А. В. Овчинников

СЕМИНАРЫ ПО АЛГЕБРЕ

Часть 3

МОСКВА

2026

Оглавление

Глава 11. Геометрия прямых и плоскостей 4
1. Основные понятия и факты 4
2. Примеры решения задач 11
3. Задачи для самостоятельного решения 25

Глава 12. Конические сечения 29
1. Основные понятия и факты 29
2. Примеры решения задач 52
3. Задачи для самостоятельного решения 56

Глава 13. Канонизация квадрик 58
1. Основные понятия и факты 58
2. Примеры решения задач 77
3. Задачи для самостоятельного решения 95

ГЛАВА 11

Геометрия прямых и плоскостей

1. Основные понятия и факты

В этой главе рассматриваются задачи геометрии прямых и плоскостей в трёхмерном пространстве. Разделы А–В посвящены вопросам аффинной геометрии, т.е. той части геометрии, в которой не используются понятия расстояния между точками (длины отрезка) и величины угла; в разделах Г–Ж обсуждается евклидова геометрия, в которой центральным понятием является скалярное произведение. Как обычно, координаты радиус-векторов $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{r}_0$ и т. д. обозначаем (x, y, z), (x_0, y_0, z_0) и т. д., а координаты векторов $\boldsymbol{a}$ и т. д. — (a_x, a_y, a_z).

Уравнения прямых на аффинной плоскости рассматривались в главе 4 (разделы 1.Ж–З).

А. Уравнения плоскостей.

11.1. Напомним (см. п. 4.53), что любая плоскость π в пространстве полностью определяется своей *опорной точкой* M_0 и *направляющими векторами* $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ (см. рис. 4.5, с. 61). Условие, при котором некоторая точка M пространства принадлежит плоскости π, состоит в том, что вектор $\overrightarrow{M_0M}$ компланарен векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, т.е. существуют такие числа $s, t \in \mathbb{R}$, что

$$\overrightarrow{M_0M} = s\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b}; \tag{11.1}$$

это уравнение называется *параметрическим уравнением плоскости*. Линейная оболочка векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называется *направляющим подпространством* рассматриваемой плоскости. При независимом изменении параметров s и t от $-\infty$ до $+\infty$ формула (11.1) описывает все точки M рассматриваемой плоскости (очевидно, что точка M_0 соответствует значениям $s = t = 0$).

11.2. Если в пространстве выбрано некоторое начало отсчёта O, от которого откладываются все радиус-векторы (см. гл. 4, пп. 4.48–4.50 и рис. 11.1), то параметрическое уравнение плоскости (11.1) записывается в виде

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + s\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b}, \qquad (11.2)$$

а при наличии аффинного репера $O\boldsymbol{ijk}$ — в координатном виде:

$$\begin{cases} x = x_0 + sa_x + tb_x, \\ y = y_0 + sa_y + tb_y, \\ z = z_0 + sa_z + tb_z; \end{cases} \qquad (11.3)$$

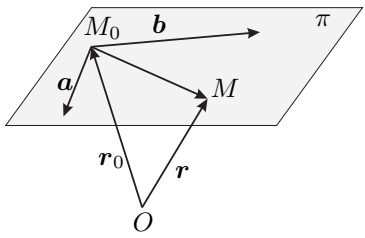


Рис. 11.1.

11.3. Факт линейной зависимости векторов $\overrightarrow{M_0M} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0$, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, лежащий в основе определения плоскости, может быть записан в виде равенства нулю определителя, составленного из координат этих векторов:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = 0. \qquad (11.4)$$

Уравнение (11.4) будем называть *каноническим уравнением плоскости.*

11.4. Раскрывая определитель (11.4) по первой строке и вводя обозначения

$$A = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}, \quad B = -\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}$$

для алгебраических дополнений элементов первой строки, получим уравнение вида

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0, \qquad (11.5)$$

называемое *общим уравнением плоскости, проходящей через заданную точку* $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Раскрывая скобки и вводя обозначение $D = Ax_0 + By_0 + Cz_0$, получаем *общее уравнение плоскости*:

$$Ax + By + Cz = D. \qquad (11.6)$$

Очевидно, плоскость проходит через начало координат тогда и только тогда, когда $D = 0$. При $D \neq 0$, разделив обе части последнего уравнения на D и вводя обозначения $a = D/A$, $b = D/B$,

$c = D/C$, приходим к *уравнению плоскости в отрезках*:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

Геометрический смысл чисел a, b, c, очевиден: плоскость проходит через точки $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$, $(0, 0, c)$, т.е. отсекает на координатных осях Ox, Oy, Oz отрезки a, b, c соответственно.

Б. Свойства плоскостей в пространстве.

11.5. Предложение. *Существует единственная плоскость, проходящая через три произвольные неколлинеарные (т.е. не лежащие на одной прямой) точки M_1, M_2, M_3.*

Доказательство. В качестве опорной точки можно взять любую из данных точек (возьмём M_1), а в качестве направляющих векторов — векторы $\overrightarrow{M_1M_2}$ и $\overrightarrow{M_1M_3}$, которые линейно независимы (неколлинеарны) в силу условия, что точки M_1, M_2, M_3 не лежат на одной прямой. Тогда уравнение

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

является уравнением искомой плоскости. (Здесь (x_1, y_1, z_1) — координаты точки M_1 и т. п.) □

Отметим, что в рамках аксиоматики Гильберта это предложение представляет собой одну из аксиом.

11.6. Предложение. *Существует единственная плоскость, проходящая через через две заданные точки M_1 и M_2 параллельно вектору $\boldsymbol{a}$, который не коллинеарен вектору $\overrightarrow{M_1M_2}$.*

Доказательство. В качестве опорной точки плоскости можно взять любую из данных точек (возьмём M_1), а в качестве направляющих векторов — векторы $\boldsymbol{a}$ и $\overrightarrow{M_1M_2}$. В результате уравнение искомой плоскости можно записать в виде

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = 0.$$ □

В. Уравнения прямых в пространстве.

11.7. Векторное параметрическое уравнение прямой $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + t\boldsymbol{a}$ в координатах принимает вид

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x = x_0 + ta_x, \\ y = y_0 + ta_y, \\ z = z_0 + ta_z \end{cases}$$

и называется системой *параметрических уравнений прямой*.

11.8. Исключение параметра t из параметрических уравнений приводит к *системе канонических уравнений прямой*:

$$\frac{x - x_0}{a_x} = \frac{y - y_0}{a_y} = \frac{z - z_0}{a_z}.$$

Ясно, что это не одно уравнение, а система уравнений, однако по аналогии с планиметрическим случаем эту систему часто называют *каноническим уравнением* (в единственном числе). Нули в знаменателях трактуются так же, как в планиметрическом случае (см. с. 62). В условиях задач прямые часто задаются каноническими уравнениями, однако при решении удобно преобразовать каноническое уравнение в параметрическое следующим образом:

$$\frac{x - x_0}{a_x} = \frac{y - y_0}{a_y} = \frac{z - z_0}{a_x} = t \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x = x_0 + ta_x, \\ y = y_0 + ta_y, \\ z = z_0 + ta_z. \end{cases}$$

Г. Нормальное уравнение прямой на плоскости.

11.9. В оставшейся части главы считаем, что в пространстве введена процедура измерения длин отрезков и величин углов; это позволит использовать понятия скалярного, векторного и смешанного произведений. В планиметрическом случае придётся ограничиться только понятием скалярного произведения; однако во многих геометрических задачах на плоскости удобно считать, что эта плоскость находится в пространстве, и применять методы трёхмерной геометрии.

11.10. Считаем, что на плоскости зафиксирована *ортогональная система координат* $O\boldsymbol{I}$, состоящая из фиксированной точки O (начала отсчёта) и ортонормированного базиса $\boldsymbol{I} = \big(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}\big)$. В элементарной геометрии такая система координат называется декартовой прямоугольной системой.

Пусть в евклидовой плоскости $\mathcal{E}_2$ заданы ненулевой вектор $\boldsymbol{n}(A, B)$ и точка $M_0(x_0, y_0)$.

11.11. Предложение. *Множество всех точек M евклидовой плоскости, для которых вектор $\boldsymbol{n}$ ортогонален вектору $\overrightarrow{M_0M}$, является прямой l, проходящей через точку M_0. Вектор $\boldsymbol{n}$ называется* нормальным вектором *прямой l; говорят, что вектор $\boldsymbol{n}$* ортогонален (перпендикулярен) *этой прямой; обозначение $\boldsymbol{n}\perp l$.*

Доказательство. Условие ортогональности

$$\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{M_0M} \quad\Longleftrightarrow\quad \bigl(\boldsymbol{n},\overrightarrow{M_0M}\bigr)=0$$

в декартовых прямоугольных координатах записывается в виде $A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$, что совпадает с общим уравнением прямой. □

11.12. Таким образом, уравнение прямой на плоскости может быть записано в виде

$$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{n})=0,\quad (\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})=D \tag{11.7}$$

или в прямоугольных координатах

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0,\quad Ax+By=D, \tag{11.8}$$

где $\boldsymbol{n}(A,B)$ — вектор нормали прямой. Эти уравнения, а также уравнение

$$Ax+By=D,$$

получающееся после раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых, называются *нормальными уравнениями прямой.*

11.13. Обратите внимание, что запись уравнения прямой в виде (11.7) справедлива для любой системы координат (требуется лишь выбор начала координат), а вид (11.8) требует выбора прямоугольной системы координат, ибо только в ортонормированном базисе скалярное произведение векторов имеет суммы попарных произведений координат перемножаемых векторов.

Д. Плоскости в трехмерном евклидовом пространстве. Пусть в трёхмерном евклидовом пространстве $\mathcal{E}_3$ заданы ненулевой вектор $\boldsymbol{n}(A,B,C)$ и точка $M_0(x_0,y_0,z_0)$.

11.14. Предложение. *Множество всех точек M пространства, для которых вектор $\boldsymbol{n}$ ортогонален вектору $\overrightarrow{M_0M}$, является плоскостью, проходящей через точку M_0. Вектор $\boldsymbol{n}$ называется* нормальным вектором *этой плоскости; говорят, что вектор $\boldsymbol{n}$* ортогонален (перпендикулярен) *этой плоскости; обозначение $\boldsymbol{n}\perp\pi$.*

Доказательство. Условие ортогональности

$$\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{M_0M} \iff \bigl(\boldsymbol{n},\overrightarrow{M_0M}\bigr)=0$$

в прямоугольных координатах принимает вид

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0,$$

что совпадает с общим уравнением плоскости. □

11.15. Таким образом, уравнение плоскости в пространстве может быть записано в виде

$$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{n})=0,\quad (\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})=D, \tag{11.9}$$

не отличающемся от уравнения прямой на плоскости (11.7) (см. с. 8). Координатная форма уравнений (11.9) в прямоугольных координатах:

$$\begin{gathered}A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0,\\ Ax+By+Cz=D.\end{gathered} \tag{11.10}$$

Уравнения в форме (11.9) и (11.10) называют *нормальными*.

11.16. Обратите внимание, что запись уравнения плоскости в виде (11.9) возможна в любой системе координат, а в виде (11.10) — только в прямоугольной, ибо только в ортонормированном базисе скалярное произведение векторов имеет вид (**??**) (см. с. **??**).

11.17. Переход от векторного параметрического уравнения плоскости $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+s\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b}$ в нормальному виду $(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})=D$ осуществляется следующим образом. В качестве вектора нормали плоскости можно взять вектор $\boldsymbol{n}=[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$, поэтому из (11.9) получаем

$$\big(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0,[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]\big)=0 \iff (\boldsymbol{r},[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}])=(\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) \iff (\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})=D,$$

где $\boldsymbol{n}=[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$, $D=(\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$.

E. Некоторые метрические понятия. Введём несколько метрических понятий евклидовой геометрии, т.е. понятий, связанных с наличием в пространстве процедуры измерения длин отрезков и величин углов и, следовательно, с возможностью введения скалярного, векторного и смешанного произведений. Геометрические задачи, в которых фигурируют метрические понятия, называются *метрическими задачами*, в противоположность *аффинным задачам*, в которых привлечение метрических понятий не требуется.

11.18. Определение.

1. Две прямые l_1 и l_2 на плоскости (в пространстве) будем называть *перпендикулярными* (обозначение $l_1\perp l_2$), если их направляющие векторы $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$ ортогональны: $(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2)=0$.
2. Прямая l и плоскость π называются *перпендикулярными* (обозначение $l\perp\pi$), если направляющий вектор прямой l ортогонален каждому вектору, лежащему в π.

3. Две плоскости π_1 и π_2 называются *перпендикулярными* (обозначение $\pi_1 \perp \pi_2$), если их нормальные векторы $\boldsymbol{n}_1$ и $\boldsymbol{n}_2$ ортогональны: $\pi_1 \perp \pi_2 \iff (\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2) = 0$.
4. *Ортогональной проекцией* точки M_1 на прямую l называется такая точка $M_2 \in l$, что $\overrightarrow{M_1M_2} \perp l$.
5. *Ортогональной проекцией* точки M_1 на плоскость π называется такая точка $M_2 \in \pi$, что $\overrightarrow{M_1M_2} \perp \pi$.
6. *Расстоянием* $d(M_1, l)$ *от точки* M_1 *до прямой* l называется длина вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$, где M_2 — ортогональная проекция точки M_1 на прямую l. Вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$ называется при этом *перпендикуляром*, опущенным из точки M_1 на прямую l.
7. *Расстоянием* $d(M_1, \pi)$ *от точки* M_1 *до плоскости* π называется длина вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$, где M_2 — ортогональная проекция точки M_1 на плоскость π. Вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$ называется при этом *перпендикуляром*, опущенным из точки M_1 на плоскость π.
8. Если прямая l и плоскость π параллельны, то *расстоянием* $d(l, \pi)$ между ними называется расстояние от любой точки прямой l до плоскости π.
9. Точка M_3 называется *симметричной* точке M_1 относительно прямой l, если вектор $\overrightarrow{M_1M_3}$ ортогонален прямой l и расстояния от каждой из этих точек до прямой l равны: $d(M_1, l) = d(M_3, l)$.
10. Точка M_3 называется *симметричной* точке M_1 относительно плоскости π, если вектор $\overrightarrow{M_1M_3}$ ортогонален плоскости π и расстояния от каждой из этих точек до плоскости π равны: $d(M_1, \pi) = d(M_3, \pi)$.

11.19. Предложение. *Прямая l с направляющим вектором $\boldsymbol{a}$ и плоскость π с нормальным вектором $\boldsymbol{n}$ перпендикулярны тогда и только тогда, векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{n}$ коллинеарны: $\boldsymbol{a} = \lambda \boldsymbol{n}$.*

Ж. Уравнение прямой в пространстве.

11.20. Естественно, все способы задания прямой в аффинном пространстве можно использовать и в евклидовом пространстве:

(i) векторное параметрическое уравнение:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + t\boldsymbol{a};$$

(ii) система параметрических уравнений в аффинных координатах (в том числе в декартовых прямоугольных координатах):

$$\begin{cases} x = x_0 + ta_x, \\ y = y_0 + ta_y, \\ z = z_0 + ta_z; \end{cases}$$

(iii) каноническое уравнение (точнее, система канонических уравнений):

$$\frac{x-x_0}{a_x}=\frac{y-y_0}{a_y}=\frac{z-z_0}{a_z};$$

(iv) задание прямой как пересечение двух плоскостей:

$$\begin{cases}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n}_1)=D_1,\\(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n}_2)=D_2\end{cases}\quad\text{или}\quad\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z=D_1,\\A_2x+B_2y+C_2z=D_2.\end{cases}$$

11.21. Умножая векторное параметрическое уравнение прямой

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+t\boldsymbol{a}$$

векторно на вектор $\boldsymbol{a}$, получаем

$$[\boldsymbol{r},\boldsymbol{a}]=[\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{a}]+t\underbrace{[\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}]}_{=\boldsymbol{0}}.$$

Введём обозначение $\boldsymbol{b}=[\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{a}]$; отметим, что $\boldsymbol{b}\perp\boldsymbol{a}$. Получим уравнение прямой в виде

$$[\boldsymbol{r},\boldsymbol{a}]=\boldsymbol{b},\quad\text{где}\quad(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=0.$$

Это уравнение называется *уравнением прямой в форме Плюккера*[1].

2. Примеры решения задач

Пример 11.1. Две плоскости в пространстве заданы уравнениями

$$A_1x+B_1y+C_1z=D_1,$$
$$A_2x+B_2y+C_2z=D_2.$$

Проведите анализ взаимного расположения этих плоскостей.

Решение. Требуется проанализировать неоднородную систему, состоящую из заданных уравнений. Рассмотрим основную и расширенную матрицы системы

$$M=\begin{pmatrix}A_1&B_1&C_1\\A_2&B_2&C_2\end{pmatrix},\quad\widetilde{M}=\left(\begin{array}{ccc|c}A_1&B_1&C_1&D_1\\A_2&B_2&C_2&D_2\end{array}\right)$$

и введём их ранги: $r=\operatorname{rk}M$, $R=\operatorname{rk}\widetilde{M}$.

Если левые части уравнений пропорциональны, т.е.

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$$

(это означает, что $r=1$), то в зависимости от соотношения свободных членов уравнений возможны следующие ситуации:

[1] Юлиус Плюккер (Julius Plücker; 1801–1868) — немецкий математик и физик.

(а) если

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2},$$

т.е. $R = 2$, то система несовместна: т.е. плоскости не имеют общих точек (параллельны);

(б) если

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2},$$

т.е. $R = 1$, то каждое из уравнений является следствием другого, т.е. плоскости совпадают.

Если же левые части уравнений не пропорциональны (это означает, что $r = R = 2$), то, согласно теореме Кронекера—Капелли, она совместна. Например, если

$$\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2},$$

то, переписав систему в виде

$$\begin{cases} A_1x + B_1y = D_1 - C_1z, \\ A_2x + B_2y = D_2 - C_2z, \end{cases} \qquad \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

видим, что при любом $z \in \mathbb{R}$ она имеет решение, которое можно найти, например, по формулам Крамера:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} D_1 - C_1z & B_1 \\ D_2 - C_2z & B_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} A_1 & D_1 - C_1z \\ A_2 & D_2 - C_2z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}.$$

Введя подходящие обозначения для коэффициентов, можно записать решение в виде

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ 1 \end{pmatrix},$$

представляющем собой параметрическое уравнение прямой. Итак, мы получили хорошо известный геометрический факт алгебраическим путём: если две плоскости пересекаются, то их пересечением является прямая. Таким образом, прямую в пространстве можно задать как пересечение двух непараллельных плоскостей. Чтобы получить параметрическое уравнение этой прямой, нужно найти общее решение указанной неоднородной системы уравнений.

Пример 11.2. Прямая в пространстве задана уравнением Плюккера $[\boldsymbol{r}, \boldsymbol{a}] = \boldsymbol{b}$, где $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 0$. Составьте векторное параметрическое уравнение этой прямой.

Решение. Направляющий вектор прямой $[\boldsymbol{r}, \boldsymbol{a}] = \boldsymbol{b}$ можно выбрать равным $\boldsymbol{a}$. Найдем опорную точку прямой, радиус-вектор $\boldsymbol{r}_0$ которой ортогонален вектору $\boldsymbol{a}$. Умножим соотношение $[\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{a}] = \boldsymbol{b}$ прямой векторно на $\boldsymbol{a}$:

$$\big[\boldsymbol{a}, [\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{a}]\big] = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}].$$

Раскрывая двойное векторное произведение по формуле (7.16), находим

$$\boldsymbol{r}_0(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) - \boldsymbol{a}\underbrace{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{r}_0)}_{=0} = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{r}_0 = \frac{[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})}.$$

Таким образом, получаем параметрическое уравнение прямой

$$\boldsymbol{r} = \frac{[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})} + t\boldsymbol{a}. \tag{11.11}$$

Пример 11.3. Две плоскости в пространстве заданы нормальными уравнениями $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}_1) = D_1$ и $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}_2) = D_2$. Проведите анализ взаимного расположения этих плоскостей.

Решение. Задание полностью совпадает с условием примера 11.1, однако теперь мы можем пользоваться метрическими понятиями. Для анализа системы, состоящей из уравнений $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}_1) = D_1$ и $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}_2) = D_2$, умножим обе части первого уравнения на вектор $\boldsymbol{n}_2$, обе части второго уравнения на вектор $\boldsymbol{n}_1$ и вычтем первое из полученных соотношений из второго:

$$\boldsymbol{n}_1(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}_2) - \boldsymbol{n}_2(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}_1) = D_2\boldsymbol{n}_1 - D_1\boldsymbol{n}_2.$$

В левой части полученного уравнения образовалось двойное векторное произведение:

$$\big[\boldsymbol{r}, [\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2]\big] = D_2\boldsymbol{n}_1 - D_1\boldsymbol{n}_2.$$

Полученное соотношение имеет вид уравнения прямой в форме Плюккера $[\boldsymbol{r}, \boldsymbol{a}] = \boldsymbol{b}$, где $\boldsymbol{a} = [\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2]$ и $\boldsymbol{b} = D_2\boldsymbol{n}_1 - D_1\boldsymbol{n}_2$. Если векторы $\boldsymbol{n}_1$ и $\boldsymbol{n}_2$ неколлинеарны (т.е. заданные плоскости не параллельны), то $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$, а необходимое условие разрешимости уравнения Плюккера выполнено: $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 0$. Итак, в этом случае пересечением плоскостей является прямая. Пользуясь результатом примера 11.2, можно получить векторное параметрическое уравнение этой прямой:

$$\boldsymbol{r} = \frac{\big[\boldsymbol{a}, D_2\boldsymbol{n}_1 - D_1\boldsymbol{n}_2\big]}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})} + t\boldsymbol{a},$$

где $\boldsymbol{a} = [\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2]$.

Если же векторы $\boldsymbol{n}_1$ и $\boldsymbol{n}_2$ коллинеарны, $\boldsymbol{n}_1 = \lambda \boldsymbol{n}_2$, то $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$, и мы получаем соотношение

$$\boldsymbol{0} = \boldsymbol{n}_1 D_2 - \boldsymbol{n}_2 D_1,$$

которое выполняется для любого вектора $\boldsymbol{r}$ (удовлетворяющего заданным уравнениям $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}_1) = D_1$ и $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}_2) = D_2$) в случае $D_1 = \lambda D_2$ (плоскости совпадают, ибо их уравнения пропорциональны), и не выполняется ни для какого вектора $\boldsymbol{r}$ в случае $D_1 \neq \lambda D_2$ (плоскости параллельны, т.е. не имеют общих точек).

Пример 11.4. Проведите анализ взаимного расположения в евклидовом пространстве плоскости π и прямой l , которые заданы уравнениями

$$\pi : (\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}) = D, \quad l : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + t\boldsymbol{a}.$$

Решение. Требуется решить систему, состоящую из заданных уравнений. Подставляя выражение для $\boldsymbol{r}$ из уравнения прямой в уравнение плоскости, находим:

$$\big(\boldsymbol{r}_0 + t\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n}\big) = D \iff (\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{n}) + t(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n}) = D. \tag{11.12}$$

Если $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n}) \neq 0$ (геометрически это означает, что прямая и плоскость не параллельны), последнее уравнение имеет единственное решение

$$t_0 = \frac{D - (\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{n})}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n})},$$

определяющее единственную точку пересечения $M_1(\boldsymbol{r}_1)$ прямой и плоскости:

$$\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r}_0 + \frac{D - (\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{n})}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n})}\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{r}_0(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n}) - \boldsymbol{a}(\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{n}) + D\boldsymbol{a}}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n})} =$$

$$= \frac{\big[\boldsymbol{n}, [\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{a}]\big] + D\boldsymbol{a}}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n})}. \tag{11.13}$$

Если же $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n}) = 0$, то уравнение (11.12) либо не имеет решений (если $(\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{n}) \neq D$, т.е. опорная точка $M_0(\boldsymbol{r}_0)$ прямой l не лежит в плоскости π — прямая и плоскость параллельны), либо — при $(\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{n}) = D$ — решением является любое число t (прямая лежит в плоскости).

Пример 11.5. Пусть на евклидовой плоскости даны точка $M_1(\boldsymbol{r}_1)$ и прямая l, заданная уравнением $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}) = D$. Найдите:

(а) радиус-вектор $\boldsymbol{r}_2$ точки M_2, являющейся ортогональной проекцией точки $M_1(\boldsymbol{r}_1)$ на прямую l;

(б) расстояние от точки $M_1(\boldsymbol{r}_1)$ до прямой l;

(в) радиус-вектор $\boldsymbol{r}_3$ точки M_3, симметричной точке $M_1(\boldsymbol{r}_1)$ относительно прямой l.

Решение. (а) Очевидно (см. рис. 11.2),

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1} = \lambda\boldsymbol{n}.$$

Умножим обе части последнего равенства скалярно на вектор $\boldsymbol{n}$:

$$\underbrace{(\overrightarrow{OM_2}, \boldsymbol{n})}_{=D} - \underbrace{(\overrightarrow{OM_1}, \boldsymbol{n})}_{=(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{n})} = \lambda(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n}),$$

откуда

$$\lambda = -\frac{(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{n}) - D}{(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n})},$$

так что для радиус-вектора $\boldsymbol{r}_2$ проекции M_2 точки M_1 на прямую имеем:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}_2 = \overrightarrow{OM_2} &= \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1M_2} = \\ &= \boldsymbol{r}_1 + \lambda\boldsymbol{n} = \\ &= \boldsymbol{r}_1 - \frac{(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{n}) - D}{(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n})}\boldsymbol{n}.\end{aligned}$$

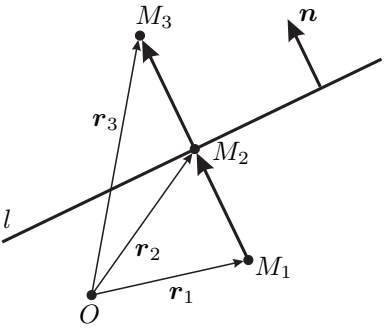


Рис. 11.2. К примеру 11.5

(б) Найдём расстояние от точки M_1 до прямой l:

$$d(M_1, l) = \left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| = \left|\frac{(\boldsymbol{r}_1, n) - D}{(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n})}\boldsymbol{n}\right| = \frac{|(\boldsymbol{r}_1, n) - D|}{|\boldsymbol{n}|}.$$

(в) Для радиус-вектора $\boldsymbol{r}_3$ точки M_3, симметричной точке M_1 относительно прямой, имеем:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}_3 = \overrightarrow{OM_3} &= \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1M_3} = \overrightarrow{OM_1} + 2\overrightarrow{M_1M_2} = \\ &= \boldsymbol{r}_1 + 2\lambda\boldsymbol{n} = \boldsymbol{r}_1 - 2\frac{(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{n}) - D}{(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n})}\boldsymbol{n}.\end{aligned}$$

Итак,

$$\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{r}_1 - \frac{(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{n}) - D}{(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n})}\boldsymbol{n}, \tag{11.14}$$

$$d(M_1, l) = \frac{|(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{n}) - D|}{|\boldsymbol{n}|}, \tag{11.15}$$

$$\boldsymbol{r}_3 = \boldsymbol{r}_1 - 2\frac{(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{n}) - D}{(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n})}\boldsymbol{n}. \tag{11.16}$$

Формула (11.15) в прямоугольных координатах выглядит следующим образом:

$$d(M_1, l) = \frac{\left|Ax_1 + By_1 - D\right|}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \tag{11.17}$$

где (x_1, y_1) — координаты точки M_1, (A, B) — координаты нормального вектора $\boldsymbol{n}$ прямой l.

Отметим, что формулы (11.14)–(11.16) сохраняют свой вид для трёхмерного случая, когда вместо прямой на плоскости $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}) = D$ рассматривается плоскость $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}) = D$ в пространстве (см. задачу 11.4). Формула для расстояния от точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ до плоскости $\pi : Ax + By + Cz = D$ (координаты декартовы прямоугольные) имеет вид

$$d(M_1, \pi) = \frac{\left|Ax_1 + By_1 + Cz_1 - D\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \tag{11.18}$$

Пример 11.6. Даны плоскость π и три прямые l_1, l_2, l_3:

$$\pi:\ \boldsymbol{r} = \begin{pmatrix}6\\3\\6\end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix}4\\6\\1\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}3\\4\\4\end{pmatrix}, \qquad l_1 : \boldsymbol{r} = \begin{pmatrix}34\\2\\6\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}24\\-7\\-1\end{pmatrix},$$

$$l_2:\ \boldsymbol{r} = \begin{pmatrix}9\\7\\10\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}, \qquad l_3:\ \boldsymbol{r} = \begin{pmatrix}26\\-10\\4\end{pmatrix} + u\begin{pmatrix}7\\10\\5\end{pmatrix}.$$

Для каждой из прямых выясните, пересекается ли она с плоскостью, лежит в плоскости или не имеет с ней общих точек. В случае пересечения найдите координаты общей точки и составьте векторное параметрическое уравнение прямой, которая является ортогональной проекцией заданной прямой на плоскость. В случае, когда прямая параллельна плоскости, найдите расстояние между ними.

Решение. Преобразуем уравнение плоскости π к нормальному виду $Ax + By + Cz = D$. Опорной точкой плоскости является точка $M_0(6; 3; 3)$, а направляющими векторами — $\boldsymbol{a} = (4; 6; 1)$ и $\boldsymbol{b} = (3; 4; 4)$. Если $M(x, y, z)$ — произвольная точка плоскости, то векторы $\overrightarrow{M_0M}$, $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ компланарны, так что определитель, составленный из их координат, равен нулю:

$$\begin{vmatrix} x-6 & y-3 & z-6 \\ 4 & 6 & 1 \\ 3 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad 20x - 13y - 2z = 69;$$

нормальный вектор плоскости есть $\boldsymbol{n} = (20; -13, -2)$, причём $|\boldsymbol{n}|^2 = 573$.

