МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ. КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ

ЭКЗАМЕН ПО ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЕ. 2025/2026 УЧЕБНЫЙ ГОД

СПИСОК ЭКЗАМЕНАЦИОННЫХ ВОПРОСОВ

Экзамен одноступенчатый, студенту предлагается один экзаменационный билет. Каждый экзаменационный билет состоит из трёх вопросов (по одному вопросу из трёх приведённых ниже списков) и одной задачи.

А. Векторные пространства и линейные отображения

А.1. Сформулируйте определение векторного (линейного) пространства. Докажите, что нулевой вектор единствен. Докажите, что для любого вектора $\boldsymbol{x}$ противоположный вектор единствен. Докажите соотношения $0\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, $(-1)\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{x}$, $\lambda\mathbf{0} = \mathbf{0}$. Приведите примеры векторных пространств.

А.2. Сформулируйте определение подпространства векторного пространства. Приведите примеры подпространств. Докажите, что любое подпространство векторного пространства само является векторным пространством. Докажите, что пересечение подпространств является подпространством.

А.3. Сформулируйте определение линейной комбинации векторов, определение линейной оболочки векторов. Приведите примеры линейных комбинаций и линейных оболочек. Докажите, что линейная оболочка является подпространством.

А.4. Сформулируйте определение линейно зависимых и линейно независимых векторов. Приведите примеры. Сформулируйте и докажите свойства линейно зависимых и линейно независимых векторов.

А.5. Сформулируйте определение размерности векторного пространства. Сформулируйте определение бесконечномерного векторного пространства. Сформулируйте определение базиса векторного пространства, определение координат вектора. Докажите, что все базисы конечномерного векторного пространства состоят из одного и того же числа векторов и это число равно размерности пространства.

А.6. Сформулируйте и докажите теорему о монотонности размерности.

А.7. Сформулируйте и докажите теорему о пополнении базиса.

А.8. Сформулируйте определение ранга матрицы в терминах размерности линейной оболочки. Докажите неравенства $\operatorname{rank}(AB) \leqslant \operatorname{rank}(A)$, $\operatorname{rank}(AB) \leqslant \operatorname{rank}(B)$.

А.9. Сформулируйте определение суммы подпространств, прямой суммы подпространств. Докажите формулу Грассмана для размерности суммы двух подпространств.

А.10. Сформулируйте определение матрицы перехода от одного базиса к другому. Выведите формулы преобразования координат вектора при переходе от одного базиса к другому.

А.11. Сформулируйте определение линейного функционала (ковектора) на векторном пространстве. Приведите примеры линейных функционалов. Сформулируйте определение двойственного (дуального) пространства. Докажите, что для любого конечномерного векторного пространства его двойственное пространство само является векторным пространством той же размерности. Сформулируйте определение двойственного (дуального) базиса.

А.12. Сформулируйте определение координат ковектора. Выведите формулы преобразования векторов двойственного базиса и координат ковектора при переходе от одного базиса к другому.

А.13. Сформулируйте определение тензора. Сформулируйте определение линейных операций над тензорами (суммы тензоров, произведения тензора на число). Докажите, что множество всех тензоров одной и той же валентности образует векторное пространство.

А.14. Сформулируйте определение произведения тензоров. Сформулируйте определение свертки тензора. Докажите, что свёртка тензора является тензором.

A.15. Сформулируйте определение линейного оператора, действующего из векторного пространства V в векторное пространство W. Приведите примеры. Сформулируйте определения ядра $\ker \boldsymbol{A}$ и образа $\operatorname{im} \boldsymbol{A}$ линейного оператора $\boldsymbol{A} : V \to W$. Докажите, что $\ker \boldsymbol{A}$ и $\operatorname{im} \boldsymbol{A}$ являются подпространствами.

A.16. Докажите, что для любого линейного оператора $\boldsymbol{A} : V \to W$ выполняется соотношение $\dim \ker \boldsymbol{A} + \dim \operatorname{im} \boldsymbol{A} = \dim V$.

