**Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова
Физический факультет
Кафедра математики**

Овчинников А. В.

Линейная алгебра
Домашнее задание № 1
Срок сдачи
30 марта 2026 г.

**Москва
2026**

ИНСТРУКЦИЯ
по выполнению домашних заданий по линейной алгебре

Каждый студент физического факультета при изучении курса линейной алгебры во втором семестре обучения должен выполнить четыре домашних задания. Выполнение всех домашних заданий в полном объёме является необходимым условием получения зачёта по дисциплине линейная алгебра в конце семестра. Это означает, что студент, не выполнивший хотя бы одной задачи из домашнего задания, не может претендовать на получение зачёта по линейной алгебре.

Выполнение домашнего задания состоит из трёх частей:

(i) изучение теоретического материала, необходимого для решения задач, по материалам лекций и учебных пособий;
(ii) изучение методов решения типовых задач, изложенных в разделах «Примеры решения задач»;
(iii) самостоятельное решение задач, предложенных в соответствующих разделах данного пособия.

Домашние задания оформляются согласно изложенным ниже правилам и сдаются для проверки преподавателю, ведущему семинарские занятия в группе.

1. Результаты работы оформляются на одной стороне бумажного листа формата А4. Работа должны быть написана чётким разборчивым почерком без помарок и исправлений ручкой синего или чёрного цвета. Использование карандашей или принтеров не допускается. С каждой стороны листа оставляются поля: слева — 4 см, сверху, снизу и справа — по 2 см.

2. Первым листом выполненной работы является титульный лист, на котором указываются следующие данные:

(1) Фамилия, имя, отчество студента в именительном падеже.
(2) Номер группы.
(3) Фамилия и инициалы преподавателя, ведущего семинарские занятия в группе, в именительном падеже.

(4) Номер домашнего задания.

Пример:

Каценеленбоген Вахтисий Сосипатрович
Группа 123
Преподаватель Иванов И. И.
Домашнее задание № 1

2. Оформление каждой задачи начинается на новом листе. На одном листе не может содержаться информация, относящаяся к разным задачам. В верхней части листа указывается название (номер) задачи. Если задача содержит несколько вопросов, решение каждого из них должно начинаться на новой странице.

3. В выполненной работе задачи должны быть расположены в том же порядке, что и в сборнике заданий. Страницы должны быть пронумерованы; номер ставится на каждой странице в правом нижнем углу страницы.

4. После титульной страницы следуют листы, на которых законспектированы примеры решения задач, приведённые в пособии. Это неотъемлемая часть работы; без неё работа не считается выполненной. Далее следуют листы с задачами для самостоятельного решения.

5. При самостоятельном решении задач студент должен убедиться, что решение верно, сравнив свой ответ с приведённым в пособии. Ответы имеются для всех задач.

6. Листы с заданиями должны быть скреплены при помощи степлера. Нельзя скреплять листы скрепками или помещать их в пластиковые папки или файлы; во избежание утери фрагментов работы соединение должно быть неразъёмным.

7. Работа должны быть сдана на проверку в срок, указанный лектором или преподавателем, ведущим семинарские занятия.

ТЕМА 1

Метод Гаусса—Жордана

Примеры решения задач

Пример 1.1. Докажите, что заданные столбцы A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 линейно зависимы, и запишите соотношения, выражающие факт линейной зависимости. Укажите базис в линейной оболочке $L(A_1, \ldots, A_5)$:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \ A_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ A_3 = \begin{pmatrix} 17 \\ -15 \\ 10 \\ -5 \end{pmatrix}, \ A_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \ A_5 = \begin{pmatrix} -8 \\ 9 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Решение. Количество данных столбцов больше размерности пространства $\mathbb{R}^4$, в котором они лежат, поэтому они линейно зависимы. Для установления соотношений, выражающих линейную зависимость, составим из заданных столбцов матрицу $A = \|A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\|$ и приведём её к упрощенной форме при помощи метода Гаусса—Жордана (на первом шаге четвертая строка, домноженная на (-1), переставлена на первое место; ведущая строка, ведущий столбец и ведущий элемент выделены):

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 17 & 2 & -8 \\ -3 & 3 & -15 & -2 & 9 \\ 2 & -2 & 10 & 2 & -8 \\ -1 & 1 & -5 & -1 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \mathbf{1} & -1 & 5 & 1 & -4 \\ -3 & 3 & -15 & -2 & 9 \\ 2 & -2 & 10 & 2 & -8 \\ 4 & -3 & 17 & 2 & -8 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & 1 & -4 \\ 0 & \mathbf{1} & -3 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A'.$$

В полученной матрице $A' = \|A'_1, \ldots, A'_5\|$ столбцы A'_1, A'_2, A'_4 линейно независимы (они образуют базис в линейной оболочке всех столбцов матрицы A'), а столбцы A'_3, A'_5 выражаются через них следующим образом:

$$A'_3 = 2A'_1 - 3A'_2, \quad A'_5 = A'_1 + 2A'_2 - 3A'_4.$$

Такие же соотношения справедливы и для столбцов исходной матрицы:

$$2A_1 - 3A_2 = 2\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ -15 \\ 10 \\ -5 \end{pmatrix} = A_3,$$

$$A_1 + 2A_2 - 3A_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 9 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix} = A_5.$$

Столбцы A_1, A_2, A_4, называемые базисными столбцами матрица A, образуют базис в линейной оболочке $L(A_1, \ldots, A_5)$.

Пример 1.2. Решите однородную систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 8x^1 - 5x^2 + 3x^3 - 6x^4 = 0, \\ -11x^1 + 8x^2 - 6x^3 + 9x^4 = 0. \end{cases}$$

Запишите фундаментальную совокупность решений и фундаментальную матрицу системы.

