1. **Задачи на собственные функции и собственные значения оператора Штурма-Лиувилля в различных областях.**

1.1. Найти собственные функции и собственные значения оператора Штурма-Лиувилля на отрезке:

a) $y'' + \lambda y = 0,\ \ 0 < x < 1, \qquad y'(0) = y(1) = 0.$

b) $y'' + \lambda y = 0,\ \ 0 < x < l, \qquad y(0) = y(l) = 0.$

c) $y'' + \lambda y = 0,\ \ 0 < x < l, \qquad y'(0) = y'(l) = 0.$

d) $y'' + \lambda y = 0,\ \ 0 < x < l, \qquad y'(0) - y(0) = 0, \quad y'(l) = 0.$

e) $y'' + \lambda y = 0,\ \ 0 \le x \le 2\pi, \quad y(x) = y(x + 2\pi).$

f) $x^2y'' + xy' + (\lambda x^2 - 1)y = 0,\ \ 0 < x < l, \qquad |y(0)| < \infty, \quad y(l) = 0.$

g) $x^2y'' + xy' + \lambda x^2 y = 0,\ \ 0 < x < l, \qquad |y(0)| < \infty, \quad y'(l) = 0.$

h) $x^2y'' + xy' + (\lambda x^2 - 4)y = 0,\ \ 0 < x < l, \quad |y(0)| < \infty, \quad y'(l) + h\, y(l) = 0.$

1.2. Найти собственные функции и собственные значения оператора Лапласа в следующих задачах:

$$a)\ \Delta u + \lambda u = 0, \qquad 0 < x < 1,\ \ 0 < y < 2,$$

$$u_x(0, y) = u(1, y) = 0, \qquad u_y(x, 0) = u_y(x, 2) = 0, \qquad 0 \le x \le 1,\ \ 0 \le y \le 2.$$

$$b)\ \Delta u + \lambda u = 0, \qquad 0 \le r < a,\ \ 0 \le \varphi < 2\pi,$$

$$u(r, \varphi) = u(r, \varphi + 2\pi),\ \ u(a, \varphi) = 0,\ \ 0 \le r \le a,\ \ 0 \le \varphi < 2\pi.$$

$$c)\ \Delta u + \lambda u = 0, \qquad 0 \le r < 2,\ \ 0 \le \varphi < 2\pi,$$

$$u(r, \varphi) = u(r, \varphi + 2\pi),\ \ u_r(2, \varphi) = 0,\ \ 0 \le r \le 2,\ \ 0 \le \varphi < 2\pi.$$

$$d)\ \Delta u + \lambda u = 0, \qquad 0 \le r < 1,\ \ 0 \le \varphi < 2\pi,$$

$$u(r, \varphi) = u(r, \varphi + 2\pi),\ \ u_r(1, \varphi) + u(1, \varphi) = 0,\ \ 0 \le r \le 1,\ \ 0 \le \varphi < 2\pi.$$

$$e)\ \Delta u + \lambda u = 0, \qquad 0 < r < 1,\ \ 0 < \varphi < \alpha,$$

$$u(r, 0) = u(r, \alpha) = 0, \qquad u_r(1, \varphi) + u(1, \varphi) = 0, \qquad 0 \le r \le 1,\ \ 0 \le \varphi \le \alpha.$$

$$f)\ \Delta u + \lambda u = 0, \qquad 0 \le r < 2,\ \ 0 \le \varphi < 2\pi,\ \ 0 < z < 1,$$

$$u(r, \varphi, z) = u(r, \varphi + 2\pi, z), \qquad u(2, \varphi, z) = 0, \qquad u_z(0, \varphi, z) = u_z(1, \varphi, z),$$

$$0 \le r \le 2,\ \ 0 \le \varphi < 2\pi,\ \ 0 \le z \le 1.$$

$$g)\ \Delta u + \lambda u = 0, \qquad 0 \le r < 2,\ \ 0 \le \varphi < 2\pi,\ \ 0 < z < 1,$$

$$u(r, \varphi, z) = u(r, \varphi + 2\pi, z), \qquad u_r(2, \varphi, z) = 0, \qquad u(0, \varphi, z) = u(1, \varphi, z),$$

$$0 \le r \le 2,\ \ 0 \le \varphi < 2\pi,\ \ 0 \le z \le 1.$$

2. **Начально-краевые задачи для уравнения теплопроводности и колебаний в ограниченных областях.**