A.17. Сформулируйте определение линейных операций над линейными операторами (суммы линейных операторов, произведение линейного оператора на число). Докажите, что множество $\operatorname{Hom}(V, W)$ всех линейных операторов, действующих из векторного пространства V в векторное пространство W, является векторным пространством, укажите его размерность.

A.18. Для данного линейного оператора $\boldsymbol{A} : V \to W$ сформулируйте определение обратного оператора. Докажите, что если $\boldsymbol{A}$ — обратимый линейный оператор, то $\boldsymbol{A}^{-1}$ — также линейный оператор.

A.19. Для данного линейного оператора $\boldsymbol{A} : V \to W$ сформулируйте определение обратного оператора. Сформулируйте и докажите критерий обратимости линейного оператора $\boldsymbol{A}$.

A.20. Сформулируйте определение произведения линейных операторов. Сформулируйте определение изоморфизма векторных пространств. Приведите примеры изоморфизмов. Докажите, что два векторных пространства одинаковой размерности над одним и тем же числовым полем изоморфны.

A.21. Сформулируйте определение матрицы линейного оператора $\boldsymbol{A} : V \to W$, где V, W — векторные пространства над числовым полем $\mathbb{K}$ размерностей v и w соответственно. Докажите изоморфизм $\operatorname{Hom}(V, W) \simeq \mathbb{K}^{w \times v}$.

A.22. Сформулируйте определение матрицы линейного оператора $\boldsymbol{A} : V \to W$. Докажите теоремы о структуре матриц суммы линейных операторов, произведения линейного оператора на число, произведения линейных операторов.

A.23. Системы линейных уравнений вида $AX = B$ с операторной точки зрения (здесь A — прямоугольная матрица, X и B — столбцы). Однородная система как задача о нахождении ядра. Критерий разрешимости неоднородной системы (теорема Кронекера—Капелли).

A.24. Сформулируйте определение оператора проектирования. Докажите, что если $\boldsymbol{P}$ — оператор проектирования, действующий в векторном пространстве V, то $V = \operatorname{im} \boldsymbol{P} \oplus \ker \boldsymbol{P}$.

B. Теория линейных операторов, билинейных и квадратичных форм

B.1. Сформулируйте определение инвариантного подпространства линейного оператора. Приведите примеры инвариантных подпространств. Сформулируйте определение ограничения линейного оператора на инвариантное подпространство (индуцированного) оператора). Структура матрицы линейного оператора в базисе $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{e}_{k+1}, \dots, \boldsymbol{e}_n$, где $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_k$ — базис инвариантного подпространства.

B.2. Сформулируйте определения собственного значения, собственного вектора и собственного подпространства линейного оператора. Сформулируйте определение геометрической кратности собственного значения. Сформулируйте и докажите теорему о линейной независимости собственных векторов, соответствующих различным собственным значениям.

B.3. Сформулируйте определение характеристического полинома линейного оператора. Докажите инвариантность характеристического полинома относительно замены базиса. Сформулируйте определение характеристического числа линейного оператора. Чем отличается понятие характеристического числа от понятия собственного значения? Сформулируйте определение алгебраической кратности собственного значения.

B.4. Сформулируйте и докажите необходимое и достаточное условие, при котором матрица линейного оператора является диагональной.

B.5. Докажите, что любой линейный оператор, действующий в вещественном векторном пространстве, имеет одномерное или двумерное инвариантное подпространство.

B.6. Сформулируйте определение билинейного функционала на векторном пространстве. Сформулируйте определение матрицы билинейного функционала. Запишите координатное представление билинейного функционала — билинейную форму. Выведите формулу преобразования матрицы билинейного функционала при замене базиса.

B.7. Сформулируйте определения линейных операций над билинейными функционалами. Докажите, что множество всех билинейных функционалов на n-мерном векторном пространстве над числовым полем $\mathbb{K}$ является векторным пространством, изоморфным пространству $\mathbb{K}^{n \times n}$.

