

1. Определения, формулировки утверждений и теорем (задания 1 – 4)

1. Запишите задачу Коши.
2. Запишите краевую задачу для уравнения второго порядка.
3. Что такое общее решение дифференциального уравнения?
4. Запишите задачу Коши в векторном виде.
5. Запишите дифференциальное уравнение, описывающее радиоактивный распад
6. Запишите дифференциальное уравнение для движения материальной точки, имеющей потенциальную энергию $U(x)$.
7. Приведите пример динамической системы. Что такое ее первый интеграл?
8. Запишите уравнение Шредингера
9. Что такое интегральная кривая?
10. Запишите линейное уравнение первого порядка
11. Запишите неоднородное линейное уравнение первого порядка и его решение с помощью функции Коши (без вывода)
12. Сформулируйте теорему о существовании и единственности решения задачи Коши для линейного неоднородного уравнения первого порядка
13. Запишите условие Липшица для функции $f(x, y)$.
14. Сформулируйте теорему о существовании и единственности решения задачи Коши

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y); \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

15. Сформулируйте теорему о непрерывной зависимости решения от параметра для задачи:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y, \mu); \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

16. Сформулируйте теорему о существовании единственности решения задачи Коши для системы уравнений:

$$\begin{cases} \frac{d\vec{r}}{dt} = F(t, \vec{r}); \\ \vec{r}(0) = \vec{r}_0. \end{cases}$$

17. Сформулируйте определение верхнего и нижнего решения задачи Коши.

18. Сформулируйте теорему Чаплыгина о дифференциальных неравенствах

19. Сформулируйте теорему Чаплыгина и существования и единственности решения задачи Коши.

20. Сформулируйте теорему существования и единственности для уравнения n -го порядка.

21. Дайте определение линейного дифференциального уравнения n -го порядка.

22. Сформулируйте теорему существования и единственности решения линейного уравнения n -го порядка.

23. Сформулируйте теорему о линейной комбинации решений линейного уравнения.

24. Дайте определение линейно (не)зависимых функций на отрезке

25. Дайте определение определителя Вронского

26. Сформулируйте теорему об определителе Вронского для функций, линейно зависимых на отрезке

27. Сформулируйте теорему об определителе Вронского для линейно независимых решений линейного однородного уравнения

28. Дайте определение фундаментальной системы решений уравнения n -го порядка

29. Сформулируйте теорему о представлении решения линейного уравнения в виде суммы однородного уравнения и частного решения неоднородного

30. Опишите метод вариации постоянных для линейного уравнения n -го порядка.
31. Что такое функция Коши для уравнения n -го порядка? Дайте определение
32. Запишите систему уравнений первого порядка для движения материальной точки.
33. Запишите систему линейных дифференциальных уравнений первого порядка в общем виде.
34. Запишите систему линейных дифференциальных уравнений первого порядка в векторном виде.
35. Сформулируйте теорему существования и единственности решения задачи Коши для системы линейных уравнений.
36. Какая система линейных уравнений называется однородной?
37. Сформулируйте теоремы о произведении решения однородной системы уравнений на число, о сумме решений однородной системы
38. Будет ли линейная комбинация решений однородной системы линейных уравнений также ее решением?
39. Какие вектор-функции называются линейно (не)зависимыми на отрезке?
40. Дайте определение определителя Вронского для вектор-функций
41. Сформулируйте теорему об определителе Вронского для линейно зависимых вектор-функций на отрезке.
42. Сформулируйте теорему о линейно независимых решениях системы линейных однородных уравнений. Что такое фундаментальная система решений системы линейных уравнений?
43. Дайте определение фундаментальной матрицы системы линейных уравнений. Запишите уравнение для ее эволюции
44. Запишите фундаментальную систему решений для системы линейных уравнений с невырожденными корнями характеристического уравнения?