2.1. Решить начально-краевую задачу на отрезке:

$$a)\; u_t - u_{xx} = 0, \qquad 0 < x < 1, \quad t > 0,$$

$$u(0,t) = 2, \qquad u_x(1,t) = 0, \; t \ge 0,$$

$$u(x,0) = 0, \qquad 0 \le x \le 1.$$

$$b)\; u_{tt} - u_{xx} = 0, \qquad 0 < x < 1, \quad t > 0,$$

$$u_x(0,t) = 0, \qquad u_x(1,t) = 0, \; t \ge 0,$$

$$u(x,0) = x, \; u_t(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le 1.$$

$$c)\; u_{tt} - u_{xx} = 0, \qquad 0 < x < 2, \quad t > 0,$$

$$u(0,t) = 0, \qquad u_x(2,t) + u(2,t) = 0, \; t \ge 0,$$
$$u(x,0) = 1, \; u_t(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le 2.$$

2.2. Описать распределение температуры в однородном стержне длины l, если в начальный момент времени стержень был нагрет до температуры U_0, а торцы стержня все время поддерживались при нулевой температуре.

2.3. Описать малые поперечные колебания круглой однородной мембраны с закрепленными краями при условии, что отклонение от положения равновесия в начальный момент времени равно U_0. Начальная скорость равна нулю.

2.4. Описать малые поперечные колебания прямоугольной однородной мембраны с закрепленными краями при условии, что в начальной момент времени мембрана не отклонена, а начальное распределение скорости равно U_0.

2.5. Описать малые свободные колебания однородного параллелепипеда с закрепленной границей, если задано начальное смещение, равное U^0:

$$u_{tt} = a^2 \Delta u, \qquad 0 < x < 1, \qquad 0 < y < 2, \qquad 0 < z < 3, \qquad t > 0,$$

$$u(P,t) = 0, \qquad P \in S, \qquad S - \text{граница параллелепипеда},$$

$$u(x,y,z,0) = U^0, \qquad u_t(x,y,z,0) = 0, \qquad 0 \le x \le 1, \qquad 0 \le y \le 2, \qquad 0 \le z \le 3.$$

2.6. Описать изменение температуры в бесконечном однородном параллелепипеде при условии, что в начальный момент времени температура параллелепипеда равнялась нулю, а граница все время поддерживалась при постоянной температуре U^0:

$$u_t = a^2 \Delta u, \qquad 0 < x < 1, \qquad 0 < y < 2, \quad t > 0,$$

$$u(P,t) = U^0, \qquad P \in S, \qquad S - \text{граница прямоугольника},$$

$$u(x,y,0) = 0, \quad 0 \le x \le 1, \qquad 0 \le y \le 2.$$

2.7. Найти решение начально-краевой задачи:

$$u_t = \Delta u, \qquad 0 < x < a, \qquad 0 < y < b, \qquad 0 < z < c, \qquad t > 0,$$

$$u_x(0,y,z,t) = u_x(a,y,z,t) = 0, \qquad u_y(x,0,z,t) = u_y(x,b,z,t) = 0,$$

$$u_z(x,y,0,t) = u_z(x,y,c,t) = 0,\ 0 \le x \le a,\ 0 \le y \le b,\ 0 \le z \le c,\ t \ge 0,$$

$$u(x,y,z,0) = cos\frac{2\pi}{a}x\cos\frac{\pi}{c}z,\ 0 \le x \le a, \qquad 0 \le y \le b, \qquad 0 \le z \le c.$$