Решение. Выпишем основную матрицу системы и приведём её к упрощённому виду при помощи метода Гаусса—Жордана:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{8} & -5 & 3 & -6 \\ -11 & 8 & -6 & 9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 8 & -5 & 3 & -6 \\ 0 & 9 & -15 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 8 & -5 & 3 & -6 \\ 0 & \mathbf{3} & -5 & 2 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 24 & 0 & -16 & -8 \\ 0 & 3 & -5 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Преобразованная система имеет вид

$$\begin{cases} 3x^1 \qquad\quad - 2x^3 - \ x^4 \ = 0, \\ \qquad 3x^2 - 5x^3 + 2x^4 \ = 0 \end{cases} \qquad \text{или} \qquad \begin{cases} x^1 = \frac{1}{3}(2x^3 + x^4), \\ x^2 = \frac{1}{3}(5x^3 - 2x^4). \end{cases}$$

Неизвестные x^1 и x^2 являются базисными, x^3 и x^4 — свободными. Придавая свободным неизвестным произвольные значения $x^3 = 3c^1$ и $x^4 = 3c^2$, получаем

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c^1 + c^2 \\ 5c^1 - 2c^2 \\ 3c^1 \\ 3c^2 \end{pmatrix} = c^1 \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}}_{X_1} + c^2 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}}_{X_2}.$$

Столбцы $X_1 = (2; 5; 3; 0)^T$ и $X_2 = (1; -2; 0; 3)^T$ образуют фундаментальную совокупность решений (ФСР), т.е. базис в пространстве решений исходной однородной линейной системы: любое решение X системы можно представить в виде $X = c^1X_1 + c^2X_2$. Матрица

$$\Phi = \|X_1, X_2\| = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -2 \\ 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

состоящая из этих столбцов, называется фундаментальной матрицей исходной системы; любое решение системы выражается через фундаментальную матрицу формулой $X = \Phi C$, где $C = (c^1, c^2)^T$ — столбец, состоящий из произвольных постоянных.

Пример 1.3. Решите однородную систему линейных уравнений

$$\begin{cases} \ \ 4x^1 - 3x^2 + 17x^3 + 2x^4 - 8x^5 = 0, \\ -3x^1 + 3x^2 - 15x^3 - 2x^4 + 9x^5 = 0, \\ \ \ 2x^1 - 2x^2 + 10x^3 + 2x^4 - 8x^5 = 0, \\ \ -x^1 + x^2 - 5x^3 - x^4 + 4x^5 = 0. \end{cases}$$

Запишите фундаментальную совокупность решений и фундаментальную матрицу системы.

Решение. Выпишем основную матрицу системы и приведём её к упрощённому виду при помощи метода Гаусса—Жордана (вычисления опущены):

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 17 & 2 & -8 \\ -3 & 3 & -15 & -2 & 9 \\ 2 & -2 & 10 & 2 & -8 \\ -1 & 1 & -5 & -1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{г.-ж.}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A'.$$

Неизвестные x^1, x^2, x^4, соответствующие базисным столбцам матрицы, становятся базисными неизвестными в преобразованной системе:

$$\begin{cases} x^1 = -2x^3 - x^5, \\ x^2 = 3x^3 - 2x^5, \\ x^4 = 3x^5. \end{cases}$$

Каждая из них входит только в одно уравнение системы: x^1 — только в первое уравнение, x^2 — только во второе, x^4 — только в третье. Остальные неизвестные — x^3 и x^5 — являются свободными; они могут принимать произвольные значения. Полагая $x^3 = c^1$ и $x^5 = c^2$, получаем

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \\ x^5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2c^1 - c^2 \\ 3c^1 - 2c^2 \\ c^1 \\ 3c^1 \\ c^2 \end{pmatrix} = c^1 \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + c^2 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Столбцы $X_1 = (-2; 3; 1; 3; 0)^T$ и $X_2 = (-1; -2; 0; 0; 1)^T$ образуют фундаментальную совокупность решений (ФСР), т.е. базис в пространстве решений исходной однородной линейной системы: любое решение X системы можно представить в виде $X = c^1 X_1 + c^2 X_2$. Матрица

$$\Phi = \|X_1, X_2\| = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & -2 \\ 1 & 0 \\ 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

состоящая из этих столбцов, называется фундаментальной матрицей исходной системы; любое решение системы выражается через фундаментальную матрицу формулой $X = \Phi C$, где $C = (c^1, c^2)^T$ — столбец, состоящий из произвольных постоянных.

Пример 1.4. Решите две неоднородные системы $AX = B_1$ и $AX = B_2$, где

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 17 & 2 & -8 \\ -3 & 3 & -15 & -2 & 9 \\ 2 & -2 & 10 & 2 & -8 \\ -1 & 1 & -5 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Решение. Поскольку системы имеют одну и ту же основную матрицу, процесс приведения расширенных матриц $\|A \mid B_1\|$ и $\|A \mid B_2\|$ к упрощённому виду методом Гаусса—Жордана можно проводить одновременно (вычисления опущены):

$$\|A \mid B_1 \mid B_2\| =$$
$$= \left(\begin{array}{rrrrr|r|r} 4 & -3 & 17 & 2 & -8 & -1 & 8 \\ -3 & 3 & -15 & -2 & 9 & 1 & -5 \\ 2 & -2 & 10 & 2 & -8 & -1 & 4 \\ -1 & 1 & -5 & -1 & 4 & 1 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{г.-ж.}} \left(\begin{array}{rrrrr|r|r} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Для первой системы преобразованная расширенная матрица имеет вид

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right);$$

ей соответствует система

$$\begin{cases} x^1 + 2x^3 + x^5 = 0, \\ x^2 - 3x^3 + 2x^5 = 0, \\ x^4 - 3x^5 = 0, \\ 0x^1 + 0x^2 + 0x^3 + 0x^4 + 0x^5 = 1; \end{cases}$$

последнее уравнение, а с ним и вся система несовместны. Этот же факт вытекает из теоремы Кронекера—Капелли: ранги основной и расширенной матриц системы не совпадают, $\operatorname{rk} A = 3$, $\operatorname{rk} \|A \mid B_1\| = 4$.

