрим двухслойную операторно-разностную схему

$$\begin{cases} By_t + Ay = \varphi, & t \in \omega_\tau, \\ y(0) = y_0, \end{cases} \quad (2.1)$$

где  $\bar{\omega}_\tau = \{t_j = j\tau, j = 0, 1, \dots, J, \tau J = T\}$ . Пусть  $y = y^j$  известно. Для  $y^{j+1}$  получаем уравнение:

$$By^{j+1} = F^j, \quad F^j = (B - \tau A)y^j + \tau\varphi^j, \quad j = 0, 1, \dots, J - 1, \quad (2.2)$$

где  $F^j$  известно. Пусть для вычисления  $F^j$  затрачивается число действий  $Q = O(N)$ , где  $N$  — число узлов пространственной сетки на одном слое по времени. Если для решения уравнения (2.2) затрачивается число действий  $Q = O(N)$ , то устойчивая схема (2.1) экономична.

Пусть  $B_\alpha, \alpha = 1, 2, \dots, p$  — экономичные разностные операторы, то есть такие операторы, что для вычисления решения уравнения

$$B_\alpha v = F$$

требуется  $Q = O(N)$  действий. Тогда схема (2.1) с факторизованным оператором

$$B = B_1 B_2 \dots B_p$$

будет также экономичной, так как для ее решения потребуется  $Q = O(N)$  действий. В самом деле:

$$B_1 \underbrace{B_2 \dots B_p}_{y_{(1)}} y^{j+1} = F^j \Rightarrow B_1 y_{(1)} = F^j, \quad B_\alpha y_{(\alpha)} = y_{(\alpha-1)}, \quad \alpha = 2, 3, \dots, p.$$

При этом  $y^{j+1} = y_{(p)}$ . Вспомогательные значения  $y_{(1)}, \dots, y_{(p-1)}$  можно понимать как решения на промежуточных слоях по времени:

$$y_{(1)} = y^{j+\frac{1}{p}}, \quad \dots, \quad y_{(\alpha)} = y^{j+\frac{\alpha}{p}}, \quad \dots, \quad y_{(p-1)} = y^{j+\frac{p-1}{p}}.$$

**Определение 2.1** Схемы с факторизованным оператором  $B$  называются факторизованными схемами.

Устойчивая схема (2.1) с факторизованным оператором  $B$ , являющимся произведением конечного числа экономичных операторов  $B_1, B_2, \dots, B_p$ , является экономичной.

Схема переменных направлений в случае  $k_1 = k_2 = 1$  эквивалентна факторизованной схеме с оператором  $B = B_1 B_2$ , где

$$B_\alpha = (E - 0.5\tau\Lambda_\alpha), \quad \Lambda_\alpha y = y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2.$$

Первые экономичные схемы составлялись так, чтобы можно было легко исключить промежуточные значения. Это приводило к факторизованной схеме «в целых шагах», связывающей значения  $y^j$  и  $y^{j+1}$ .

Факторизованные схемы применимы лишь для прямоугольных областей. Исключение представляет случай, когда  $B = B_1 B_2$ :

$$B_\alpha = E + \tau R_\alpha, \quad \alpha = 1, 2,$$

где  $R_1$  и  $R_2$  — треугольные операторы:

$$R_1 y = \sum_{\alpha=1}^p \frac{y_{\bar{x}_\alpha}}{h_\alpha}, \quad R_2 y = - \sum_{\alpha=1}^p \frac{y_{x_\alpha}}{h_\alpha},$$

однако в этом случае понижается порядок аппроксимации, которая имеет место лишь при  $\tau = O(|h|^2)$ . Соответствующие треугольным операторам  $R_1$  и  $R_2$  матрицы являются треугольными. Операторы  $R_1$  и  $R_2$  не являются самосопряженными, но сопряжены друг к другу.

Факторизованная схема с треугольными операторами называется явной схемой переменных направлений. Для решения уравнения

$$B_\alpha v = F$$

в этом случае получаются формулы явного (бегущего) счета.

## 2.2 Схемы «предиктор-корректор» для уравнения теплопроводности в прямоугольном параллелепипеде

Для начально-краевой задачи

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2}, & x = (x_1, x_2, x_3) \in G, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \bar{G}, \\ u|_{\partial G} = 0 \end{cases}$$

для уравнения теплопроводности с постоянными коэффициентами в параллелепипеде

$$\bar{G} = \{x = (x_1, x_2, x_3), \quad x_\alpha \in [0, l_\alpha], \quad \alpha = 1, 2, 3\}$$

разработан ряд двухслойных схем типа «предиктор-корректор». При изучении устойчивости эти схемы сводятся к эквивалентным факторизованным схемам.