B.8. Сформулируйте определения симметричного и кососимметричного билинейных функционалов на векторном пространстве. Докажите, что векторное пространство всех билинейных функционалов разлагается в прямую сумму подпространств, одно из которых состоит из симметричных, а другое — кососимметричных билинейных функционалов.

B.9. Сформулируйте определение квадратичного функционала. Сформулируйте и докажите теорему о поляризации квадратичного функционала.

B.10. Сформулируйте и докажите теорему об ортогонализации (метод Грама—Шмидта).

B.11. Сформулируйте определения положительно определённого, отрицательно определённого, положительно полуопределённого, отрицательно полуопределённого квадратичного функционала и симметричного билинейного функционала на вещественном векторном пространстве. Сформулируйте и докажите закон инерции квадратичных форм.

B.12. Сформулируйте критерий Сильвестра положительной (отрицательной) определённости квадратичной формы.

B.13. Что такое диагонализирующий базис симметричного билинейного функционала? Опишите метод Лагранжа приведения симметричной билинейной формы к диагональному виду.

B.14. Сформулируйте определение полуторалинейного функционала на комплексном векторном пространстве. Сформулируйте определение матрицы полуторалинейного функционала. Запишите координатное представление полуторалинейного функционала. Выведите формулу преобразования матрицы полуторалинейного функционала при замене базиса.

B.15. Сформулируйте определения линейных операций над полуторалинейными функционалами. Докажите, что множество всех полуторалинейных функционалов на комплексном n-мерном векторном пространстве является векторным пространством, изоморфным пространству $\mathbb{C}^{n \times n}(\mathbb{C})$.

B.16. Сформулируйте определение экспоненты матрицы. Опишите процесс вычисления экспоненты диагональной матрицы.

C. Пространства со скалярным произведением

C.1. Сформулируйте определение евклидова пространства. Приведите примеры. Сформулируйте и докажите неравенство Коши—Буняковского.

C.2. Сформулируйте определение унитарного пространства. Приведите примеры. Сформулируйте и докажите неравенство Коши—Буняковского.

C.3. Сформулируйте определение матрицы Грама системы векторов. Сформулируйте и докажите неравенство для определителя матрицы Грама. Сформулируйте определение метрического тензора евклидова пространства.

C.4. Сформулируйте определение ортонормированного базиса в евклидовом пространстве. Выведите формулы Гиббса для вычисления координат вектора в ортонормированном базисе.

C.5. Сформулируйте определение ортогональной матрицы. Сформулируйте и докажите свойства ортогональных матриц.

C.6. Сформулируйте определение ортонормированного базиса в унитарном пространстве. Выведите формулы Гиббса для вычисления координат вектора в ортонормированном базисе.

C.7. Сформулируйте определение унитарной матрицы. Сформулируйте и докажите свойства унитарных матриц.