Для второй системы имеем преобразованную матрицу

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(отметим, что в этом случае $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} \|A \mid B_2\| = 3$, так что по теореме Кронекера—Капелли система $AX = B_2$ совместна) и соответствующую систему

$$\begin{cases} x^1 & & + & 2x^3 & & & + & x^5 & = & 3, \\ & x^2 & - & 3x^3 & & & + & 2x^5 & = & 2, \\ & & & & & x^4 & - & 3x^5 & = & 1, \\ 0x^1 & + \; 0x^2 & + & 0x^3 & + & 0x^4 & + & 0x^5 & = & 0. \end{cases}$$

Неизвестные x^1, x^2, x^4 являются базисными, x^3, x^5 — свободными. Переписав систему в виде

$$\begin{cases} x^1 = 3 - 2x^3 - x^5, \\ x^2 = 2 + 3x^3 - 2x^5, \\ x^4 = 1 + 3x^5 \end{cases}$$

и придавая свободным переменным произвольные значения $x^3 = c^1$ и $x^5 = c^2$, получаем выражение для произвольного решения системы $AX = B_2$:

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \\ x^5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - 2c^1 - c^2 \\ 2 + 3c^1 - 2c^2 \\ c^1 \\ 1 + 3c^1 \\ c^2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{X_0} + c^1 \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}}_{X_1} + c^2 \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{X_2}.$$

Здесь столбец X_0 представляет собой частное решение исходной неоднородной системы $AX = B_2$, соответствующее нулевым значениям свободных неизвестных, а столбцы X_1 и X_2 образуют фундаментальную совокупность решений (ФСР) сопутствующей однородной системы $AX = O$.

Пример 1.5. Составьте однородную систему уравнений, для которой столбцы $X_1 = (1; 2; 3; 4)^T$ и $X_2 = (5; 6; 7; 8)^T$ образуют фундаментальную совокупность решений.

Решение. Если Φ — фундаментальная матрица однородной системы $AX = O$, то выполняется соотношение $A\Phi = O$. Транспонируя это уравнение, получаем $\Phi^T A^T = O^T$; если матрица Φ задана, то $\Phi^T A^T = O^T$ — уравнение для нахождения матрицы A^T: каждый столбец, удовлетворяющий этому матричному уравнению, после транспонирования становится строкой коэффициентов однородного линейного уравнения, которому удовлетворяет каждый столбец матрицы Φ .

Итак, требуется решить однородную систему с матрицей

$$\Phi^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{г.-ж.}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix};$$

линейно независимыми решениями однородной системы с такой основной матрицей будут, например, столбцы $(1; -2; 1; 0)^T$ и $(2; -3; 0; 1)^T$. Транспонируя эти столбцы, находим строки матрицы искомой системы и выписываем саму систему:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{cases} x^1 - 2x^2 + x^3 = 0, \\ 2x^1 - 3x^2 + x^4 = 0. \end{cases}$$

Задачи для самостоятельного решения

1.1. При помощи метода Гаусса—Жордана решите следующие неоднородные системы уравнений:

$$\text{(а)} \begin{cases} 2x + y - 3z = 8, \\ -x + 2y + 5z = -5, \\ -3x - y + 4z = -11; \end{cases} \qquad \text{(б)} \begin{cases} x + 2y + 4z = 17, \\ 2x + 5y - 2z = 6, \\ 4x - 2y - 3z = -9. \end{cases}$$

1.2. При помощи метода Гаусса—Жордана для каждой из заданных матриц установите линейные зависимости между столбцами и укажите базис в линейной оболочке столбцов:

$$\text{(а)} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -7 & -5 & -6 & -10 \\ -2 & 5 & 16 & 12 & 15 & 24 \\ -5 & 12 & 39 & 30 & 37 & 59 \\ 6 & -15 & -48 & -38 & -47 & -74 \end{pmatrix}; \quad \text{(б)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & -5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & -1 & 4 & -7 & -10 & -13 \\ -1 & -2 & 3 & -4 & -5 & -6 \end{pmatrix}.$$

1.3. При помощи метода Гаусса—Жордана решите однородные системы уравнений, заданные основными матрицами из задачи 1.2. Запишите фундаментальную систему решений, фундаментальную матрицу и формулу, выражающую произвольное решение через фундаментальную матрицу.

1.4. Дана блочная матрица $\|A \mid B_1 \mid B_2\|$. При помощи метода Гаусса—Жордана решите две неоднородные системы $AX = B_1$ и

$AX = B_2$.

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r|r} 1 & 2 & 4 & 2 & -3 & 3 & 24 \\ 2 & 5 & 11 & 5 & -7 & 8 & 57 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & -5 & 3 & 28 \\ 2 & 5 & 11 & 5 & -7 & 9 & 57 \end{array}\right).$$

1.5. Составьте однородную систему уравнений, для которой заданные столбцы образуют фундаментальную совокупность решений:

(а) $X_1 = (3; -5; 1; -2; 1; 1)^T$, $X_2 = (3; -7; -1; -1; -1; 5)^T$;

(б) $Y_1 = (1; -7; -1; -1; -5; -1)^T$, $Y_2 = (3; -5; 1; 1; -3; 1)^T$.