*Первая схема предиктор-корректор.*

$$\begin{aligned}\frac{y(1) - y}{0.5\tau} &= \Lambda_1 y(1) + (\Lambda_2 + \Lambda_3)y, & \frac{y(2) - y(1)}{0.5\tau} &= \Lambda_2(y(2) - y), \\ \frac{y(3) - y(2)}{0.5\tau} &= \Lambda_3(y(3) - y), & \frac{\hat{y} - y}{\tau} &= \Lambda_1 y(1) + \Lambda_2 y(2) + \Lambda_3 y(3),\end{aligned}\tag{2.3}$$

где  $y = y^j$ ,  $\hat{y} = y^{j+1}$ ,  $y_{(\alpha)}$ ,  $\alpha = 1, 2, 3$  — промежуточные значения, функция  $y$  равна нулю в граничных узлах  $\gamma_h$  и в начальный момент времени равна функции  $u_0$ . Эквивалентная факторизованная двухслойная схема имеет вид:

$$By_t = \Lambda y, \quad \Lambda = \sum_{\alpha=1}^3 \Lambda_{\alpha},$$

где

$$B = (E - 0.5\tau\Lambda_1)(E - 0.5\tau\Lambda_2)(E - 0.5\tau\Lambda_3).$$

Введем обозначения:

$$B_{\alpha} = (E - 0.5\tau\Lambda_{\alpha}), \quad w_{(\alpha)} = \frac{y_{(\alpha)} - y}{0.5\tau} \Rightarrow y_{(\alpha)} = y + 0.5\tau w_{(\alpha)}.$$

Тогда:

$$\frac{y(1) - y}{0.5\tau} = \Lambda_1 y(1) + (\Lambda_2 + \Lambda_3)y \Rightarrow w_{(1)} = 0.5\tau\Lambda_1 w_{(1)} + \Lambda y \Rightarrow B_1 w_{(1)} = \Lambda y;$$

$$\frac{y(2) - y(1)}{0.5\tau} = \Lambda_2(y(2) - y) \Rightarrow w_{(2)} - w_{(1)} = 0.5\tau\Lambda_2 w_{(2)} \Rightarrow B_2 w_{(2)} = w_{(1)};$$

$$\frac{y(3) - y(2)}{0.5\tau} = \Lambda_3(y(3) - y) \Rightarrow w_{(3)} - w_{(2)} = 0.5\tau\Lambda_3 w_{(3)} \Rightarrow B_3 w_{(3)} = w_{(2)}.$$

Из полученных соотношений следует, что

$$\Lambda y = B_1 w_{(1)} = B_1 B_2 w_{(2)} = B_1 B_2 B_3 w_{(3)},$$

$$\frac{\hat{y} - y}{\tau} = \Lambda_1 y(1) + \Lambda_2 y(2) + \Lambda_3 y(3) \Rightarrow y_t = \Lambda y + 0.5\tau \sum_{\alpha=1}^3 \Lambda_{\alpha} w_{(\alpha)}.$$

Рассмотрим выражение:

$$\begin{aligned}0.5\tau \sum_{\alpha=1}^3 \Lambda_{\alpha} w_{(\alpha)} &= \sum_{\alpha=1}^3 (E - B_{\alpha}) w_{(\alpha)} = \\ &= (E - B_1) B_2 B_3 w_{(3)} + (E - B_2) B_3 w_{(3)} + (E - B_3) w_{(3)} = w_{(3)} - \Lambda y.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$y_t = w_{(3)} \Rightarrow By_t = Bw_{(3)} = \Lambda y \Rightarrow By_t = \Lambda y.$$

Положим

$$A_\alpha = -\Lambda_\alpha, \quad A = -\Lambda = \sum_{\alpha=1}^3 A_\alpha.$$

В результате приходим к операторно-разностной схеме:

$$\begin{cases} By_t + Ay = 0, \\ y(0) = u_0, \end{cases}$$

где  $B = B_1 B_2 B_3$ ,  $B_\alpha = E + \frac{\tau}{2} A_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2, 3$ . Достаточное условие устойчивости (критерий Самарского) для нее выполнено. В самом деле,

$$B = \prod_{\alpha=1}^3 \left( E + \frac{\tau}{2} A_\alpha \right) = E + \frac{\tau}{2} A + \frac{\tau^2}{4} Q,$$

где

$$Q = A_1 A_2 + A_1 A_3 + A_2 A_3 + \frac{\tau}{2} A_1 A_2 A_3.$$

Так как операторы  $A_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2, 3$ , самосопряженные, положительно определенные и попарно перестановочные, то  $Q > 0$ . Следовательно,

$$B - \frac{\tau}{2} A > E,$$

то есть схема (2.3) безусловно устойчива по норме  $\|\cdot\|_A$ .

*Вторая схема предиктор-корректор.*

$$\begin{aligned} \frac{y(1) - y}{0.5\tau} &= \Lambda_1 y(1), & \frac{y(2) - y(1)}{0.5\tau} &= \Lambda_2 y(2), \\ \frac{y(3) - y(2)}{0.5\tau} &= \Lambda_3 y(3), & \frac{\hat{y} - y}{\tau} &= \Lambda y(3). \end{aligned} \tag{2.4}$$

Пусть  $B_\alpha = E - \frac{\tau}{2} \Lambda_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2, 3$ . Тогда

$$B_1 y(1) = y, \quad B_2 y(2) = y(1), \quad B_3 y(3) = y(2) \Rightarrow B_1 B_2 B_3 y(3) = y.$$

Применяя к уравнению  $\frac{\hat{y} - y}{\tau} = \Lambda y(3)$  оператор  $B = B_1 B_2 B_3$  и учитывая его перестановочность с оператором  $\Lambda$ , получаем факторизованную схему

$$By_t = \Lambda y,$$

совпадающую со схемой, к которой сводится первая схема предиктор-корректор. Следовательно, вторая схема предиктор-корректор также является безусловно устойчивой.