45. Как представить общее решение линейной однородной системы с помощью фундаментальной матрицы?
46. Сформулируйте теорему о принципе суперпозиции для систем линейных неоднородных уравнений.
47. Сформулируйте теорему о сумме решений неоднородной системы линейных уравнений и соответствующей ему однородной системы.
48. Как можно представить решение системы линейных неоднородных уравнений?
49. В чем заключается метод вариации постоянных для систем линейных уравнений?
50. Что такое матрица Коши?
51. Запишите задачу Дирихле для линейного уравнения второго порядка.
52. Запишите задачу Неймана для линейного уравнения второго порядка.
53. Запишите третью краевую задачу для линейного уравнения второго порядка
54. Что такое функция Грина краевой задачи для уравнения второго порядка? Каким условиям она должна удовлетворять?
55. Сформулируйте теорему о единственности решения неоднородной краевой задачи.
56. Что такое задача Штурма – Лиувилля? Приведите пример.
57. Дайте определение собственного значения и собственной функции задачи Штурма – Лиувилля.
58. Дайте определение устойчивого решения системы дифференциальных уравнений.
59. Дайте определение асимптотически устойчивого решения системы дифференциальных уравнений.
60. Дайте определение неустойчивого решения системы дифференциальных уравнений

61. Опишите метод исследования устойчивости по первому приближению стационарного решения уравнения $\frac{dx}{dt} = \Phi(x)$.
62. Сформулируйте теорему о достаточном условии асимптотической устойчивости решения в одномерном случае.
63. Сформулируйте теорему о достаточном условии неустойчивости в одномерном случае.
64. Сформулируйте определение нижнего решения задачи $\frac{d^2y}{dx^2} = f(y, x)$; $y(0) = y(l) = 0$.
65. Сформулируйте определение верхнего решения задачи $\frac{d^2y}{dx^2} = f(y, x)$; $y(0) = y(l) = 0$.
66. Сформулируйте теорему Нагумо.
67. Что такое (не)устойчивый узел на фазовой плоскости для системы из двух дифференциальных уравнений?
68. Что такое седло на фазовой плоскости для системы из двух дифференциальных уравнений?
69. Что такое центр на фазовой плоскости для системы из двух дифференциальных уравнений?
70. Что такое (не)устойчивый фокус на фазовой плоскости для системы из двух дифференциальных уравнений?
71. Сформулируйте теорему Ляпунова об устойчивости
72. Сформулируйте теорему об устойчивости решения системы уравнений по первому приближению
73. Сформулируйте определение дифференциального уравнения в частных производных
74. Сформулируйте теорему Ковалевской для уравнения в частных производных первого порядка
75. Дайте определение линейного уравнения в частных производных

76. Дайте определение квазилинейного уравнения в частных производных
77. Что такое характеристическое уравнение для линейного уравнения в частных производных?

2. Простые задачи для первой части экзамена (задание 5)

1. Покажите, что в динамической системе (p - импульс, x - координата, $U(x)$ - потенциальная энергия, m - масса)

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{p}{m}; \\ \frac{dp}{dt} = -\frac{dU}{dx} \end{cases}$$

сохраняется (является первым интегралом) энергия $H(p, x) = \frac{p^2}{2m} + U(x)$

2. Получите общее решение уравнения

$$x(1 + y^2) + y \frac{dy}{dx}(1 + x^2) = 0$$

3. Получите общее решение уравнения

$$x(1 + y^2) = y \frac{dy}{dx}(1 + x^2)$$

4. Получите общее решение уравнения:

$$(x + y)dx + (x - y)dy = 0.$$

5. Получите общее решение уравнения:

$$(x + y)dx - (x - y)dy = 0.$$

6. Найдите общее решение уравнения:

$$xy' - 4y = x^2$$

7. Найдите общее решение уравнения:

$$xy' - 3y = x^4$$

8. Найдите решение уравнения в виде $F(x, y) = \text{const}$:

$$2xydx + (x^2 - y^2)dy = 0.$$

9. Решить уравнение

$$2y' - y - y^3 \cos x = 0.$$

10. Решить уравнение

$$2y' - y + y^3 \sin x = 0.$$

11. Запишите теорему существования и единственности для уравнения (найдите область, в которой оно гарантированно имеет единственное решение):

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = y^2; \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

12. Запишите теорему существования и единственности для уравнения (найдите область, в которой оно гарантированно имеет единственное решение):

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = y^3; \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

13. Найдите общее решение уравнения

$$y'' + 3y' + 2y = \cos x.$$

14. Запишите общее решение уравнения:

$$y'' + y' - 2y = \sin x.$$

15. Запишите общее решение уравнения

$$y'' - 6y' + 5y = \cos x.$$

16. Запишите общее решение уравнения

$$y'' + 4y' + 3y = \sin x.$$

17. Найдите общее решение уравнения

$$y'' + y = \cos(x).$$

18. Найдите общее решение уравнения

$$y'' + y = \sin(-x).$$

19. Найдите решение неоднородного дифференциального уравнения

$$y'' - y = \exp(x)$$

20. Найдите решение неоднородного дифференциального уравнения

$$y'' - y = \exp(-x)$$

21. Вычислите определитель Вронского для функций $y_1 = \exp(3x)$, $y_2 = \exp(-x)$, $y_3 = x \exp(3x)$. Являются ли они линейно независимыми на отрезке $0 \leq x \leq 1$?