ТЕМА 2

Матрицы и определители

Примеры решения задач

Пример 2.1. Методом элементарных преобразований строк (методом Гаусса—Жордана) найдите обратную матрицу для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & -3 & -4 \\ 3 & -8 & -12 \end{pmatrix}.$$

Решение. Составим блочную матрицу $\|A \mid I\|$, где I — единичная матрица, и при помощи элементарных преобразований строк добьёмся того, чтобы в левом блоке образовалась единичная матрица; тогда в правом блоке образуется обратная матрица A^{-1}:

$$\|A \mid I\| = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -8 & -12 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 2 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 12 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 2 & 1 \end{array}\right) = \|I \mid A^{-1}\|.$$

Итак,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 12 & -3 & -2 \\ -7 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пример 2.2. Для данных матриц A и B найдите $A^{-1}B$ и BA^{-1}, не вычисляя отдельно A^{-1}:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & -3 & -4 \\ 3 & -8 & -12 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение. Для вычисления $A^{-1}B$ составим блочную матрицу $\|A \mid B\|$ и при помощи элементарных преобразований строк добьёмся того, чтобы в левом блоке образовалась единичная матрица: $\|A \mid B\| \to \|I \mid A^{-1}B\|$; тогда в правом блоке образуется матрица $A^{-1}B$:

$$\|A \mid B\| = \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -2 & -3 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & -3 & -4 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & -8 & -12 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -2 & -3 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 1 & 4 & 3 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 8 & 5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -1 & -5 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & -14 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 8 & 5 \end{array}\right) = \|I \mid A^{-1}B\|.$$

Итак,

$$A^{-1}B = \begin{pmatrix} -1 & -5 & -4 \\ -5 & -14 & -9 \\ 3 & 8 & 5 \end{pmatrix}.$$

Для вычисления BA^{-1} заметим, что $(BA^{-1})^T = (A^T)^{-1}B^T$; поэтому применим только что использованный алгоритм к матрицам A^T и B^T: записав блочную матрицу $\|A^T \mid B^T\|$ и получив при помощи элементарных преобразований единичную матрицу в левом блоке, найдём в правом блоке матрицу $(A^T)^{-1}B^T$; останется лишь транспонировать результат:

$$\|A^T \mid B^T\| = \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & -8 & -1 & 0 & 1 \\ -3 & -4 & -12 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 7 & 2 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & -3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -5 & 11 & 16 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & -3 \end{array}\right) = \|I \mid (A^T)^{-1}B^T\|,$$

так что

$$BA^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 1 \\ 11 & -2 & -2 \\ 16 & -3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Пример 2.3. Вычислите определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 8 & 11 \\ 3 & 8 & 14 & 20 \\ 4 & 11 & 20 & 30 \end{vmatrix}.$$

Решение. При помощи элементарных преобразований строк преобразуем определитель к треугольному виду:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 8 & 11 \\ 3 & 8 & 14 & 20 \\ 4 & 11 & 20 & 30 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & 8 \\ 0 & 3 & 8 & 14 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1.$$

Задачи для самостоятельного решения

2.1. Для данных матриц найдите обратные методом элементарных преобразований:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.2. Для матриц из задачи 2.1 найдите матрицы $A^{-1}B$, BA^{-1} двумя способами: (1) перемножая нужные сомножители и (2) не используя отдельно вычисленную матрицу A^{-1} (ср. пример 2.2). Найдите матрицы $B^{-1}A$, AB^{-1} тремя способами: (1) перемножая нужные сомножители, (2) не используя отдельно вычисленную матрицу B^{-1} и (3) обращая матрицы $A^{-1}B$, BA^{-1}.

2.3. Для данных матриц найдите обратные методом элементарных преобразований:

$$\text{(а)}\ \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix};\ \text{(б)}\ \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.4. Вычислите следующие определители, приведя их к треугольному виду:

$$
\text{(а)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 10 & 14 \\ 3 & 8 & 16 & 20 \\ 4 & 11 & 24 & 30 \end{vmatrix}, \quad
\text{(б)} \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 12 & 15 & 21 \\ 1 & 6 & 10 & 12 \\ -4 & -2 & 0 & -2 \end{vmatrix}, \quad
\text{(в)} \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 12 & 15 & 21 \\ 3 & 10 & 13 & 18 \\ -4 & -2 & -6 & -2 \end{vmatrix}.
$$

2.5. Вычислите следующие определители порядка n, приводя их к треугольному виду:

$$
\text{(а)} \begin{vmatrix} 1 & n & \dots & n & n \\ n & 2 & \dots & n & n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n & n & \dots & n-1 & n \\ n & n & \dots & n & n \end{vmatrix}, \quad
\text{(б)} \begin{vmatrix} 1 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ 1 & a_1+b_1 & \dots & a_{n-1} \\ 1 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_1 & \dots & a_{n-1}+b_{n-1} \end{vmatrix},
$$

$$
\text{(в)} \begin{vmatrix} x_1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ x_1 & x_2 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \end{vmatrix}, \quad
\text{(г)} \begin{vmatrix} a & b & \dots & b & b \\ b & a & \dots & b & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b & b & \dots & a & b \\ b & b & \dots & b & a \end{vmatrix}.
$$

ТЕМА 3

Векторные пространства

Примеры решения задач

Пример 3.1. Докажите, что в векторном пространстве $\mathbb{R}^{2\times 2}$ вещественных квадратных (2×2)-матриц элементы