Мы ввели понятие факторизованной схемы для двухслойных схем. Рассмотрим теперь трехслойную схему:

$$By_i + \tau^2 R y_{\bar{t}t} + Ay = \varphi, \quad (2.5)$$

или, что то же самое:

$$B \frac{\hat{y} - \check{y}}{2\tau} + R(\hat{y} - 2y + \check{y}) + Ay = \varphi, \quad (2.6)$$

где  $\hat{y} = y^{j+1}$ ,  $y = y^j$ ,  $\check{y} = y^{j-1}$ . После приведения подобных уравнение (2.6) принимает вид:

$$(B + 2\tau R)\hat{y} + 2\tau(A - 2R)y - (B - 2\tau R)\check{y} = 2\tau\varphi.$$

Трехслойная схема (2.4) называется факторизованной, если факторизован оператор  $(B + 2\tau R)$ .

## 2.3 Схема Кранка - Николсона и ее эволюционная факторизация

Схемой Кранка-Николсона для абстрактной задачи Коши

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + Lu = f(t), & t \in (0, T], \\ u|_{t=0} = u_0, \end{cases} \quad (2.7)$$

где  $u(t)$  и  $f(t)$  — функции со значениями в банаховом пространстве  $H_0$ ,  $u_0$  — элемент пространства  $H_0$ , называется разностная схема вида:

$$\begin{cases} \frac{\hat{y} - y}{\tau} + \Lambda \frac{\hat{y} + y}{2} = \bar{f}, & t_j \in \omega_\tau, \\ y_0 = u_0, \end{cases} \quad (2.8)$$

где  $y$  при каждом  $t_j = j\tau$  принадлежит некоторому сеточному пространству  $H_h$ , разностный оператор  $\Lambda$  аппроксимирует оператор  $L$  с погрешностью  $O(|h|^p)$ , а  $\bar{f} = 0.5(f + \hat{f})$ .

Если  $L$  — линейный оператор, не зависящий от  $t$ , то схема (2.8) является результатом попеременного применения явной и неявной схем, записанных для отрезков  $[t_j, t_{j+0.5}]$  и  $[t_{j+0.5}, t_{j+1}]$  соответственно:

$$\frac{\bar{y} - y}{0.5\tau} + \Lambda y = f, \quad \frac{\hat{y} - \bar{y}}{0.5\tau} + \Lambda \hat{y} = \hat{f}. \quad (2.9)$$

Исключая из системы уравнений (2.9) неизвестные  $\bar{y}$ , приходим к схеме (2.8).

Предположим, что оператор  $L = L(t)$  зависит от времени и является положительно определенным, и пусть разностный оператор  $\Lambda = \Lambda(t_j)$ , аппроксимирующий дифференциальный оператор  $L$ , также является положительно определенным.

Схему (2.8) можно переписать в виде:

$$\hat{y} = \underbrace{(E + 0.5\tau\Lambda)^{-1}(E - 0.5\tau\Lambda)}_{S_j} y + (E + 0.5\tau\Lambda)^{-1} \bar{f}, \quad (2.10)$$

где  $S_j$  — оператор перехода со слоя  $j$  на слой  $j + 1$ .

Исследуем схему (2.8) на устойчивость по начальным данным. Рассмотрим однородное уравнение, соответствующее (2.8), умножим его скалярно на выражение  $\frac{\hat{y} + y}{2}$  и воспользуемся тем, что  $\Lambda$  — положительно определенный оператор:

$$\frac{(\hat{y}, \hat{y}) - (y, y)}{2\tau} + \underbrace{\left( \Lambda \frac{\hat{y} + y}{2}, \frac{\hat{y} + y}{2} \right)}_{\geq 0} = 0,$$

откуда получаем

$$\|\hat{y}\| \leq \|y\| \Rightarrow \|y_j\| \leq \|u_0\|, \quad \forall j = 1, \dots, J.$$

Следовательно, схема (2.8) является безусловно устойчивой по начальным данным, причем  $\|S_j\| \leq 1$  для всех  $j$ . Это означает, что она устойчива и по правой части уравнения.