1. Вычислим скалярное произведение вектора $\boldsymbol{n}$ с направляющим вектором прямой l_1:

$$(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{a}_1) = \left(\begin{pmatrix} 20 \\ -13 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 24 \\ -7 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = 573.$$

Поскольку $(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{a}_1) \neq 0$, прямая l_1 пересекается с плоскостью π. Для нахождения их точки пересечения запишем параметрические уравнения прямой:

$$x = 34 + 24s, \quad y = 2 - 7s, \quad z = 6 - s.$$

Подставляя эти выражения в уравнение плоскости, находим значение параметра s, отвечающее точке пересечения:

$$20(34 + 24s) - 13(2 - 7s) - 2(6 - s) = 69 \quad \Rightarrow \quad s = -1.$$

Таким образом, координаты точки пересечения P_1

$$x = 34 + 24 \cdot (-1) = 10, \quad y = 2 - 7 \cdot (-1) = 9, \quad z = 6 - (-1) = 7.$$

Прямая m, являющаяся ортогональной проекцией прямой l_1 на плоскость π, проходит через точку $P_1(10; 9; 7)$ и имеет направляющий вектор $\boldsymbol{b}$, который является ортогональной проекцией вектора $\boldsymbol{a}_1$ на плоскость π. Согласно результату примера 7.2 (см. (7.2), с. 137)

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}_1 - \frac{(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{a}_1)}{(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n})}\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} 24 \\ -7 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{573}{573} \begin{pmatrix} 20 \\ -13 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Уравнение прямой m имеет вид

$$\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} 10 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. Вычислим скалярное произведение вектора $\boldsymbol{n}$ с направляющим вектором прямой l_2:

$$(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{a}_2) = \left(\begin{pmatrix} 20 \\ -13 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right) = 0.$$

Таким образом, векторы $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{a}_2$ ортогональны; это означает, что либо прямая лежит в плоскости, либо не имеет с ней общих точек. Проверим, лежит ли опорная точка $(9; 7; 10)$ прямой l_2 в плоскости π:

$$20 \cdot 9 - 13 \cdot 7 - 2 \cdot 10 = 69;$$

итак, прямая l_2 целиком содержится в плоскости π.

3. Для прямой l_3 анализ аналогичен:

$$(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{a}_3) = \left(\begin{pmatrix} 20 \\ -13 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix} \right) = 0,$$

т.е. векторы $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{a}_3$ ортогональны. Поскольку опорная точка $(26; -10; 4)$ прямой l_3 не лежит в плоскости π:

$$20 \cdot 26 - 13 \cdot (-10) - 2 \cdot 4 = 642 \neq 69,$$

эта прямая не имеет общих точек с плоскостью. Для нахождения расстояния между прямой l_3 и плоскостью π воспользуемся формулой (11.18):

$$d(M_3, \pi) = \frac{\left| Ax_1 + By_1 + Cz_1 - D \right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{69}{\sqrt{573}}.$$

Пример 11.7. Даны прямые l_1, l_2, l_3, l_4:

$$l_1 : \ \frac{x-3}{4} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-5}{1}, \qquad l_2 : \ \frac{x-4}{5} = \frac{y-5}{4} = \frac{z-5}{1},$$
$$l_3 : \ \frac{x}{5} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-5}{1}, \qquad l_4 : \ \frac{x+6}{5} = \frac{y+3}{4} = \frac{z-3}{1}.$$

Для каждой из шести возможных пар прямых выясните, являются они скрещивающимися, параллельными (совпадающими или нет) либо пересекающимися. Для скрещивающихся прямых найдите расстояние между ними, уравнения двух параллельных плоскостей, в которых лежат эти прямые, и каноническое уравнение их общего перпендикуляра (в качестве опорной точки возьмите точку пересечения этого общего перпендикуляра с одной из скрещивающихся прямых). Для пересекающихся прямых найдите координаты точки пересечения, уравнение плоскости, в которой лежат эти прямые, и угол между ними. Для несовпадающих параллельных прямых найдите уравнение плоскости, в которой лежат эти прямые, и расстояние между ними.

Решение. Отметим, что $\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{a}_4 = (5; 4; 1)$, т.е. прямые l_2, l_3 и l_4 коллинеарны.

1. Рассмотрим прямые l_1 и l_2:

$$l_1 : \ \frac{x-3}{4} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-5}{1}, \qquad l_2 : \ \frac{x-4}{5} = \frac{y-5}{4} = \frac{z-5}{1}.$$

Очевидно, их направляющие векторы $\boldsymbol{a}_1 = (4; 2; 1)$ и $\boldsymbol{a}_2 = (5; 4; 1)$ не коллинеарны, т.е. прямые не параллельны. Рассмотрим вектор

$\overrightarrow{M_1M_2}$, соединяющий опорные точки M_1 и M_2 данных прямых:

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1 = \begin{pmatrix}4\\5\\5\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\3\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}.$$

Выясним, компланарны ли векторы $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$, для чего вычислим их смешанное произведение:

$$\left(\overrightarrow{M_1M_2}, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\right) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Таким образом, эти векторы компланарны, так что прямые l_1 и l_2 лежат в одной плоскости и пересекаются. Для нахождения точки пересечения перепишем канонические уравнения прямых в параметрическом виде:

$$l_1:\ \frac{x-3}{4} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-5}{1} = t \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 3+4t, \\ y = 3+2t, \\ z = 5+t; \end{cases}$$

$$l_2:\ \frac{x-4}{5} = \frac{y-5}{4} = \frac{z-5}{1} = s \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 4+5s, \\ y = 5+4s, \\ z = 5+s. \end{cases}$$

Приравнивая выражения для одноимённых координат, получим переопределённую систему уравнений (которая, как нам заранее известно — ибо прямые пересекаются — имеет единственное решение)

$$\begin{cases} 3+4t = 4+5s, \\ 3+2t = 5+4s, \\ 5+t = 5+s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4t-5s = 1, \\ 2t-4s = 2, \\ t-s = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = -1, \\ s = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1, \\ y = 1, \\ z = 4. \end{cases}$$

Чтобы составить уравнение плоскости, в которой лежат прямые l_1 и l_2, найдём её нормальный вектор как векторное произведение направляющих векторов прямых l_1 и l_2:

$$\boldsymbol{n} = [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 4 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

В качестве опорной точки плоскости можно взять любую из опорных точек прямых l_1 или l_2 либо их точку пересечения (возьмём точку пересечения); в результате получаем

$$-2(x+1) + 1(y-1) + 6(z-4) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x - y - 6z + 27 = 0.$$

Наконец, найдём угол между прямыми:

$$\varphi = \arccos \frac{(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)}{|\boldsymbol{a}_1| \cdot |\boldsymbol{a}_1|} = \arccos \frac{29}{42}\sqrt{2}.$$

2. Рассмотрим прямые l_1 и l_3:

$$l_1 : \ \frac{x-3}{4} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-5}{1}, \qquad l_3 : \ \frac{x}{5} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-5}{1}.$$

Их направляющие векторы $\boldsymbol{a}_1 = (4; 2; 1)$ и $\boldsymbol{a}_3 = (5; 4; 1) = \boldsymbol{a}_2$ не коллинеарны, т.е. прямые не параллельны. Рассмотрим вектор $\overrightarrow{M_1M_3}$, соединяющий опорные точки M_1 и M_3 данных прямых:

$$\overrightarrow{M_1M_3} = \boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Выясним, компланарны ли векторы $\overrightarrow{M_1M_3}$, $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_3$, для чего вычислим их смешанное произведение:

$$\left(\overrightarrow{M_1M_3}, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_3\right) = \begin{vmatrix} -3 & -2 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0;$$

стало быть, векторы $\overrightarrow{M_1M_3}$, $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_3$ не компланарны, так что прямые l_1 и l_3 скрещиваются. Составим уравнения параллельных плоскостей, в которых лежат эти прямые. Искомые плоскости имеют общий нормальный вектор $\boldsymbol{n} = [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_3] = [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2] = (-2; 1; 6)$ (см. выше). В качестве опорных точек этих плоскостей возьмём опорные точки соответствующих прямых. В результате получаем уравнение плоскости π_1, содержащей прямую l_1:

$$-2(x-3) + 1(y-3) + 6(z-5) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x - y - 6z + 27 = 0,$$

и уравнение плоскости π_3, содержащей прямую l_3:

$$-2(x-0) + 1(y-2) + 6(z-5) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x - y - 6z + 32 = 0.$$

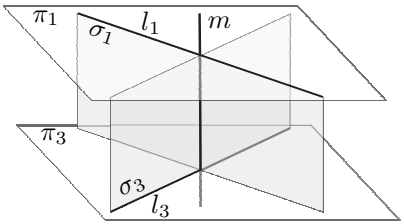


Рис. 11.3. Общий перпендикуляр к скрещивающимся прямым

Общий перпендикуляр к скрещивающимся прямым — это прямая m, представляющая собой пересечение двух плоскостей σ_1 и σ_3, каждая из которых содержит соответствующую прямую l_1 или l_3 и перпендикулярна к параллельным плоскостям π_1, π_3, содержащим данные скрещивающиеся прямые. Ясно, что направляющий вектор общего перпендикуляра совпадает с общим нормальным вектором плоскостей π_1 и π_3. Чтобы найти точки пересечения общего перпендикуляра m с самими скрещивающимися прямыми, составим уравнения плоскостей σ_1 и σ_3.

Плоскость σ_1 проходит через прямую l_1 перпендикулярно плоскости π_1; в качестве её опорной точки возьмём опорную точку $M_1(3;3;5)$ прямой l_1, а в качестве направляющих векторов — направляющий вектор $\boldsymbol{a}_1 = (4;2;1)$ прямой l_1 и общий нормальный вектор $\boldsymbol{n} = (2;-1;-6)$ плоскостей π_1 и π_3:

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-3 & z-5 \\ 4 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -6 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad 11x - 26y + 8z + 5 = 0.$$

Аналогично составляем уравнение плоскости σ_3: она проходит через прямую l_3 перпендикулярно плоскости π_3; в качестве её опорной точки возьмём опорную точку $M_3(0;2;5)$ прямой l_3, а в качестве направляющих векторов — направляющий вектор $\boldsymbol{a}_3 = (5;4;1)$ прямой l_3 и общий нормальный вектор $\boldsymbol{n} = (2;-1;-6)$ плоскостей π_1 и π_3:

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-2 & z-5 \\ 5 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & -6 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad 23x - 32y + 13z - 1 = 0.$$

Точка пересечения P_1 общего перпендикуляра m с прямой l_1 представляет собой точку пересечения плоскостей π_1, σ_1, σ_3:

$$\begin{cases} 2x - y - 6z + 27 = 0, \\ 11x - 26y + 8z + 5 = 0, \\ 23x - 32y + 13z - 1 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad P_1 = \frac{1}{41}\begin{pmatrix} -25 \\ 49 \\ 168 \end{pmatrix}.$$

Аналогично, точка пересечения P_3 общего перпендикуляра m с прямой l_3 представляет собой точку пересечения плоскостей π_3, σ_1 и σ_3:

$$\begin{cases} 2x - y - 6z + 32 = 0, \\ 11x - 26y + 8z + 5 = 0, \\ 23x - 32y + 13z - 1 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad P_3 = \frac{1}{41}\begin{pmatrix} -35 \\ 54 \\ 198 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, каноническое уравнение общего перпендикуляра к скрещивающимся прямым l_1 и l_3 можно записать в одной из следующих форм:

$$\frac{x + \frac{25}{41}}{-2} = \frac{y - \frac{49}{41}}{1} = \frac{z - \frac{168}{41}}{6} \quad \text{или} \quad \frac{x + \frac{35}{41}}{-2} = \frac{y - \frac{54}{41}}{1} = \frac{z - \frac{198}{41}}{6}.$$

В первом из этих уравнений в качестве опорной точки взята точка пересечения общего перпендикуляра с прямой l_1, а во втором — с l_3.

Расстояние между скрещивающимися прямыми найдём как расстояние между точками P_1 и P_3:

$$\overrightarrow{P_1P_3} = \frac{1}{41}\begin{pmatrix} -35 \\ 54 \\ 198 \end{pmatrix} - \frac{1}{41}\begin{pmatrix} -25 \\ 49 \\ 168 \end{pmatrix} = \frac{1}{41}\begin{pmatrix} -10 \\ 5 \\ 30 \end{pmatrix},$$

$$\left|\overrightarrow{P_1P_3}\right| = \frac{1}{41}\sqrt{(-10)^2 + 5^2 + 30^2} = \frac{5}{\sqrt{41}}.$$

Отметим, что расстояние между скрещивающимися прямыми можно вычислить по формуле (**??**) (см. решение задачи 11.11, с. **??**).

3. Рассмотрим прямые l_1 и l_4:

$$l_1: \ \frac{x-3}{4} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-5}{1}, \qquad l_4: \ \frac{x+6}{5} = \frac{y+3}{4} = \frac{z-3}{1}.$$

Поскольку направляющие векторы $\boldsymbol{a}_1 = (4;2;1)$ и $\boldsymbol{a}_4 = (5;4;1)$ не коллинеарны, прямые l_1 и l_4 не параллельны. Поскольку векторы $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_4$ и $\overrightarrow{M_1M_4} = \boldsymbol{r}_4 - \boldsymbol{r}_1$ компланарны, что подтверждается вычислением их смешанного произведения:

$$\overrightarrow{M_1M_4} = \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix}, \ \left(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_4, \overrightarrow{M_1M_4}\right) = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \\ -9 & -6 & -2 \end{vmatrix} = 0;$$

прямые l_1 и l_4 лежат в одной плоскости и пересекаются в единственной точке. Как и выше, можно найти уравнение плоскости, в которой лежат эти прямые, и их точку пересечения (далее будет показано, что прямые l_2 и l_4 совпадают, так что рассматриваемый случай фактически совпадает со случаем прямых l_1 и l_2, рассмотренным выше).

4. Рассмотрим прямые l_2 и l_3:

$$l_2:\ \frac{x-4}{5}=\frac{y-5}{4}=\frac{z-5}{1},\qquad l_3:\ \frac{x}{5}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-5}{1}.$$

Поскольку направляющие векторы $\boldsymbol{a}_2=(5;4;1)$ и $\boldsymbol{a}_3=(5;4;1)$ этих прямых равны, прямые параллельны. Так как векторы $\boldsymbol{a}_2$ и $\overrightarrow{M_2M_3}=\boldsymbol{r}_3-\boldsymbol{r}_2=(-4;-3;0)$ не коллинеарны, прямые l_2 и l_3 параллельны, но не совпадают. Составим уравнение плоскости, в которой лежат эти прямые; в качестве опорной точки возьмём опорную точку $M_2(4;5;5)$ прямой l_2, в качестве направляющих векторов — векторы $\boldsymbol{a}_2=(5;4;1)$ и $\overrightarrow{M_2M_3}=(-4;-3;0)$:

$$\begin{vmatrix} x-4 & y-5 & z-5 \\ 5 & 4 & 1 \\ -4 & -3 & 0 \end{vmatrix}=0\quad\Rightarrow\quad 3x-4y+z+3=0.$$

Коэффициенты при x, y, z в этом уравнении — это координаты вектора нормали плоскости, равного $[\boldsymbol{a}_2,\overrightarrow{M_2M_3}]$ (этот факт понадобится чуть позже).

Для нахождения расстояния d между параллельными прямыми l_2 и l_3 рассмотрим параллелограмм, сторонами которого являются векторы $\boldsymbol{a}_2$ и $\overrightarrow{M_2M_3}$ (см. рис. **??**(г), с. **??**). Площадь этого параллелограмма, с одной стороны, равна модулю векторного произведения $[\boldsymbol{a}_2,\overrightarrow{M_2M_3}]$, а с другой — произведению основания, равного $|\boldsymbol{a}_2|$, на высоту d (см. формулу (**??**), с. **??**). Таким образом,

$$d=\frac{\bigl|[\overrightarrow{M_2M_3},\boldsymbol{a}_2]\bigr|}{|\boldsymbol{a}_2|}=\frac{\sqrt{3^2+(-4)^2+1^2}}{\sqrt{5^2+4^2+1^2}}=\sqrt{\frac{13}{21}}.$$

5. Рассмотрим прямые l_2 и l_4:

$$l_2:\ \frac{x-4}{5}=\frac{y-5}{4}=\frac{z-5}{1},\qquad l_4:\ \frac{x+6}{5}=\frac{y+3}{4}=\frac{z-3}{1}.$$

Направляющие векторы $\boldsymbol{a}_2=(5;4;1)$ и $\boldsymbol{a}_4=(5;4;1)$ этих прямых совпадают, так что прямые параллельны. Поскольку векторы $\boldsymbol{a}_2$ и $\overrightarrow{M_2M_4}=\boldsymbol{r}_4-\boldsymbol{r}_2=(-10;-8;-2)$ коллинеарны, прямые l_2 и l_4 совпадают. Факт коллинеарности достаточно очевиден, поскольку векторы $\boldsymbol{a}_2$ и $\overrightarrow{M_2M_4}$ пропорциональны, но его можно установить, вычислив векторное произведение этих векторов:

$$\bigl[\boldsymbol{a}_2,\overrightarrow{M_2M_4}\bigr]=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 5 & 4 & 1 \\ -10 & -8 & -2 \end{vmatrix}=\boldsymbol{0}.$$

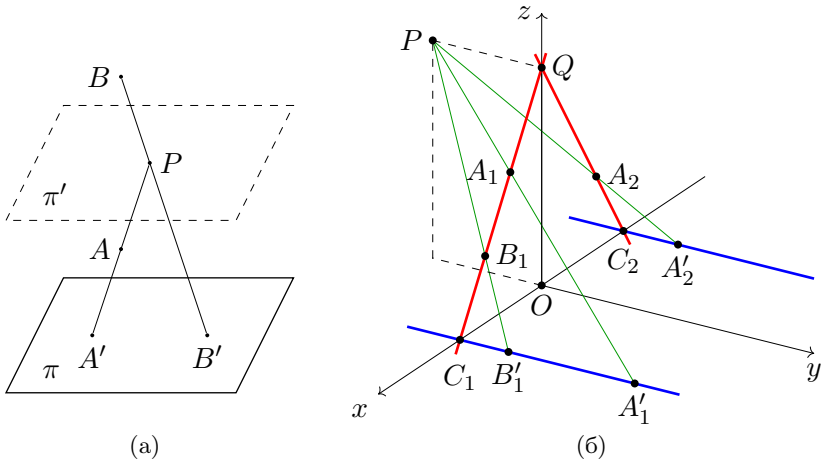


Рис. 11.4. К примеру 11.8

6. Наконец, рассмотрим прямые l_3 и l_4:

$$l_3:\ \frac{x}{5}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-5}{1},\qquad l_4:\ \frac{x+6}{5}=\frac{y+3}{4}=\frac{z-3}{1}.$$

Поскольку $l_2 = l_4$, задача тождественна рассмотрению прямых l_2 и l_3, которое было проведено выше.

Пример 11.8. Рассмотрим в пространстве плоскость π и точку P, не лежащую на этой плоскости. *Центральной проекцией* точки A на плоскость π из точки P называется точка A' пересечения прямой PA с плоскостью π. Точка P называется *центром проектирования*, прямая PA — *проектирующей прямой* (см. рис. 11.4(а)). Ясно, что точки, лежащие на плоскости π', проходящей через точку P параллельно плоскости π, не имеют центральных проекций на π с центром P. В планиметрической ситуации центральная проекция точки на прямую определяется аналогично.

В декартовой прямоугольной системе координат $Oxyz$ даны точки $Q(0;0;1)$, $P(0;-1;1)$; точка C — произвольная точка оси Ox. Найдите центральную проекцию прямой QC на плоскость Oxy с центром проектирования P.

Решение. На рис. 11.4(б) изображены два варианта расположения точки C на оси Ox: C_1 и C_2; соответствующие прямые QC_1 и QC_2 изображены красным цветом, на каждой из этих прямых выбраны произвольные точки (A_1 и B_1 — на прямой QC_1, A_2 — на прямой QC_2). Зелёным цветом изображены проектирующие прямые, синим — проекции прямых QC_1 и QC_2 на плоскость Oxy.

Пусть точка C имеет координаты $C(c;0;0)$; тогда координаты векторов $\overrightarrow{QC}$ и $\overrightarrow{QA} = \alpha \cdot \overrightarrow{QC}$ равны

$$\overrightarrow{QC} = \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{QA} = \alpha \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

так что параметр α определяет положение точки A на прямой QC; $\alpha \in (-\infty, +\infty)$. Далее,

$$\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QA} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha c \\ 1 \\ -\alpha \end{pmatrix}$$

— направляющий вектор проектирующей прямой PA, которая, таким образом, имеет параметрические уравнения

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \alpha c \\ 1 \\ -\alpha \end{pmatrix}.$$

Пересечение этой прямой с плоскостью $z = 0$ происходит при значении параметра $t_0 = 1/\alpha$, так что координаты точки пересечения A' равны

$$x = c, \quad y = -1 + \frac{1}{\alpha}, \quad z = 0;$$

первые два соотношения представляют собой уравнения проекции прямой QC на плоскость Oxy, в котором роль параметра играет $\alpha \in \mathbb{R}$. Значение $\alpha = 0$, при котором выражение для y не имеет смысла, соответствует случаю, когда точка A совпадает с точкой Q: эта точка не имеет центральной проекции из точки P на плоскость Oxy. Если $\alpha \to \pm\infty$ (геометрически это означает неограниченное удаление точки A от точки Q вдоль прямой QC), то $y \to -1$ (при этом $y \neq -1$ ни при каком значении $\alpha \in \mathbb{R}$). Таким образом, центральной проекцией прямой QC на плоскость Oxy из точки P является прямая в плоскости Oxy, проходящая через точку C параллельно оси Oy, из которой удалена точка $(c;-1)$.

3. Задачи для самостоятельного решения

11.1. Даны плоскость π и три прямые l_1, l_2, l_3:

$$\pi: \ \boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad l_1: \ \boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} -9 \\ 40 \\ -15 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix},$$

$$l_2:\ \boldsymbol{r}=\begin{pmatrix}6\\7\\2\end{pmatrix}+u\begin{pmatrix}-5\\1\\5\end{pmatrix},\qquad l_3:\ \boldsymbol{r}=\begin{pmatrix}-7\\46\\-3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}4\\-19\\5\end{pmatrix}.$$

Для каждой из прямых выясните, пересекается ли она с плоскостью, лежит в плоскости или не имеет с ней общих точек. В случае пересечения найдите координаты общей точки плоскости и прямой и составьте векторное параметрическое уравнение прямой, которая является ортогональной проекцией заданной прямой на плоскость. В случае, когда прямая параллельна плоскости, найдите расстояние между ними.

11.2. Даны прямые l_1, l_2, l_3, l_4. Для каждой из шести возможных пар прямых: (l_1,l_2); (l_1,l_3); (l_1,l_4); (l_2,l_3); (l_2,l_4); (l_3,l_4), выясните, являются ли они скрещивающимися, пересекающимися, параллельными или совпадающими. Для скрещивающихся прямых найдите расстояние между ними, составьте уравнение их общего перпендикуляра в векторной параметрической форме и найдите координаты точек пересечения общего перпендикуляра с каждой из прямых. Для пересекающихся прямых найдите координаты точки пересечения и уравнение плоскости, в которой лежат эти прямые. Для параллельных прямых найдите уравнение плоскости, в которой лежат эти прямые, и расстояние между ними.

$$\begin{cases} x=-4,\\ y=-1+2t,\\ z=8+2t; \end{cases}\quad \begin{cases} x=-4,\\ y=-3+2t,\\ z=6+2t; \end{cases}\quad \begin{cases} x=-4-2t,\\ y=4+3t,\\ z=4+2t; \end{cases}\quad \begin{cases} x=-2,\\ y=5-4t,\\ z=6-4t. \end{cases}$$

11.3. Не пользуясь метрическими понятиями, проведите анализ взаимного расположения в пространстве двух прямых, заданных уравнениями $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{p}+s\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{q}+t\boldsymbol{b}$.

11.4. В евклидовом пространстве даны точка $M_1(\boldsymbol{r}_1)$ и плоскость π, заданная уравнением $(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})=D$. Найдите:

(а) радиус-вектор $\boldsymbol{r}_2$ точки M_2, являющейся ортогональной проекцией точки $M_1(\boldsymbol{r}_1)$ на плоскость π;
(б) расстояние от точки $M_1(\boldsymbol{r}_1)$ до плоскости π;
(в) радиус-вектор $\boldsymbol{r}_3$ точки M_3,симметричной точке $M_1(\boldsymbol{r}_1)$ относительно плоскости π.

11.5 (р)**.** В евклидовом пространстве даны точка $M_1(\boldsymbol{r}_1)$ и прямая l, заданная уравнением $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+t\boldsymbol{a}$. Найдите:

(а) радиус-вектор $\boldsymbol{r}_2$ точки M_2, являющейся ортогональной проекцией точки $M_1(\boldsymbol{r}_1)$ на прямую l;
(б) расстояние от точки $M_1(\boldsymbol{r}_1)$ до прямой l;

(в) радиус-вектор $\boldsymbol{r}_3$ точки M_3, симметричной точке $M_1(\boldsymbol{r}_1)$ относительно прямой l.

11.6 (у)**.** Решите задачу 11.5 при условии, что прямая l

(1) задана уравнением Плюккера $[\boldsymbol{r}, \boldsymbol{a}] = \boldsymbol{b}$;
(2) является пересечением двух плоскостей $\pi_1 : (\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}_1) = D_1$ и $\pi_1 : (\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}_2) = D_2$ (в этом случае исходную точку удобнее обозначить $M_0(\boldsymbol{r}_0)$ вместо $M_1(\boldsymbol{r}_1)$).

11.7 (см. пример 11.4)**.** Проведите анализ взаимного расположения плоскости π и прямой l в евклидовом пространстве, которые заданы уравнениями

$$\pi : (\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}) = D, \quad l : [\boldsymbol{r}, \boldsymbol{a}] = \boldsymbol{b}, \ (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 0.$$

11.8. Найдите ортогональную проекцию точки $M_0(\boldsymbol{r}_0)$ на плоскость $\pi : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + u\boldsymbol{a} + v\boldsymbol{b}$ и расстояние от точки до плоскости.

11.9. Найдите расстояние между двумя параллельными плоскостями: (а) $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + u\boldsymbol{a} + v\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 + u\boldsymbol{a} + v\boldsymbol{b}$; (б) $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}) = D_1$ и $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}) = D_2$.

11.10. Составьте уравнение плоскости, проходящей через прямую и точку $M_1(\boldsymbol{r}_1)$, не лежащую на этой прямой, если прямая задана уравнением (а) $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + t\boldsymbol{a}$; (б) $[\boldsymbol{r}, \boldsymbol{a}] = \boldsymbol{b}$.

11.11 (у)**.** Две прямые в евклидовом пространстве заданы уравнениями $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + s\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 + t\boldsymbol{a}_2$. Для каждого из возможных вариантов взаимного расположения этих прямых (см. задачу 11.3) выполните следующие задания:

(1) для скрещивающихся прямых:
   (а) составьте уравнение общего перпендикуляра к этим прямым;
   (б) составьте уравнение прямой, пересекающей обе заданные прямые и проходящей через точку $M_0(\boldsymbol{r}_0)$, не лежащую ни на одной из заданных прямых;
   (в) найдите расстояние между скрещивающимися прямыми;
(2) для пересекающихся прямых:
   (а) составьте уравнение плоскости, содержащей обе заданные прямые;
   (б) найдите точку пересечения прямых;
(3) для параллельных прямых:
   (а) составьте уравнение плоскости, содержащей обе заданные прямые;
   (б) найдите расстояние между прямыми.

11.12 (у)**.** Решите задачу 11.11 при условии, что прямые заданы уравнениями Плюккера $[\boldsymbol{r}, \boldsymbol{a}_1] = \boldsymbol{b}_1$, где $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}_1) = 0$, и $[\boldsymbol{r}, \boldsymbol{a}_2] = \boldsymbol{b}_2$, где $(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_2) = 0$.

11.13. Составьте уравнение перпендикуляра, опущенного из точки $M_0(\boldsymbol{r}_0)$ на прямую, заданную

(а) параметрическим уравнением $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + t\boldsymbol{a}$;
(б) уравнением Плюккера $[\boldsymbol{r}, \boldsymbol{a}] = \boldsymbol{b}$;
(в) как пересечение плоскостей $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}_1) = D_1$ и $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}_2) = D_2$.

11.14 (см. пример 11.8)**.** Рассмотрим окружность $x^2 + (z-1)^2 = 1$, лежащую в плоскости Oxz декартовой прямоугольной системе координат $Oxyz$ в пространстве. Найдите центральную проекцию этой окружности на плоскость Oxy с центром проектирования $P(0; -2; 2)$.

ГЛАВА 12

Конические сечения

1. Основные понятия и факты

А. Эллипс, гипербола и парабола как сечения конуса.

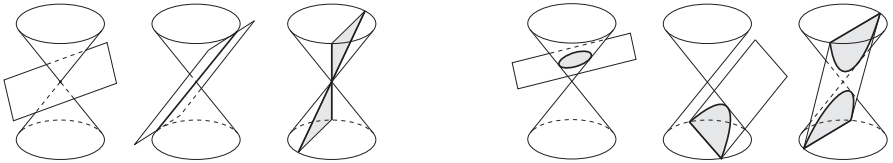
12.1. Эллипс, гипербола и парабола впервые появились в работах древнегреческих математиков; античные авторы называют первым исследователем этих линий Менехма (IV в. до н.э.), который определял их как сечения кругового конуса плоскостью, перпендикулярной одной из образующих. Труды Менехма до нашего времени не дошли, в отличие от посвящённых коническим сечениям сочинений Аполлония Пергского (III в. до н.э.), который считается одним из трёх (наряду с Евклидом и Архимедом) великих геометров античности. Аполлоний изучал сечения конуса плоскостью, которая не обязательно перпендикулярна одной из образующий, впервые рассмотрел двуполостный конус, что позволило обнаружить вторую ветвь гиперболы, и предложил названия «эллипс», «гипербола» и «парабола» для конических сечений, или коник.

12.2. Проведём через центр окружности перпендикуляр m к плоскости этой окружности и на нём возьмём точку S. Прямые, каждая из которых проходит через S и какую-либо точку окружности, образуют поверхность, называемую *конусом* с осью m и вершиной S; сами эти прямые называются образующими конуса. Конус имеет вид двух расширяющихся трубок, называемых полами конуса.

12.3. Плоскость, проходящая через вершину конуса, может занимать относительно этого конуса следующие три положения (см. рис. 12.1(а)):

(i) иметь с конусом лишь одну общую точку — вершину конуса,
(ii) касаться конуса вдоль его образующей,
(iii) пересекать конус по двум его различным образующим.

Плоскость же, не проходящая через вершину конуса, может занимать относительно этого конуса следующие три положения (см. рис. 12.1(б)):



(а) (б)

Рис. 12.1. Пересечение конуса и плоскости

(i) пересекать все образующие конуса (в этом случае плоскость пересекает только одну полу конуса),
(ii) быть параллельной одной образующей конуса (в этом случае плоскость также пересекает только одну полу конуса),
(iii) быть параллельной двум различным образующим конуса (в этом случае плоскость пересекает обе полы конуса).