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix},\ A_4 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix},$$

образуют базис и разложите по этому базису элемент

$$X = \begin{pmatrix} 16 & 11 \\ 18 & -20 \end{pmatrix}.$$

Решение. Векторное пространство $\mathbb{R}^{2\times 2}$ изоморфно арифметическому пространству $\mathbb{R}^4$. Рассмотрим какой-нибудь изоморфизм, например,

$$F : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^4, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix},$$

и образы $F(A_1)$, $F(A_2)$, $F(A_3)$, $F(A_4)$, $F(X)$ заданных в условии матриц:

$$F(A_1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad F(A_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$F(A_3) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad F(A_4) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad F(X) = \begin{pmatrix} 16 \\ 11 \\ 18 \\ -20 \end{pmatrix}.$$

Для анализа линейной зависимости столбцов $F(A_1)$, $F(A_2)$, $F(A_3)$, $F(A_4)$ и разложения $F(X)$ в их линейную комбинацию составим из указанных столбцов матрицу и приведём её к упрощённому виду методом Гаусса—Жордана:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 3 & 2 & -1 & 3 & 16 \\ 4 & 0 & 1 & 1 & 11 \\ -1 & 3 & 3 & 1 & 18 \\ 2 & -1 & -4 & -2 & -20 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{г.-ж.}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right).$$

Отсюда ясно, что элементы $F(A_1)$, $F(A_2)$, $F(A_3)$, $F(A_4) \in \mathbb{R}^4$ (а вместе с ними и элементы A_1, A_2, A_3, $A_4 \in \mathbb{R}^{2\times 2}$) линейно независимы и — поскольку их количество равно $4 = \dim \mathbb{R}^4 = \dim \mathbb{R}^{2\times 2}$ — образуют базисы в пространствах $\mathbb{R}^4$ и $\mathbb{R}^{2\times 2}$ соответственно; элементы $F(X) \in \mathbb{R}^4$ и $X \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ разлагаются по указанным базисам следующим образом:

$$\begin{aligned} F(X) &= F(A_1) + 2F(A_2) + 3F(A_3) + 4F(A_4), \\ X &= A_1 + 2A_2 + 3A_3 + 4A_4, \end{aligned}$$

Пример 3.2. В арифметическом пространстве $\mathbb{R}^4$ заданы элементы $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$, $\boldsymbol{a}_4$. Найдите базис в линейной оболочке $L(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4)$, дополните его векторами $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{e}_4$ стандартного базиса пространства $\mathbb{R}^4$ до базиса пространства $\mathbb{R}^4$ и разложите векторы стандартного базиса по построенному базису:

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{a}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Решение. Приведём к упрощённому виду матрицу, столбцами которой являются заданные элементы и элементы стандартного базиса пространства $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{rrrrrrrr} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 & \boldsymbol{a}_4 & \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 & \boldsymbol{e}_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{rrrrrrrr} 1 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \end{array} \xrightarrow{\text{г.-ж.}}$$

$$\xrightarrow{\text{г.-ж.}} \begin{array}{cccccccc} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 & \boldsymbol{a}_4 & \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 & \boldsymbol{e}_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & -1 \end{array}\right).$$

Базис в линейной оболочке $L(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4)$ образуют столбцы $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$; $\boldsymbol{a}_3 = 2\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2$; $\boldsymbol{a}_4 = 2\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2$. Базис в $\mathbb{R}^4$ образуют векторы $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$, при этом $\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 - 3\boldsymbol{e}_1 - 3\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_4 = \boldsymbol{a}_2 - 2\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2$.

Пример 3.3. В пространстве $S\mathbb{R}^{3\times3}$ вещественных симметричных (3×3)-матриц заданы элементы

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \ A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \ A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Достройте это семейство матриц до базиса в пространстве $S\mathbb{R}^{3\times3}$.

Решение. Пространство $S\mathbb{R}^{3\times3}$ вещественных симметричных (3×3)-матриц имеет размерность 6 и поэтому изоморфно вещественному арифметическому пространству $\mathbb{R}^6$; рассмотрим, например, изоморфизм

$$F : S\mathbb{R}^{3\times3} \to \mathbb{R}^6, \qquad \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & f \\ c & f & g \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a, & b, & c, & d, & f, & g \end{pmatrix}^T.$$

Образами заданных в условии матриц являются столбцы

$$F(A_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ F(A_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ F(A_3) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Самый простой способ достроить заданный набор векторов пространства $\mathbb{R}^6$ до базиса — использовать векторы стандартного базиса. Рассмотрим матрицу, столбцами которой являются столбцы $F(A_1)$, $F(A_2)$, $F(A_3)$ и векторы $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{e}_4$, $\boldsymbol{e}_5$, $\boldsymbol{e}_6$ стандартного базиса пространства $\mathbb{R}^6$, и приведём её к упрощённому виду методом Гаусса—Жордана:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
F(A_1) & F(A_2) & F(A_3) & \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 & \boldsymbol{e}_4 & \boldsymbol{e}_5 & \boldsymbol{e}_6
\end{array}
$$

$$
\left(\begin{array}{ccccccccc}
1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right) \xrightarrow{\text{Г.-Ж.}}
$$

$$
\xrightarrow{\text{Г.-Ж.}}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccc}
F(A_1) & F(A_2) & F(A_3) & \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 & \boldsymbol{e}_4 & \boldsymbol{e}_5 & \boldsymbol{e}_6
\end{array} \\
\left(\begin{array}{ccccccccc}
1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\
0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1
\end{array}\right)
\end{array}.
$$