Исследуем порядок аппроксимации схемы (2.8). Введем операторы

$$Hu = \frac{du}{dt} + Lu, \quad (H_\tau y) = \frac{\hat{y} - y}{\tau} + \Lambda \frac{\hat{y} + y}{2},$$

позволяющие записать уравнения в задачах (2.7) и (2.8) в виде  $Hu = f$  и  $H_\tau y = \bar{f}$  соответственно. Предположим, что решение задачи (2.7) является достаточно гладкой функцией переменной  $t$ , и разложим его в ряд Тейлора:

$$u(t_{j+1}) = u(t_j) + \tau \left( \frac{du}{dt} \right) \Big|_{t=t_j} + \frac{\tau^2}{2} \left( \frac{d^2u}{dt^2} \right) \Big|_{t=t_j} + O(\tau^3).$$

Допустим, что оператор  $L = L(t)$  является непрерывно-дифференцируемым по параметру  $t$ . Тогда получаем

$$\frac{du}{dt} = -Lu + f, \Rightarrow \frac{d^2u}{dt^2} = L^2u - L'_t u + \frac{df}{dt} - Lf,$$

где  $L'_t = \frac{dL}{dt}$ . Следовательно,

$$u(t_{j+1}) = u(t_j) - \tau L(t_j)u(t_j) + \tau f(t_j) + \frac{\tau^2}{2} \left[ L^2(t_j)u(t_j) - L'_t(t_j)u(t_j) + \frac{df}{dt} \Big|_{t=t_j} - L(t_j)f(t_j) \right] + O(\tau^3).$$

Пусть  $z = (y - u)$  — разность решения схемы (2.8) и точного решения задачи (2.7), рассматриваемого в узлах сетки. Тогда погрешность аппроксимации схемой (2.8) задачи (2.7) имеет вид:

$$H_\tau z = \bar{f} - H_\tau u = \bar{f} + L(t_j)u(t_j) - f(t_j) - \frac{\tau}{2} \left( L^2(t_j)u(t_j) - L'_t(t_j)u(t_j) + \frac{df}{dt} \Big|_{t=t_j} - L(t_j)f(t_j) \right) +$$



$$\begin{aligned}
& +O(\tau^2) - \Lambda \left( u(t_j) - \frac{\tau}{2}L(t_j)u(t_j) + 0.5\tau f(t_j) + O(\tau^2) \right) = \\
& = \underbrace{L(t_j)u(t_j) - \Lambda(t_j)u(t_j)}_{O(|h|^p)} + \frac{\tau}{2}L'_t(t_j)u(t_j) - \\
& - \frac{\tau}{2} \underbrace{(L(t_j) - \Lambda(t_j))L(t_j)u(t_j)}_{O(|h|^p)} + \frac{\tau}{2} \underbrace{(L(t_j)f(t_j) - \Lambda(t_j)f(t_j))}_{O(|h|^p)} + O(\tau^2) = \\
& = \frac{\tau}{2}L'_t(t_j)u(t_j) + O(\tau^2 + |h|^p).
\end{aligned}$$

Итак, схема (2.8) аппроксимирует задачу (2.7) с погрешностью  $O(\tau + |h|^p)$ , если оператор  $\Lambda(t_j)$  аппроксимирует дифференциальный оператор  $L(t_j)$  с погрешностью  $O(|h|^p)$ .

Если же построить разностный оператор  $\Lambda(t_j)$  таким образом, чтобы он аппроксимировал дифференциальный оператор

$$L(t_j) + \frac{\tau}{2}L'_t(t_j) = L(t_j + 0.5\tau) + O(\tau^2)$$

с погрешностью  $O(|h|^p + \tau^2)$ , то погрешность аппроксимации схемы (2.8) будет равна  $O(\tau^2 + |h|^p)$ .

Следовательно, схема Кранка-Николсона (2.8) будет иметь второй порядок погрешности аппроксимации по времени, если оператор  $\Lambda(t_j)$  выбрать так, чтобы он аппроксимировал с погрешностью  $O(|h|^p)$  оператор  $L(t_j + 0.5\tau)$  или же полусумму  $0.5(L(t_j) + L(t_{j+1}))$ . Этот подход используется в различных приложениях, особенно при численном решении квазилинейных уравнений.

Пусть оператор  $\Lambda$  можно представить в виде суммы самосопряженных положительно определенных операторов:  $\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3$  (в двумерном случае  $\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2$ ). Тогда схему Кранка-Николсона можно переписать в эквивалентном виде

$$(E + 0.5\tau\Lambda)y_t + \Lambda y = \bar{f}. \quad (2.11)$$

Схема (2.11) безусловно устойчива, но она не является экономичной. Для оператора  $B = (E + 0.5\tau\Lambda)$  нельзя выполнить факторизацию точно. Однако его можно приближенно заменить факторизованным оператором

$$\tilde{B} = (E + 0.5\tau\Lambda_1)(E + 0.5\tau\Lambda_2)(E + 0.5\tau\Lambda_3) = B + O(\tau^2).$$

Факторизованная схема с оператором  $\tilde{B}$ :

$$(E + 0.5\tau\Lambda_1)(E + 0.5\tau\Lambda_2)(E + 0.5\tau\Lambda_3)y_t + \Lambda y = \bar{f} \quad (2.12)$$

называется *эволюционно-факторизованной*. Отличие оператора  $\tilde{B}$  от оператора  $B$  имеет порядок  $O(\tau^2)$ , то есть тот же порядок малости, что и погрешность аппроксимации в схеме

с «полусуммой». Это означает, что на достаточно гладких функциях  $u$  схема (2.12) будет иметь тот же порядок аппроксимации, что и схема (2.11). При этом схема (2.12) безусловно устойчива, а значит является экономичной.