2.8. Решить начально-краевую задачу в круге:

$$u_t = \Delta u, \qquad 0 \le r < 1, \qquad 0 \le \varphi < 2\pi,\ t > 0,$$

$$u(r,\varphi,0) = r\,sin\,\varphi,\ 0 \le r \le 1, \qquad 0 \le \varphi < 2\pi,$$

$$u(1,\varphi,t) = 0,\ \ 0 \le \varphi < 2\pi,\ t \le 0.$$

3. Краевые задачи для уравнений эллиптического типа.

3.1. Найти решения следующих краевых задач для уравнения Лапласа:

$$a)\ \Delta u = 0, \qquad 0 \le r < a, \qquad 0 \le \varphi < 2\pi,$$

$$u_r(a,\varphi) = 4\,sin^3\,\varphi,\ 0 \le \varphi < 2\pi.$$

$$b)\ \Delta u = 0, \qquad r > a, \qquad 0 \le \varphi < 2\pi,$$

$$u(a,\varphi) = 8\,cos^4\,\varphi,\ 0 \le \varphi < 2\pi,\ |u| < C \text{ при } r \ge a.$$

$$c)\ \Delta u = 0, \qquad 0 < r < a, \qquad 0 < \varphi < \pi/4,$$

$$u(r,0) = 0, \qquad u_\varphi(r,\pi/4) = 0,\ 0 \le r \le a,\ \ u(a,\varphi) = 1, \qquad 0 \le \varphi \le \pi/4.$$

$$d)\ \Delta u = 0, \qquad 0 < x < a,\ 0 < y < b,$$

$$u_x(0,y) = u_x(a,y) = 0, \qquad u(x,0) = 1, \qquad u(x,b) = 2, \qquad 0 \le x \le a,\ 0 \le y \le b.$$

$$e)\ \Delta u = 0, \qquad 0 < x < a, \qquad 0 < y < b, \qquad 0 < z < c,$$

$$u(0,y,z) = u(x,0,z) = u(x,y,0) = 0,\ u(a,y,z) = u(x,b,z) = u(x,y,c) = 1,$$

$$0 \le x \le a,\ 0 \le y \le b,\ 0 \le z \le c.$$

$$f)\ \Delta u = 0, \qquad 0 \le r < a,\ 0 \le \varphi < 2\pi,\ 0 < z < h,$$

$$u(a,\varphi,z) = 3cos^2\varphi, \qquad u(r,\varphi,0) = u(r,\varphi,h) = 0,$$

$$0 \le r \le a,\ 0 \le \varphi < 2\pi,\ 0 \le z \le h.$$

$$g)\ \Delta u = 0,\ 0 \le r < a,\ 0 \le \theta \le \pi,\ 0 \le \varphi < 2\pi,$$

$$u(a,\varphi,\theta) = 1 + sin\theta\ cos\varphi, \qquad 0 \le r \le a, \qquad 0 \le \theta \le \pi, \qquad 0 \le \varphi < 2\pi.$$

$$h)\ \Delta u = 0,\ r > a,\ 0 \le \theta \le \pi,\ 0 \le \varphi < 2\pi,$$

$$u(a,\varphi,\theta) = 1 + sin\theta\ cos\varphi,\ \ u \rightrightarrows 0, \qquad r \to \infty, \qquad 0 \le \theta \le \pi, \qquad 0 \le \varphi < 2\pi.$$

$$i)\ \Delta u = 0,\ 0 \le r < a,\ \ 0 \le \theta \le \pi,\ 0 \le \varphi < 2\pi,$$

$$u_r(a, \varphi, \theta) = cos\theta, \quad 0 \le r \le a, \quad 0 \le \theta \le \pi, \quad 0 \le \varphi < 2\pi.$$

$$j)\ \Delta u = 0,\ r > a,\ \ 0 \le \theta \le \pi,\ 0 \le \varphi < 2\pi,$$

$$u_r(a, \varphi, \theta) = cos\theta, \quad u \rightrightarrows 0, \quad r \to \infty, \quad 0 \le \theta \le \pi, \quad 0 \le \varphi < 2\pi.$$