Ясно, что столбцы $F(A_3)$ и $\boldsymbol{e}_1$ являются линейными комбинациями столбцов $F(A_1)$ и $F(A_2)$, а столбцы $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{e}_4$, $\boldsymbol{e}_5$ дополняют пару $F(A_1)$, $F(A_2)$ до базиса пространства $\mathbb{R}^6$. При помощи обратного изоморфизма $F^{-1} : \mathbb{R}^6 \to S\mathbb{R}^{3\times 3}$ переносим базис $F(A_1)$, $F(A_2)$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{e}_4$, $\boldsymbol{e}_5$ пространства $\mathbb{R}^6$ в пространство $S\mathbb{R}^{3\times 3}$:

$$
A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},
$$

$$
F^{-1}(\boldsymbol{e}_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F^{-1}(\boldsymbol{e}_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},
$$

$$
F^{-1}(\boldsymbol{e}_4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F^{-1}(\boldsymbol{e}_5) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.
$$

Пример 3.4. В векторном пространстве $\mathbb{R}^4$ подпространство P задано как линейная оболочка двух векторов, а подпространство Q как пространство решений однородной линейной системы:

$$
P = L\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} \right), \quad Q : \begin{cases} 8x^1 - 5x^2 + 3x^3 - 6x^4 = 0, \\ -11x^1 + 8x^2 - 6x^3 + 9x^4 = 0. \end{cases}
$$

Найдите сумму $P + Q$ и пересечение $P \cap Q$ этих подпространств.

Решение. Для нахождения суммы подпространств каждое из этих подпространств должно быть задано как линейная оболочка некоторого семейства векторов, а для нахождения пересечения — как пространство решений некоторой однородной системы. Подпространство P можно задать как пространство решений однородной системы, построенной в примере 1.5; обозначим через $\widehat{P}$ матрицу соответствующей однородной системы, а через $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2$ — базис в P:

$$P = L\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\6\\7\\8\end{pmatrix}\right) = L(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2), \quad \widehat{P} = \begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & 0\\ 2 & -3 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Подпространство Q можно задать как линейную оболочку векторов, найденных в примере 1.2; обозначим эти векторы через $\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2$, а матрицу однородной системы, задающей подпространство Q, через $\widehat{Q}$. Таким образом, для каждого из подпространств P и Q имеются оба способа задания:

$$Q = L\left(\begin{pmatrix}2\\5\\3\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-2\\0\\3\end{pmatrix}\right) = L(\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2), \quad \widehat{Q} = \begin{pmatrix}8 & -5 & 3 & -6\\ -11 & 8 & -6 & 9\end{pmatrix}.$$

Найдем базис в сумме подпространств $P + Q = L(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2)$

$$\|\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2\| = \begin{pmatrix}1 & 5 & 2 & 1\\ 2 & 6 & 5 & -2\\ 3 & 7 & 3 & 0\\ 4 & 8 & 0 & 3\end{pmatrix} \xrightarrow{\text{г.-ж.}} \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -\frac{3}{4}\\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{4}\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}. \qquad (*)$$

Итак, базисом в $P + Q$ могут служить векторы $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$, $\boldsymbol{q}_1$. Для нахождения базиса в $P \cap Q$ требуется решить систему, состоящую из уравнений, определяющих подпространство P, и уравнений, определяющих подпространство Q (вычисления опущены):

$$\left\|\begin{matrix}\widehat{P}\\ \widehat{Q}\end{matrix}\right\| = \begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & 0\\ 2 & -3 & 0 & 1\\ 8 & -5 & 3 & -6\\ -11 & 8 & -6 & 9\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{системы}]{\text{решение}} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Таким образом, $P \cap Q = L(\boldsymbol{x})$.

Пересечение подпространств можно найти иначе. Из $(*)$ следует, что $\boldsymbol{q}_2 \in L(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{q}_1)$, а именно, $\boldsymbol{q}_2 = -\frac{3}{4}\boldsymbol{p}_1 + \frac{3}{4}\boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{q}_1$, так что

$$\boldsymbol{y} = \underbrace{\boldsymbol{q}_2 + \boldsymbol{q}_1}_{\in Q} = \underbrace{-\frac{3}{4}\boldsymbol{p}_1 + \frac{3}{4}\boldsymbol{p}_2}_{\in P} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3\boldsymbol{x} \in P \cap Q$$

и поэтому $P \cap Q = L(\boldsymbol{x}) = L(\boldsymbol{y})$.

Пример 3.5. В трёхмерном вещественном векторном пространстве V заданы два базиса $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ и $\boldsymbol{e}_{1'}, \boldsymbol{e}_{2'}, \boldsymbol{e}_{3'}$, связанные следующим образом:

$$\boldsymbol{e}_{1'} = \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 + 3\boldsymbol{e}_3, \quad \boldsymbol{e}_{2'} = -2\boldsymbol{e}_1 - 3\boldsymbol{e}_2 - 8\boldsymbol{e}_3, \quad \boldsymbol{e}_{3'} = -3\boldsymbol{e}_1 - 4\boldsymbol{e}_2 - 12\boldsymbol{e}_3.$$

Известны столбец $X = (1; 1; 1)^T$ координат вектора $\boldsymbol{x}$ в базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ и столбец $Y' = (1; 2; -3)^T$ координат вектора $\boldsymbol{y}$ в базисе $\boldsymbol{e}_{1'}, \boldsymbol{e}_{2'}, \boldsymbol{e}_{3'}$. Найдите столбец X' координат вектора $\boldsymbol{x}$ в базисе $\boldsymbol{e}_{1'}, \boldsymbol{e}_{2'}, \boldsymbol{e}_{3'}$ и столбец Y координат вектора $\boldsymbol{y}$ в базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$.