Для нахождения решения задачи (2.12) она сводится к последовательности одномерных задач:

$$(E + 0.5\tau\Lambda_1)w = -\Lambda y + \bar{f}, \quad (E + 0.5\tau\Lambda_2)v = w, \quad (E + 0.5\tau\Lambda_3)y_t = v.$$

Если решение уравнения (2.11) должно удовлетворять граничным условиям  $y|_{\gamma_h} = \mu$ , то для вспомогательных функций  $v$  и  $w$  должны выполняться следующие граничные условия:

$$v|_{\gamma_h} = (E + 0.5\tau\Lambda_3)\mu_t, \quad w|_{\gamma_h} = (E + 0.5\tau\Lambda_2)(E + 0.5\tau\Lambda_3)\mu_t.$$

## 3 Метод суммарной аппроксимации

### 3.1 Суммарная аппроксимация

Продольно-поперечная схема не допускает непосредственного обобщения на случай трех и большего числа измерений, а также на случай параболических уравнений общего вида. Экономичные факторизованные схемы применимы в предположении, что область  $G$  изменения аргумента  $x = (x_1, x_2, \dots, x_p)$  есть параллелепипед. Общим методом получения экономичных схем, пригодных для уравнений с переменными и даже разрывными коэффициентами, для квазилинейных нестационарных уравнений в случае произвольной области любого числа измерений является *метод суммарной аппроксимации*.

Отход от классического понятия аппроксимации и замена его более слабым условием суммарной аппроксимации расширяет класс задач и приводит к так называемым *аддитивным схемам*.

Аддитивные схемы имеют две основных черты:

- 1) переход со слоя  $j$  на слой  $j + 1$  осуществляется при помощи ряда вспомогательных (промежуточных) обычных (двухслойных, трехслойных и т.д.) схем;
- 2) погрешность аппроксимации аддитивной схемы определяется как сумма невязок для всех промежуточных схем, то есть аддитивная схема обладает суммарной аппроксимацией.

Каждая из промежуточных схем цепочки может не аппроксимировать исходную задачу, аппроксимация достигается за счет суммирования всех невязок.

### 3.2 Сведение многомерной задачи к цепочке одномерных задач

Рассмотрим абстрактную задачу Коши

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f, & t \in (0, T], \\ u|_{t=0} = u_0. \end{cases} \quad (3.1)$$

Пусть оператор  $L$  таков, что его можно представить в виде суммы операторов:

$$L = L_1 + L_2 + \dots + L_p.$$

Например, частным случаем задачи (3.1) является следующая начально-краевая задача для уравнения теплопроводности:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f(x, t), & x = (x_1, x_2, \dots, x_p) \in G, \quad t > 0, \\ u|_{\Gamma} = \mu(x, t), & t \geq 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \bar{G}, \end{cases}$$

где

$$Lu = \sum_{\alpha=1}^p L_{\alpha}u, \quad L_{\alpha}u = \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left( k_{\alpha}(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_{\alpha}} \right), \quad k_{\alpha} \geq C > 0,$$

а граница  $\Gamma$  области  $\bar{G} = G + \Gamma$  достаточно гладкая, так что обеспечивается необходимая гладкость решения. В случае, когда коэффициенты  $k_{\alpha}$  и функция  $f$  зависят также и от решения  $u(x, t)$ , то есть

$$k_{\alpha} = k_{\alpha}(x, t, u), \quad f = f(x, t, u),$$

соответствующее уравнение теплопроводности называется квазилинейным.

Поставим в соответствие задаче (3.1) цепочку одномерных уравнений (первую цепочку). Для этого уравнение

$$Pu = \frac{\partial u}{\partial t} - Lu - f = 0$$

перепишем в виде:

$$\sum_{\alpha=1}^p P_{\alpha}u = 0, \quad P_{\alpha}u = \frac{1}{p} \frac{\partial u}{\partial t} - L_{\alpha}u - f_{\alpha},$$

где  $f_{\alpha}(x, t)$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots, p$  — произвольные функции, обладающие той же гладкостью, что и  $f(x, t)$ , и удовлетворяющие условию:

$$f_1 + f_2 + \dots + f_p = f.$$

На отрезке  $0 \leq t \leq T$  введем равномерную сетку  $\bar{\omega}_\tau = \{t_j = j\tau, j = 0, 1, \dots, J\}$ . Каждый интервал  $[t_j, t_{j+1}]$  разобьем на  $p$  частей, вводя точки

$$t_{j+\frac{\alpha}{p}} = t_j + \frac{\alpha}{p}\tau, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p-1,$$

и обозначим как  $\Delta_\alpha$  полуинтервалы  $t_{j+\frac{\alpha-1}{p}} < t \leq t_{j+\frac{\alpha}{p}}$ .