Описанные ниже геометрические конструкции были предложены Ж. Данделеном[1]. Рисунки 12.2–12.4 взяты из книги [**?**].

12.4. Рассмотрим сечение конуса с вершиной S плоскостью π, пересекающей только одну полу конуса и не перпендикулярной оси m. Впишем в конус две сферы, касающиеся плоскости π в точках F_1 и F_2 (см. рис. 12.2).

Пусть M — произвольная точка на линии пересечения конуса с плоскостью π. Проведём через точку M образующую SM и обозначим точки её пересечения с вписанными сферами через A_1 и A_1. Тогда

$$|MF_1| = |MA_1|, \quad |MF_2| = |MA_2|$$

согласно свойству касательных к сфере, проведённых из одной точки. Следовательно,

$$|MF_1| + |MF_2| = |MA_1| + |MA_2| = |A_1A_2| = \text{const},$$

поскольку отрезок A_1A_2 — это отрезок образующей, заключённый между двумя параллельными плоскостями, длина которого не зависит от выбора образующей (т.е. от выбора точки M). Итак, любая точка M линии пересечения конуса с плоскостью π обладает свойством

$$|MF_1| + |MF_2| = \text{const};$$

эта линия называется *эллипсом*, а точки F_1 и F_2 — его *фокусами*.

[1]Жерминаль Пьер Данделен (Germinal Pierre Dandelin; 1794–1847) — бельгийский математик.

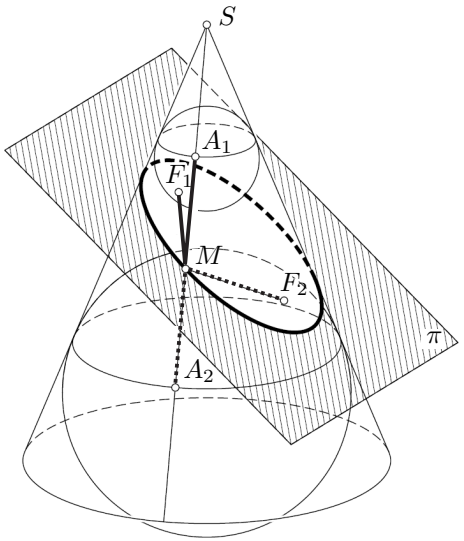


Рис. 12.2. Конструкция Данделена для эллипса

12.5. Аналогично доказывается (см. рис. 12.3), что если секущая плоскость обе полы конуса, то в сечении образуется линия, каждая точка M которой удовлетворяет условию

$$|MF_1| - |MF_2| = \text{const};$$

эта линия называется *гиперболой*, а точки F_1 и F_2 — её *фокусами*.

12.6. Наконец, рассмотрим случай, когда секущая плоскость π параллельна одной из образующей (см. рис. 12.4). Впишем в конус сферу, касающуюся этой плоскости в точке F. Эта сфера касается конуса по окружности, лежащей в плоскости, которую мы обозначим σ. Пусть l — точка пересечения плоскостей π и σ. Возьмём произвольную точку M сечения конуса плоскостью π и найдём точку A пересечения образующей SM с плоскостью σ и проекцию B точки M на прямую l. Тогда $|MF| = |MA|$ как касательные к сфере. С другой стороны, точки A и B лежат в плоскости σ, угол между прямой MA и плоскостью σ (т.е. угол между образующей конуса и плоскостью, перпендикулярной его оси) равен углу между прямой MB и плоскостью σ (т.е. углу между плоскостями π и σ). Поэтому $|MA| = |MB|$ как наклонные, образующие равные углы с плоскостью σ и, следовательно, $|MF| = |MB|$. Линия, каждая точка которой обладает указанным свойством, называется *параболой*, точка F — *фокусом* этой параболы, а прямая l — её *директрисой*.

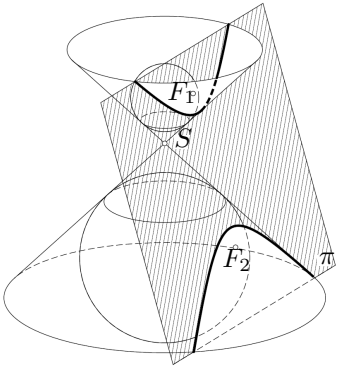


Рис. 12.3. Конструкция Данделена для гиперболы

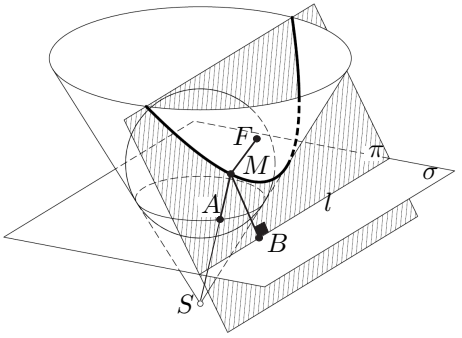


Рис. 12.4. Конструкция Данделена для параболы

Б. Эллипс.

12.7. ***Фокальное определение эллипса.*** *Эллипсом* называется множество точек M евклидовой плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух фиксированных точек F_1 и F_2 (называемых *фокусами* эллипса) есть постоянная величина $2a$; требуется чтобы эта величина была больше расстояния $2c$ между фокусами:

$$|MF_1| + |MF_2| = 2a = \text{const}, \quad 2a > |F_1F_2| = 2c.$$

12.8. Сумма расстояний $|MF_1| + |MF_2|$ *не может быть меньше* расстояния между фокусами в силу неравенства треугольника. Если же эта сумма равна $|F_1F_2|$, то получается отрезок, соединяющий фокусы. Оба эти случая исключаются из рассмотрения оговоркой в конце определения 12.7.

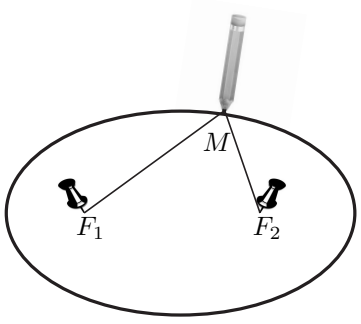


Рис. 12.5. Вычерчивание эллипса

12.9. Из определения 12.7 вытекает следующий способ построения эллипса, лежащий в основе различных технических приспособлений для вычерчивания этой линии. Закрепим в фокусах F_1 и F_2 концы нерастяжимой нити, натянем её острием карандаша и проведём линию, держа нить натянутой. Полученная кривая представляет собой дугу эллипса (см. рис. 12.5).

12.10. Выведем уравнение эллипса в прямоугольной декартовой системе координат, ось абсцисс которой проходит через фокусы F_1 и F_2 (она называется *фокальной осью* эллипса), а началом является середина отрезка F_1F_2; такая система координат называется *канонической* для рассматриваемого эллипса.

Координаты фокусов эллипса относительно канонической системы координат суть $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$, где $c>0$ (см. п. 12.7). Рассмотрим произвольную точку плоскости $M(x,y)$; направленные отрезки $\overrightarrow{F_1M}$, $\overrightarrow{F_2M}$ называются *фокальными радиусами* точки M; их длины вычисляются по формулам

$$|F_1M|=\sqrt{(x+c)^2+y^2},\quad |F_2M|=\sqrt{(x-c)^2+y^2}. \tag{12.1}$$

Согласно определению, точка M лежит на эллипсе при выполнении условия

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a.$$

Преобразуем полученное уравнение. Для этого перенесём второй радикал в правую часть и возведём обе части уравнения в квадрат:

$$(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2.$$

После раскрытия скобок и приведения подобных членов получим

$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-cx.$$

Возводя ещё раз в квадрат обе части этого равенства, получим после упрощений

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2).$$

Так как $a>c$, то число a^2-c^2 положительно; обозначим его b^2:

$$b^2=a^2-c^2;$$

очевидно, $b^2<a^2$. Тогда последнее уравнение можно переписать в виде

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$$

или

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\quad a>b>0. \tag{12.2}$$

Это уравнение называется *каноническим уравнением эллипса.*

12.11. Мы установили, что координаты каждой точки эллипса удовлетворяют уравнению (12.2). Проверим обратное утверждение, а именно, что каждая точка $M(x,y)$, координаты которой удовлетворяют уравнению (12.2), лежит на эллипсе, т.е. что для неё выполнено условие $|F_1M|+|F_2M|=2a$. Это не очевидно, поскольку

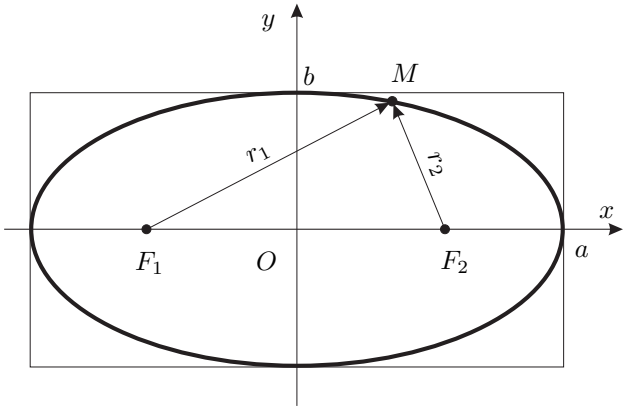


Рис. 12.6. Эллипс в канонической системе координат

при преобразованиях мы дважды возводили уравнение в квадрат, так что могли появиться «посторонние решения».

Отношение $\varepsilon = c/a$ называется *эксцентриситетом* эллипса; очевидно, $\varepsilon < 1$, поскольку $c < a$. Пусть $M(x, y)$ — решение уравнения (12.2); ясно, что $|x| \leqslant a$, $|y| \leqslant b$. Тогда

$$r_1 = |F_1M| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{(x+c)^2 + b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)} =$$
$$= \sqrt{x^2 + 2xc + c^2 + b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2} = \sqrt{x^2\varepsilon^2 + 2x\varepsilon a + a^2} =$$
$$= \sqrt{(x\varepsilon + a)^2} = |x\varepsilon + a| = a + x\varepsilon$$

(при раскрытии модуля мы воспользовались тем, что $|x\varepsilon| \leqslant a$, поскольку $|x| \leqslant a$ и $\varepsilon < 1$). Аналогично получаем

$$r_2 = |F_2M| = a - x\varepsilon.$$

Поэтому

$$|F_1M| + |F_2M| = 2a,$$

т.е. точка M с координатами (x, y) лежит на эллипсе.

Итак, доказано следующее утверждение.

12.12. Предложение (о каноническом уравнении эллипса)**.** *Линия на евклидовой плоскости является эллипсом тогда и только тогда, когда существует такая прямоугольная декартова система координат (называемая канонической системой координат), в которой эта линия имеет уравнение* (12.2)*.*

12.13. ***Исследование формы эллипса.*** Поскольку каноническое уравнение эллипса не изменяется при замене x на $-x$, эллипс симметричен относительно оси Oy. Аналогично, поскольку уравнение не изменяется при замене y на $-y$, эллипс симметричен относительно оси Ox.

Из уравнения (12.2) следует, что

$$\left|\frac{x^2}{a^2}\right| \leqslant 1, \quad \left|\frac{y^2}{b^2}\right| \leqslant 1,$$

т.е. эллипс целиком содержится в прямоугольнике, определяемом неравенствами $|x| \leqslant |a|$ и $|y| \leqslant |b|$. Эти соображения позволяют сделать выводы о внешнем виде эллипса (см. рис. 12.6).

12.14. Из выражения для длины левого фокального радиуса находим

$$r_1 = a + x\varepsilon = \varepsilon\left(x + \frac{a}{\varepsilon}\right) = \varepsilon d_1;$$

выражение в скобках представляет собой расстояние d_1 от точки $M(x, y)$ до прямой $x = -a/\varepsilon$, называемой *левой директрисой* эллипса (см. рис. 12.7).

Аналогичным образом из выражения $r_2 = a - x\varepsilon$ для длины правого фокального радиуса находим

$$r_2 = a - x\varepsilon = \varepsilon\left(\frac{a}{\varepsilon} - x\right) = \varepsilon d_2;$$

выражение в скобках представляет собой расстояние d_2 от точки $M(x, y)$ до *правой директрисы* эллипса, задаваемой уравнением $x = a/\varepsilon$. Таким образом, доказано следующее утверждение.

12.15. Теорема (директориальное свойство эллипса)**.** *Отношение расстояния r_1 (соответственно r_2) от каждой точки эллипса до его левого (соответственно правого) фокуса к расстоянию d_1 (соответственно d_2) от этой точки до левой (соответственно правой) директрисы одинаково для всех точек эллипса и равно эксцентриситету*:

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = \varepsilon < 1.$$

Обратно, множество всех точек плоскости, обладающих указанным свойством (т.е. таких, для которых отношение расстояния до фиксированной точки к расстоянию до фиксированной прямой одно и то же и меньше 1), представляет собой эллипс.

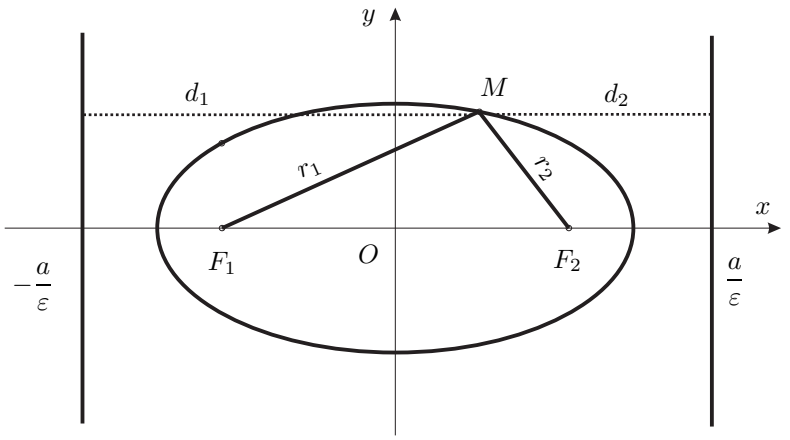


Рис. 12.7. Директрисы эллипса

12.16. Отметим, что эллипс может быть определён не только фокальным определением 12.7, но также своим каноническим уравнением либо директориальным свойством (тогда фокальное определение превратится в теорему — фокальное свойство эллипса).

12.17. Перечислим основные термины, связанные с эллипсом:

(i) ось Ox — большая (фокальная) ось;
(ii) ось Oy — малая ось;
(iii) точки $(\pm a, 0)$, $(0, \pm b)$ — вершины эллипса;
(iv) точки $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$ — фокусы эллипса;
(v) точка $O(0, 0)$ — центр эллипса;
(vi) число a — большая полуось;
(vii) число b — малая полуось;
(viii) число $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ — линейный эксцентриситет;
(ix) число $2c = |F_1F_2|$ — фокусное расстояние;
(x) число $\varepsilon = c/a < 1$ — (числовой) эксцентриситет;
(xi) прямые $x = -a/\varepsilon$, $x = a/\varepsilon$ — директрисы.

B. Гипербола.

12.18. ***Фокальное определение гиперболы.*** *Гиперболой* называется множество точек M евклидовой плоскости, модуль разности расстояний от каждой из которых до двух фиксированных точек F_1 и F_2 (называемых *фокусами* гиперболы) есть постоянная величина $2a$; требуется, чтобы эта величина была меньше расстояния $2c$ между фокусами и отлична от нуля:

$$\big||MF_1| - |MF_2|\big| = 2a = \text{const}, \quad 2a < |F_1F_2| = 2c.$$

12.19. Разность расстояний от произвольной точки M до двух фиксированных точек F_1 и F_2 *не может быть больше* расстояния $|F_1F_2|$ в силу неравенства треугольника. Эта разность *равна* расстоянию $|F_1F_2|$ тогда и только тогда, когда точка M находится на прямой (F_1F_2) вне отрезка $[F_1F_2]$. Если же разность расстояний $|MF_1| - |MF_2|$ равна нулю, т.е. точка M равноудалена от F_1 и F_2, то она лежит на серединном перпендикуляре к отрезку F_1F_2. Указанные случаи исключаем из рассмотрения оговоркой в конце определения 12.18.

12.20. На определении 12.18 основан способ вычерчивания гиперболы (точнее, одной её ветви), аналогичный построению эллипса, описанному в п. 12.9.

Вколем в лист бумаги две булавки (в этих точках будут находиться фокусы гиперболы F_1 и F_2). Возьмём две нити, разность длин которых $2a$ меньше расстояния между фокусами $2c$, конец каждой нити привяжем к булавкам, а оставшиеся концы свяжем узлом (точка C). Держа теперь узел в левой руке, зацепим обе нити остриём карандаша M и будем двигать карандаш по бумаге так, чтобы обе нити F_1MC и F_2MC были все время натянуты. Тогда остриё M карандаша все время находится на одной ветви гиперболы с фокусами F_1 и F_2, так как

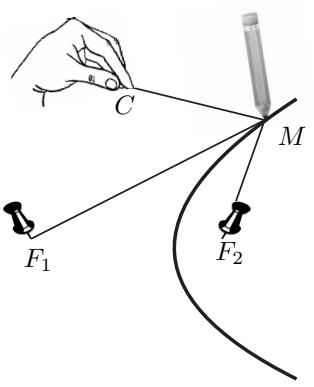


Рис. 12.8. Вычерчивание гиперболы

$$|F_1M| - |F_2M| = \big(|F_1M| + |MC|\big) - \big(|F_2M| + |MC|\big) = 2a.$$

Если поменять местами булавки с привязанными к ним нитями, получится вторая ветвь гиперболы; вычерченные дуги гиперболы будут тем длиннее, чем длиннее нити.

12.21. Выведем уравнение гиперболы в прямоугольной декартовой системе координат, ось абсцисс которой проходит через фокусы F_1 и F_2, а началом является середина отрезка F_1F_2; такая система координат называется *канонической* для рассматриваемой гиперболы.

Пусть фокусы имеют координаты $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$. Рассмотрим фокальные радиусы $\overrightarrow{F_1M}$, $\overrightarrow{F_2M}$ произвольной точки $M(x, y)$ плоскости (см. п. 12.10); их длины выражаются формулами (12.1):

$$r_1 = |F_1M| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, \quad r_2 = |F_2M| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Согласно определению, уравнение гиперболы имеет вид

$$\left|\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right| = 2a = \text{const}\,.$$

Уничтожив радикалы (ср. п. 12.10), придем к уравнению

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{c^2-a^2}=1.$$

Введя обозначение $b^2=c^2-a^2$, перепишем уравнение в виде

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Это уравнение называется *каноническим уравнением гиперболы*.

12.22. Обратно, покажем, что любая точка $M(x,y)$, координаты которой являются решением этого уравнения, лежит на гиперболе.

Введём обозначение $\varepsilon = c/a$; очевидно, $\varepsilon > 1$. Число ε называется *эксцентриситетом гиперболы*. Квадрат левого фокального радиуса точки $M(x,y)$ равен

$$\begin{aligned} r_1^2 = |F_1M|^2 &= (x+c)^2+y^2 = (x+c)^2+b^2\left(\frac{x^2}{a^2}-1\right) = \\ &= \left(\frac{b^2}{a^2}+1\right)x^2+2xc+c^2-b^2 = \frac{c^2}{a^2}x^2+2cx+a^2 = \\ &= \varepsilon^2x^2+2\varepsilon^2ax+a^2 = (\varepsilon x+a)^2. \end{aligned}$$

Поскольку $|\varepsilon x| > |x| \geqslant a$, имеем

$$r_1 = \begin{cases} x\varepsilon + a, & x > 0, \\ -x\varepsilon - a, & x < 0. \end{cases}$$

Аналогично для правого фокального радиуса получаем

$$r_2 = \begin{cases} x\varepsilon - a, & x > 0, \\ -x\varepsilon + a, & x < 0. \end{cases}$$

Следовательно,

$$|r_1 - r_2| = \begin{cases} 2a, & x > 0, \\ -2a, & x < 0. \end{cases}$$

Таким образом, точка $M(x,y)$ лежит на гиперболе.

12.23. Предложение (о каноническом уравнении гиперболы)**.** *Линия на евклидовой плоскости является гиперболой тогда и только тогда, когда существует такая прямоугольная декартова*

система координат (называемая канонической системой координат), в которой эта линия имеет уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{12.3}$$

12.24. ***Исследование формы гиперболы.*** Поскольку каноническое уравнение гиперболы не изменяется при замене x на $-x$, и при замене y на $-y$, гипербола симметрична относительно обеих координатных осей.

Из уравнения (12.3) следует, что

$$\frac{x^2}{a^2} = 1 + \frac{y^2}{b^2} \geqslant 1 \quad \Rightarrow \quad |x| \geqslant |a|,$$

т.е. внутри полосы $|x| < |a|$ точек гиперболы нет. Поскольку при $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ имеем

$$y = b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} = b\frac{x}{a}\underbrace{\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}}_{<1} < \frac{b}{a}x,$$

часть гиперболы, расположенная в первом квадранте, лежит строго ниже прямой $y = \dfrac{b}{a}x$. Более того, применив асимптотическое разложение (см. курс математического анализа)

$$\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}} = 1 - \frac{1}{2}\frac{a^2}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right), \quad x \to \infty,$$

получаем:

$$\begin{aligned} y &= b\frac{x}{a}\left(1 - \frac{a^2}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = \\ &= \frac{b}{a}x - \frac{ab}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{b}{a}x + o(1). \end{aligned}$$

Таким образом, принимая во внимание симметричность гиперболы относительно осей координат, можем сделать вывод, что прямые

$$y = \pm\frac{b}{a}x \iff \frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 0$$

являются *наклонными асимптотами* гиперболы.

Всё вышесказанное позволяет сделать выводы о внешнем виде гиперболы (см. рис. 12.9).

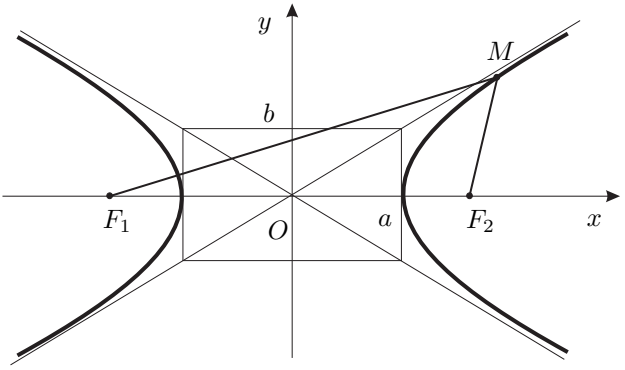


Рис. 12.9. Гипербола в канонической системе координат

12.25. Аналогично тому, как это было сделано в случае эллипса, назовём *директрисами* гиперболы прямые

$$x = -a/\varepsilon, \quad x = a/\varepsilon.$$

Справедливо следующее утверждение (читателю предлагается доказать его самостоятельно).

12.26. Теорема (директориальное свойство гиперболы, см. рис. 12.10)**.** *Отношение расстояния* r_1 (*соответственно* r_2) *от каждой точки гиперболы до её левого* (*соответственно правого*) *фокуса к расстоянию* d_1 (*соответственно* d_2) *от этой точки до левой* (*соответственно правой*) *директрисы одинаково для всех точек гиперболы и равно эксцентриситету*:

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = \varepsilon > 1$$

Обратно, множество всех точек плоскости, обладающих указанным свойством (*т.е. таких, для которых отношение расстояния до фиксированной точки к расстоянию до фиксированной прямой одно и то же и больше* 1)*, представляет собой гиперболу.*

12.27. Как и в случае эллипса, гипербола может быть определена не только с помощью фокального свойства, но и с помощью канонического уравнения или директориального свойства (в этом случае фокальное определение превращается в теорему — фокальное свойство гиперболы).

12.28. Основные термины, связанные с гиперболой:

(i) ось OX — вещественная (фокальная) ось;
(ii) ось OY — мнимая (сопряжённая) ось;
(iii) точки $(\pm a, 0)$ — вершины гиперболы;

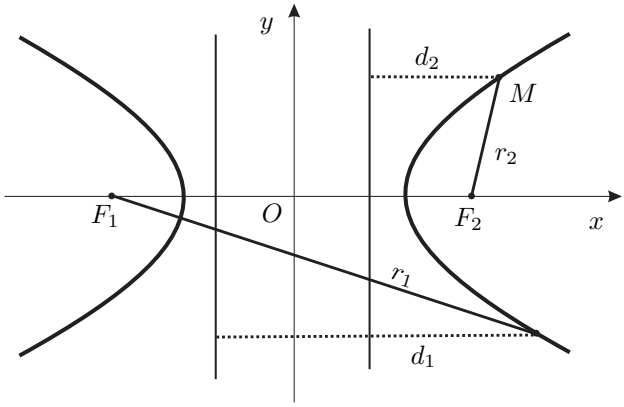


Рис. 12.10. Директрисы гиперболы

(iv) точки $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$ — фокусы гиперболы;
(v) точка $O(0,0)$ — центр гиперболы;
(vi) прямые $x/a + y/b = 0$, $x/a - y/b = 0$ — асимптоты гиперболы;
(vii) число a — вещественная полуось;
(viii) число b — мнимая полуось;
(ix) число $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ — линейный эксцентриситет;
(x) число $\varepsilon = c/a > 1$ — (числовой) эксцентриситет;
(xi) число $2c$ — фокусное расстояние;
(xii) прямые $x = -a/\varepsilon$, $x = a/\varepsilon$ — директрисы;
(xiii) прямоугольник со сторонами, параллельными осям гиперболы и равными $2a$ и $2b$, диагонали которого лежат на асимптотах, — основной прямоугольник гиперболы (см. рис. 12.9).

12.29. Рассмотрим уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1.$$

Перестановкой букв $x \leftrightarrow y$, $a \leftrightarrow b$ оно сводится к уравнению, рассмотренному выше, так что ясно, что оно также определяет гиперболу, вершины и фокусы которой лежат на оси Oy. Две гиперболы, заданные уравнениями

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$

в одной и той же системе координат при одних и тех же значениях a и b, называются *взаимно сопряжёнными* (см. рис. 12.11).

Очевидно, взаимно сопряжённые гиперболы имеют общие асимптоты.

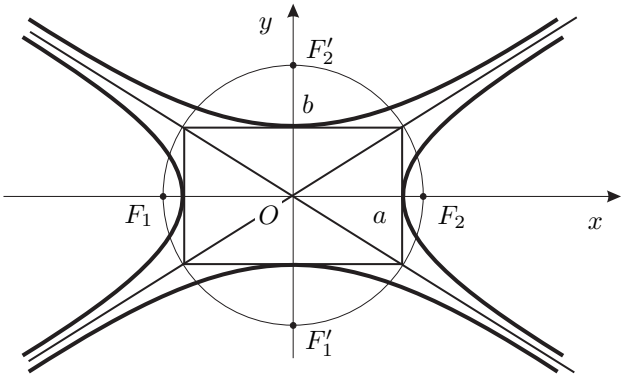


Рис. 12.11. Сопряжённые гиперболы

12.30. Взаимно сопряжённые гиперболы имеют одинаковый линейный эксцентриситет $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, который к тому же равен половине диагонали их общего основного прямоугольника. Поэтому фокусы обеих взаимно сопряжённых гипербол и вершины их общего основного прямоугольника лежат на одной окружности, центр которой совпадает с общим центром обеих гипербол.

Г. Парабола.

12.31. ***Фокально-директориальное определение параболы.*** *Параболой* называется множество точек M евклидовой плоскости, расстояние от каждой из которых до фиксированной точки F (называемой *фокусом*) равно расстоянию до фиксированной прямой (называемой *директрисой*).

12.32. Выведем уравнение параболы в прямоугольной декартовой системе координат, ось абсцисс которой проходит через фокус F параболы перпендикулярно директрисе, а началом является середина перпендикуляра, опущенного из фокуса на директрису; такая система координат называется *канонической* для рассматриваемой параболы.

Пусть в канонической системе координат фокус параболы имеет координаты $F(p/2; 0)$; тогда уравнение директрисы имеет вид $x = -p/2$. Если $M(x, y)$ — произвольная точка плоскости, то расстояние от M до директрисы равно $x + p/2$, а до фокуса $F(p/2; 0)$ —

$$|FM| = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right) + y^2}.$$

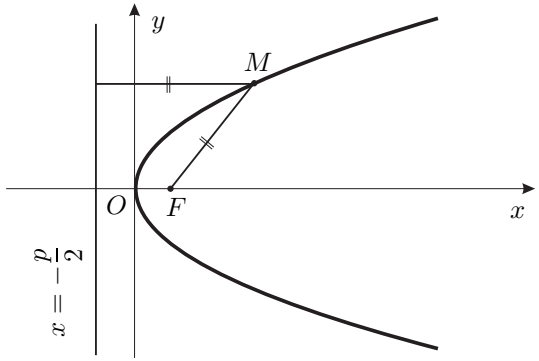


Рис. 12.12. Парабола в канонической системе координат

По определению параболы

$$x + \frac{p}{2} = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right) + y^2}.$$

Возводя в квадрат, получим *каноническое уравнение параболы*

$$y^2 = 2px.$$

12.33. Проверим, что любое решение полученного уравнения представляет точку параболы. Пусть координаты точки $M(x, y)$ являются решением уравнения; тогда

$$y^2 = 2px = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{p}{2}\right)^2,$$

$$\left|x + \frac{p}{2}\right| = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2},$$

т.е. точка $M(x, y)$ равноудалена от прямой $x = -p/2$ и точки $(p/2, 0)$, а потому, согласно определению, лежит на параболе.

Итак, доказана следующая теорема.

12.34. Предложение (о каноническом уравнении параболы)**.** *Линия на евклидовой плоскости является параболой тогда и только тогда, когда существует такая прямоугольная декартова система координат (называемая канонической системой координат), в которой эта линия имеет уравнение*

$$y^2 = 2px.$$

12.35. Поскольку каноническое уравнение параболы эллипса не изменяется y на $-y$, парабола симметрична относительно оси Ox.

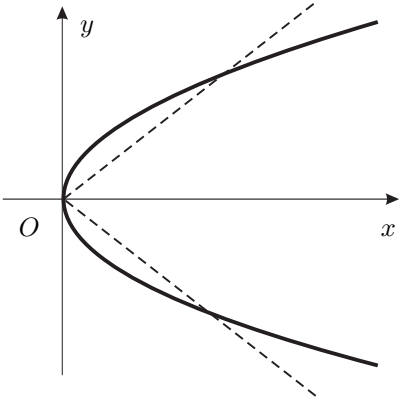


Рис. 12.13

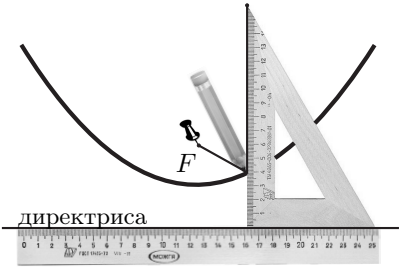


Рис. 12.14

12.36. Рассмотрим отношение

$$\frac{|y|}{x} = \sqrt{\frac{2p}{x}};$$

оно стремится к нулю при $x \to +\infty$. Это означает, что, начиная с некоторого (достаточно большого) значения x, парабола содержится в любом симметричном угле, охватывающем положительную полуось оси абсцисс (см. рис. 12.13). Наглядно это означает, что если смотреть вдоль этой полуоси, то ветви параболы будут казаться сходящимися, хотя на самом деле они сколь угодно далеко отходят от оси абсцисс ($|y| \to +\infty$ при $x \to +\infty$).