Решение. Составим матрицу перехода от базиса $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ к базису $\boldsymbol{e}_{1'}, \boldsymbol{e}_{2'}, \boldsymbol{e}_{3'}$ и найдём обратную к ней матрицу (см. пример 2.1):

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & -3 & -4 \\ 3 & -8 & -12 \end{pmatrix}, \quad C^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 12 & -3 & -2 \\ -7 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Далее,

$$X' = C^{-1}X = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 12 & -3 & -2 \\ -7 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix};$$

$$Y = CY' = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & -3 & -4 \\ 3 & -8 & -12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 23 \end{pmatrix}.$$

Произведение $C^{-1}X$ можно найти без предварительного вычисления обратной матрицы C^{-1}, как объяснено в примере 2.2; конечно, это то же самое, что решение неоднородной системы $CX' = X$ с заданными матрицами C и X методом Гаусса—Жордана:

$$\|C, X\| = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 1 \\ 2 & -3 & -4 & 1 \\ 3 & -8 & -12 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Г.-Ж.}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right).$$

Пример 3.6. В арифметическом пространстве $\mathbb{R}^3$ заданы два базиса

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -8 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ -12 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{e}_{1'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_{2'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_{3'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Найдите матрицу перехода от первого базиса ко второму.

Решение. Составим из заданных столбцов матрицы

$$\boldsymbol{E} = \left\| \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3 \right\| = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & -3 & -4 \\ 3 & -8 & -12 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{E}' = \left\| \boldsymbol{e}_{1'}, \boldsymbol{e}_{2'}, \boldsymbol{e}_{3'} \right\| = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Формула замены базиса имеет вид $\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{E}C$, где C — матрица перехода от базиса $\boldsymbol{E} = \left\| \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3 \right\|$ к базису $\boldsymbol{E}' = \left\| \boldsymbol{e}_{1'}, \boldsymbol{e}_{2'}, \boldsymbol{e}_{3'} \right\|$. Поскольку матрицы $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{E}'$ являются квадратными числовыми матрицами, матрицу перехода можно найти по формуле $C = \boldsymbol{E}^{-1}\boldsymbol{E}'$. Замечая, что матрица $\boldsymbol{E}$ совпадает с матрицей из примера 2.1, можно воспользоваться полученным там результатом:

$$C = \boldsymbol{E}^{-1}\boldsymbol{E}' = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & -3 & -4 \\ 3 & -8 & -12 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 12 & -3 & -2 \\ -7 & 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & -3 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Задачи для самостоятельного решения

3.1 (см. задачу 1.1). (а) Убедитесь, что заданные многочлены $\boldsymbol{e}_1(t)$, $\boldsymbol{e}_2(t)$, $\boldsymbol{e}_3(t)$ образуют базис в пространстве $\mathbb{R}[t]_3$ многочленов степени $\leqslant 3$, и разложите многочлен $\boldsymbol{x}(t)$ по этому базису: $\boldsymbol{e}_1(t) = 2 - t - 3t^2$, $\boldsymbol{e}_2(t) = 1 + 2t - t^2$, $\boldsymbol{e}_3 = -3 + 5t + 4t^2$, $\boldsymbol{x}(t) = 8 - 5t - 11t^2$.

(б) Убедитесь, что заданные матрицы A_1, A_2, A_3 образуют базис в пространстве $S\mathbb{R}^{2\times 2}$ симметричных (2×2)-матриц, и разложите матрицу X по этому базису:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \; A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}, \; A_3 = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}, \; X = \begin{pmatrix} 17 & 6 \\ 6 & -9 \end{pmatrix}.$$

3.2 (см. задачу 1.2)**.** (а) В линейной оболочке заданных матриц M_k, $k=1,\ldots,6$, найдите базис и разложите каждую из этих матриц по найденному базису:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} -2 & 12 \\ 5 & -15 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} -7 & 39 \\ 16 & -48 \end{pmatrix},$$

$$M_4 = \begin{pmatrix} -5 & 30 \\ 12 & -38 \end{pmatrix}, \quad M_5 = \begin{pmatrix} -6 & 37 \\ 15 & -47 \end{pmatrix}, \quad M_6 = \begin{pmatrix} -10 & 59 \\ 24 & -74 \end{pmatrix}.$$

(б) В линейной оболочке многочленов $\boldsymbol{x}_k(t)$, $k=1,\ldots,6$, найдите базис и разложите каждый из этих многочленов по найденному базису:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{x}_1(t) = 1+3t+2t^2-t^3, && \boldsymbol{x}_2(t) = 1+4t-t^2-2t^3, \\ &\boldsymbol{x}_3(t) = -1-5t+4t^2+3t^3, && \boldsymbol{x}_4(t) = 1+6t-7t^2-4t^3, \\ &\boldsymbol{x}_5(t) = 1+7t-10t^2-5t^3, && \boldsymbol{x}_6(t) = 1+8t-13t^2-6t^3. \end{aligned}$$

3.3. В пространстве $\mathbb{R}[t]_4$ многочленов степени $\leqslant 4$ заданы элементы $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4, \boldsymbol{a}_5$. Найдите базис в линейной оболочке $L(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4, \boldsymbol{a}_5)$, дополните его векторами $\boldsymbol{e}_0 = 1$, $\boldsymbol{e}_1 = t$, $\boldsymbol{e}_2 = t^2$, $\boldsymbol{e}_3 = t^3$, $\boldsymbol{e}_4 = t^4$ стандартного базиса пространства $\mathbb{R}[t]_4$ до базиса пространства $\mathbb{R}[t]_4$ и разложите векторы стандартного базиса по построенному базису:

$$\boldsymbol{a}_1 = (t-1)^4, \; \boldsymbol{a}_2 = t(t-1)^3, \; \boldsymbol{a}_3 = (t-1)^3, \; \boldsymbol{a}_4 = t(t-1)^2, \; \boldsymbol{a}_5 = (t-1)^2.$$