C.8. Сформулируйте определение ортогонального дополнения подпространства в евклидовом пространстве. Сформулируйте и докажите теорему о разложении евклидова пространства в прямую сумму подпространства и его ортогонального дополнения.
C.9. Сформулируйте определение оператора ортогонального проектирования на подпространство. Выведите формулу для вычисления ортогональной проекции вектора на подпространство.
C.10. Сформулируйте определение ортогонального дополнения подпространства в унитарном пространстве. Сформулируйте и докажите теорему о разложении унитарного пространства в прямую сумму подпространства и его ортогонального дополнения.
C.11. Сформулируйте определение нормы вектора в евклидовом пространстве. Сформулируйте и докажите свойства нормы.
C.12. Сформулируйте определение нормы вектора в унитарном пространстве. Сформулируйте и докажите свойства нормы.
C.13. Сформулируйте определение расстояния между векторами в евклидовом пространстве. Сформулируйте определение расстояния между вектором и подпространством в евклидовом пространстве.
C.14. Сформулируйте определения контравариантного и ковариантного метрических тензоров евклидова пространства. Сформулируйте определения операций опускания и подъёма тензорных индексов. Приведите примеры.
C.15. Подъём индекса у линейного функционала. Сформулируйте и докажите теорему об общем виде линейного функционала в евклидовом пространстве.
C.16. Сформулируйте определение сопряжённого оператора в евклидовом пространстве. Сформулируйте и докажите теорему о матрице сопряжённого оператора в евклидовом пространстве.
C.17. Сформулируйте определение самосопряжённого оператора в евклидовом пространстве. Сформулируйте и докажите свойства матрицы самосопряжённого оператора.
C.18. Сформулируйте определение самосопряжённого оператора в евклидовом пространстве. Сформулируйте определение инвариантного подпространства линейного оператора. Докажите, что ортогональное дополнение любого инвариантного подпространства самосопряжённого оператора также является инвариантным подпространством.
C.19. Сформулируйте определение самосопряжённого оператора в евклидовом пространстве. Докажите, что все собственные значения самосопряжённого оператора в евклидовом пространстве вещественны. Докажите, что собственные векторы самосопряжённого оператора, отвечающие попарно различным собственным значениям, попарно ортогональны.
C.20. Сформулируйте определение эрмитова оператора в унитарном пространстве. Сформулируйте и докажите свойства матрицы эрмитова оператора.
C.21. Сформулируйте определение эрмитова оператора в унитарном пространстве. Сформулируйте определение инвариантного подпространства линейного оператора. Докажите, что ортогональное дополнение любого инвариантного подпространства эрмитова оператора также является инвариантным подпространством.
C.22. Сформулируйте определение эрмитова оператора в унитарном пространстве. Докажите, что все собственные значения эрмитова оператора в унитарном пространстве вещественны. Докажите, что собственные векторы эрмитова оператора, отвечающие попарно различным собственным значениям, попарно ортогональны.

D. Список экзаменационных задач

D.1. Решить однородную систему линейных уравнений.
D.2. Решить неоднородную систему линейных уравнений.
D.3. Найти базис в линейной оболочке заданных столбцов.
D.4. Найти базис в сумме заданных подпространств.
D.5. Найти базис в пересечении заданных подпространств.
D.6. Записать матрицу перехода от одного из двух заданных базисов к другому. Заданы координаты вектора в одном из этих базисов, найти координаты этого вектора в другом базисе.

D.7. Записать матрицу перехода от одного из двух заданных базисов к другому. Написать выражение для одной из координат заданного тензора в новом базисе через координаты этого тензора в старом базисе.
D.8. Составить матрицу линейного оператора, заданного бескоординатным описанием.
D.9. Найти ядро и образ заданного линейного оператора.
D.10. Записать матрицу перехода от одного из двух заданных базисов к другому. Найти матрицу линейного оператора в новом базисе, если задана его матрица в старом базисе.
D.11. Найти собственные значения и собственные векторы заданного линейного оператора.
D.12. Найти инвариантные подпространства заданного линейного оператора.
D.13. Составить матрицу симметричной билинейной формы, заданной бескоординатным описанием.
D.14. Записать матрицу перехода от одного из двух заданных базисов к другому. Найти матрицу билинейной формы в новом базисе, если задана ее матрица в старом базисе.
D.15. Привести заданную симметричную билинейную (квадратичную) форму к диагональному виду методом Лагранжа.
D.16. Привести заданную симметричную билинейную (квадратичную) форму к диагональному виду методом ортогонального преобразования.
D.17. Применить к заданной системе векторов процесс ортогонализации Грама—Шмидта.
D.18. Найти экспоненту заданной диагональной матрицы.
D.19. Построить ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов заданного самосопряжённого оператора.
D.20. Найти ортогональную проекцию заданного вектора на заданное подпространство и расстояние от этого вектора до его ортогональной проекции.