12.37. Для того чтобы нарисовать параболу, потребуется линейка, угольник, нить, длина которой равна большему катету угольника, и булавки. Прикрепим один конец нити к фокусу, а другой — к вершине меньшего угла угольника. Приложим линейку к директрисе и поставим на неё угольник меньшим катетом. Карандашом натянем нить так, чтобы его остриё прижималось к большему катету. Если перемещать угольник, следя за тем, чтобы нить оставалась натянутой, то карандаш будет вычерчивать на бумаге параболу (см. рис. 12.14).

12.38. Эксцентриситет параболы считается равным единице по определению.

12.39. Основные термины, связанные с параболой:

(i) ось Ox — (фокальная) ось параболы;
(ii) точка $F(p/2, 0)$ — фокус;

(iii) прямая $x = -p/2$ — директриса;
(iv) p — (фокальный) параметр;
(v) $p/2$ — фокусное расстояние.

Д. Касательные к эллипсу, гиперболе и параболе. Касательные к эллипсу, гиперболе и параболе можно определить так же, как это делается в анализе: как предельное положение секущей (см. курс математического анализа). Однако в курсе аналитической геометрии касательные к этим трём линиям традиционно определяются без обращения к дифференциальному исчислению.

12.40. *Касательной к эллипсу* называется прямая, имеющая с эллипсом единственную общую точку.

Выведем уравнение касательной к эллипсу, заданному каноническим уравнением (12.2). Пусть (x_0, y_0) — точка касания эллипса и прямой

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} \quad \Longleftrightarrow \quad x = x_0 + lt, \quad y = y_0 + mt.$$

Найдём координаты l, m направляющего вектора касательной. Подставляя параметрические уравнения касательной в каноническое уравнение эллипса, получаем:

$$\underbrace{\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}}_{=1} + 2t\left(\frac{x_0 l}{a^2} + \frac{y_0 m}{b^2}\right) + t^2\left(\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right) = 1$$

или после преобразований

$$t^2\left(\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right) + 2t\left(\frac{x_0 l}{a^2} + \frac{y_0 m}{b^2}\right) = 0.$$

Это квадратное уравнение должно иметь один (двойной) корень, что возможно при условии

$$\frac{x_0 l}{a^2} + \frac{y_0 m}{b^2} = 0,$$

так что можно положить

$$l = \frac{y_0}{b^2}, \quad m = -\frac{x_0}{a^2}.$$

Каноническое уравнение касательной к эллипсу имеет вид

$$\frac{x - x_0}{y_0/b^2} = \frac{y - y_0}{-x_0/a^2} \iff \frac{x_0}{a^2}(x - x_0) + \frac{y_0}{b^2}(y - y_0) = 0,$$

откуда, учитывая соотношение $x_0^2/a^2 + y_0^2/b^2 = 1$, получаем

$$\frac{x x_0}{a^2} + \frac{y y_0}{b^2} = 1. \tag{12.4}$$

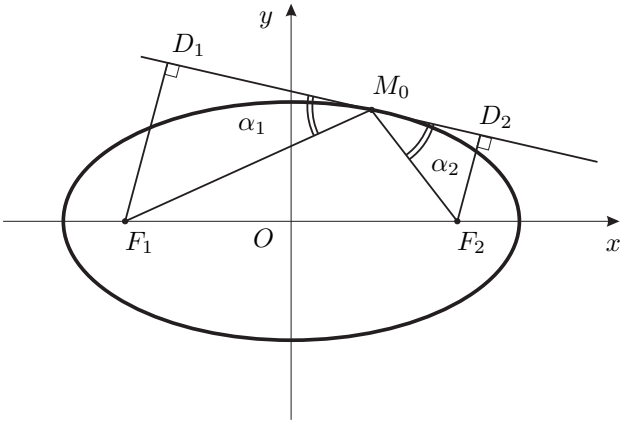


Рис. 12.15. Оптическое свойство эллипса

12.41. *Касательной к гиперболе* называется прямая, имеющая с гиперболой единственную общую точку и не параллельная асимптотам гиперболы. Точно так же, как в случае эллипса, получаем уравнение прямой, касающейся гиперболы (12.3) в точке (x_0, y_0) (см. задачу 12.7):

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1. \tag{12.5}$$

12.42. *Касательная к параболе* — это прямая, имеющая с параболой единственную общую точку и не параллельная оси параболы. Уравнение касательной к параболе $y^2 = 2px$ имеет вид

$$yy_0 = p(x + x_0), \tag{12.6}$$

где (x_0, y_0) — точка касания (см. задачу 12.7).

Е. Оптические свойства эллипса, гиперболы и параболы. Оптические свойства эллипса, гиперболы и параболы лежат в основе многих технических приложений этих линий.

12.43. Теорема (оптическое свойство эллипса)**.** *Фокальные радиусы произвольной точки M_0 эллипса составляют равные углы с касательной к эллипсу, проведённой через точку M_0.*

12.44. Этот результат имеет простую физическую интерпретацию, объясняющую название теоремы: если эллипс считать зеркалом и поместить точечный источник света в одном из фокусов эллипса, то отражённый луч проходит через другой фокус.

Доказательство. Найдем синусы углов α_1 и α_2, которые фокальные радиусы произвольной точки $M_0(x_0, y_0)$ составляют с касательной к эллипсу в точке M_0.

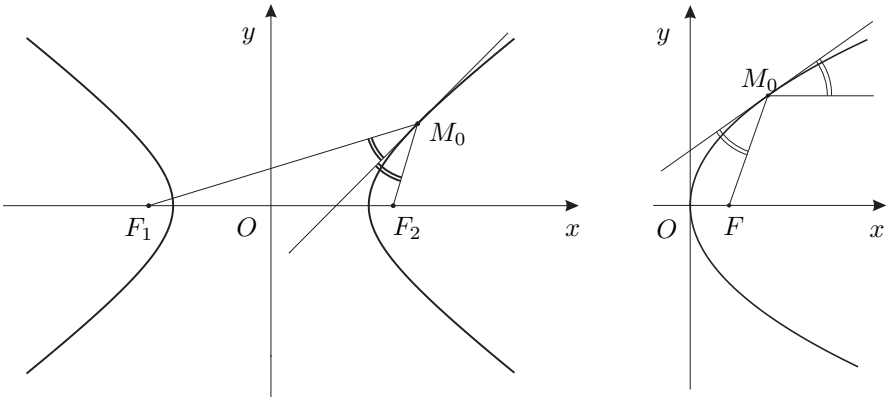


Рис. 12.16. Оптические свойства гиперболы и параболы

Расстояние $|F_1D_1|$ от фокуса $F_1(-c,0)$ до касательной, имеющей уравнение

$$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1,$$

равно (см. формулу (11.17), с. 16)

$$|F_1D_1|=\frac{\left|\dfrac{(-c)\cdot x_0}{a^2}+\dfrac{0\cdot y_0}{b^2}-1\right|}{\sqrt{\dfrac{x_0^2}{a^4}+\dfrac{y_0^2}{b^4}}}=\frac{\varepsilon x_0+a}{a\sqrt{\dfrac{x_0^2}{a^4}+\dfrac{y_0^2}{b^4}}}=\frac{r_1}{a\sqrt{\dfrac{x_0^2}{a^4}+\dfrac{y_0^2}{b^4}}},$$

так что

$$\sin\alpha_1=\frac{|F_1D_1|}{|F_1M_0|}=\frac{1}{a\sqrt{\dfrac{x_0^2}{a^4}+\dfrac{y_0^2}{b^4}}}.$$

Аналогично получаем

$$\sin\alpha_2=\frac{|F_2D_2|}{|F_2M_0|}=\frac{1}{a\sqrt{\dfrac{x_0^2}{a^4}+\dfrac{y_0^2}{b^4}}}.$$

Из равенства $\sin\alpha_1=\sin\alpha_2$ вытекает $\alpha_1=\alpha_2$. □

12.45. Теорема (оптическое свойство гиперболы)**.** *Фокальные радиусы произвольной точки M_0 гиперболы составляют равные углы с касательной к гиперболе, проведённой через точку M_0.*

12.46. Теорема (оптическое свойство параболы)**.** *Фокальный радиус произвольной точки M_0 параболы и ось параболы составляют равные углы с касательной к параболе, проведённой через точку M_0.*

12.47. Свойство параболического зеркала фокусировать пучок лучей, параллельных оси параболы, используется в конструкциях телескопов-рефлекторов, узконаправленных антенн, солнечных электростанций, а обратное свойство — превращать центральный пучок лучей в параллельный — в конструкциях прожекторов, фонарей, фар и т. п.

Ж. Полярные уравнения эллипса, гиперболы и параболы. Получим уравнения эллипса, гиперболы и параболы в полярной системе координат, ось которой совпадает с фокальной осью линии, а полюс находится в одном из фокусов.

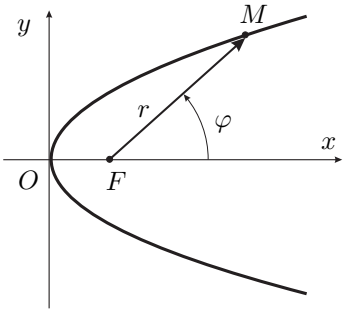


Рис. 12.17. Парабола в полярной системе координат

12.48. Наиболее просто выводится полярное уравнение параболы. Поместим полюс в фокус параболы (см. рис. 12.17). Связь декартовых и полярных координат имеет вид

$$x - \frac{p}{2} = r\cos\varphi$$

(левая часть равенства — длина ортогональной проекции вектора $\overrightarrow{FM}$ на ось Ox), а из определения параболы вытекает равенство

$$r = x + \frac{p}{2} \iff x = r - \frac{p}{2}.$$

Таким образом,

$$r\cos\varphi = x - \frac{p}{2} = r - p \iff r = \frac{p}{1-\cos\varphi}.$$

Отметим, что при $\cos\varphi = 0$ (в частности, при $\varphi = \pi/2$) получаем $r = p$, т.е. число p равно половине длины хорды параболы, проходящей через фокус перпендикулярно фокальной оси, что и объясняет её название — *фокальный параметр.*

12.49. Выведем полярное уравнение эллипса. Поместим полюс в *левый* фокус эллипса (см. рис. 12.18(а)). Запишем связь декартовых и полярных координат

$$x + c = r\cos\varphi$$

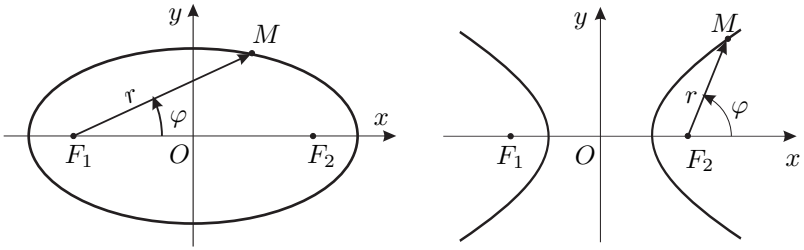


Рис. 12.18. Эллипс (а) и гипербола (б) в полярной системе координат

и выражение для левого фокального радиуса

$$r = \varepsilon x + a.$$

Отсюда получаем

$$r = \varepsilon(r\cos\varphi - c) + a \iff r(1 - \varepsilon\cos\varphi) = a - \varepsilon c.$$

Как и в случае параболы, при $\cos\varphi = 0$ (т.е. $\varphi = \pi/2$) имеем $r = a - \varepsilon c$; это половина длины фокальной хорды эллипса, т.е. хорды, проходящей через фокус перпендикулярно фокальной оси. Обозначим эту величину p:

$$p = a - \varepsilon c = a - \frac{c}{a}c = \frac{a^2 - c^2}{a} = \frac{b^2}{a}.$$

Итак, уравнение эллипса в полярной системе координат, ось которой совпадает с его фокальной осью, а полюс находится в левом фокусе, имеет вид

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos\varphi}.$$

12.50. В случае гиперболы поместим полюс в *правый* фокус и ограничимся рассмотрением правой ветви гиперболы (см. рис. 12.18(б)). Как и выше, запишем связь декартовых и полярных координат и выражение для правого фокального радиуса точки, лежащей на правой ветви гиперболы:

$$x - c = r\cos\varphi, \quad r = \varepsilon x - a,$$

откуда получаем $r(1 - \varepsilon\cos\varphi) = \varepsilon c - a$. Вводя обозначение

$$p = \varepsilon c - a = \frac{c}{a}c - a = \frac{c^2 - a^2}{a} = \frac{b^2}{a}$$

и называя полученную величину *фокальным параметром гиперболы*, окончательно получаем

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos\varphi}.$$

Геометрический смысл фокального радиуса тот же, что и ранее: это половина длины фокальной хорды гиперболы, т.е. хорды, проходящей через фокус перпендикулярно фокальной оси.

12.51. Таким образом, парабола, эллипс и гипербола (вернее, одна её ветвь) задаются в полярных координатах одним и тем же уравнением

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \varphi};$$

при $\varepsilon = 1$ получается парабола, при $0 < \varepsilon < 1$ — эллипс, при $\varepsilon = 0$ — окружность, а при $\varepsilon > 1$ — гипербола.

Это уравнение возникает, например, при решении задачи Кеплера об обращении тел Солнечной системы вокруг Солнца.

3. Уравнения эллипса, гиперболы и параболы, отнесённые к вершине. Каноническая система координат для параболы устроена так, что начало координат находится в вершине параболы. Получим уравнения эллипса и гиперболы в системах координат, начало которых совмещено с одной из вершин этих линий.

12.52. Начнём с эллипса. Обозначим каноническую систему координат для эллипса $O'x'y'$, так что каноническое уравнение эллипса имеет вид

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1.$$

Рассмотрим другую систему координат Oxy, начало O которой находится в *левой* вершине эллипса, ось Ox совпадает с осью $O'x'$, а ось Oy параллельна оси $O'y'$; таким образом, система Oxy получена из канонической системы $O'x'y'$ сдвигом на a единиц *влево*, где a — большая полуось рассматриваемого эллипса. Очевидно, формулы связи координат имеют вид

$$x' = x - a, \quad y' = y.$$

Подставляя эти формулы в каноническое уравнение эллипса, получим

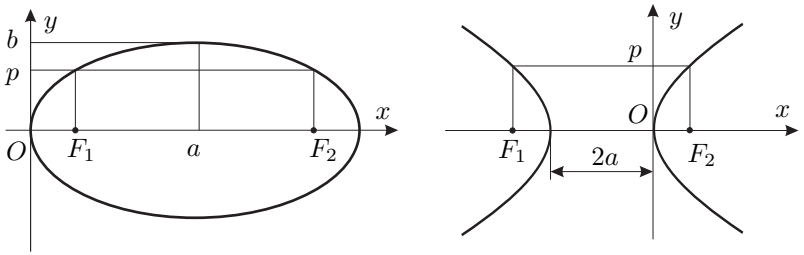
$$\frac{(x-a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \iff \frac{x^2}{a^2} - 2\frac{x}{a} + \frac{y^2}{b^2} = 0,$$

откуда

$$y^2 = 2\frac{b^2}{a}x - \frac{b^2}{a^2}x^2 \iff y^2 = 2px - \frac{p}{a}x^2,$$

поскольку $p = b^2/a$. Кроме того,

$$\frac{b^2}{a^2} = \frac{a^2 - c^2}{a^2} = 1 - \varepsilon^2,$$



(а) (б)

Рис. 12.19. Эллипс и гипербола в системе координат, отнесённой к вершине

так что последнее уравнение можно записать в виде

$$y^2 = 2px + (\varepsilon^2 - 1)x^2.$$

12.53. Выполним аналогичные преобразования канонического уравнения гиперболы. Обозначим каноническую систему координат гиперболы $O'x'y'$, так что каноническое уравнение имеет вид

$$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1.$$

Рассмотрим другую систему координат Oxy, начало O которой находится в *правой* вершине гиперболы, ось Ox совпадает с осью $O'x'$, а ось Oy параллельна оси $O'y'$; таким образом, система Oxy получена из канонической системы $O'x'y'$ сдвигом на a единиц *вправо*, где a — вещественная полуось рассматриваемой гиперболы. Подставляя формулы связи координат

$$x' = x + a, \quad y' = y$$

в каноническое уравнение гиперболы, получим

$$\frac{(x+a)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \iff \frac{x^2}{a^2} + 2\frac{x}{a} - \frac{y^2}{b^2} = 0,$$

откуда

$$y^2 = 2\underbrace{\frac{b^2}{a}}_{=p} x + \frac{b^2}{a^2}x^2 \iff y^2 = 2px + \frac{p}{a}x^2.$$

Так как

$$\frac{b^2}{a^2} = \frac{c^2 - a^2}{a^2} = \varepsilon^2 - 1,$$

последнее уравнение можно переписать в виде

$$y^2 = 2px + (\varepsilon^2 - 1)x^2.$$

12.54. Итак, мы вновь обнаруживаем, что эллипс, гипербола и парабола задаются одним и тем же уравнением

$$y^2 = 2px + (\varepsilon^2 - 1)x^2$$

с разными значениями ε: парабола получается при $\varepsilon = 1$, эллипс — при $0 < \varepsilon < 1$, окружность — при $\varepsilon = 0$ и гипербола — при $\varepsilon > 1$.

12.55. Древнегреческим математикам были хорошо известны свойства эллипса, гиперболы и параболы, несмотря на то, что они не владели методом координат; в частности, они знали свойства этих линий, выражаемые полученным нами уравнением. «Приложением» ($\pi\alpha\rho\alpha\beta o\lambda\acute{\eta}$) данного квадрата к данному отрезку они называли задачу о построении прямоугольника с заданным основанием, равновеликого[1] данному квадрату, т.е. фактически построение высоты этого прямоугольника. Парабола, заданная уравнением $y^2 = 2px$, позволяет решить задачу приложения квадрата y^2 к основанию $2p$. Эллипс и гипербола уже не позволяют решить задачу о приложении квадрата к отрезку, поскольку в их уравнениях имеется добавочный член $(\varepsilon^2 - 1)x^2$, положительный (т.е. являющийся избытком, $\upsilon\pi\varepsilon\rho\beta o\lambda\acute{\eta}$) в случае гиперболы и отрицательный (т.е. являющийся недостатком, $\varepsilon\lambda\lambda\varepsilon\iota\psi\iota\varsigma$) в случае эллипса, что и объясняет названия соответствующих линий.

2. Примеры решения задач

Пример 12.1. Найдите эксцентриситет эллипса, если известно, что в эллипс можно вписать равносторонний треугольник, одна из вершин которого лежит на большой оси, а противолежащая этой вершине сторона проходит через фокус эллипса.

Решение. Рассмотрим равносторонний треугольник ABC, вписанный в эллипс, заданный каноническим уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a > b$$

(см. рис. 12.20). Предположим, что вершина A совпадает с левой вершиной эллипса $(-a; 0)$, а противолежащая ей сторона BC проходит через фокус F_1 или F_2 эллипса (какой именно, пока не известно, так что будем писать просто F). Ясно, что отрезок BC перпендикулярен фокальной оси эллипса. Имеем

$$|BF| = p = \frac{b^2}{a} = \frac{(a+c)(a-c)}{a};$$

[1] Т.е. имеющего такую же площадь.

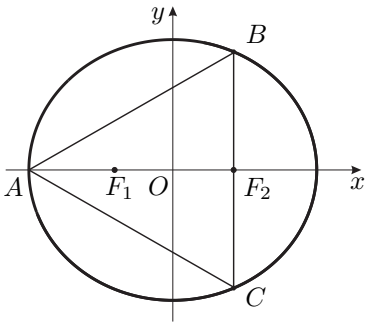


Рис. 12.20. К примеру 12.1

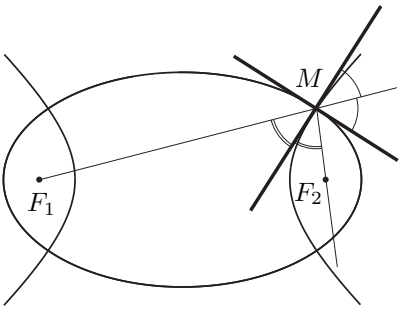


Рис. 12.21. К примеру 12.2

с другой стороны,

$$|BF| = \frac{1}{\sqrt{3}}|AF|.$$

Необходимо рассмотреть два случая в зависимости от того, через какой фокус — ближайший к вершине A или далёкий от неё — проходит сторона $[BC]$. В первом случае имеем $|AF| = |AF_1| = a - c$, так что

$$|BF| = |BF_1| = \frac{(a+c)(a-c)}{a} = \frac{1}{\sqrt{3}}(a-c),$$

$$1 + \frac{c}{a} = \frac{1}{\sqrt{3}} \;\Rightarrow\; \varepsilon = \frac{1}{\sqrt{3}} - 1 < 0,$$

что невозможно. Следовательно, сторона BC не может проходить через фокус, ближайший к вершине A. Во втором случае $|AF| = |AF_2| = a + c$, так что

$$|BF| = |BF_2| = \frac{(a+c)(a-c)}{a} = \frac{1}{\sqrt{3}}(a+c) \;\Rightarrow\; \varepsilon = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Пример 12.2. Докажите, что софокусные (т.е. имеющие общие фокусы) эллипс и гипербола пересекаются под прямым углом (т.е. их касательные в точке пересечения перпендикулярны).

Решение. Пусть эллипс и гипербола с фокусами F_1 и F_2 пересекаются в точке M (см. рис. 12.21). Тогда, согласно оптическим свойствам эллипса и гиперболы, касательные к ним в этой точке являются биссектрисами внешнего и внутреннего углов F_1MF_2 соответственно, а потому перпендикулярны.

Пример 12.3. Составьте параметрические уравнения эллипса.

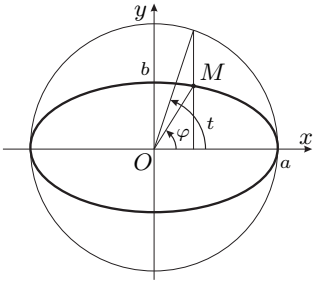


Рис. 12.22.
К примеру 12.3

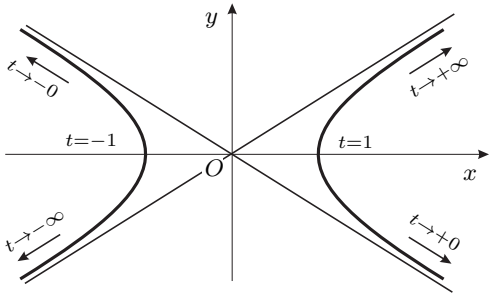


Рис. 12.23.
К примеру 12.4

Решение. Поскольку сумма квадратов выражений x/a и y/b равна единице, эти выражения представляют собой соответственно косинус и синус некоторого угла, который мы и возьмём в качестве параметра:

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t, \quad 0 \leqslant t < 2\pi \pmod{2\pi}.$$

В случае $a = b$ эллипс превращается в окружность, а параметр t имеет геометрический смысл угла между радиус-вектором соответствующей точки окружности и положительным направлением оси Ox.

В случае $a \neq b$ параметр t не равен углу φ между осью Ox и радиус-вектором точки эллипса. Действительно, для точек первой четверти тангенс указанного угла равен

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x} = \frac{b\sin t}{a\cos t} = \frac{b}{a}\operatorname{tg} t.$$

Параметр t называется *эксцентрическим* параметром; его геометрический смысл проиллюстрирован на рис. 12.22. Параметрические уравнения эллипса, в которых параметром является угол φ, обсуждаются в задаче 12.3.

Пример 12.4. Составьте параметрические уравнения гиперболы.

Решение. Запишем каноническое уравнение в виде

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \iff \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 1.$$

Отсюда ясно, что

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} \neq 0, \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \neq 0.$$

Положим

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=t;$$

тогда $t\neq 0$ и в силу уравнения гиперболы

$$\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=\frac{1}{t}.$$

Разрешая полученную систему двух линейных уравнений относительно x и y, получим

$$x=\frac{a}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right),\quad y=\frac{b}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right).$$

Мы доказали, что координаты любой точки гиперболы можно представить в указанном виде, где $t\neq 0$. Обратно, при любом $t\neq 0$ точка с найденными координатами лежит на гиперболе, в чём легко убедиться, поставляя полученные выражения в каноническое уравнение гиперболы.

Если точка $M(x,y)$ лежит на правой ветви гиперболы, то

$$x=\frac{a}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)\geqslant a\quad\Rightarrow\quad\frac{a}{2}\frac{t^2+1}{t}\geqslant 0\quad\Rightarrow\quad t>0.$$

Обратно, если $t>0$, то $x\geqslant a$. При изменении t в промежутке $(0;1]$ значение x убывает от $+\infty$ до a, а значение y возрастает от $-\infty$ до 0. При изменении t в промежутке $[1;+\infty)$ значение x возрастает от a до $+\infty$, а значение y возрастает от 0 до $+\infty$. При $t=1$ получается правая вершина гиперболы. Значения $-\infty<t<0$ отвечают левой ветви гиперболы: если $\infty<t\leqslant -1$, то x возрастает от $-\infty$ до $-a$, а y возрастает от $-\infty$ до 0; если же $-1\leqslant t<0$, то x убывает от $-a$ до $-\infty$, а y возрастает от 0 до $+\infty$.

Часто гиперболу (вернее, одну её ветвь) параметризуют с помощью гиперболических функций (см. с. **??**). Положим $t=e^u$, где e — основание натурального логарифма; тогда, очевидно, $1/t=e^{-u}$. При изменении u на всей числовой оси, $-\infty<u<+\infty$, параметр t принимает значения в промежутке $(0;+\infty)$, отвечающем правой ветви гиперболы. Таким образом, при помощи гиперболических функций

$$\operatorname{ch}u=\frac{e^u+e^{-u}}{2},\quad\operatorname{sh}u=\frac{e^u-e^{-u}}{2}$$

правая ветвь гиперболы может быть задана соотношениями

$$x=a\operatorname{ch}u,\ y=b\operatorname{sh}u,\quad u\in(-\infty;+\infty),$$

похожими на параметрические уравнения эллипса (см. задачу 12.3).

3. Задачи для самостоятельного решения

12.1. Докажите, что произведение расстояний от фокусов эллипса до любой касательной к нему является постоянной величиной, и найдите её.

12.2. Докажите, что касательные к эллипсу отсекают на двух касательных к нему, проведённых в концах большой оси, отрезки, произведение которых равно квадрату малой полуоси эллипса.

12.3. Составьте параметрические уравнения эллипса $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, взяв в качестве параметра угол φ, образуемый осью Ox и радиус-вектором точки эллипса.

12.4 (р)**.** Докажите, что если оси двух парабол взаимно перпендикулярны, то четыре точки их пересечения лежат на одной окружности.

12.5. (а) Найдите эксцентриситет равносторонней гиперболы (т.е. гиперболы, полуоси которой равны).

(б) Найдите соотношение, связывающее эксцентриситеты ε и ε' двух взаимно сопряжённых гипербол.

12.6. Пусть O — центр эллипса, a и b — его полуоси, A и B — такие точки эллипса, что прямые OA и OB взаимно перпендикулярны.

(а) Докажите, что величина $|OA|^{-2}+|OB|^{-2}$ постоянна для всех возможных пар точек A и B.

(б) Найдите наибольшее и наименьшее значения длины отрезка AB.

12.7. Выведите уравнения касательных к гиперболе (уравнение (12.5)) и параболе (уравнение (12.6)).

12.8. Докажите, что для данной гиперболы следующие величины постоянны, и выразите их через полуоси a и b гиперболы:

(а) произведение расстояний от любой точки гиперболы до её асимптот;

(б) площадь параллелограмма, одно из вершин которого лежит на гиперболе, а две стороны лежат на асимптотах.

12.9. Докажите следующие утверждения:

(а) отрезок касательной к гиперболе, заключённый между её асимптотами, делится точкой касания пополам;

(б) все треугольники, образованные асимптотами гиперболы и произвольной касательной к ней, имеют одну и ту же площадь;

(в) вершины гиперболы и четыре точки пересечения её директрис с асимптотами лежат на одной окружности.

12.10. Найдите необходимое и достаточное условие, при котором прямая $Ax + By + C = 0$ касается

(а) эллипса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$;

(б) гиперболы $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$;

(в) гиперболы $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = -1$;

(г) параболы $y^2 = 2px$.

12.11. Через точку $M_0(x_0; y_0)$ проведены две касательные к коническому сечению. Докажите, что прямая, проходящая через точки касания, задаётся уравнением

(а) $\dfrac{xx_0}{a^2} + \dfrac{yy_0}{b^2} = 1$ для эллипса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$;

(б) $\dfrac{xx_0}{a^2} - \dfrac{yy_0}{b^2} = 1$ для гиперболы $\dfrac{xx_0}{a^2} - \dfrac{yy_0}{b^2} = 1$;

(в) $yy_0 = p(x + x_0)$ для параболы $y^2 = 2px$.

ГЛАВА 13

Канонизация квадрик

1. Основные понятия и факты

А. Ортогональные преобразования на плоскости.

13.1. Пусть на евклидовой плоскости заданы две ортогональные системы координат с общим началом: $O\boldsymbol{I}$ («старая») и $O\boldsymbol{I}'$ («новая»), где $\boldsymbol{I} = \big(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}\big)$ и $\boldsymbol{I}' = \big(\boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}'\big)$ — «старый» и «новый» базисы, оба ортонормированные. Новая система координат получена из старой поворотом осей координат на угол α (см. рис. 13.1).