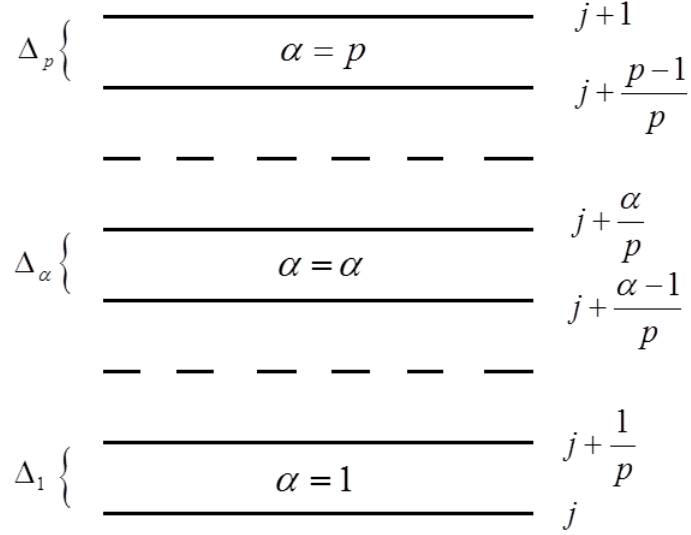


Рис. 1: Разбиение интервала  $[t_j, t_{j+1}]$  вспомогательными слоями

Будем последовательно, начиная с  $\alpha = 1$ , решать уравнения:

$$P_\alpha v_{(\alpha)} = 0, \quad x \in G, \quad t \in \Delta_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p, \quad (3.2)$$

дополняя их начальными условиями  $v_{(1)}(x, 0) = u_0(x)$ , условиями сопряжения:

$$v_{(1)}(x, t_j) = v_{(p)}(x, t_j), \quad v_{(\alpha)}(x, t_{j+\frac{\alpha-1}{p}}) = v_{(\alpha-1)}(x, t_{j+\frac{\alpha-1}{p}}), \quad \alpha = 2, \dots, p, \quad (3.3)$$

где  $v_{(p)}(x, t_j)$  уже известно с предыдущего шага, а также граничными условиями

$$v_{(\alpha)}(x, t) = \mu(x, t), \quad x \in \partial G, \quad \alpha = 1, \dots, p.$$

Решением этой задачи назовем значения  $v(x, t_j) = v_{(p)}(x, t_j)$ ,  $j = 0, 1, \dots, J$ .

Каждое из уравнений

$$P_\alpha v_{(\alpha)} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{p} \frac{\partial v_{(\alpha)}}{\partial t} = L_\alpha v_{(\alpha)} + f_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p, \quad (3.4)$$

заменяем его разностной аппроксимацией

$$\Pi_\alpha y_{(\alpha)} = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p, \quad (3.5)$$

где

$$y_{(1)}^j = y^j, \quad y_{(2)}^{j+\frac{1}{p}} = y_{(1)}^{j+\frac{1}{p}}, \quad \dots, \quad y_{(\alpha)}^{j+\frac{\alpha-1}{p}} = y_{(\alpha-1)}^{j+\frac{\alpha-1}{p}}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p,$$

и учтем граничные условия задачи:

$$y_{(\alpha)}^{j+\frac{\alpha}{p}} = \mu^{j+\frac{\alpha}{p}}, \quad x \in \gamma_h.$$

В простейшем случае (3.5) — это двухслойная схема, связывающая значения  $y_{(\alpha)} = y^{j+\frac{\alpha}{p}}$  и  $y_{(\alpha-1)} = y^{j+\frac{\alpha-1}{p}}$ .

Схема (3.5) аппроксимирует уравнение (3.4) в обычном смысле, так что погрешность

$$\Psi_\alpha = \Pi_\alpha u^{j+\frac{\alpha}{p}} - (P_\alpha u)^{j+\frac{\alpha}{p}}$$

в некоторой норме стремится к нулю при  $\tau \rightarrow 0$  и  $|h| \rightarrow 0$ .

Покажем, что система разностных уравнений (3.5) является аддитивной схемой, обладающей суммарной аппроксимацией. Пусть  $\psi_\alpha = \Pi_\alpha u^{j+\frac{\alpha}{p}}$ . Представляя  $\psi_\alpha$  в виде суммы:

$$\psi_\alpha = (P_\alpha u)^{j+\frac{\alpha}{p}} + \Psi_\alpha$$

и учитывая, что

$$(P_\alpha u)^{j+\frac{\alpha}{p}} = (P_\alpha u)^{j+\frac{1}{2}} + O(\tau),$$

получаем

$$\psi_\alpha = \dot{\psi}_\alpha + \psi_\alpha^*, \quad \dot{\psi}_\alpha = (P_\alpha u)^{j+\frac{1}{2}}, \quad \psi_\alpha^* = \Psi_\alpha + O(\tau),$$

причем  $\|\psi_\alpha^*\| \rightarrow 0$  при  $\tau \rightarrow 0$ ,  $|h| \rightarrow 0$ , где  $\|\cdot\|$  — некоторая норма в пространстве сеточных функций, заданных на  $\omega_h$ , и

$$\sum_{\alpha=1}^p \dot{\psi}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^p (P_\alpha u)^{j+\frac{1}{2}} = (Pu)^{j+\frac{1}{2}} = 0.$$

Считая погрешностью аддитивной схемы (3.5) сумму невязок для всех промежуточных схем:

$$\psi = \sum_{\alpha=1}^p \Pi_\alpha u^{j+\frac{\alpha}{p}} = \sum_{\alpha=1}^p \psi_\alpha = \sum_{\alpha=1}^p \psi_\alpha^*,$$

получаем оценку:

$$\|\psi\| = \left\| \sum_{\alpha=1}^p \psi_\alpha^* \right\| \rightarrow 0$$

при  $\tau \rightarrow 0$ ,  $|h| \rightarrow 0$ .