22. Вычислите определитель Вронского для функций $y_1 = \cos(3x)$, $y_2 = \sin(3x)$, $y_3 = x \sin(3x)$. Являются ли они линейно независимыми на отрезке $0 \leq x \leq 1$?

23. Вычислите определитель Вронского для функций $y_1 = \exp(x)$, $y_2 = x \exp(x)$, $y_3 = x^2 \exp(x)$. Являются ли они линейно независимыми на отрезке $0 \leq x \leq 1$?

24. Найдите функцию Коши для уравнения $y'' + y = f(x)$.

25. Найдите функцию Коши для уравнения $y'' - y = f(x)$.

26. Найдите общее решение системы уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 4y + \exp(-t)\cos(2t); \\ \frac{dy}{dt} = -x + y. \end{cases}$$

27. Найдите общее решение системы уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y; \\ \frac{dy}{dt} = -x + y + \exp(-t)\sin t. \end{cases}$$

28. Найдите частное решение системы уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y + \exp 2t; \\ \frac{dy}{dt} = -x + y. \end{cases}$$

29. Найдите частное решение системы уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y; \\ \frac{dy}{dt} = -x + y - \exp 2t. \end{cases}$$

30. Найдите собственные значения и собственные функции задачи Штурма

– Лиувилля:

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = y(\pi) = 0. \end{cases}$$

31. Найдите собственные значения и собственные функции задачи Штурма

– Лиувилля:

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = y'(\pi/2) = 0. \end{cases}$$

32. Найдите собственные значения и собственные функции задачи Штурма

– Лиувилля:

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y'(0) = y(\pi/2) = 0. \end{cases}$$

33. Найдите собственные значения и собственные функции задачи Штурма

– Лиувилля:

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = y(2\pi) = 0. \end{cases}$$

34. Найдите собственные значения и собственные функции задачи Штурма

– Лиувилля:

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y'(0) = y'(2\pi) = 0. \end{cases}$$

35. Исследуйте устойчивость нулевого решения системы уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x} = 2[1 - \cos \sqrt{x+y}] \\ \dot{y} = \exp x - \sin y - \cos x. \end{cases}$$

36. Исследуйте устойчивость нулевого решения системы уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x} = 3[1 - \cos \sqrt{x+y}] - 2 \sin y; \\ \dot{y} = \sin(x+y) + \exp(2y) - \cos y. \end{cases}$$

37. Исследуйте устойчивость нулевого решения системы уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x} = 2 \ln(1+x-y) + \sin y; \\ \dot{y} = \exp(x+y) - \cos \sqrt{2y}. \end{cases}$$

38. Найдите общее решение уравнения:

$$2x \frac{\partial u}{\partial x} + (y - x) \frac{\partial u}{\partial y} = x^2$$

39. Найдите общее решение уравнения:

$$xy \frac{\partial u}{\partial x} + x^2 \frac{\partial u}{\partial y} = uy$$

3. Теоремы и теоретические задачи (задания 6 – 7)

1. Выведите формулу для функции Коши для неоднородного линейного уравнения первого порядка

2. Сформулируйте и докажите теорему о существовании и единственности решения задачи Коши для линейного неоднородного уравнения первого порядка

3. Сформулируйте и докажите теорему о существовании и единственности решения задачи Коши

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y); \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

4. Сформулируйте и докажите теорему о непрерывной зависимости решения от параметра для задачи:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y, \mu); \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

5. Сформулируйте и теорему о существовании единственности решения задачи Коши для системы уравнений:

$$\begin{cases} \frac{d\vec{r}}{dt} = F(t, \vec{r}); \\ \vec{r}(0) = \vec{r}_0 \end{cases}$$

и приведите схему ее доказательства.