3.2.Найти стационарное распределение температуры в однородном круговом цилиндре с радиусом основания a, если основания цилиндра $z = 0$ и z=h поддерживаются при постоянной температуре соответственно T_1 и T_2, а боковая поверхность теплоизолированна.

3.3. Описать стационарное распределение температуры в однородном шаре радиуса a, если температура на поверхности шара равна $U_0 \cos\theta$.

3.4. Построить функцию Грина оператора Лапласа задачи Дирихле в полупространстве и получить решение 1-й краевой задачи для уравнения Лапласа в этой области.

3.5. Построить функцию Грина оператора Лапласа задачи Неймана в полупространстве и получить решение 2-й краевой задачи для уравнения Лапласа в этой области.

3.6. Построить функцию Грина оператора Лапласа задачи Дирихле в шаре и получить решение 1-й краевой задачи для уравнения Лапласа в этой области.

3.7. Построить функцию Грина оператора Лапласа задачи Дирихле вне шара и получить решение 1-й краевой задачи для уравнения Лапласа в этой области.

3.8. Получите решения краевых задач для уравнения $\Delta u - k^2 u = 0$ в круге $0 \le r \le a,\ 0 \le \varphi < 2\pi$, удовлетворяющие граничным условиям следующего вида:

$$a)\ u(a, \varphi) = 2sin^2\,\varphi,\ \ 0 \le \varphi < 2\pi.$$

$$b)\ u_r(a, \varphi) + u(a, \varphi) = sin\,\varphi,\ \ 0 \le \varphi < 2\pi.$$

3.9. Решите краевую задачу

$$\Delta u + (\mu_2^{(4)})^2 u = 0, \quad 0 \le r < 1, \quad 0 \le \varphi < 2\pi,$$

$$u(1, \varphi) = cos2\,\varphi,\ \ 0 \le \varphi < 2\pi,$$

где $\mu_2^{(4)}$ −2-й корень уравнения $J_4\left(\mu^{(4)}\right) = 0$.

4. Задачи для уравнения теплопроводности и колебаний в неограниченных областях.

4.1. Определите распределение температуры в однородном бесконечном стержне при $t > 0$, если в начальный момент времени $t = 0$ распределение температуры описывалось функцией xe^{-x^2} .

4.2. Описать распределение температуры в полубесконечном однородном стержне при условии, что в начальный момент времени температура стержня равняется нулю, а торец $x = 0$ поддерживается при постоянной температуре T_0.

4.3. Решить начально-краевую задачу на бесконечной прямой:

$$u_t = u_{xx} + \sin t\,, \qquad x \in R^1, \quad t > 0,$$

$$u(x,0) = e^{-x^2}, \qquad x \in R^1.$$

4.4. Решить начально-краевую задачу на полупрямой:

$$u_t = u_{xx}, \qquad x \in R^+, \quad t > 0,$$

$$u(0,t) = U_1, \qquad u(x,0) = U_0, \qquad x \in \bar{R}^+, \qquad t \geq 0.$$

4.5. Описать малые колебания бесконечной нагруженной струны:

$$u_{tt} = 9u_{xx} + \sin x\,, \qquad x \in R^1, \quad t > 0,$$

$$u(x,0) = 1, \quad u_t(x,0) = 0, \;\; x \in R^1.$$

4.6. Описать процесс отражения импульса с профилем $U_0 e^{-(x-3)^2}$ от свободного конца однородной полубесконечной струны. Начальная скорость струны равна нулю.