Разложим векторы нового базиса по старому базису (ср. п. **??**, с. **??**):

$$\begin{cases} \boldsymbol{i}' = r_1^1 \boldsymbol{i} + r_1^2 \boldsymbol{j}, \\ \boldsymbol{j}' = r_2^1 \boldsymbol{i} + r_2^2 \boldsymbol{j} \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{I}' = \boldsymbol{I} R, \quad R = \begin{pmatrix} r_1^1 & r_2^1 \\ r_1^2 & r_2^2 \end{pmatrix}. \qquad (13.1)$$

Для нахождения элементов матрицы перехода r_k^j воспользуемся формулами Гиббса (**??**) (см. с. **??**):

$$r_1^1 = (\boldsymbol{i}', \boldsymbol{i}) = \cos\alpha, \qquad r_2^1 = (\boldsymbol{j}', \boldsymbol{i}) = -\sin\alpha,$$
$$r_1^2 = (\boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}) = \sin\alpha, \qquad r_2^2 = (\boldsymbol{j}', \boldsymbol{j}) = \quad \cos\alpha,$$

так что матрица перехода (называемая в рассматриваемом случае *матрицей поворота* или *матрицей вращения* имеет вид

$$R = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Она обладает легко проверяемым замечательным свойством

$$R^{-1} = R^T,$$

которое называется *свойством ортогональности*.

13.2. Пусть A — произвольная точка евклидовой плоскости, X и X' — столбцы координат радиус-вектора $\overrightarrow{OA}$ относительно базисов $\boldsymbol{I}$ и $\boldsymbol{I}'$ соответственно. Имеем

$$\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{I} X = \boldsymbol{I}' X';$$

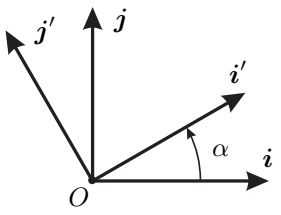


Рис. 13.1. Поворот ортогональной системы координат

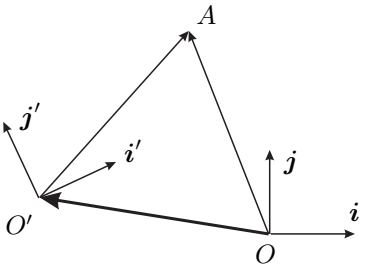


Рис. 13.2. Ортогональное преобразование

поскольку $\boldsymbol{I}' = \boldsymbol{I}R$, отсюда находим $\boldsymbol{I}X = (\boldsymbol{I}R)X' = \boldsymbol{I}(RX')$. В силу единственности разложения по базису получаем $X = RX'$, откуда $X' = R^{-1}X$.

13.3. Запишем все полученные формулы ещё раз:

$$\text{переход } O\boldsymbol{ij} \to O\boldsymbol{i}'\boldsymbol{j}'\colon \quad \begin{cases} \boldsymbol{I}' = \boldsymbol{I}R, \\ X' = R^{-1}X = R^{T}X; \end{cases} \tag{13.2}$$

$$\text{переход } O\boldsymbol{i}'\boldsymbol{j}' \to O\boldsymbol{ij}\colon \quad \begin{cases} \boldsymbol{I} = \boldsymbol{I}'R^{-1} = \boldsymbol{I}'R^{T}, \\ X = RX'. \end{cases} \tag{13.3}$$

Преобразование строк, составленных из векторов базиса, и преобразование столбцов координат производятся взаимно обратными матрицами. Этот факт незаметен (более того, создаётся противоположное впечатление!), если формулы записать в координатном виде:

$$\begin{cases} \boldsymbol{i}' = \quad \boldsymbol{i}\cos\alpha + \boldsymbol{j}\sin\alpha, \\ \boldsymbol{j}' = -\boldsymbol{i}\sin\alpha + \boldsymbol{j}\cos\alpha, \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = \quad x\cos\alpha + y\sin\alpha, \\ y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{cases} \tag{13.4}$$

для перехода $O\boldsymbol{ij} \to O\boldsymbol{i}'\boldsymbol{j}'$ и

$$\begin{cases} \boldsymbol{i} = \boldsymbol{i}'\cos\alpha - \boldsymbol{j}'\sin\alpha, \\ \boldsymbol{j} = \boldsymbol{i}'\sin\alpha + \boldsymbol{j}'\cos\alpha, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha, \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha. \end{cases} \tag{13.5}$$

для обратного перехода $O\boldsymbol{i}'\boldsymbol{j}' \to O\boldsymbol{ij}$. Конечно, всё дело здесь в порядке матричных сомножителей и ортогональности матрицы перехода.

13.4. Рассмотрим теперь случай, когда новая ортогональная система координат $O'\boldsymbol{i}'\boldsymbol{j}'$ получается из старой параллельным переносом начала на вектор $\overrightarrow{OO'}$ и поворотом базисных векторов на угол α (см. рис. 13.2).

Пусть A — произвольная точка плоскости. Очевидно,

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'A}.$$

Радиус-векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OO'}$ точек A и O' разложим по старому базису $\boldsymbol{I}$, а радиус-вектор $\overrightarrow{O'A}$ — по новому базису $\boldsymbol{I}'$. Введём столбцы координат этих радиус-векторов:

$$\overrightarrow{OA}:\ X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{OO'}:\ X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{OA'}:\ X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\boldsymbol{I}X = \boldsymbol{I}X_0 + \boldsymbol{I}'X'.$$

Учитывая формулу $\boldsymbol{I}' = \boldsymbol{I}R$ (см. (13.1)) и пользуясь единственностью разложения по базису, получаем

$$X = X_0 + RX'. \tag{13.6}$$

Отсюда легко получить и формулу обратного преобразования:

$$X' = R^{-1}(X - X_0) = R^T(X - X_0). \tag{13.7}$$

Запишем эти формулы в развёрнутом виде:

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha + x_0, \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha + y_0 \end{cases} \tag{13.8}$$

и

$$\begin{cases} x' = (x - x_0)\cos\alpha + (y - y_0)\sin\alpha, \\ y' = -(x - x_0)\sin\alpha + (y - y_0)\cos\alpha. \end{cases} \tag{13.9}$$

13.5. Для удобства вычислений будем использовать так называемые *однородные координаты*[1]: столбцы координат векторов и точек дополняются ещё одним элементом, равным 1:

$$Z = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \hline 1 \end{pmatrix} = \left\| \begin{array}{c} X \\ \hline 1 \end{array} \right\|, \quad Z' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ \hline 1 \end{pmatrix} = \left\| \begin{array}{c} X' \\ \hline 1 \end{array} \right\| \tag{13.10}$$

[1]Термин обязан своему происхождению проективной геометрии.

(напомним, что скобки $\|\cdot\|$ обозначают блочную матрицу). Вводя *расширенную матрицу преобразования*

$$P = \left(\begin{array}{cc|c} \cos\alpha & -\sin\alpha & x_0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & y_0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \left\|\begin{array}{c|c} R & X_0 \\ \hline O & 1 \end{array}\right\|, \tag{13.11}$$

можно записать преобразования координат (13.6) и (13.7) в виде

$$Z = PZ', \quad Z' = P^{-1}Z, \tag{13.12}$$

причём, как легко проверить (сделайте это: см. задачу 13.13), обратная матрица P^{-1} имеет вид

$$P^{-1} = \left\|\begin{array}{c|c} R^T & -R^TX_0 \\ \hline O & 1 \end{array}\right\| = \left(\begin{array}{cc|c} \cos\alpha & \sin\alpha & x_0' \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & y_0' \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \tag{13.13}$$

где

$$\begin{cases} x_0' = -x_0\cos\alpha - y_0\sin\alpha, \\ y_0' = x_0\sin\alpha - y_0\cos\alpha \end{cases} \iff X_0' = -R^TX_0$$

— координаты точки O (начала системы координат $O\boldsymbol{ij}$) в системе координат $O'\boldsymbol{i}'\boldsymbol{j}'$.

13.6. Рассмотрим общее уравнение прямой

$$Ax + By + d = 0$$

в прямоугольной декартовой системе координат $O\boldsymbol{ij}$. Коэффициенты A и B являются координатами вектора нормали $\boldsymbol{n}$ этой прямой[1]. В матричных обозначениях это уравнение имеет вид

$$N^TX + d = 0, \tag{13.14}$$

где $N = (A, B)^T$ — столбец координат вектора нормали $\boldsymbol{n}$ прямой. При переходе к новой системе координат $O'\boldsymbol{i}'\boldsymbol{j}'$ по формулам (13.6) уравнение преобразуется следующим образом:

$$N^T\big(RX' + X_0\big) + d = 0 \iff (N^TR)X' + N^TX_0 + d = 0,$$

т.е. принимает вид, совпадающий с (13.14):

$$N'^TX' + d' = 0,$$

где

$$N' = (N^TR)^T = R^TN = R^{-1}N, \quad d' = N^TX_0 + d.$$

[1]Напомним, что это утверждение верно только для прямоугольной системы координат (см. замечание 11.13, с. 8).

(Обратите внимание на соответствие соотношения $N' = R^{-1}N$ формуле (13.2), по которой преобразуются координаты вектора при повороте системы координат!)

13.7. Если записать уравнение прямой в однородных координатах, т.е. в виде

$$MZ = 0,$$

где $M = \big(A, B, d\big)$, $Z = \big(x, y, 1\big)^T$, а преобразование координат осуществить по формулам (13.12), получим

$$M(PZ') = 0 \iff (MP)Z' = 0,$$

т.е. матричный коэффициент M уравнения прямой преобразуется по формуле

$$M' = MP.$$

Б. Различные формы записи уравнения квадрики.

13.8. Эллипс, гипербола и парабола задаются уравнениями вида $F(x, y) = 0$, где $F(x, y)$ — многочлен второй степени от двух переменных. Выясним, какие ещё линии на плоскости можно задать подобными уравнениями.

13.9. Рассмотрим уравнение второй степени от двух переменных

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_1x + 2b_2y + c = 0; \tag{13.15}$$

многочлен в левой части этого уравнения обозначим $F(x, y)$. Пусть на евклидовой плоскости задана некоторая прямоугольная декартова система координат Oxy. Линия, точки которой (точнее, координаты точек) и только они являются решениями уравнения (13.15), называется *квадрикой* (на плоскости). При преобразовании системы координат уравнение квадрики, разумеется, изменяется; нашей окончательной целью является нахождение такой системы координат, в которой уравнение квадрики имеет наиболее простой вид.

13.10. Для сокращения записи введём матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \text{ где } a_{12} = a_{21},\ B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Тогда уравнение (13.15) можно записать в виде

$$X^T AX + 2BX + c = 0. \tag{13.16}$$

13.11. Вид уравнения можно ещё упростить, используя однородные координаты (см. п. 13.5, с. 60). Введя матрицы

$$D = \left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ \hline b_1 & b_2 & c \end{array}\right) = \left\|\begin{array}{c|c} A & B^T \\ \hline B & c \end{array}\right\|, \quad Z = \left(\begin{array}{c} x \\ y \\ \hline 1 \end{array}\right) = \left\|\begin{array}{c} X \\ \hline 1 \end{array}\right\|, \tag{13.17}$$

можно записать уравнение квадрики в виде

$$Z^T D Z = 0. \tag{13.18}$$

13.12. *Конической поверхностью* (*конусом*) с вершиной O и образующей G называется множество всех прямых, проходящих через точку O и пересекающихся с линией G. Уравнение

$$W^T D W = 0, \quad \text{где} \quad W = \big(x, y, z\big)^T, \tag{13.19}$$

определяет в трёхмерном евклидовом пространстве некоторую коническую поверхность. Действительно, начало координат удовлетворяет уравнению (13.19), а вместе с точкой, имеющей столбец координат W, уравнению удовлетворяют и все точки, имеющие координаты tW, где t — произвольное вещественное число. Таким образом, прямая, проходящая через начало координат и точку W, целиком лежит на поверхности, определяемой уравнением (13.19), а это и означает, что поверхность является конусом. В таком случае квадрику (13.18) можно рассматривать как сечение указанного конуса плоскостью $z = 1$.

В. Ортогональные преобразования уравнений квадрик.

13.13. Рассмотрим на евклидовой плоскости другую прямоугольную декартову систему координат $O'x'y'$, полученную из исходной Oxy поворотом осей координат и параллельным переносом начала координат; такое преобразование системы координат описывается формулой (13.12) (см. с. 61).

При указанном преобразовании координат $Z = PZ'$ уравнение квадрики $Z^T D Z = 0$ (см. (13.18)) изменится следующим образом:

$$Z^T D Z = (PZ')^T D (PZ') = Z'^T P^T D P Z' = Z'^T D' Z',$$

т.е. примет вид

$$Z'^T D' Z' = 0,$$

где

$$D' = P^T D P, \tag{13.20}$$

формально не отличающийся от (13.18), но с другими коэффициентами:

$$D' = \left\|\begin{array}{c|c} A' & B'^T \\ \hline B' & c' \end{array}\right\| = P^T D P =$$

$$= \left\|\begin{array}{c|c} R & X_0 \\ \hline O & 1 \end{array}\right\|^T \left\|\begin{array}{c|c} A & B^T \\ \hline B & c \end{array}\right\| \left\|\begin{array}{c|c} R & X_0 \\ \hline O & 1 \end{array}\right\| =$$

$$= \left\|\begin{array}{c|c} R^T A R & R^T(AX_0 + B^T) \\ \hline (X_0^T A + B)R & X_0^T A X_0 + 2BX_0 + c \end{array}\right\|,$$

где учтено, что $X_0^T B^T = BX_0$, поскольку это матрицы порядка 1, т.е. числа.

13.14. Запишем формулы преобразования матричных коэффициентов уравнения квадрики (13.16) без использования однородных координат:

$$A' = R^T A R, \quad B' = (X_0^T A + B)R, \qquad c' = X_0^T A X_0 + 2BX_0 + c. \tag{13.21}$$

Обратите внимание, что матрица A изменяется только при повороте, а свободный член c уравнения — только при переносе начала координат. Матрица B, содержащая коэффициенты линейных слагаемых уравнения квадрики, меняется и при повороте, и при переносе.

Г. Ортогональные инварианты уравнения квадрики.

13.15. Теорема. *При ортогональных преобразованиях системы координат величины*

$$S = \operatorname{tr} A, \quad \delta = \det A, \quad \Delta = \det D$$

не изменяются. Эти величины называют ортогональными инвариантами уравнения квадрики.

Доказательство. Используя формулу $\operatorname{tr}(UV) = \operatorname{tr}(VU)$, где U, V — произвольные матрицы, для которых определены оба произведения UV и VU (см. предложение 5.24(vi), с. 77), имеем

$$\operatorname{tr} A' = \operatorname{tr}\big(R^T A R\big) = \operatorname{tr}\big((R^T A)R\big) = \\ = \operatorname{tr}\big(R(R^T A)\big) = \operatorname{tr}\big((R^T R)A\big) = \operatorname{tr} A.$$

По теореме об определителе произведения матриц

$$\det A' = \det(R^T A R) = \det R^T \cdot \det A \cdot \det R = \det A,$$

поскольку $\det R = \det R^T = 1$. По той же теореме

$$\det D = \det(P^T D P) = \det P^T \cdot \det D \cdot \det P = \det D,$$

поскольку $\det P = \det P^T = 1$, в чём легко убедиться, разложив определитель матрицы P (см. (13.11)) по последней строке. □

Д. Упрощение уравнения квадрики: уничтожение слагаемого $2a_{12}xy$ при помощи поворота.

13.16. Попытаемся выбрать угол поворота координатных осей таким образом, чтобы слагаемое вида $2a_{12}xy$ в преобразованном уравнении исчезло, т.е. чтобы матрица A' уравнения, отнесённого к новой системе координат, стала диагональной:

$$A' = R^T A R = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

13.17. Отметим, что при наличии в уравнении квадрики слагаемого $2a_{12}xy$ необходимо выполняется условие $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Действительно, если предположить, что $\lambda_1 = \lambda_2$, то $A' = \lambda_1 \mathbb{1}$, так что

$$A = (R^T)^{-1} A' R^{-1} = R(\lambda_1 \mathbb{1}) R^{-1} = \lambda_1 R R^{-1} = \lambda_1 \mathbb{1},$$

т.е. матрица A также диагональна, т.е. $a_{12} = a_{21} = 0$, причём в любой системе координат.

13.18. Числа λ_1 и λ_2 могут быть найдены с помощью ортогональных инвариантов уравнения квадрики: поскольку

$$\operatorname{tr} A' = \lambda_1 + \lambda_2 = \operatorname{tr} A = S, \quad \det A' = \lambda_1 \cdot \lambda_2 = \det A = \delta,$$

согласно теореме Виета числа λ_1 и λ_2 являются корнями квадратного уравнения

$$\lambda^2 - S\lambda + \delta = 0.$$

13.19. Умножая обе части соотношения $A' = R^T A R$ слева на матрицу R, запишем его в виде $AR = RA'$. Обозначим столбцы координат векторов $\boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}'$ нового (повернутого) базиса относительно старого базиса через R_1, R_2; эти столбцы являются столбцами матрицы поворота R: $R = \big\|R_1,\ R_2\big\|$. Соотношение $AR = RA'$ даёт

$$AR = RA' \iff$$

$$\iff A\big\|R_1,\ R_2\big\| = \big\|R_1,\ R_2\big\| \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \big\|\lambda_1 R_1,\ \lambda_2 R_2\big\|,$$

так что

$$AR_1 = \lambda_1 R_1, \quad AR_2 = \lambda_2 R_2.$$

Эти уравнения можно переписать в виде

$$(A-\lambda_1\mathbb{1})R_1=0,\quad (A-\lambda_2\mathbb{1})R_2=0,$$

т.е. столбцы R_1 и R_2 представляют собой решения однородных систем линейных уравнений. Нетривиальные решения у однородной системы имеются лишь в том случае, когда определитель основной матрицы системы равен нулю, так что числа λ_1 и λ_2 должны являться корнями уравнения

$$\det(A-\lambda\mathbb{1})=0,$$

называемого *характеристическим уравнением* рассматриваемой квадрики. Вычисляя определитель, получаем:

$$\det(A-\lambda\mathbb{1})=\begin{vmatrix}a_{11}-\lambda & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}-\lambda\end{vmatrix}=(a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)-a_{12}a_{21}=$$
$$=\lambda^2-(a_{11}+a_{22})\lambda+a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=\lambda^2-S\lambda+\delta,$$

что в точности совпадает с найденным выше многочленом для определения λ_1 и λ_2. Этот многочлен называется *характеристическим многочленом* матрицы A.

13.20. Корни λ_1 и λ_2 характеристического многочлена матрицы A называют *собственными значениями*, а любые ненулевые решения системы уравнений $(A-\lambda\mathbb{1})X=O$, существующие лишь при $\lambda=\lambda_1$ или $\lambda=\lambda_2$ — *собственными векторами* этой матрицы, отвечающими соответствующему собственному значению.

13.21. Поскольку коэффициенты характеристического многочлена являются ортогональными инвариантами уравнения квадрики (см. теорему 13.15), то и сам характеристический многочлен инвариантен, т.е. не зависит от выбора ортогональной системы координат.

13.22. Дискриминант характеристического многочлена неотрицателен:

$$S^2-4\delta=(a_{11}+a_{22})^2-4(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})=$$
$$=(a_{11}-a_{22})^2+4a_{12}^2\geqslant 0,$$

так что он всегда имеет вещественные корни.

13.23. Найдя корни λ_1 и λ_2 характеристического многочлена и решив однородные системы уравнений

$$(A-\lambda_1\mathbb{1})R_1=0,\quad (A-\lambda_2\mathbb{1})R_2=0,$$

мы получим столбцы координат векторов $\boldsymbol{i}'$ и $\boldsymbol{j}'$ новой (повёрнутой) системы координат. Решение каждой из этих систем не единственно, но определено с точностью до произвольного множителя; будем выбирать эти множители (их называют нормировочными) так, чтобы векторы $\boldsymbol{i}'$ и $\boldsymbol{j}'$ имели единичную длину и образовывали базис, одноимённый с исходным базисом $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$.

13.24. Нетрудно найти выражение для угла поворота α новых координатных осей относительно старых:

$$AR_2 = \lambda_2 R_2 \iff \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda_2 \sin\alpha \\ \lambda_2 \cos\alpha \end{pmatrix} \iff$$
$$\iff \begin{cases} -a_{11}\sin\alpha + a_{12}\cos\alpha = -\lambda_2 \sin\alpha, \\ -a_{21}\sin\alpha + a_{22}\cos\alpha = \lambda_2 \cos\alpha. \end{cases}$$

Умножая первое уравнение на $\cos\alpha$, а второе — на $\sin\alpha$ и складывая полученные соотношения, получаем

$$-a_{11}\sin\alpha\cos\alpha + a_{12}\cos^2\alpha - a_{21}\sin^2\alpha + a_{22}\cos\alpha\sin\alpha = 0,$$

откуда

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}}. \tag{13.22}$$

Итак, доказана следующая теорема.

13.25. Теорема. *Для уничтожения слагаемого $2a_{12}xy$ в уравнении квадрики* (13.15) *нужно перейти к новой системе координат, оси которой повёрнуты относительно осей исходной системы на угол α, определяемый соотношением* (13.22). *В этом случае столбцы координат R_1, R_2 ортов $\boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}'$ новой системы координат являются нормированными решениями однородных систем линейных уравнений*

$$(A - \lambda_k \mathbb{1})R_k = 0, \quad k = 1, 2,$$

где λ_1, λ_2 — корни характеристического уравнения

$$\lambda^2 - S\lambda + \delta = 0 \iff \det(A - \lambda\mathbb{1}) = 0. \tag{13.23}$$

Е. Упрощение уравнения квадрики: уничтожение линейных слагаемых $2b_1x + 2b_2y$ при помощи переноса начала координат.

13.26. Попытаемся теперь выбрать вектор переноса X_0 начала системы координат так, чтобы уравнение квадрики в новых координатах не содержало бы линейных слагаемых, т.е. $B' = O$ (O — нулевая матрица).

13.27. Поскольку коэффициенты линейных членов уравнения квадрики преобразуются по формуле $B' = (X_0^T A + B)R$, для определения X_0 получаем уравнение

$$(X_0^T A + B)R = O \iff X_0^T A + B = O \iff (X_0^T A + B)^T = O$$

или, окончательно,

$$AX_0 = -B^T \tag{13.24}$$

(здесь использованы факты симметричности матрицы A и обратимости матрицы R). Полученное уравнение не всегда разрешимо, так что уничтожение линейных слагаемых в уравнении квадрики возможно не во всех случаях.

Ж. Случай $\delta = \det A \neq 0$: центральные квадрики.

13.28. Если $\det A \neq 0$, то уравнение $AX_0 = -B^T$ имеет единственное решение $X_0 = -A^{-1}B^T$, и матрица преобразования координат (13.11) определяется однозначно:

$$P = \left\| \begin{array}{c|c} R & -A^{-1}B^T \\ \hline O & 1 \end{array} \right\|,$$

где R — матрица поворота координатных осей, найденная ранее. После такого преобразования координат в уравнении квадрики исчезают слагаемые вида $2a_{12}xy$ и $2b_1x + 2b_2y$, т.е. оно приводится к так называемому «полуканоническому» виду

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + c' = 0, \tag{13.25}$$

где λ_1, λ_2 — корни характеристического уравнения (13.23), а c' — свободный член преобразованного уравнения, определяемый по формуле (13.21), в которой X_0 — решение уравнения (13.24).

13.29. Матрица D' коэффициентов уравнения квадрики в полуканонической системе координат имеет вид

$$D' = \left(\begin{array}{cc|c} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & c' \end{array} \right). \tag{13.26}$$

Коэффициент c' можно найти по формуле (13.21), однако если принять во внимание соотношение $AX_0 = -B^T$, вычисление можно упростить:

$$c' = X_0^T A X_0 + 2BX_0 + c = \underbrace{X_0^T(-B^T)}_{=-BX_0} + 2BX_0 + c = BX_0 + c. \tag{13.27}$$

Кроме того, поскольку определитель матрицы (13.26) равен

$$\det D' = \lambda_1 \lambda_2 c' = \Delta,$$

легко получаем выражение для c' через ортогональные инварианты уравнения:

$$c' = \Delta/\delta. \tag{13.28}$$

13.30. Начало канонической системы координат $O'x'y'$ является центром симметрии линии, определяемой уравнением (13.25), а координатные оси $O'x'$ и $O'y'$ — её осями симметрии. Действительно, если точка с координатами (x', y') является решением уравнения (13.25), то решениями являются также и точки $(-x', y')$, $(x', -y')$, $(-x', -y')$. По этой причине квадрики данного типа называют *центральными* (даже в случае, когда уравнение квадрики не имеет ни одного вещественного решения).

13.31. С помощью дальнейших алгебраических преобразований полученное полуканоническое уравнение можно привести к каноническому виду.

В зависимости от знака $\det A$ выделяются следующие два типа квадрик.

13.32. ***Эллиптический тип:*** $\delta = \det A > 0$**.** В этом случае числа λ_1 и λ_2 одного знака, и в зависимости от знака c' возможны следующие ситуации.

13.33. Пусть c' и $\lambda_{1,2}$ имеют разные знаки; тогда

$$S \cdot \Delta < 0$$

(напомним, что $c' = \Delta/\delta$, а $\delta > 0$). Тогда из (13.25) получаем

$$\frac{x'^2}{-c'/\lambda_1} + \frac{y'^2}{-c'/\lambda_2} = 1;$$

знаменатели обеих дробей положительны, так что имеем уравнение эллипса с полуосями $a = \sqrt{-c'/\lambda_1}$ и $b = \sqrt{-c'/\lambda_2}$. Если $|\lambda_1| < |\lambda_2|$, то $a > b$, и получится каноническое уравнение эллипса. Кроме того, полуоси эллипса можно выразить через ортогональные инварианты уравнения:

$$a = \sqrt{-\frac{\Delta}{\delta\lambda_1}}, \quad b = \sqrt{-\frac{\Delta}{\delta\lambda_2}}, \quad \lambda_1 < \lambda_2.$$

13.34. Пусть c' и $\lambda_{1,2}$ имеют один и тот же знак, т.е.

$$S \cdot \Delta > 0.$$

Тогда из (13.25) получаем

$$\frac{x'^2}{c'/\lambda_1} + \frac{y'^2}{c'/\lambda_2} = -1;$$

здесь знаменатели обеих дробей также положительны, так что получаем каноническое уравнение

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = -1, \quad \text{где} \quad a^2 = \frac{c'}{\lambda_1} > 0,\ b^2 = \frac{c'}{\lambda_2} > 0,$$

которое не имеет вещественных решений; благодаря сходству с уравнением эллипса оно называется *уравнением мнимого эллипса*. «Полуоси» мнимого эллипса также можно выразить через ортогональные инварианты уравнения:

$$a = \sqrt{\frac{\Delta}{\delta\lambda_1}}, \quad b = \sqrt{\frac{\Delta}{\delta\lambda_2}}, \quad \lambda_1 < \lambda_2. \tag{13.29}$$

13.35. Наконец, в случае $c' = 0$, т.е. $\Delta = 0$, из (13.25) получаем уравнение

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 = 0 \iff a^2 x'^2 + b^2 y'^2 = 0,$$

где $a = \sqrt{|\lambda_1|}$, $b = \sqrt{|\lambda_2|}$. Это уравнение имеет единственное вещественное решение $x' = y' = 0$, а геометрическая фигура, определяемая уравнением, состоит из единственной точки — начала координат канонической системы. Однако если рассматривать это уравнение над множеством комплексных чисел, то его левую часть можно разложить на множители:

$$(ax' + iby')(ax' - iby') = 0 \iff \begin{bmatrix} (ax' + iby') = 0, \\ (ax' - iby') = 0, \end{bmatrix}$$

что объясняет наименование рассматриваемой квадрики: *пара мнимых прямых, пересекающихся в вещественной точке*.

13.36. ***Гиперболический тип:*** $\delta = \det A < 0$**.** В этом случае числа λ_1 и λ_2 имеют разные знаки, и возможны следующие ситуации.

13.37. Если $c' \neq 0$ (т.е. $\Delta \neq 0$), то из полуканонического уравнения (13.25) получаем каноническое уравнение гиперболы

$$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1,$$

где

$$a^2 = -\frac{c'}{\lambda_1} = -\frac{\Delta}{\delta\lambda_1} > 0, \quad b^2 = \frac{c'}{\lambda_2} = \frac{\Delta}{\delta\lambda_2} > 0.$$

Ясно, что корни характеристического уравнения квадрики нужно нумеровать так, чтобы числа λ_1 и c' имели противоположные знаки, а числа λ_2 и c' — одинаковые, т.е. чтобы числа λ_1 и Δ имели одинаковые знаки, а λ_2 и Δ — противоположные.

13.38. Если $c' = 0$ (т.е. $\Delta = 0$), то полуканоническое уравнение (13.25) приводится к виду

$$a^2x'^2 - b^2y'^2 = 0, \quad \text{где} \quad a^2 = |\lambda_1|,\ b^2 = |\lambda_2|,$$

или, эквивалентно,

$$(ax' + by')(ax' - by') = 0 \iff \begin{bmatrix}(ax' + by') = 0,\\ (ax' - by') = 0.\end{bmatrix}$$

Последняя совокупность уравнений определяет пару пересекающихся прямых (очевидно, точкой пересечения является начало канонической системы координат).

13.39. Отметим, что полуканоническое уравнение получается из исходного уравнения при помощи ортогонального преобразования координат, и величины $S = \operatorname{tr} A$, $\delta = \det A$, $\Delta = \det D$ являются инвариантными относительно этих преобразований. Каноническое же уравнение получается из полуканонического при помощи алгебраических преобразований (например, деления обеих частей уравнения на свободный член уравнения и т. п.); относительно таких преобразований величины S, δ и Δ инвариантами не являются.

3. Случай $\delta = \det A = 0$: нецентральные квадрики.

13.40. Условие $\det A = 0$ эквивалентно тому, что один из корней характеристического уравнения (13.23) равен нулю; будем считать, что $\lambda_1 = 0$; в этом случае $\lambda_2 = S = \operatorname{tr} A$, а матрица D' коэффициентов уравнения квадрики после поворота осей координат имеет вид[1]

$$D' = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & b'_1 \\ 0 & S & b'_2 \\ \hline b'_1 & b'_2 & c \end{array}\right), \quad \Delta = \det D' = -b'^2_1 S. \tag{13.30}$$

Если $\det A = 0$, то система уравнений (13.24) может либо оказаться несовместной, либо иметь бесконечно много решений.

[1]Обратите внимание, что свободный член c при повороте не изменяется, см. формулы (13.21), с. 64.

13.41. Отметим следующий важный факт: любые переносы начала координат, выполняемые *после* поворота, приводящего матрицу коэффициентов квадрики к виду (13.30), не изменяют коэффициента b'_1. Действительно, такие переносы сохраняют вид матрицы (13.30), а указанный коэффициент может быть выражен через инварианты, $b'_1 = \sqrt{-\Delta/S}$, и потому сам является инвариантом, но только относительно сдвигов.

Таким образом, вектор переноса начала координат нужно выбирать так, чтобы добиться, по возможности, исчезновения в матрице (13.30) элементов b'_2 и c.