6. Сформулируйте и докажите теорему Чаплыгина о дифференциальных неравенствах

7. Сформулируйте и докажите теорему Чаплыгина и существования и единственности решения задачи Коши
8. Сформулируйте и докажите теорему существования и единственности решения задачи Коши для дифференциального уравнения n -го порядка, разрешенного относительно старшей производной
9. Сформулируйте и докажите теорему существования и единственности решения задачи Коши для линейного уравнения n -го порядка.
10. Выведите формулу для структуры фундаментальной системы решений уравнения n -го порядка в случае некратных корней соответствующего характеристического уравнения
11. Сформулируйте и докажите, что определитель Вронского для линейно зависимых функций равен нулю
12. Сформулируйте и докажите, что для линейно независимых решений линейного однородного уравнения определитель Вронского не может обратиться в нуль
13. Сформулируйте и докажите теорему о представлении общего решения линейного однородного уравнения n -го порядка в виде линейной комбинации линейно независимых частных решений
14. Докажите, что для любого линейного уравнения n -го порядка можно найти n линейно независимых решений.
15. Сформулируйте и докажите теорему об общем решении неоднородного линейного уравнения n -го порядка
16. Докажите, что решение неоднородного линейного уравнения n -го порядка можно представить с помощью функции Коши.
17. Сформулируйте и докажите теорему существования и единственности решения задачи Коши для системы линейных уравнений
18. Сформулируйте и докажите теорему об определителе Вронского для линейно зависимых вектор-функций

19. Сформулируйте и докажите теорему об определителе Вронского для линейно независимых вектор-функций, являющихся решениями системы линейных однородных уравнений
20. Сформулируйте и докажите теорему о представлении общего решения системы линейных уравнений с помощью линейно независимых вектор-функций
21. Сформулируйте и докажите теорему о представлении общего решения системы линейных уравнений с помощью фундаментальной матрицы
22. Сформулируйте и докажите теорему о принципе суперпозиции для неоднородной системы уравнений
23. Сформулируйте и докажите теорему о сумме решения линейной неоднородной системы уравнений и соответствующей ей однородной системы
24. Сформулируйте и докажите теорему о представлении общего решения неоднородной системы линейных уравнений
25. Опишите поиск решения неоднородной системы уравнений по методу вариации постоянных (с выводом)
26. Опишите поиск решения неоднородной системы уравнений с помощью матрицы Коши (с выводом)
27. Докажите, что задачу Коши
- $$\begin{cases} y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = \varphi(x); \\ y(a) = y_1, y(b) = y_2. \end{cases}$$
- можно свести к виду
- $$\begin{cases} \frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dz}{dx} \right) - q(x)z(x) = f(x) \\ z(a) = z(b) = 0. \end{cases}$$
28. Запишите и докажите первую формулу Грина
29. Запишите и докажите вторую формулу Грина
30. Запишите и докажите тождество Лагранжа

31. Покажите, что у задачи Дирихле для уравнения $\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dz}{dx}\right) - q(x)z(x) = f(x)$ при $p(x) > 0$, $q(x) > 0$ могут быть лишь тривиальные решения.
32. Покажите, что решение неоднородной краевой задачи Дирихле может быть представлено с помощью функции Грина.
33. Выведите формулу для построения функции Грина
34. Сформулируйте и докажите теорему о единственности решения краевой задачи Дирихле
35. Сформулируйте и докажите теорему о достаточном условии асимптотической устойчивости решения в одномерном случае.
36. Сформулируйте и докажите теорему о достаточном условии неустойчивости в одномерном случае.
37. Линеаризуйте систему уравнений $\frac{dx}{dt} = f_1(x, y)$; $\frac{dy}{dt} = f_2(x, y)$; $f_1(0,0) = f_2(0,0) = 0$. Каковы будут условия устойчивости для нее? Ответ обоснуйте
38. Сформулируйте и докажите теорему Ляпунова об устойчивости
39. Сформулируйте и докажите теорему об устойчивости решения системы уравнений по первому приближению в случае некратных действительных корней характеристического уравнения
40. Сформулируйте и докажите теорему об общем решении линейного однородного уравнения в частных производных
41. Сформулируйте и докажите теорему об общем решении квазилинейного однородного уравнения в частных производных