Таким образом, схема обладает суммарной аппроксимацией, если каждая из схем (3.5) аппроксимирует соответствующее уравнение (3.4) в обычном смысле. Вопрос о близости

решения разностной задачи к решению исходной фактически сводится к вопросу о близости решения исходной задачи и решения  $v$  цепочки уравнений (3.2)-(3.3), так как

$$\|u^j - y^j\| \leq \|u^j - v_{(p)}^j\| + \|v_{(p)}^j - y^j\|.$$

В простейшем случае уравнения с постоянными коэффициентами функции  $u$  и  $v_{(p)}$  совпадают при  $t = t_j$ ,  $j = 0, 1, \dots, J$ . В случае абстрактной задачи Коши

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + Au = f(t), & t > 0, \\ u(0) = u_0 \end{cases} \quad (3.6)$$

для функции  $u$  со значениями в банаховом пространстве  $H_0$ , где  $A$  — линейный оператор, область определения которого всюду плотна в  $H_0$ , представимого в виде суммы  $A = \sum_{\alpha=1}^p A_\alpha$ , решение  $v(t_j) = v_{(p)}(t_j)$ ,  $t_j = j\tau$ , цепочки уравнений

$$\frac{1}{p} \frac{dv_{(\alpha)}}{dt} + A_\alpha v_\alpha = f_\alpha, \quad t_{j+\frac{\alpha-1}{p}} < t \leq t_{j+\frac{\alpha}{p}}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p,$$

с начальными условиями  $v_{(1)}(0) = u_0$  и условиями сопряжения

$$v_{(1)}(t_j) = v_{(p)}(t_j), \quad j = 1, 2, \dots,$$

$$v_{(\alpha)}(t_{j+\frac{\alpha-1}{p}}) = v_{(\alpha-1)}(t_{j+\frac{\alpha-1}{p}}), \quad j = 0, 1, \dots, \quad \alpha = 2, 3, \dots, p,$$

где  $f = \sum_{\alpha=1}^p f_\alpha$ , связано с решением задачи Коши (3.6) соотношением

$$\|v(t_j) - u(t_j)\| = O(\tau), \quad j = 1, 2, \dots$$

Наряду с первой цепочкой уравнений (3.2)-(3.3) можно рассматривать также вторую цепочку уравнений:

$$\frac{\partial v_{(\alpha)}}{\partial t} = L_\alpha v_{(\alpha)} + f_\alpha, \quad x \in G, \quad t_j < t \leq t_{j+1}, \quad j = 0, 1, \dots, J-1, \quad (3.7)$$

при условиях сопряжения

$$v_{(1)}(x, t_j) = v(x, t_j), \quad v_{(\alpha)}(x, t_j) = v_{(\alpha-1)}(x, t_{j+1}), \quad \alpha = 2, 3, \dots, p, \quad (3.8)$$

причем  $v_{(1)}(x, 0) = u_0(x)$ .

Решением задачи (3.7)-(3.8) является функция  $v(x, t) = v_{(p)}(x, t)$ . В отличие от первой цепочки уравнений, в задаче (3.7)-(3.8) каждое из уравнений с номером  $\alpha$  решается на всем интервале  $t_j < t \leq t_{j+1}$ . Обе цепочки обладают свойством суммарной аппроксимации на решении  $u(x, t)$  исходной задачи.

Суммарная аппроксимация для (3.2)-(3.3) и (3.7)-(3.8) гарантируется выполнением двух условий:

- 1) оператор  $L$  есть сумма  $L = L_1 + L_2 + \dots + L_p$ ;
- 2) правая часть  $f$  есть сумма  $f = f_1 + f_2 + \dots + f_p$ .

Эти условия можно ослабить, положив:

$$Lu - \sum_{\alpha=1}^p L_\alpha u = O(\tau), \quad f - \sum_{\alpha=1}^p f_\alpha = O(\tau).$$

**Определение 3.1** Оператор  $L_\alpha$  называется одномерным, если  $L_\alpha$  содержит производные лишь по переменной  $x_\alpha$ . При этом уравнение  $P_\alpha v_{(\alpha)} = 0$  называется одномерным уравнением, а соответствующая аддитивная схема — локально-одномерной схемой.