13.42. ***Невырожденный параболический тип:*** $\Delta \neq 0$**.** По теореме Кронекера—Капелли система (13.24) несовместна, если ранг матрицы A меньше ранга матрицы $\|A \mid -B^T\|$. Поскольку

$$\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} A', \quad \operatorname{rk} \left\| A \;\middle|\; -B^T \right\| = \operatorname{rk} \left\| A' \;\middle|\; -R^T B^T \right\|,$$

ибо R — невырожденная матрица, это эквивалентно неравенствам

$$\operatorname{rk} A' < \operatorname{rk} \|A' \mid -R^T B^T\| \iff \operatorname{rk} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} < \operatorname{rk} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -b'_1 \\ 0 & S & -b'_2 \end{pmatrix},$$

что имеет место при $b'_1 \neq 0$. В этом случае после поворота координатных осей уравнение квадрики примет вид

$$Sy'^2 + 2b'_1 x' + 2b'_2 y' + c' = 0,$$

где $b'_1 \neq 0$, и его можно привести к каноническому уравнению параболы, выделяя полные квадраты:

$$S\left(y'^2 + 2\frac{b'_2}{S}y' + \frac{b'^2_1}{S^2}\right) - \frac{b'^2_1}{S} + 2b'_1\left(x' + \frac{c'}{2b'_1}\right) = 0,$$

так что

$$S\left(y' + \frac{b'_2}{S}\right)^2 + 2b'_1\left(x' + \frac{c'}{2b'_1} - \frac{b'^2_1}{2b'_1 S}\right) = 0.$$

Вводя новые переменные

$$x'' = \pm\left(x' + \frac{c'}{2b'_1} - \frac{b'^2_1}{2b'_1 S}\right), \quad y'' = y' + \frac{b'_2}{S}, \tag{13.31}$$

получим полуканоническое уравнение

$$Sy''^2 + 2b'_1 x'' = 0, \tag{13.32}$$

а затем, выбирая надлежащим образом знак $+$ или $-$ в первой из формул (13.31), и каноническое уравнение параболы

$$y''^2 = 2px'', \tag{13.33}$$

где введено обозначение $p = |b_1'/S|$. Матрица коэффициентов полуканонического уравнения в системе координат $O''x''y''$ имеет вид

$$D'' = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & b_1' \\ 0 & S & 0 \\ \hline b_1' & 0 & 0 \end{array}\right), \quad \det D'' = -b_1'^2 S. \tag{13.34}$$

Ясно, что итоговое преобразование системы координат сводится к последовательно выполненным повороту (переход $Oxy \to Ox'y'$) и переносу начала (переход $Ox'y' \to O''x''y''$), описываемому формулами (13.31).

13.43. Из формул (13.31) следует, что координаты вершины параболы, т.е. начала канонической системы координат $O''x''y''$, отнесённые к повёрнутой системе $Ox'y'$, равны

$$x_0' = \mp\left(\frac{c'}{2b_1'} - \frac{b_1'^2}{2b_1'S}\right), \quad y_0' = -\frac{b_2'}{S}.$$

Для нахождения координат вершины в исходной системе Oxy нужно воспользоваться формулами (13.3):

$$X_0 = RX_0'.$$

13.44. Величина фокального параметра параболы в каноническом уравнении (13.33) также может быть выражена через инварианты:

$$p = \left|\frac{b_1'}{S}\right| = \left|\frac{\sqrt{-\Delta/S}}{S}\right| = \sqrt{-\frac{\Delta}{S^3}}.$$

13.45. ***Вырожденный параболический тип:*** $\Delta = 0$**.** В случае, когда ранг матрицы A равен рангу матрицы $\|A \mid -B^T\|$, система (13.24) имеет бесконечно много решений. Выбрав любое из них, получаем следующую матрицу коэффициентов уравнения квадрики в преобразованной системе координат

$$D' = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 0 & S & 0 \\ \hline 0 & 0 & c' \end{array}\right), \tag{13.35}$$

т.е. само уравнение принимает полуканонический вид

$$Sy'^2 + c' = 0. \tag{13.36}$$

В зависимости от знаков чисел S и c' возможны следующие случаи.

13.46. Числа S и c' имеют разные знаки; тогда уравнение (13.36) приводится к каноническому виду

$$y''^2 - a^2 = 0, \quad a^2 = |c'/S|,$$

и определяет *две параллельные прямые* $y'' = a$ и $y'' = -a$.

13.47. В случае, когда знаки чисел S и c' совпадают, получаем

$$y''^2 + a^2 = 0, \quad a^2 = c'/S.$$

Это уравнение не имеет вещественных решений, т.е. определяемая им геометрическая фигура есть пустое множество. Если допускать комплексные решения, то по аналогии с предыдущим случаем можно назвать соответствующую квадрику *парой мнимых параллельных прямых*.

13.48. Наконец, если $c' = 0$, уравнение имеет вид $y''^2 = 0$ и называется *уравнением пары совпадающих прямых*.

И. Полуинвариант K. Мы установили, что тип и каноническое уравнение квадрики может быть получено с помощью инвариантов во всех случаях, кроме вырожденного параболического случая, когда $\delta = \Delta = 0$. Вырожденные параболические квадрики можно различать (и составлять их канонические уравнения) при помощи дополнительной величины, являющейся ортогональным инвариантом уравнения квадрики в указанном случае.

13.49. Рассмотрим определитель[1]

$$f_D(\lambda) = \det(D - \lambda\mathbb{1}) = \det \left\| \begin{array}{c|c} A - \lambda\mathbb{1} & B^T \\ \hline B & c - \lambda \end{array} \right\|.$$

После раскрытия этого определителя получится кубический многочлен от переменной λ, называемый *характеристическим многочленом* матрицы D.

13.50. Докажем, что характеристический многочлен инвариантен относительно поворотов, т.е. ортогональных преобразований, описываемых матрицей

$$P = \left\| \begin{array}{c|c} R & O \\ \hline O & 1 \end{array} \right\|.$$

Матрица P ортогональна, т.е. $P^{-1} = P^T$ (проверьте!), поэтому, принимая во внимание формулу (13.20) преобразования матрицы

[1]Обратите внимание, что в этой формуле $\mathbb{1}$ в одном случае обозначает единичную матрицу порядка 3, а в другом — порядка 2.

D коэффициентов уравнения квадрики, имеем

$$\begin{aligned} f_{D'}(\lambda) &= \det(D' - \lambda\mathbb{1}) = \det\left(P^T D P - \lambda\mathbb{1}\right) = \\ &= \det\left(P^{-1} D P - \lambda P^{-1} P\right) = \det\left(P^{-1}(D - \lambda\mathbb{1})P\right) = \\ &= \det P^{-1} \cdot \det(D - \lambda\mathbb{1}) \cdot \det P = \det(D - \lambda\mathbb{1}) = f_D(\lambda). \end{aligned}$$

13.51. Получим развёрнутое выражение для многочлена $f_D(\lambda)$:

$$f_D(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & b_2 \\ b_1 & b_2 & c - \lambda \end{vmatrix} =$$

воспользуемся свойством линейности определителя, представив его первый столбец в виде $(a_{11}, a_{21}, b_1)^T - (\lambda, 0, 0)^T$ (в дальнейшем эта процедура будет несколько раз повторена):

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & b_2 \\ b_1 & b_2 & c - \lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \lambda & a_{12} & b_1 \\ 0 & a_{22} - \lambda & b_2 \\ 0 & b_2 & c - \lambda \end{vmatrix} =$$

в первом определителе ещё раз используем линейность, второй раскладываем по первому столбцу:

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ b_1 & b_2 & c - \lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & b_1 \\ a_{21} & \lambda & b_2 \\ b_1 & 0 & c - \lambda \end{vmatrix} - \lambda \begin{vmatrix} a_{22} - \lambda & b_2 \\ b_2 & c - \lambda \end{vmatrix} =$$

в первом и третьем определителях снова применяем свойство линейности, второй раскладываем по второму столбцу:

$$\begin{aligned} &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ b_1 & b_2 & c \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ b_1 & b_2 & \lambda \end{vmatrix} - \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ b_1 & c - \lambda \end{vmatrix} - \\ &\quad - \lambda \left(\begin{vmatrix} a_{22} & b_2 \\ b_2 & c - \lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \lambda & b_2 \\ 0 & c - \lambda \end{vmatrix} \right) = \\ &= \Delta - \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} - \lambda \left(\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ b_1 & c \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ b_1 & \lambda \end{vmatrix} \right) - \\ &\quad - \lambda \left(\begin{vmatrix} a_{22} & b_2 \\ b_2 & c \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{22} & 0 \\ b_2 & \lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \lambda & b_2 \\ 0 & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{vmatrix} \right) = \end{aligned}$$

$$= \Delta - \left(\delta + \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ b_1 & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & b_2 \\ b_2 & c \end{vmatrix}}_{=K} \right) \lambda + S\lambda^2 - \lambda^3.$$

Так как S, δ, Δ и $f_D(\lambda)$ инвариантны относительно поворотов (а первые три величины также и относительно сдвигов), заключаем, что

$$K = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ b_1 & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & b_2 \\ b_2 & c \end{vmatrix}$$

— инвариант относительно поворотов. Напомним, что имеется ещё одна величина, инвариантная относительно поворотов: свободный член c уравнения (см. (13.21)); c и K называются *полуинвариантами* (*семиинвариантами*).

13.52. Докажем, что в случае $\delta = \Delta = 0$ величина K является инвариантом также и относительно сдвигов.

Поскольку K — инвариант относительно поворотов, можем считать, что в уравнении квадрики мы с помощью поворота уже добились того, что $a_{12} = a_{21} = 0$, т.е. матрица коэффициентов имеет вид

$$D = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & b_1 \\ 0 & S & b_2 \\ \hline b_1 & b_2 & c \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \Delta = -b_1^2 S.$$

Поскольку по условию $\Delta = 0$, отсюда получаем $b_1 = 0$, так что

$$D = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 0 & S & b_2 \\ \hline 0 & b_2 & c \end{array}\right).$$

После сдвига начала координат, описываемого формулами

$$x = x' + x_0, \quad y = y' + y_0,$$

уравнение квадрики $Sy^2 + 2b_2 y + c = 0$ принимает вид

$$S(y' + y_0) + 2b_2(y' + y_0) + c = 0 \iff$$
$$\iff Sy'^2 + 2(Sy_0 + b_2) + (Sy_0^2 + 2b_2 y_0 + c) = 0.$$

Этому уравнению соответствует матрица коэффициентов

$$D' = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & & 0 \\ 0 & S & & Sy_0 + b_2 \\ \hline 0 & Sy_0 + b_2 & & Sy_0^2 + 2b_2 y_0 + c \end{array}\right).$$

Сравним величины K и K' для матриц D и D':

$$K' = \begin{vmatrix} S & Sy_0 + b_2 \\ Sy_0 + b_2 & Sy_0^2 + 2b_2y_0 + c \end{vmatrix} = \\ = S\big(Sy_0^2 + 2b_2y_0 + c\big) - \big(Sy_0 + b_2\big)^2 = Sc - b_2^2 = K,$$

так что K — инвариант относительно сдвигов в случае $\delta = \Delta = 0$.

13.53. Завершим анализ вырожденного параболического случая. Уравнение квадрики допускает уничтожение слагаемого b_2y с помощью переноса, т.е. приводится к полуканоническому виду

$$Sy'^2 + c' = 0, \quad D' = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 0 & S & 0 \\ \hline 0 & 0 & c' \end{array}\right), \quad K = Sc',$$

откуда $c' = K/S$, а уравнение квадрики принимает канонический вид

$$y'^2 + \frac{K}{S^2} = 0 \iff \begin{cases} y'^2 = a^2, & \text{где } a^2 = -\dfrac{K}{S^2}, \text{ если } K < 0, \\ y'^2 = -a^2, & \text{где } a^2 = \dfrac{K}{S^2}, \text{ если } K > 0, \\ y'^2 = 0, & \text{если } K = 0. \end{cases}$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

13.54. Теорема (классификация квадрик на евклидовой плоскости)**.** *При помощи поворота осей координат и переноса начала координат уравнение квадрики* (13.15) *может быть приведено к одному из девяти канонических типов, перечисленных в таблице на с.* 78.

2. Примеры решения задач

В примерах 13.1–CanonQuadr:prob:6 приведите уравнение квадрики к каноническому виду, найдите координаты фокусов, уравнения канонических осей координат, директрис и асимптот (при наличии).

Пример 13.1. $5x^2 - 4xy + 8y^2 + 32x - 56y + 80 = 0$.

Решение. Запишем матрицы коэффициентов уравнения:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 16; & -28 \end{pmatrix}, \ c = 80, \ D = \left(\begin{array}{cc|c} 5 & -2 & 16 \\ -2 & 8 & -28 \\ \hline 16 & -28 & 80 \end{array}\right).$$

Классификация квадрик на евклидовой плоскости

	Невырожденные линии: $\Delta \neq 0$	Вырожденные линии: $\Delta = 0$
Эллиптический тип: $\delta > 0$	$S\Delta < 0$: эллипс $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $a = \sqrt{-\dfrac{\Delta}{\delta\lambda_1}}$, $b = \sqrt{-\dfrac{\Delta}{\delta\lambda_2}}$, $\lvert\lambda_1\rvert < \lvert\lambda_2\rvert$	Пара мнимых пересекающихся прямых $a^2x^2 + b^2y^2 = 0$ $a = \sqrt{\lvert\lambda_1\rvert}$, $b = \sqrt{\lvert\lambda_2\rvert}$
	$S\Delta > 0$: мнимый эллипс $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = -1$ $a = \sqrt{-\dfrac{\Delta}{\delta\lambda_1}}$, $b = \sqrt{-\dfrac{\Delta}{\delta\lambda_2}}$	
Гиперболический тип: $\delta < 0$	Гипербола $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $a = \sqrt{-\dfrac{\Delta}{\delta\lambda_1}}$, $b = \sqrt{\dfrac{\Delta}{\delta\lambda_2}}$	Пара вещественных пересекающихся прямых $a^2x^2 - b^2y^2 = 0$ $a = \sqrt{\lvert\lambda_1\rvert}$, $b = \sqrt{\lvert\lambda_2\rvert}$
Параболический тип $\delta = 0$	Парабола $y^2 = 2px$ $p = \sqrt{-\dfrac{\Delta}{S^3}}$	$K < 0$: пара веществ. паралл. прямых $y^2 = a^2$, $a = \sqrt{-\dfrac{K}{S^2}}$
		$K > 0$: пара мнимых паралл. прямых $y^2 = -a^2$, $a = \sqrt{\dfrac{K}{S^2}}$
		$K = 0$: пара совпад. прямых $y^2 = 0$

Найдём ортогональные инварианты уравнения:

$$S = \operatorname{tr} A = 13, \quad \delta = \det A = 36 > 0, \quad \Delta = \det D = -1296.$$

Так как $\delta > 0$, квадрика является эллиптической, и её уравнение может быть преобразовано к полуканоническому виду

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + c' = 0,$$

а поскольку $S\Delta < 0$ — это эллипс.

Коэффициенты λ_1 и λ_2 являются собственными значениями (корнями характеристического многочлена) матрицы A:

$$f_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 5-\lambda & -2 \\ -2 & 8-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 13\lambda + 36 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} \lambda_1 = 4, \\ \lambda_2 = 9. \end{bmatrix}$$

Свободный член c' полуканонического уравнения найдем по формуле (13.27):

$$c' = \frac{\Delta}{\delta} = \frac{-1296}{36} = -36.$$

Итак, получаем полуканоническое уравнение

$$4x'^2 + 9y'^2 - 36 = 0$$

и далее каноническое

$$\frac{x'^2}{9} + \frac{y'^2}{4} = 1.$$

Определяемый этим уравнением эллипс имеет полуоси $a = 3$, $b = 2$, линейный эксцентриситет $\sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{5}$, эксцентриситет $\varepsilon = \sqrt{5}/3$, фокусы $F_1(-\sqrt{5}; 0)$ и $F_2(\sqrt{5}; 0)$ (в канонической системе координат $O'x'y'$) и директрисы $\sqrt{5}x' + 9 = 0$ (левая директриса, соответствующая фокусу F_1) и $\sqrt{5}x' - 9 = 0$ (правая директриса, соответствующая фокусу F_2).

Базисные векторы $\boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}'$ канонической системы координат являются собственными векторами матрицы A; для нахождения их координат (столбцов R_1, R_2) требуется решить однородные системы $(A - \lambda_k \mathbb{1})R_k = 0$, $k = 1, 2$:

$$\lambda_1 = 4: \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad R_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix};$$
$$\lambda_2 = 9: \quad \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что при нормировке решений линейных систем знаки нормирующих множителей c_1 и c_2 выбирались так, чтобы базис $\boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}'$ получился правым. Матрица поворота имеет вид

$$R = \|R_1,\ R_2\| = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Угол α поворота координатных осей определяется условиями

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2},$$

т.е. равен $\alpha = \operatorname{arctg}(1/2) \approx 26{,}6^\circ$. Этот же результат может быть получен и по формуле (13.22):

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}} = \frac{5-8}{-4} = \frac{3}{4} \ \Rightarrow\ 2\alpha = \operatorname{arcctg}\frac{3}{4} \ \Rightarrow\ \alpha \approx 26{,}6^\circ.$$

Для нахождения координат X_0 вектора переноса $\boldsymbol{r}_0$ начала координат в системе Oxy решим неоднородную систему $AX_0 = -B^T$:

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 16 \\ -28 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad X_0 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Итак, преобразование координат, приводящее уравнение квадрики к полуканоническому виду, есть

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

или

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|c} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} & -2 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 3 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{13.37}$$

Обозначим матрицу этого преобразования через P:

$$P = \left(\begin{array}{cc|c} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} & -2 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 3 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \left\| \begin{array}{c|c} R & X_0 \\ \hline O & 1 \end{array} \right\|;$$

для удобства запишем также

$$P = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & -2\sqrt{5} \\ 1 & 2 & 3\sqrt{5} \\ \hline 0 & 0 & \sqrt{5} \end{array}\right)$$

Обратная матрица вычисляется по формуле (13.13) (см. с. 61):

$$P^{-1} = \left\| \begin{array}{c|c} R^T & -R^T X_0 \\ \hline O & 1 \end{array} \right\|.$$

Поскольку

$$-R^T X_0 = -\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \end{pmatrix},$$

получаем

$$P^{-1} = \left(\begin{array}{cc|c} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{8}{\sqrt{5}} \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -8 \\ \hline 0 & 0 & \sqrt{5} \end{array} \right).$$

Таким образом, обратное преобразование координат имеет вид

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -8 \\ \hline 0 & 0 & \sqrt{5} \end{array} \right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{13.38}$$

Каноническая система координат $O'x'y'$ рассматриваемой квадрики получается из исходной системы координат Oxy параллельным переносом координатных осей на вектор $\boldsymbol{r}_0 = (-2; 3)^T$ и поворотом на угол $\alpha \approx 26{,}6^\circ$.

Отметим, что свободный член c' полуканонического уравнения может быть вычислен также по второй из формул (13.27):

$$c' = BX_0 + c = \begin{pmatrix} 16; & -28 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} + 80 = -36,$$

а матрица D' коэффициентов преобразованного уравнения — по формуле (13.20):

$$D' = P^T D P = \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -36 \end{array} \right).$$

Найдём координаты фокусов эллипса в системе координат Oxy по формулам (13.37):

$$F_1: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2\sqrt{5} \\ 1 & 2 & 3\sqrt{5} \\ 0 & 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{5} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

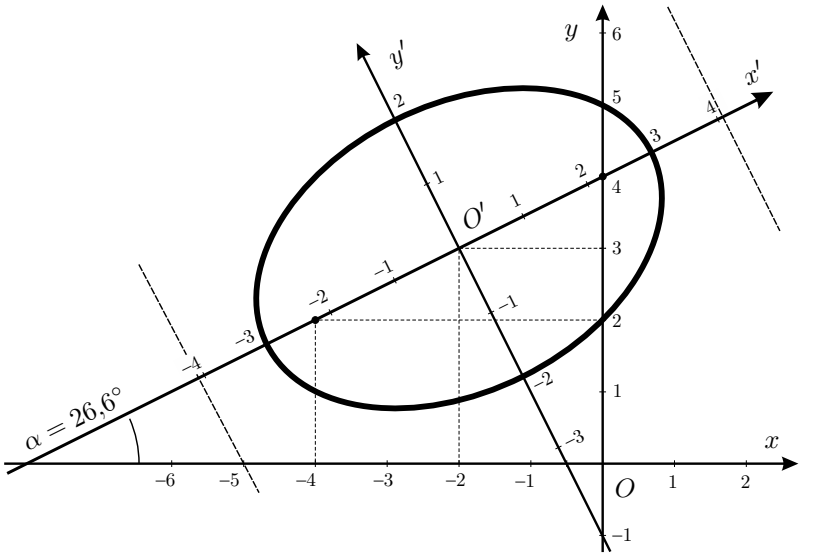


Рис. 13.3. К примеру 13.1

$$F_2: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2\sqrt{5} \\ 1 & 2 & 3\sqrt{5} \\ 0 & 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix},$$

т.е. $F_1(-4;2)$, $F_2(0;4)$ в системе координат Oxy.

Для нахождения уравнений директрис в системе Oxy нужно подставить в их уравнения $\sqrt{5}x' \pm 9 = 0$ относительно канонической системы координат выражения для x' и y' через x и y из преобразования (13.38), т.е. $Z' = P^{-1}Z$:

$$\sqrt{5}x' + 9 = 0 \iff \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \iff$$

$$\iff \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}^T \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -8 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \iff$$

$$\iff 2x + y + 10 = 0,$$

$$\sqrt{5}x' - 9 = 0 \iff \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 0 \\ -9 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \iff$$

$$\iff \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 0 \\ -9 \end{pmatrix}^T \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -8 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \iff$$

$$\iff 2x + y - 8 = 0.$$

Аналогичным образом находим уравнения канонических осей координат:

ось Ox' $(y' = 0)$:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}^T P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = -\sqrt{5}\left(\frac{1}{5}x - \frac{2}{5}y + \frac{8}{5}\right) = 0 \iff x - 2y + 8 = 0,$$

ось Oy' $(x' = 0)$:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^T P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \sqrt{5}\left(\frac{2}{5}x + \frac{1}{5}y + \frac{1}{5}\right) = 0 \iff 2x + y + 1 = 0.$$

Пример 13.2. $5x^2 - 2xy + 5y^2 - 22x + 14y + 29 = 0.$

Решение. Запишем матрицы коэффициентов уравнения:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -11 & 7 \end{pmatrix},\ c = 29,\ D = \left(\begin{array}{cc|c} 5 & -1 & -11 \\ -1 & 5 & 7 \\ \hline -11 & 7 & 29 \end{array}\right).$$

Поскольку $\det A = 24 > 0$, квадрика имеет эллиптический тип; её полуканоническое уравнение

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + c' = 0.$$

Коэффициенты λ_1 и λ_2 являются корнями характеристического многочлена матрицы A:

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 5-\lambda & -1 \\ -1 & 5-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 10\lambda + 24 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \lambda_1 = 4, \\ \lambda_2 = 6. \end{array}\right.$$

Для отыскания столбцов координат R_1, R_2 базисных векторов $\boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}'$ канонической системы координат требуется решить однородные системы $(A - \lambda_k \mathbb{1})R_k = O$:

$$\lambda_1 = 4\colon\ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\quad R_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_2 = 6\colon\ \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_2\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ R_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица поворота

$$R = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix};$$

очевидно, эта матрица описывает поворот на угол $\alpha = \pi/4 = 45^\circ$.

Чтобы найти столбец координат X_0 вектора переноса начала, нужно решить неоднородную систему $AX_0 = -B^T$:

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -7 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad X_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Итак, матрица полного преобразования, канонизирующего данную квадрику, имеет вид

$$P = \left(\begin{array}{cc|c} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 2 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Найдем свободный член полуканонического уравнения:

$$c' = BX_0 + c = \begin{pmatrix} -11 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + 29 = 0.$$

Таким образом, данная квадрика имеет полуканоническое уравнение

$$4x'^2 + 6y'^2 = 0$$

и представляет собой пару мнимых прямых, пересекающихся в вещественной точке, координаты которой в канонической системе координат $(0; 0)$, а в исходной системе координат — $(2; -1)$.

Так как координаты вектора $\overrightarrow{O'O}$ в системе координат $O'x'y'$ равны

$$X_0' = -R^T X_0 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

имеем

$$x' = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y - 1), \quad y' = \frac{1}{\sqrt{2}}(-x + y + 3),$$

так что исходное уравнение можно представить в виде

$$2\,(x + y - 1)^2 + 3\,(-x + y + 3)^2 = 0.$$

Пример 13.3. $13x^2 + 30xy - 27y^2 + 18x + 198y + 117 = 0$.
Решение. Матрицы коэффициентов данной квадрики

$$A = \begin{pmatrix} 13 & 15 \\ 15 & -27 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 9 & 99 \end{pmatrix}, \quad c = 117, \quad D = \left(\begin{array}{cc|c} 13 & 15 & 9 \\ 15 & -27 & 99 \\ \hline 9 & 99 & 117 \end{array}\right).$$

Найдём ортогональные инварианты уравнения:

$$S = \operatorname{tr} A = -14, \quad \delta = \det A = -576, \quad \Delta = \det D = -165888.$$

Поскольку $\delta < 0$, квадрика имеет гиперболический тип, а поскольку $\Delta \neq 0$ — это гипербола. Полуканоническое уравнение гиперболы

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + c' = 0$$

можно получить с помощью инвариантов: коэффициенты λ_1 и λ_2 являются корнями характеристического уравнения

$$\lambda^2 - S\lambda + \delta = 0 \iff \lambda^2 + 14\lambda - 576 = 0 \iff \begin{bmatrix} \lambda_1 = -32, \\ \lambda_2 = 18, \end{bmatrix}$$

а свободный член c' вычисляется по формуле (13.27)

$$c' = \frac{\Delta}{\delta} = \frac{-165888}{-576} = 288,$$

так что получаем полуканоническое уравнение

$$-32x'^2 + 18y'^2 + 288 = 0$$

и далее каноническое уравнение

$$\frac{x'^2}{9} - \frac{y'^2}{16} = 1$$

гиперболы с полуосями $a = 3$ и $b = 4$, линейным эксцентриситетом $\sqrt{a^2 + b^2} = 5$, эксцентриситетом $\varepsilon = 5/3$, фокусами $F_1(-5;0)$ и $F_2(5;0)$ (координаты фокусов указаны в канонической системе координат $O'x'y'$), директрисами $x' = \pm 9/5$ и асимптотами

$$\frac{x'^2}{9} - \frac{y'^2}{16} = 0 \iff \begin{bmatrix} 4x' - 3y' = 0, \\ 4x' + 3y' = 0. \end{bmatrix}$$

Найдём ортогональное преобразование, канонизирующее уравнение квадрики.

Сначала определим поворот, уничтожающий слагаемое $30xy$ в уравнении квадрики. Для этого найдём собственные векторы матрицы A:

$$\lambda_1 = -32: \quad \begin{pmatrix} 45 & 15 \\ 15 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad R_1 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix};$$

$$\lambda_2 = 18: \quad \begin{pmatrix} -5 & 15 \\ 15 & -45 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix};$$

нормировочные коэффициенты выбраны так, чтобы матрица

$$R = \|R_1,\ R_2\| = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

имела определитель $\det R = +1$, т.е. описывала поворот. Угол поворота координатных осей равен

$$\alpha = \operatorname{arctg}(-3) \approx -1{,}249 = -71{,}6^\circ.$$

Для определения вектора переноса начала координат решим неоднородную систему уравнений $AX_0 = -B^T$:

$$\begin{pmatrix} 13 & 15 \\ 15 & -27 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ -99 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что свободный член c' полуканонического уравнения может быть вычислен также по второй из формул (13.27):

$$c' = BX_0 + c = \begin{pmatrix} 9 & 99 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} + 117 = 288,$$

что, разумеется совпадает с результатом, полученным ранее при помощи инвариантов.

Матрица ортогонального преобразования, канонизирующего данную квадрику, имеет вид

$$P = \left(\begin{array}{cc|c} 1/\sqrt{10} & 3/\sqrt{10} & -3 \\ -3/\sqrt{10} & 1/\sqrt{10} & 2 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \frac{1}{\sqrt{10}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & -3\sqrt{10} \\ -3 & 1 & 2\sqrt{10} \\ \hline 0 & 0 & \sqrt{10} \end{array}\right),$$

т.е. преобразование осуществляется по формулам

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{10}}(x' + 3y') - 3, \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{10}}(-3x' + y') + 2. \end{cases} \tag{13.39}$$

Чтобы найти обратное преобразование P^{-1} (оно потребуется для нахождения уравнений асимптот и директрис), воспользуемся формулой (**??**) (см. с. **??**):

$$X_0' = -R^T X_0 = -\frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \end{pmatrix},$$

$$P^{-1} = \frac{1}{\sqrt{10}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 9 \\ 3 & 1 & 7 \\ \hline 0 & 0 & \sqrt{10} \end{array}\right), \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{13.40}$$

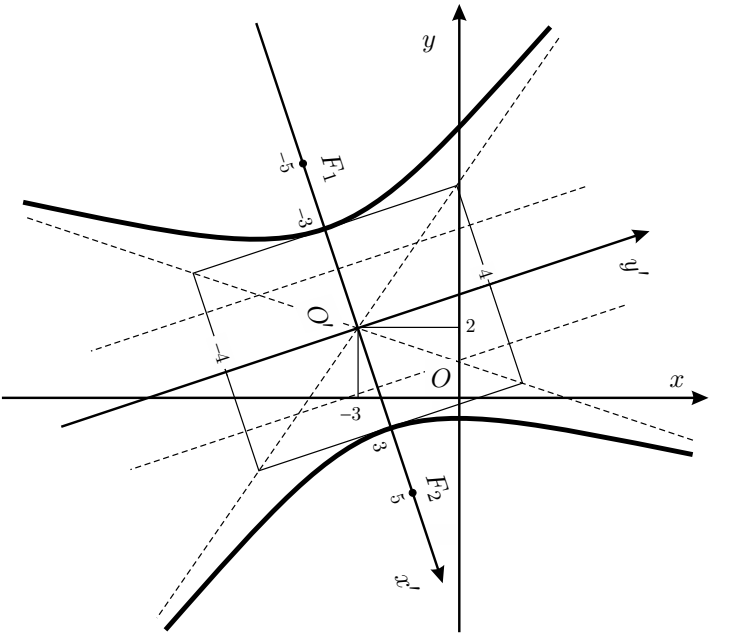


Рис. 13.4. К примеру 13.3

Найдём координаты фокусов гиперболы в исходной системе координат Oxy:

$$F_1: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{10} - 3 \\ \frac{3}{2}\sqrt{10} + 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$F_2: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{10} - 3 \\ 2 - \frac{3}{2}\sqrt{10} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Найдём уравнения канонических осей координат. Уравнения этих осей в канонической системе координат суть $y' = 0$ и $x' = 0$; чтобы получить их уравнения в исходной системе координат, воспользуемся формулами преобразования (13.40):

$$O'x' \ (y' = 0): \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}^T P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0, \quad 3x + y + 7 = 0;$$

$$O'y' \ (x' = 0): \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^T P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0, \quad x - 3y + 9 = 0.$$

Аналогично преобразуем уравнения асимптот:

$$4x'+3y'=0:\quad \begin{pmatrix}4\\3\\0\end{pmatrix}^T P^{-1}\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}=0,\qquad 13x-9y+57=0,$$

$$4x'-3y'=0:\quad \begin{pmatrix}4\\-3\\0\end{pmatrix}^T P^{-1}\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}=0,\qquad x+3y-3=0,$$

и уравнения директрис:

$$5x'+9=0:\quad \begin{pmatrix}5\\0\\9\end{pmatrix}^T P^{-1}\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}=0,\quad x-3y+\frac{9}{5}\sqrt{10}+9=0,$$

$$5x'-9=0:\quad \begin{pmatrix}5\\0\\-9\end{pmatrix}^T P^{-1}\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}=0,\quad x-3y-\frac{9}{5}\sqrt{10}+9=0.$$

Пример 13.4. $27x^2-48xy+13y^2-72x+114y-27=0$.

Решение. Запишем матрицы коэффициентов уравнения:

$$A=\begin{pmatrix}27&-24\\-24&13\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-36&57\end{pmatrix},\ c=-27,\ D=\left(\begin{array}{cc|c}27&-24&-36\\-24&13&57\\\hline -36&57&-27\end{array}\right)$$

и вычислим его ортогональные инварианты:

$$S=\operatorname{tr}A=40,\quad \delta=\det A=-225,\quad \Delta=0.$$

Квадрика имеет вырожденный ($\Delta=0$) гиперболический ($\delta<0$) тип, т.е. представляет собой пару пересекающихся прямых.

Найдём собственные значения и собственные векторы матрицы A:

$$\lambda^2-S\lambda+\delta=0\iff\lambda^2-40\lambda-225=0\iff\begin{bmatrix}\lambda_1=45,\\\lambda_2=-5,\end{bmatrix}$$

$$\lambda_1=45:\quad \begin{pmatrix}-18&-24\\-24&-32\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\qquad R_1=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix},$$

$$\lambda_2=-5:\quad \begin{pmatrix}32&-24\\-24&18\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\qquad R_2=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}.$$

Как обычно, выбор нормировочных констант осуществляется так, чтобы матрица $R=\big\|R_1,\ R_2\big\|$ имела определитель $+1$, т.е. соответствовала бы повороту системы координат; в нашем случае матрица поворота

$$R=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}4&3\\-3&4\end{pmatrix}$$

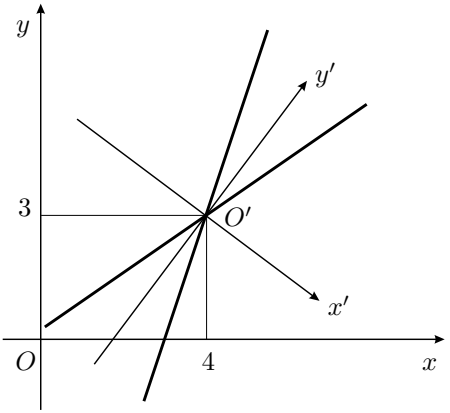


Рис. 13.5. К примеру 13.4

описывает вращение на угол $\alpha = -\operatorname{arctg}(3/4) \approx -36{,}9°$.

Вектор переноса начала координат определяется из уравнения $AX_0 = -B^T$:

$$X_0 = -A^{-1}B^T = -\begin{pmatrix} 27 & -24 \\ -24 & 13 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} -36 \\ 57 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Итак, полуканоническое уравнение рассматриваемой квадрики имеет вид

$$45x'^2 - 5y'^2 = 0 \iff 9x'^2 - y'^2 = 0 \iff \left[\begin{array}{l} 3x' - y' = 0, \\ 3x' + y' = 0. \end{array}\right.$$

Матрица P ортогонального преобразования, канонизирующего уравнение, и обратная к ней[1] P^{-1} равны

$$P = \left(\begin{array}{cc|c} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 4 \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 3 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \quad P^{-1} = \left(\begin{array}{cc|c} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{7}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} & -\frac{24}{5} \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Уравнения прямых, образующих рассматриваемую квадрику, в системе координат Oxy:

$$3x' - y' = 0: \quad \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}^T P^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0, \quad 9x - 13y = -3,$$

[1]Матрица P^{-1} вычисляется по формуле (13.13) (см. с. 61).

$$3x' + y' = 0: \qquad \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}^T P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0, \qquad 3x - y = 9.$$

Уравнения осей канонической системы координат:

$$Ox' \ (y' = 0): \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}^T P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0, \quad 3x + 4y = 24,$$

$$Oy' \ (x' = 0): \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^T P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0, \quad 4x - 3y = 7.$$

Пример 13.5. $x^2 - 2xy + y^2 + 16x + 8y - 92 = 0$.

Решение. Запишем матрицы коэффициентов уравнения:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 8 & 4 \end{pmatrix}, \quad c = -92, \quad D = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 8 \\ -1 & 1 & 4 \\ \hline 8 & 4 & -92 \end{array}\right)$$

и вычислим ортогональные инварианты:

$$S = \operatorname{tr} A = 2, \quad \delta = \det A = 0, \quad \Delta = \det D = -144.$$

Так как $\delta = 0$, квадрика имеет параболический тип; поскольку $\Delta \neq 0$ — это парабола с каноническим уравнением $y''^2 = 2px''$. Фокальный параметр можно определить с помощью инвариантов:

$$p = \sqrt{-\frac{\Delta}{S^3}} = \sqrt{-\frac{-144}{2^3}} = 3\sqrt{2}.$$

Итак, каноническое уравнение параболы имеет вид

$$y''^2 = 6\sqrt{2}x'',$$

её фокус имеет в канонической системе $O''x''y''$ координаты $F(3/\sqrt{2}; 0)$, а директриса — уравнение $x'' = -3/\sqrt{2}$ или $\sqrt{2}x'' + 3 = 0$.

Займёмся поиском ортогонального преобразования, канонизирующего рассматриваемое уравнение. Собственные значения матрицы A равны $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 = S = 2$; найдём собственные векторы:

$$\lambda_1 = 0: \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad R_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$\lambda_2 = 2: \quad \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

нормировочные коэффициенты выбраны так, чтобы новый базис $\boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}'$ получился правым, т.е. чтобы матрица поворота

$$R = \big\| R_1,\ R_2 \big\| = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

имела определитель $+1$.

Матрицы коэффициентов уравнения квадрики после поворота координатных осей примут вид

$$B' = BR = \big(8;\ 4\big) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \big(6\sqrt{2};\ -2\sqrt{2}\big)$$

и

$$D' = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 6\sqrt{2} \\ 0 & 2 & -2\sqrt{2} \\ \hline 6\sqrt{2} & -2\sqrt{2} & -92 \end{array}\right);$$

стало быть, полуканоническое уравнение квадрики имеет вид

$$2y'^2 + 12\sqrt{2}x' - 4\sqrt{2}y' - 92 = 0$$

Коэффициент при x' имеет тот же знак, что и коэффициент при y'^2, так что алгебраическими преобразованиями полученное уравнение не удастся свести к каноническому уравнению параболы $y''^2 = 2px''$, где $p > 0$. Для того, чтобы знаки коэффициентов при x' и y'^2 стали противоположными, требуется изменить направления осей Ox' и Oy' на противоположные, что достигается изменением знака матрицы поворота R или, что то же самое, дополнительным поворотом на $180°$. Итак, матрицу поворота возьмём в виде

$$R = -\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix};$$

эта матрица описывает поворот на угол $\alpha = 135°$. Матрицы коэффициентов уравнения квадрики примут вид

$$B' = BR = \big(8\ 4\big) \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \big(-6\sqrt{2} \quad 2\sqrt{2}\big)$$

и

$$D' = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & -6\sqrt{2} \\ 0 & 2 & 2\sqrt{2} \\ \hline -6\sqrt{2} & 2\sqrt{2} & -92 \end{array}\right),$$

а полуканоническое уравнение квадрики — вид

$$2y'^2 - 12\sqrt{2}x' + 4\sqrt{2}y' - 92 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad y'^2 - 6\sqrt{2}x' + 2\sqrt{2}y' - 46 = 0.$$

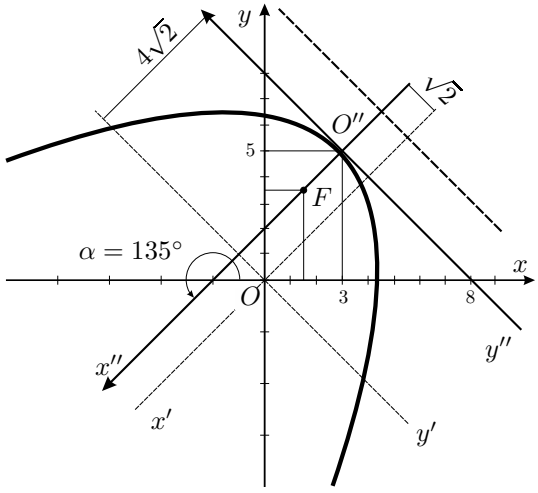


Рис. 13.6. К примеру 13.5

Перегруппировывая слагаемые, получим

$$y'^2 + 2\sqrt{2}y' = 6\sqrt{2}x' + 46$$

или, выделяя полный квадрат,

$$\left(y' + \sqrt{2}\right)^2 = 6\sqrt{2}\left(x' + 4\sqrt{2}\right).$$

Введя переменные

$$y'' = y' + \sqrt{2}, \quad x'' = x' + 4\sqrt{2}$$

получим уже известное нам каноническое уравнение $y''^2 = 6\sqrt{2}x''$ параболы с фокальным параметром $p = 3\sqrt{2}$.

Начало O'' канонической системы координат $O''x''y''$ относительно системы $Ox'y'$ имеет координаты

$$X'_0 = \begin{pmatrix} -4\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Найдём его координаты в системе Oxy:

$$X_0 = RX'_0 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, полное ортогональное преобразование, канонизирующее уравнение данной квадрики, и обратное преобразование

имеют матрицы

$$P = \left(\begin{array}{cc|c} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 3 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 5 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \quad P^{-1} = \left(\begin{array}{cc|c} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 4\sqrt{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \sqrt{2} \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Координаты фокуса в системе Oxy:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 3/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 7/2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

т.е. $F(3/2; 7/2)$. Уравнение директрисы:

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}^T P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 11 - y - x = 0,$$

т.е. $x + y = 11$.

Уравнения осей канонической системы координат:

$$\text{ось } Ox\ (y=0): \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}^T P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \sqrt{2}\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + 1\right) = 0,$$

$$\text{ось } Oy\ (x=0): \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^T P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = -\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - 4\right) = 0,$$

т.е. оси канонической системы координат имеют уравнения $x - y + 2 = 0$ (ось Ox) и $x + y - 8 = 0$ (ось Oy).

Пример 13.6. $4x^2 + 12xy + 9y^2 - 36x - 54y + 72 = 0$.

Решение. Запишем матрицы коэффициентов уравнения:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -18; & -27 \end{pmatrix},\ c = 72,\ D = \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 6 & -18 \\ 6 & 9 & -27 \\ \hline -18 & -27 & 72 \end{array}\right).$$

Вычислим ортогональные инварианты уравнения:

$$S = \operatorname{tr} A = 13, \quad \delta = \det A = 0, \quad \Delta = \det D = 0.$$

Таким образом, это вырожденная параболическая квадрика, и для определения её типа требуется ещё вычислить полуинвариант K:

$$K = \begin{vmatrix} 4 & -18 \\ -18 & 72 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 9 & -27 \\ -27 & 72 \end{vmatrix} = -117.$$

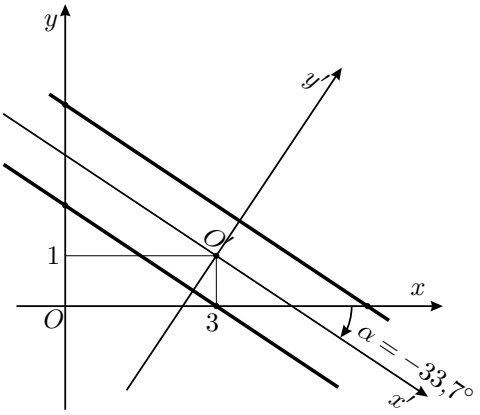


Рис. 13.7. К примеру 13.6

Полуканоническое уравнение $Sy'^2 + K/S = 0$, т.е.

$$13y'^2 - 9 = 0,$$

которому соответствует матрица коэффициентов

$$D' = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -9 \end{array}\right),$$

распадается в пару уравнений параллельных прямых

$$\sqrt{13}y' - 3 = 0, \quad \sqrt{13}y' + 3 = 0.$$

Определим ортогональное преобразование, канонизирующее уравнение рассматриваемой квадрики. Собственные значения $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 = 13$ матрицы A, являющиеся корнями характеристического уравнения $\lambda^2 - 13\lambda = 0$, были найдены ранее; найдём собственные векторы матрицы A:

$$\lambda_1 = 0: \quad \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad R_1 = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_2 = 13: \quad \begin{pmatrix} -9 & 6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Матрица поворота

$$R = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

описывает вращение на угол $\alpha = -\operatorname{arctg}(2/3) \approx -33{,}7°$.

Для определения вектора параллельного переноса нужно решить неоднородную систему $AX_0 = -B^T$, которая в рассматриваемом случае имеет бесконечно много решений. Воспользуемся

методом Гаусса—Жордана:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 6 & 18 \\ 6 & 9 & 27 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3/2 & 9/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right);$$

общее решение системы описывается формулой

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9/2 \\ 0 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} -3/2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

где a — произвольная константа. Матрица P канонизирующего ортогонального преобразования и обратная к ней P^{-1} имеют вид

$$P = \left(\begin{array}{cc|c} \dfrac{3}{\sqrt{13}} & \dfrac{2}{\sqrt{13}} & \dfrac{9-3a}{2} \\ -\dfrac{2}{\sqrt{13}} & \dfrac{3}{\sqrt{13}} & a \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \quad P^{-1} = \frac{1}{\sqrt{13}} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -2 & \dfrac{13a-27}{2} \\ 2 & 3 & -9 \\ \hline 0 & 0 & \sqrt{13} \end{array}\right).$$

Найдём уравнения прямых линий, составляющих рассматриваемую квадрику, в системе координат Oxy:

$$\sqrt{13}y' - 3 = 0: \quad \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{13} \\ -3 \end{pmatrix}^T P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0, \quad 2x + 3y = 12,$$

$$\sqrt{13}y' + 3 = 0: \quad \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{13} \\ 3 \end{pmatrix}^T P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0, \quad 2x + 3y = 6;$$

таким образом, уравнение данной квадрики может быть представлено в виде

$$(2x + 3y - 6)(2x + 3y - 12) = 0.$$

Уравнения осей канонической системы координат:

$$\text{ось } Ox' \ (y' = 0): \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}^T P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0, \quad 2x + 3y = 9,$$

$$\text{ось } Oy' \ (x' = 0): \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^T P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0, \quad 3x - 2y = \frac{1}{2}(27 - 13a),$$

где a — произвольная постоянная.

3. Задачи для самостоятельного решения

В задачах 13.1–13.12 приведите уравнение квадрики к каноническому виду, найдите координаты фокусов, уравнения канонических осей координат, директрис и асимптот (при наличии).

13.1. $5x^2 + 4xy + 8y^2 + 22x - 20y + 17 = 0$.

13.2. $41x^2 - 24xy + 9y^2 - 106x + 42y + 29 = 0$.

13.3. $x^2 - 16xy - 11y^2 - 26x - 92y - 71 = 0$.

13.4. $4x^2 - 20xy - 11y^2 + 44x + 106y - 59 = 0$.

13.5. $7x^2 + 50xy + 7y^2 - 158x + 94y - 425 = 0$.

13.6. $13x^2 + 32xy + 37y^2 - 6x - 42y + 18 = 0$.

13.7. $8x^2 + 4xy + 5y^2 - 12x + 42y + 153 = 0$.

13.8. $16x^2 + 24xy + 9y^2 - 16x - 262y + 529 = 0$.

13.9. $9x^2 + 24xy + 16y^2 - 30x + 210y + 375 = 0$.

13.10. $4x^2 - 4xy + y^2 + 28x - 14y + 29 = 0$.

13.11. $4x^2 - 4xy + y^2 + 28x - 14y + 29 = 0$.

13.12. $9x^2 - 24xy + 16y^2 - 48x + 64y + 89 = 0$.

13.13. Выведите формулы (13.12).

13.14 (р)**.** Уравнение $F(x, y) = 0$ определяет эллипс. Какая линия определяется уравнением $F(x, y) = f$?

13.15. Уравнение $F(x, y) = 0$ определяет гиперболу. Составьте уравнения асимптот этой гиперболы. Какая линия определяется уравнением $F(x, y) = f$?

13.16. Уравнение $F(x, y) = 0$ определяет параболу. Какая линия определяется уравнением $F(x, y) = f$?

13.17. Пусть квадрика определена уравнением $F(x, y) = 0$, где $F(x, y) = Z^T DZ$ (см. п. 13.11, с. 63). Назовём точку (x_0, y_0) квадрики *особой*, если в ней $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) = \dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$. Для каждого типа квадрики установите её особые точки.

13.18 (р)**.** *Касательной* к квадрике в её неособой точке (x_0, y_0) называется прямая, проходящая через эту точку и пересекающая квадрику в двух совпавших точках либо целиком содержащаяся в квадрике. Докажите, что касательная к квадрике $F(x, y) = 0$, где $F(x, y) = Z^T DZ$ (см. задачу 13.17), имеет уравнение

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) = 0$$

или, эквивалентно,

$$Z_0^T DZ = 0, \tag{13.41}$$

где $Z_0 = (x_0, y_0, 1)^T$ — столбец однородных координат точки касания.

13.19 (у)**.** Пусть коника (т.е. эллипс, гипербола или парабола) задана уравнением $F(x, y) = 0$. Рассмотрим произвольную точку $P(x_0, y_0)$ плоскости, отличную от центра линии, и прямую с уравнением $Z_0^T DZ = 0$, вид которой совпадает с видом уравнения (13.41) касательной. Эта прямая называется *полярой* точки P относительно коники, а сама точка P — *полюсом* рассматриваемой поляры. Очевидно, если точка $P(x_0, y_0)$ лежит на конике, то поляра этой точки является касательной. Докажите, что если из точки P можно провести к конике две касательных с точками касания M и N, то прямая MN является полярой точки P.

13.20 (у)**.** Докажите, что поляра не зависит от выбора системы координат.

13.21 (р)**.** Из произвольной точки директрисы коники проведены к этой конике две касательные. Докажите, что прямая, соединяющая точки касания, проходит через фокус, соответствующий этой директрисе; иными словами (см. задачу 13.19), если полюс лежит на директрисе, то поляра проходит через соответствующий фокус.

Указания и решения

11.6. Указание к заданию (2а): воспользуйтесь результатами п. (1а) и примера 11.3.

Указание к заданию (2б). Преобразуйте выражение для вектора $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_0$.

11.11. (1) Если прямые скрещиваются, то они лежат в параллельных плоскостях (см. рис. 0.1(а)). Направляющие векторы $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$ прямых не коллинеарны, а любой вектор, соединяющий произвольно выбранные точки на этих прямых (например, вектор $\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$, соединяющий опорные точки), не компланарен упомянутым выше параллельным плоскостям. В этом случае

$$(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) \neq 0.$$

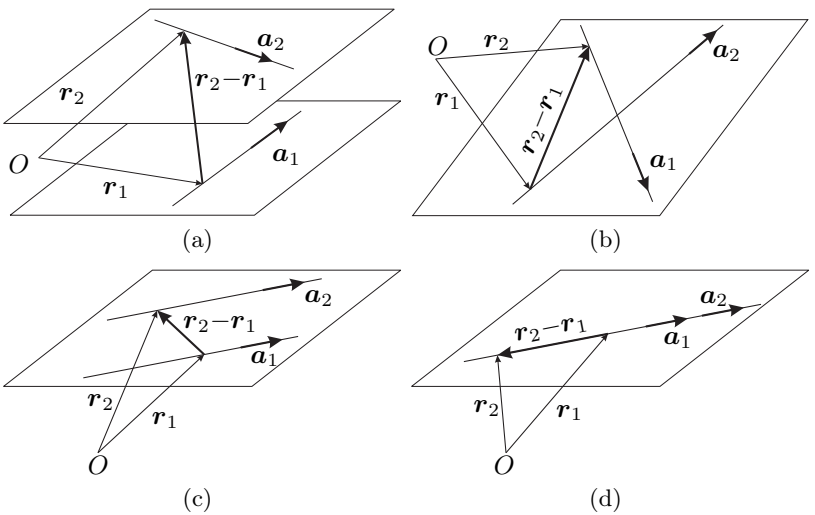


Рис. 0.1. К задаче 11.11

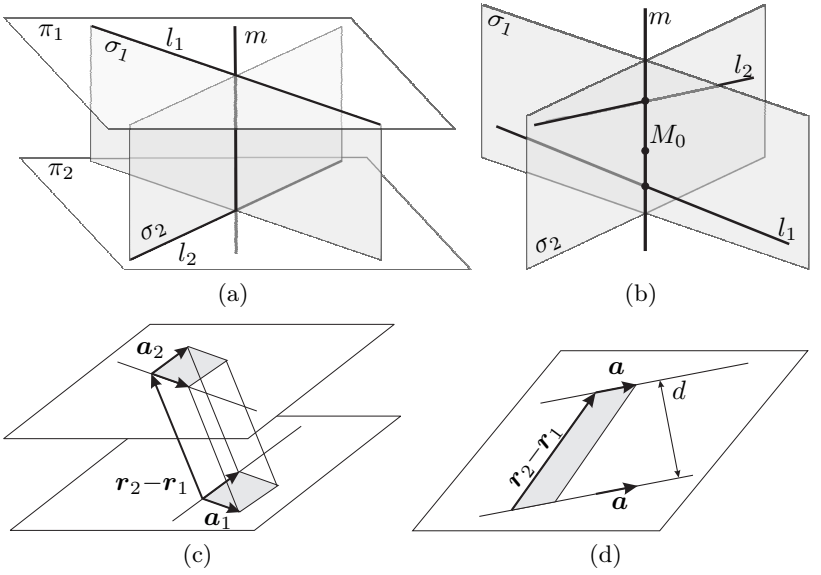


Рис. 0.2. К задаче 11.11

(1а) Общий перпендикуляр m к скрещивающимся прямым представляет собой пересечение двух плоскостей σ_1 и σ_2, каждая из которых содержит соответствующую прямую l_1 или l_2 и перпендикулярна к параллельным плоскостям π_1, π_2, содержащим данные скрещивающиеся прямые (см. рис. 0.2(а)). Ясно, что направляющий вектор общего перпендикуляра совпадает с общим нормальным вектором плоскостей π_1 и π_2. Таким образом, общий перпендикуляр задаётся системой, состоящей из уравнений плоскостей σ_1 и σ_2.

(1б) Искомая прямая m является пересечением плоскостей σ_1 и σ_2, проходящих соответственно через прямые l_1 и l_2 и через точку M_0 (см. рис. 0.2(б)).

(1в) Чтобы найти расстояние между скрещивающимися прямыми, рассмотрим параллелепипед, рёбрами которого являются векторы $\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$ (см. рис. 0.2(в)). С одной стороны, его объём равен модулю смешанного произведения этих векторов, т.е. $\big|(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2)\big|$, а с другой — произведению площади основания $\big|[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2]\big|$ на высоту d, откуда

$$d=\frac{\big|(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2)\big|}{\big|[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2]\big|}. \tag{0.1}$$

(2) Если прямые пересекаются, то они лежат в одной плоскости (см. рис. 0.1(б)). Направляющие векторы $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$ прямых не коллинеарны, а любой вектор, соединяющий произвольно выбранные точки на этих прямых (например, вектор $\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$), компланарен упомянутым выше параллельным плоскостям. В этом случае

$$[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2] \neq \boldsymbol{0}, \quad (\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) = 0.$$

(2б) Для нахождения точки пересечения прямых запишите уравнение $\boldsymbol{r}_1 + s\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{r}_2 + t\boldsymbol{a}_2$ в виде $s\boldsymbol{a}_1 - t\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$, умножьте векторно обе части на $\boldsymbol{a}_2$ и решите полученное уравнение относительно переменной s.

(3) Если прямые параллельны, то они лежат в одной плоскости (см. рис. 0.1(в)). Направляющие векторы $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$ прямых коллинеарны, а любой вектор, соединяющий произвольно выбранные точки на этих прямых (например, вектор $\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$), не коллинеарен векторам $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$. В этом случае

$$[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2] = \boldsymbol{0}, \quad [\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{a}_1] \neq \boldsymbol{0}.$$

(3б) Чтобы найти расстояние между параллельными прямыми, рассмотрим параллелограмм, сторонами которого являются векторы $\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$ и $\boldsymbol{a}$ (см. рис. 0.2(г)). С одной стороны, по определению векторного произведения, его площадь равна $\big|[\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{a}]\big|$, а с другой — произведению длины основания $\boldsymbol{a}$ на высоту d, т.е. $|\boldsymbol{a}| \cdot d$, откуда

$$d = \frac{\big|[\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{a}]\big|}{|\boldsymbol{a}|}. \tag{0.2}$$

(4) Для совпадающих прямых все три вектора $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ и $\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$ коллинеарны (см. рис. 0.1(г)); в этом случае

$$[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2] = \boldsymbol{0}, \quad [\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{a}_1] = \boldsymbol{0}.$$

11.12. Необходимым условием совместности уравнений $[\boldsymbol{r}, \boldsymbol{a}_1] = \boldsymbol{b}_1$, $[\boldsymbol{r}, \boldsymbol{a}_2] = \boldsymbol{b}_2$ является соотношение $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}_2) + (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1) = 0$, которое получится, если умножить скалярно первое уравнение на $\boldsymbol{a}_2$, второе на $\boldsymbol{a}_1$ и сложить полученные формулы. При выполнении этого соотношения прямые либо пересекаются (при $[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2] \neq 0$), либо совпадают (в противном случае). Если же $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}_2) + (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1) \neq 0$, то прямые параллельны при $[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2] = 0$ и скрещиваются в противном случае.

11.14. Параметризация окружности: $x = \sin\varphi$, $y = 0$, $z = 1 + \cos\varphi$, $\varphi \in [0; 2\pi]$.

12.4. Если за оси прямоугольной системы координат принять оси данных парабол, то их уравнения в этой системе координат будут

$$y^2 = 2p(x + a), \quad x^2 = 2q(y + b), \quad a, b, p, q > 0.$$

Складывая эти уравнения, получим

$$x^2 + y^2 - 2px - 2qy - 2ap - 2bq = 0.$$

Выделяя полные квадраты, приведём полученное уравнение к виду

$$(x-p)^2 + (y-q)^2 = p^2 + q^2 + 2ap + 2bq;$$

это уравнение окружности с центром в точке (p, q). Если координаты некоторой точки A удовлетворяют уравнениям обеих парабол, то они удовлетворяют и полученному уравнению окружности, а это и означает, что точки пересечения парабол лежат на найденной окружности.

13.14. Матрицы коэффициентов уравнений $F(x,y) = 0$ и $F(x,y) = f$ имеют соответственно вид

$$D = \left\|\begin{array}{c|c} A & B^T \\ \hline B & c \end{array}\right\|, \quad D' = \left\|\begin{array}{c|c} A & B^T \\ \hline B & c-f \end{array}\right\|,$$

а инварианты этих уравнений суть $S = S' = \operatorname{tr} A$, $\delta = \delta' = \det A > 0$ и

$$\Delta = \det\left\|\begin{array}{c|c} A & B^T \\ \hline B & c \end{array}\right\|, \quad \Delta' = \det\left\|\begin{array}{c|c} A & B^T \\ \hline B & c-f \end{array}\right\| = \Delta - f\delta.$$

Для определённости будем считать, что $\Delta > 0$. Тогда искомая линия также будет эллипсом при $\Delta' > 0$, т.е. при $f < \Delta/\delta$ (отметим, что $\Delta/\delta > 0$). Если $f = \Delta/\delta$, то получим $\Delta' = 0$, и эллипс вырождается в точку (согласно классификационной теореме это пара мнимых пересекающихся прямых). В случае $f > \Delta/\delta$ получаем мнимый эллипс.

В случае $f < \Delta/\delta$ (когда искомая линия является эллипсом), центры данного и искомого эллипсов совпадают, поскольку определяются одним и тем же уравнением $AX_0 = -B^T$; совпадают и направления канонических осей координат (они определяются собственными векторами матрицы A). Отношения квадратов полуосей двух эллипсов равны (см. формулы (13.29)):

$$\frac{a'^2}{a^2} = \frac{b'^2}{b^2} = \frac{\Delta'}{\Delta} = \frac{\Delta - f\delta}{\Delta} = 1 - f\frac{\delta}{\Delta},$$

так что рассматриваемые два эллипса гомотетичны (центр гомотетии совпадает с общим центром эллипсов), причём коэффициент гомотетии равен $\sqrt{1 - f\delta/\Delta}$.

13.18. Прямая $x = x_0 + lt$, $y = y_0 + mt$ пересекает квадрику

$$F(x,y) \equiv a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_1x + 2b_2y + c = 0$$

в точках, соответствующих решениям уравнения $F_2t^2+2F_1t+F_0=0$, где

$$\begin{aligned}
F_0 &= F(x_0,y_0)=0,\\
F_1 &= l(a_{11}x_0+a_{12}y_0+b_1)+m(a_{12}x_0+a_{22}y_0+b_2)=\\
&= l\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)+m\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0),\\
F_2 &= a_{11}l^2+2a_{12}lm+a_{22}m^2.
\end{aligned}$$

Условие касания имеет вид $F_1=0$, т.е.

$$l\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)+m\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0),$$

так что можно выбрать

$$l=-\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0),\quad m=\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0);$$

вектор $(l;m)$ ненулевой, поскольку точка (x_0,y_0) неособая. В развёрнутом виде

$$(a_{11}x_0+a_{12}y_0+b_1)(x-x_0)+(a_{12}x_0+a_{22}y_0+b_2)(y-y_0)=0;$$

с учётом условия $F(x_0,y_0)=0$ это даёт

$$(a_{11}x_0+a_{12}y_0+b_1)x+(a_{12}x_0+a_{22}y_0+b_2)y+(b_1x+b_2y+c)=0$$

или, эквивалентно, $Z_0^TDZ=0$.