### 3.3 Схема Дугласа-Рекфорда

В качестве примера схемы, обладающей суммарной аппроксимацией, рассмотрим схему Дугласа-Рекфорда для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu, \quad L = L_1 + L_2$$

Схема имеет следующий вид:

$$\frac{y^{j+\frac{1}{2}} - y^j}{\tau} = \Lambda_1 y^{j+\frac{1}{2}} + \Lambda_2 y^j; \quad \frac{y^{j+1} - y^{j+\frac{1}{2}}}{\tau} = \Lambda_2 (y^{j+1} - y^j). \quad (3.9)$$

Покажем, что схема обладает суммарной аппроксимацией. Пусть  $u = u^j$  и  $\hat{u} = u^{j+1}$ . Вычисляя невязки промежуточных схем

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \Lambda_1 u^{j+\frac{1}{2}} + \Lambda_2 u - \frac{u^{j+\frac{1}{2}} - u^j}{\tau} = \Lambda_1 \frac{\hat{u} + u}{2} + \Lambda_2 u - \frac{\hat{u} - u}{2\tau} + O(\tau), \\ \psi_2 &= \Lambda_2 (\hat{u} - u) - \frac{u^{j+1} - u^{j+\frac{1}{2}}}{\tau} = \Lambda_2 (\hat{u} - u) - \frac{\hat{u} - u}{2\tau} + O(\tau), \end{aligned}$$

и учитывая, что

$$u^{j+\frac{1}{2}} = \frac{\hat{u} + u}{2} + O(\tau^2),$$

получаем, что  $\psi_1 = O(1)$  и  $\psi_2 = O(1)$ , но

$$\begin{aligned} \psi &= \psi_1 + \psi_2 = \Lambda_1 \frac{\hat{u} + u}{2} + \Lambda_2 \hat{u} - \frac{\hat{u} - u}{\tau} + O(\tau) = \\ &= \Lambda \hat{u} - \frac{\hat{u} - u}{\tau} + O(\tau) = \left( Lu - \frac{\partial u}{\partial t} \right) \Big|_{t=t_{j+1}} + O(|h|^2 + \tau) = O(\tau + |h|^2), \end{aligned}$$

если разностные операторы  $\Lambda_\alpha$  аппроксимируют дифференциальные операторы  $L_\alpha$  со вторым порядком. Таким образом, схема (3.9) обладает суммарной аппроксимацией.

Если в схеме Дугласа-Рекфорда исключить промежуточное значение  $y^{j+\frac{1}{2}}$ , то мы получим факторизованную схему, содержащую  $y^j$  и  $y^{j+1}$  и аппроксимирующую исходное дифференциальное уравнение с порядком  $O(\tau + |h|^2)$  в обычном смысле.

## 4 Контрольные вопросы

- 1) Дайте определение экономичной разностной схемы. Составьте продольно-поперечную схему для уравнения теплопроводности в прямоугольнике.
- 2) Получите задачу для погрешности продольно-поперечной схемы. Каков порядок аппроксимации продольно-поперечной схемой задачи Дирихле для уравнения теплопроводности. Покажите, что схема сходится и является безусловно устойчивой.
- 3) Дайте определение факторизованной разностной схемы. Приведите примеры факторизованных схем в двумерном и трехмерном случае.
- 4) Сформулируйте определение схемы Кранка-Николсона. Запишите для нее эволюционно-факторизованную схему. Каков порядок погрешности аппроксимации этой схемы?
- 5) Дайте определение аддитивной схемы и суммарной аппроксимации. В чем заключается основная идея сведения многомерной задачи к цепочке одномерных задач? Когда это возможно?
- 6) Реализуйте схему переменных направлений и эволюционно-факторизованную схему Кранка-Николсона для начально-краевой задачи

$$\left\{ \begin{array}{l} (2-x)^2 \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}((2-x)^2 \operatorname{grad} u) + (2-x) \left( 1-x + \frac{2t \sin \pi x \operatorname{ch} \pi y}{\pi \operatorname{sh} 2\pi} \right), \quad x \in (0, 1), y \in (0, 2), t > 0, \\ u|_{t=0} = \frac{\sin 2\pi x}{2-x}, \\ u|_{x=0} = t, \quad u|_{x=1} = 0, \\ \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=2} = t^2 \frac{\sin \pi x}{2-x}. \end{array} \right.$$

Сравните результаты, полученные по обеим схемам, с точным решением задачи.

Совет: для того чтобы найти аналитическое решение задачи, сделайте замену

$$u(x, y, t) = \frac{v(x, y, t)}{2-x}.$$



7) Реализуйте для начально-краевой задачи

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + e^t \sin \frac{3\pi x}{2} \sin \pi z, \quad x \in (0, 1), \quad y \in (0, 1), \quad z \in (0, 1), \quad t \in (0, 1], \\ u|_{t=0} = \sin \frac{\pi x}{2} \cdot \cos 2\pi y \cdot \sin \pi z, \\ u|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=1} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=1} = 0, \quad u|_{z=0} = u|_{z=1} = 0 \end{array} \right.$$

первую схему «предиктор-корректор» и локально-одномерную схему. Сравните результаты с точным решением задачи.