13.19. Если (x_k,y_k) — координаты точек касания и $Z_k=(x_k,y_k,1)^T$ — соответствующие столбцы однородных координат, $k=1,2$, то уравнения касательных имеют вид $Z_k^TDZ=0$. Поскольку точка P лежит на обеих касательных, имеем $Z_k^TDZ_0=0$. Транспонируя, получим $Z_0^TDZ_k=0$. Итак, точки Z_k удовлетворяют уравнениям $Z_k^TDZ_k=0$ (уравнение коники) и $Z_0^TDZ_k=0$ (уравнение поляры). Таким образом, Z_k — точки пересечения поляры с коникой.

13.20. *Указание*: подставьте формулы замены координат (13.12) и (13.20) в уравнение поляры.

13.21. Проверим утверждение для левого фокуса эллипса $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$: если полюс лежит на левой директрисе, т.е. $Z_0(-a/\varepsilon,y_0,1)$, то левый фокус (его однородные координаты

$(-c, 0, 1)$) лежит на поляре $Z_0DZ = 0$. Для канонического уравнения эллипса

$$\begin{pmatrix} -a/\varepsilon \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1/a^2 & 0 & \\ 0 & 1/b^2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -c \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{c}{a\varepsilon} - 1 = 0.$$

Ответы

11.1. Уравнение плоскости $-9x+35y-16z=159$. (а) l_1 и π параллельны; расстояние между ними $\sqrt{1562}$. (б) l_2 лежит в плоскости π; (в) l_3 и π пересекаются в точке $(1;8;7)$; уравнение проекции $(x;y;z)=(1;8;7)+t(1;3;6)$.
??. а) l_1 и l_2 совпадают; (б) l_1 и l_3 скрещиваются, расстояние между ними равно 6, уравнение общего перпендикуляра $x=-4+t$, $y=-3+2t$, $z=6-2t$, точки пересечения $(-4;-3;6)\in l_1$, $(-2;1;2)\in l_3$; (в) l_1 и l_4 параллельны и лежат в плоскости $4x-y+z+7=0$, расстояние между ними равно 6; (г) l_3 и l_4 пересекаются в точке $(-2;1;2)$ и лежат в плоскости $x+2y-2z+4=0$.
11.3.

(i) Если векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{q}-\boldsymbol{p}$ некомпланарны (линейно независимы), то прямые скрещиваются.
(ii) Если векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{q}-\boldsymbol{p}$ компланарны, но при этом $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ неколлинеарны, а $\boldsymbol{q}-\boldsymbol{p}$ лежит в их линейной оболочке, то прямые лежат в одной плоскости и пересекаются в единственной точке.
(iii) Если векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ коллинеарны, а вектор $\boldsymbol{q}-\boldsymbol{p}$ им не коллинеарен, то прямые параллельны.
(iv) Если все три вектора $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{q}-\boldsymbol{p}$ коллинеарны, то прямые совпадают.

Если

$$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}a_x\\a_y\\a_z\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}b_x\\b_y\\b_z\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{q}-\boldsymbol{p}=\begin{pmatrix}c_x\\c_y\\c_z\end{pmatrix},$$

$$M=\big\|\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\big\|=\begin{pmatrix}a_x & b_x\\a_y & b_y\\a_z & b_z\end{pmatrix},\quad \widetilde{M}=\big\|\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{q}-\boldsymbol{p}\big\|=\left(\begin{array}{cc|c}a_x & b_x & c_x\\a_y & b_y & c_y\\a_z & b_z & c_z\end{array}\right)$$

и $r=\operatorname{rk} M$, $R=\operatorname{rk}\widetilde{M}$, то

(i) при $r=2$, $R=3$ прямые скрещиваются;
(ii) при $r=R=2$ прямые пересекаются в единственной точке;

(iii) при $r = 1$, $R = 2$ прямые параллельны;
(iv) при $r = R = 1$ то прямые совпадают.

11.4.
Решение задачи 11.4 дословно повторяет решение примера 11.5. Ответы:

$$\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{r}_1 - \frac{(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{n}) - D}{(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n})}\boldsymbol{n}, \qquad (0.1)$$

$$d(M_1, \pi) = \frac{|(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{n}) - D|}{|\boldsymbol{n}|}, \qquad (0.2)$$

$$\boldsymbol{r}_3 = \boldsymbol{r}_1 - 2\frac{(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{n}) - D}{(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n})}\boldsymbol{n}. \qquad (0.3)$$

Формула (0.2) в прямоугольных координатах имеет вид (11.18).

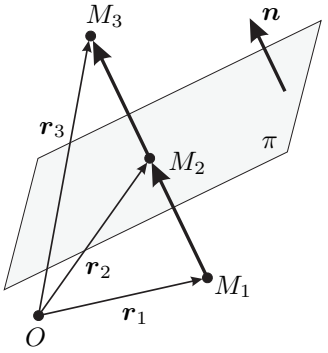


Рис. 0.1. К задаче 11.4

11.5. См. рис. 0.2.

(а) Умножим скалярно на вектор $\boldsymbol{a}$ обе части равенства $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}$ (напомним, что $\overrightarrow{M_1M_2} \perp \boldsymbol{a}$):

$$0 = (\overrightarrow{M_1M_2}, \boldsymbol{a}) = \underbrace{(\overrightarrow{OM_2}, \boldsymbol{a})}_{=(\boldsymbol{r}_0 + t\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})} - \underbrace{(\overrightarrow{OM_1}, \boldsymbol{a})}_{=(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{a})} = (\boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{a}) + t(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}),$$

откуда находим значение t_0 параметра, отвечающее точке $M_2 \in l$:

$$t_0 = \frac{(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{a})}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})}.$$

Поэтому для проекции M_2 точки M_1 на прямую l имеем:

$$\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{r}_0 + t_0\boldsymbol{a} = \boldsymbol{r}_0 + \frac{(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{a})}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})}\boldsymbol{a}.$$

(б) Найдем расстояние от точки M_1 до прямой l:

$$\begin{aligned} d(M_1, l) = \big|\overrightarrow{M_1M_2}\big| = \big|\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1\big| &= \left|\boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{r}_1 + \frac{(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{a})}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})}\boldsymbol{a}\right| = \\ &= \left|\frac{(\boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{r}_1)(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) - (\boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{a})\boldsymbol{a}}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})}\right| = \left|\frac{[\boldsymbol{a}, [\boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{a}]]}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})}\right| = \\ &= \frac{|\boldsymbol{a}| \cdot \big|[\boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{a}]\big| \cdot \sin\varphi}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})} = \frac{\big|[\boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{a}]\big|}{|\boldsymbol{a}|}, \end{aligned}$$

где φ — угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $[\boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{a}]$; здесь учтено, что векторы $\boldsymbol{a}$ и $[\boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{a}]$ ортогональны, т.е. $\sin\varphi = 1$.

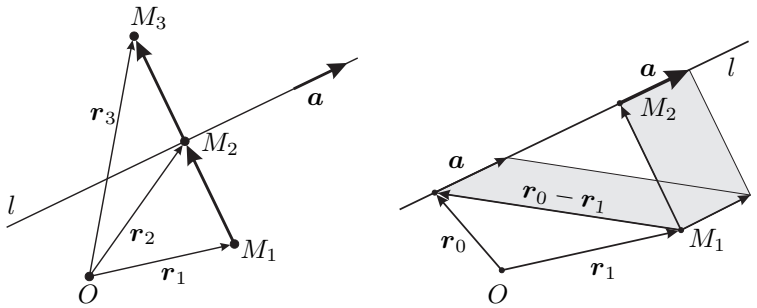


Рис. 0.2. К задаче 11.5

(в) Для точки M_3, симметричной точке M_1 относительно прямой l, имеем

$$\boldsymbol{r}_3 = \overrightarrow{OM_3} = \overrightarrow{OM_1} + 2\overrightarrow{M_1M_2} = \boldsymbol{r}_1 + 2(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1) =$$
$$= 2\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1 = 2\boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{r}_1 + 2\frac{(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{a})}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})}\boldsymbol{a}.$$

Итак,

$$\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{r}_0 + \frac{(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{a})}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})}\boldsymbol{a}, \tag{0.4}$$

$$d(M_1, l) = \frac{\big|[\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{a}]\big|}{|\boldsymbol{a}|}, \tag{0.5}$$

$$\boldsymbol{r}_3 = 2\boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{r}_1 + 2\frac{(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{a})}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})}\boldsymbol{a}. \tag{0.6}$$

Формулу (0.5) легко получить на основе следующих наглядных соображений (см. рис. 11.5(б)). Найдём площадь параллелограмма, образованного векторами $\boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{r}_1$ и $\boldsymbol{a}$. С одной стороны, она численно равна длине вектора, представляющего собой векторное произведения этих векторов, а с другой стороны — произведению длины основания параллелограмма, равной $\boldsymbol{a}$, на высоту, равную искомому расстоянию:

$$\big|[\boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{a}]\big| = |\boldsymbol{a}| \cdot d(M_1, l),$$

откуда получается требуемый результат.

11.6.

(1а) $\boldsymbol{r}_2 = \dfrac{[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] + (\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{a})\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|^2}$; (1б) $d(M_1, l) = \dfrac{\big|[\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{a}] - \boldsymbol{b}\big|}{|\boldsymbol{a}|}$;

(1в) $\boldsymbol{r}_3 = \dfrac{2}{|\boldsymbol{a}|^2}\big\{[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}] + (\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{a})\boldsymbol{a}\big\} - \boldsymbol{r}_1$;

(2а) $\boldsymbol{r}_2 = \big\{D_1[\boldsymbol{n}_2,\boldsymbol{d}] - D_2[\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{d}] + (\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{d})\boldsymbol{d}\big\}/|\boldsymbol{d}|^2,\ \boldsymbol{d} = [\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2]$;

(2б) $d(M_0,l) = \big|\big(D_1 - (\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{n}_1)\big)\boldsymbol{n}_2 - \big(D_2 - (\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{n}_2)\big)\boldsymbol{n}_1\big|/|\boldsymbol{d}|$;

(2в) $\boldsymbol{r}_3 = \dfrac{2}{|\boldsymbol{d}|^2}\big\{D_1[\boldsymbol{n}_2,\boldsymbol{d}] - D_2[\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{d}] + (\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{d})\boldsymbol{d}\big\} - \boldsymbol{r}_0$.

11.7. Если $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{n}) \neq 0$, то $\boldsymbol{r}_1 = \big([\boldsymbol{n},\boldsymbol{b}] + D\boldsymbol{a}\big)/(\boldsymbol{a},\boldsymbol{n})$ — точка пересечения $l \cap \pi$. Если $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{n}) = 0$, то $l \parallel \pi$ при $D(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}) \neq (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{n})$ и $l \subset \pi$ в противном случае.

11.8. $\boldsymbol{r}_0 + \dfrac{(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})}{\big|[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]\big|^2}[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}];\ \dfrac{\big|(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\big|}{\big|[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]\big|}$.

11.9. (а) $\dfrac{\big|(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\big|}{\big|[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]\big|}$; (б) $\dfrac{|D_2 - D_1|}{|\boldsymbol{n}|}$.

11.10. (а) $(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{a}) = 0$; (б) $(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1, [\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{a}] - \boldsymbol{b}) = 0$.

11.11.

(1а) $\begin{cases}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{a}_1, [\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2]) = 0,\\ (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{a}_2, [\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2]) = 0;\end{cases}$ (1б) $\begin{cases}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{a}_1) = 0,\\ (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{a}_2) = 0.\end{cases}$

(1в) $\dfrac{\big|(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)\big|}{\big|[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2]\big|}$;

(2а) $(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) = 0$ или $(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) = 0$;

(2б) $\boldsymbol{r}_1 + \dfrac{\big(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{a}_2, [\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2]\big)}{[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2]^2}\boldsymbol{a}_1$ или $\boldsymbol{r}_2 + \dfrac{\big(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{a}_1, [\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2]\big)}{[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2]^2}\boldsymbol{a}_2$;

(3а) $(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{a}) = 0$ или $(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{a}) = 0$;

(3б) $\big|[\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{a}]\big|/|\boldsymbol{a}|$.

11.12.

(1а) $\begin{cases}\big([\boldsymbol{r},\boldsymbol{a}_1] - \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\big) = 0,\\ \big([\boldsymbol{r},\boldsymbol{a}_2] - \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\big) = 0;\end{cases}$ (1б) $\begin{cases}\big(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0, [\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{a}_1] - \boldsymbol{b}_1\big) = 0,\\ \big(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0, [\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{a}_2] - \boldsymbol{b}_2\big) = 0;\end{cases}$

(1в) $\dfrac{\big|(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{b}_2) + (\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b}_1)\big|}{\big|[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2]\big|}$;

(2а) $\big(\boldsymbol{r}, [\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2]\big) = (\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b}_1)$ или $\big(\boldsymbol{r}, [\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2]\big) = -(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{b}_2)$;

(2б) $\begin{cases} \dfrac{[\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2]}{(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{b}_2)}=\dfrac{[\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_1]}{(\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b}_1)}, & \text{если } (\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{b}_2)=-(\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b}_1)\neq 0; \\ \dfrac{(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b}_2)\boldsymbol{a}_1-(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b}_1)\boldsymbol{a}_2}{\big|[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2]\big|^2}, & \text{если } (\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{b}_2)=(\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b}_1)=0; \end{cases}$

(3а) $(\boldsymbol{r},\boldsymbol{b}_2-\boldsymbol{b}_1)=\dfrac{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2)}{\big|\boldsymbol{a}\big|^2}$; (3б) $\dfrac{|\boldsymbol{b}_1-\boldsymbol{b}_2|}{|\boldsymbol{a}|}$.

11.13.

(а) $\begin{cases}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{a})=0,\\(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{a})=0;\end{cases}$ (б) $\begin{cases}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{a})=0,\\(\boldsymbol{r},[\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{a}]-\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{b})=0;\end{cases}$

(в) $\begin{cases}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2)=0,\\ \begin{vmatrix}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n}_1)-D_1 & (\boldsymbol{r},\boldsymbol{n}_2)-D_2\\(\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{n}_1)-D_1 & (\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{n}_2)-D_2\end{vmatrix}=0.\end{cases}$

11.14. Проекцией является парабола $2y=x^2$.

12.1. b^2.

12.3. $x=\dfrac{ab\cos\varphi}{\sqrt{a^2\sin^2\varphi+b^2\cos^2\varphi}}$, $y=\dfrac{ab\sin\varphi}{\sqrt{a^2\sin^2\varphi+b^2\cos^2\varphi}}$.

12.5. (а) $\sqrt{2}$; (б) $1/\varepsilon^2+1/\varepsilon'^2=1$.

12.6. (б) $\max AB=\sqrt{a^2+b^2}$, $\min AB=2ab/\sqrt{a^2+b^2}$.

12.8. (а) $(ab)^2/(a^2+b^2)$; (б) $ab/2$.

12.10. (а) $a^2A^2+b^2B^2=C$; (б) $a^2A^2-b^2B^2=C$, $C\neq 0$; (в) $a^2A^2-b^2B^2=-C$, $C\neq 0$; (г) $pB^2=2AC$.

13.1. (См. рис. 0.3.) Инварианты: $S=13$, $\delta=36$, $\Delta=-1296$. Эллипс $\dfrac{x'^2}{9}+\dfrac{y'^2}{4}=1$, эксцентриситет $\varepsilon=\sqrt{5}/3$, в канонической системе координат координаты фокусов $F_{1,2}(\pm\sqrt{5};0)$, уравнения асимптот $\sqrt{5}x'\pm 9=0$. Координаты начала канонической системы координат $O'(-3;2)$. Формулы замены координат

$$\begin{cases}x=\dfrac{1}{\sqrt{5}}(2x'+y')-3,\\ y=\dfrac{1}{\sqrt{5}}(-x'+2y')+2;\end{cases}\qquad \begin{cases}x'=\dfrac{1}{\sqrt{5}}(2x-y+8),\\ y'=\dfrac{1}{\sqrt{5}}(x+2y-1).\end{cases}$$

Фокусы: $F_1(-5;3)$, $F_2(-1;1)$. Канонические оси координат: Ox: $x+2y=1$, Oy: $2x-y+8=0$. Директрисы: d_1: $2x-y+17=0$, d_2: $2x-y-1=0$.

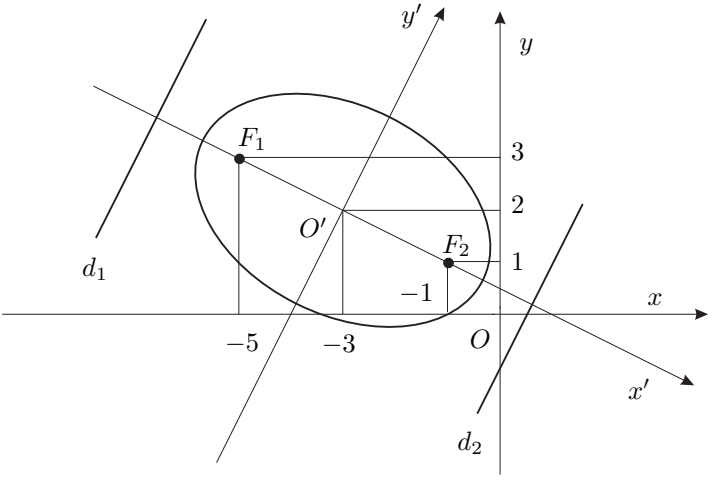


Рис. 0.3. К задаче 13.1

13.2. Инварианты: $S = 50$, $\delta = 225$, $\Delta = -10125$. Эллипс $\dfrac{x'^2}{9} + \dfrac{y'^2}{1} = 1$, эксцентриситет $\varepsilon = 2\sqrt{2}/3$, в канонической системе координат фокусы $F_{1,2}(\pm 2\sqrt{2}; 0)$, асимптоты $2\sqrt{2}x' \pm 9 = 0$. Начало канонической системы координат $O'(1; -1)$. Формулы замены координат

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{10}}(x' - 3y') + 1, \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{10}}(2x' - y') - 1; \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = \dfrac{1}{\sqrt{10}}(x + 3y + 2), \\ y' = \dfrac{1}{\sqrt{10}}(-3x + y + 4). \end{cases}$$

Фокусы: $F_1\bigl(1 - 2/\sqrt{5}; -1 - 6/\sqrt{5}\bigr)$, $F_2\bigl(1 + 2/\sqrt{5}; -1 + 6/\sqrt{5}\bigr)$. Канонические оси координат: Ox: $3x - y = 4$, Oy: $x + 3y + 8 = 0$. Директрисы: $2x + 6y + 4 \pm 9\sqrt{5} = 0$.

13.3. (См. рис. 0.4.) Инварианты: $S = -10$, $\delta = -75$, $\Delta = -4500$. Гипербола $\dfrac{x'^2}{4} - \dfrac{y'^2}{12} = 1$, эксцентриситет $\varepsilon = 2$, в канонической системе координат фокусы $F_{1,2}(\pm 4; 0)$, асимптоты $x' \pm 1 = 0$. Начало канонической системы координат $O'(-3; -2)$. Формулы замены

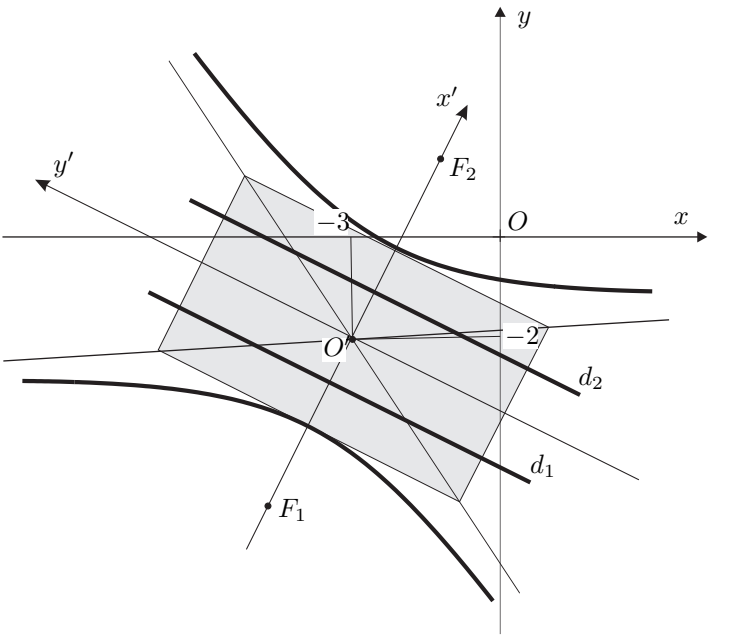


Рис. 0.4. К задаче 13.3

координат

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(x' - 2y') - 3, \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(2x' + y') - 2; \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(x + 2y + 7), \\ y' = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(-2x + y - 4). \end{cases}$$

Фокусы: $F_1\big(-3-4/\sqrt{5}; -2-8/\sqrt{5}\big)$, $F_2\big(-3+4/\sqrt{5}; -2+8/\sqrt{5}\big)$. Канонические оси координат: Ox: $2x - y + 4 = 0$, Oy: $x + 2y + 7 = 0$. Директрисы: d_1: $x + 2y + 7 + \sqrt{5} = 0$, d_2: $x+2y+7-\sqrt{5} = 0$. Асимптоты: $x\big(\sqrt{3}+2\big)+y\big(2\sqrt{3}-1\big)+7\sqrt{3}+4 = 0$, $x\big(\sqrt{3}-2\big)+y\big(2\sqrt{3}+1\big)+7\sqrt{3}-4 = 0$.

13.4. Инварианты: $S = -7$, $\delta = -144$, $\Delta = -20736$. Гипербола $\dfrac{x'^2}{9} - \dfrac{y'^2}{16} = 1$, эксцентриситет $\varepsilon = \sqrt{5}/3$, в канонической системе

координат фокусы $F_{1,2}(\pm 5;0)$, асимптоты $5x' \pm 9 = 0$. Начало канонической системы координат $O'(2;3)$. Формулы замены координат

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(x' - 2y') + 2, \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(2x' + y') + 3; \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(x + 2y - 8), \\ y' = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(-2x + y + 1). \end{cases}$$

Фокусы: $F_1(2-\sqrt{5};3-2\sqrt{5})$, $F_2(2+\sqrt{5};3+2\sqrt{5})$. Канонические оси координат: Ox: $2x - y - 1 = 0$, Oy: $x + 2y - 8 = 0$. Директрисы: d_1: $x + 2y - 8 - 9/\sqrt{5} = 0$, d_2: $x + 2y - 8 + 9/\sqrt{5} = 0$. Асимптоты: $2x + y - 7 = 0$, $2x - 1y + 29 = 0$.

13.5. Инварианты: $S = 14$, $\delta = -576$, $\Delta = 0$. Пара пересекающихся прямых $16x'^2 - 9y'^2 = 0$ или $4x' \pm 3y' = 0$. Начало канонической системы координат (точка пересечения прямых) $O'(-3;4)$. Формулы замены координат

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x' - y') - 3, \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x' + y') + 4; \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x + y - 1), \\ y' = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(-x + y - 7). \end{cases}$$

Уравнения канонических осей координат: Ox: $x - y + 7 = 0$, Oy: $x + y - 1 = 0$. Уравнения прямых: $7x + y + 17 = 0$, $x + 7y - 25 = 0$.

13.6. Инварианты: $S = 50$, $\delta = 225$, $\Delta = 0$. Пара мнимых пересекающихся прямых $9x'^2 + y'^2 = 0$. Начало канонической системы координат (точка пересечения прямых) $O'(-1;1)$. Формулы замены координат

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(x' - 2y') - 1, \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(2x' + y') + 1; \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(x + 2y - 1), \\ y' = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(-2x + y - 3). \end{cases}$$

Уравнения канонических осей координат: Ox: $2x - y + 3 = 0$, Oy: $x + 2y - 1 = 0$.

13.7. Инварианты: $S = 13$, $\delta = 36$, $\Delta = 1296$. Мнимый эллипс $\dfrac{x'^2}{9} + \dfrac{y'^2}{4} = -1$. Начало канонической системы координат (точка пересечения прямых) $O'(-1;1)$. Формулы замены координат

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(x' + 2y') + 2, \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(-2x' + y') - 5; \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(x - 2y - 12), \\ y' = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(2x + y + 1). \end{cases}$$

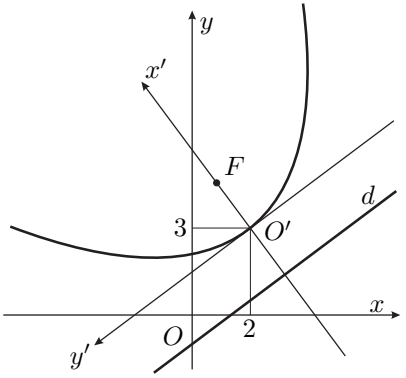


Рис. 0.5. К задаче 13.8

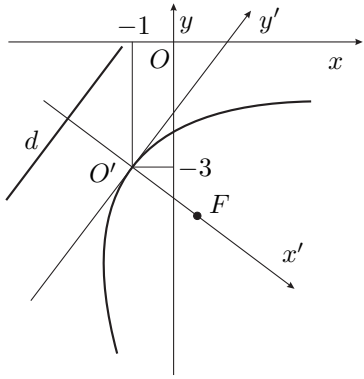


Рис. 0.6. К задаче 13.9

Уравнения канонических осей координат: Ox: $2x + y + 1 = 0$, Oy: $x - 2y - 12 = 0$.

13.8. (См. рис. 0.5.) Инварианты: $S = 25$, $\delta = 0$, $\Delta = -250000$. Парабола $y'^2 = 8x$. Начало канонической системы координат (вершина параболы) $O'(2; 3)$. В канонической системе координат фокус $F(2; 0)$, директриса $x + 2 = 0$. Формулы замены координат

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{5}(-3x' - 4y') + 2, \\ y = \dfrac{1}{5}(4x' - 3y') + 3; \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = \dfrac{1}{5}(-3x + 4y - 6), \\ y' = \dfrac{1}{5}(-4x - 3y + 17). \end{cases}$$

Фокус $F(4/5; 23/5)$. Канонические оси координат: Ox: $4x+3y-17 = 0$, Oy: $3x - 4y + 6 = 0$. Директриса $3x - 4y - 4 = 0$.

13.9. (См. рис. 0.6.) Инварианты: $S = 25$, $\delta = 0$, $\Delta = -140625$. Парабола $y'^2 = 6x$. Начало канонической системы координат (вершина параболы) $O'(-1; -3)$. В канонической системе координат фокус $F(3/2; 0)$, директриса $2x + 3 = 0$. Формулы замены координат

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{5}(4x' + 3y') - 1, \\ y = \dfrac{1}{5}(-3x' + 4y') - 3; \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = \dfrac{1}{5}(4x - 3y) - 1, \\ y' = \dfrac{1}{5}(3x + 4y) + 3. \end{cases}$$

Фокус $F(1/5; -39/10)$. Канонические оси координат: Ox: $4x-3y-5 = 0$, Oy: $3x + 4y + 15 = 0$. Директриса $4x - 3y + 5 = 0$.

13.10. Инварианты: $S = 5$, $\delta = 0$, $\Delta = 0$, $K = -100$. Пара параллельных прямых $y'^2 = 4$. Формулы замены координат

$$\begin{cases} x = \dfrac{x' - 2y'}{\sqrt{5}} + a, \\ y = \dfrac{2x' + y'}{\sqrt{5}} + (2a + 7); \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(x + 2y - 5a - 14), \\ y' = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(-2x + y - 7), \end{cases}$$

где a — произвольная постоянная. Уравнения прямых, образующих квадрику, $2x - y + 7 - 2\sqrt{5} = 0$, $2x - y + 7 + 2\sqrt{5} = 0$. Уравнения канонических осей координат: Ox: $2x - y + 7 = 0$; Oy: $x + 2y - 5a - 14 = 0$.

13.11. Инварианты: $S = 5$, $\delta = 0$, $\Delta = 0$, $K = 0$. Пара совпадающих прямых $y'^2 = 0$. Формулы замены координат

$$\begin{cases} x = \dfrac{2x' + 3y'}{\sqrt{13}} - 2a, \\ y = \dfrac{-3x' + 2y'}{\sqrt{13}} + (3a - 5); \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = \dfrac{2x - 3y + 13a - 15}{\sqrt{13}}, \\ y' = \dfrac{3x + 2y + 10}{\sqrt{13}}; \end{cases}$$

здесь a — произвольная постоянная. Уравнения совпадающих прямых $3x + 2y + 10 = 0$. Уравнения канонических осей координат: Ox: $3x + 2y + 10 = 0$; Oy: $2x - 3y + 13a - 15 = 0$.

13.12. Инварианты: $S = 5$, $\delta = 0$, $\Delta = 0$, $K = 625$. Пара совпадающих прямых $y'^2 + 25 = 0$. Формулы замены координат

$$\begin{cases} x = \dfrac{4x' - 3y'}{5} + 4a, \\ y = \dfrac{3x' + 4y'}{5} + (3a - 2); \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = \dfrac{4x + 3y + 6 - 25a}{5}, \\ y' = \dfrac{-3x + 4y + 8}{5}, \end{cases}$$

a — произвольная постоянная. Уравнение квадрики $(3x - 4y - 8)^2 + 25 = 0$. Уравнения канонических осей координат: Ox: $3x - 4y - 8 = 0$; Oy: $4x + 3y - 25a + 6 = 0$.

13.15. Уравнение асимптот $F(x, y) = \Delta/\delta$. При $f \neq \Delta/\delta$ искомая линия является гиперболой. Если $\Delta > 0$, то при $f < \Delta/\delta$ искомая линия — гипербола, расположенная относительно асимптот так же, как исходная гипербола (в частности, при $f = 0$ получается исходная гипербола), а при $f > \Delta/\delta$ — как сопряжённая гипербола.

13.16. Парабола, полученная из исходной параллельным переносом вдоль фокальной оси.

13.17. Особой точкой является центр, принадлежащий линии, т.е. точка пересечения пересекающихся прямых, все точки пары совпадающих прямых и единственная точка пары мнимых пересекающихся прямых.