3.4 (см. задачу 2.2)**.** (а) В векторном пространстве $\mathbb{R}[t]_{\leqslant 2}$ вещественных многочленов степени $\leqslant 2$ заданы два базиса:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{e}_1(t) = 2+t, && \boldsymbol{e}_2(t) = 2+t+t^2, && \boldsymbol{e}_3(t) = 1+t^2, \\ &\boldsymbol{e}_{1'}(t) = 1+t, && \boldsymbol{e}_{2'}(t) = 1+2t+t^2, && \boldsymbol{e}_{3'}(t) = 1+t+t^2. \end{aligned}$$

Найдите матрицу перехода от первого базиса ко второму.

(б) В векторном пространстве $A\mathbb{R}^{3\times 3}$ вещественных кососимметричных матриц третьего порядка заданы два базиса:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \; A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_{1'} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A_{2'} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, A_{3'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найдите матрицу перехода от первого базиса ко второму.

3.5. В арифметическом пространстве $\mathbb{R}^6$ подпространство Q задано как множество решений однородной системы, основной матрицей которой является

(а) матрица из задачи 1.2(а);

(б) матрица из задачи 1.2(б).

Найдите базис в подпространстве Q.

3.6. В арифметическом пространстве $\mathbb{R}^6$ заданы подпространства P и Q:

(а) P — линейная оболочка столбцов X_1, X_2 из задачи 1.5(а), Q — подпространство из задачи 3.5(а);

(б) P — линейная оболочка столбцов Y_1, Y_2 из задачи 1.5(б), Q — подпространство из задачи 3.5(б).

Найдите размерность и базис суммы $P + Q$ и пересечения $P \cap Q$ указанных подпространств.

Указания и ответы

1.1. (а) $(2; 1; -1)$; (б) $(1; 2; 3)$.

1.2. Преобразованные матрицы:

$$\text{(а)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \text{(б)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.3. ФСР системы: (а) $\boldsymbol{p}_1 = (3; -2; 1; 0; 0; 0)^T$, $\boldsymbol{p}_2 = (-1; -1; 0; -1; 1; 0)^T$, $\boldsymbol{p}_3 = (1; -2; 0; -1; 0; 1)^T$; (б) $\boldsymbol{p}_1 = (-1; 2; 1; 0; 0; 0)^T$, $\boldsymbol{p}_2 = (2; -3; 0; 1; 0; 0)^T$, $\boldsymbol{p}_3 = (3; -4; 0; 0; 1; 0)^T$, $\boldsymbol{p}_4 = (4; -5; 0; 0; 0; 1)^T$.

1.4. Первая система несовместна, вторая имеет общее решение

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \\ x^5 \end{pmatrix} = c^1 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c^2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

1.5. Матрица системы

$$\text{(а)} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{(б)} \begin{pmatrix} -3 & -1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ -3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

2.1.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}, \quad D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 3 & -5 & -2 \end{pmatrix}.$$

2.2.

$$A^{-1}B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix}, \quad BA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B^{-1}A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad AB^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.3.

$$\text{(а)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}; \text{ (б)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2.4. (а) 6; (б) 36; (в) 0.

2.5. Указания: (а) последний столбец вычесть из всех остальных; (в) из каждой строки, начиная с последней, вычесть предыдущую; (г) прибавить к первой строке все остальные строки.

Ответы: (а) $(-1)^{n-1}n!$; (б) $b_1b_2\dots b_{n-1}$;

(в) $x_1(x_2-a_{12})(x_3-a_{23})\dots(x_n-a_{n,n-1})$; (г) $[a+(n-1)b](a-b)^{n-1}$.

3.1. (а) $\boldsymbol{x}(t) = 2\boldsymbol{e}_1(t) + \boldsymbol{e}_2(t) - \boldsymbol{e}_3(t)$; (б) $X = A_1 + 2A_2 + 3A_3$.

3.2. (а) M_1, M_2, M_4 линейно независимы; $M_3 = -3M_1 + 2M_2$; $M_5 = M_1 + M_2 + M_4$; $M_6 = -M_1 + 2M_2 + M_4$.

(б) $\boldsymbol{x}_1(t)$, $\boldsymbol{x}_2(t)$ линейно независимы; $\boldsymbol{x}_3(t) = \boldsymbol{x}_1(t) - 2\boldsymbol{x}_2(t)$, $\boldsymbol{x}_4(t) = -2\boldsymbol{x}_1(t) + 3\boldsymbol{x}_2(t)$, $\boldsymbol{x}_5(t) = -3\boldsymbol{x}_1(t) + 4\boldsymbol{x}_2(t)$, $\boldsymbol{x}_6(t) = -4\boldsymbol{x}_1(t) + 5\boldsymbol{x}_2(t)$.

3.3. Базис в линейной оболочке $L(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4, \boldsymbol{a}_5)$ образуют $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_4$; $\boldsymbol{a}_3 = -\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2$; $\boldsymbol{a}_5 = \boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_4$. Базис в $\mathbb{R}[t]_4$ образуют векторы $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_4$, $\boldsymbol{e}_0$, $\boldsymbol{e}_1$, при этом $\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_4 - \boldsymbol{e}_0 + 2\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3 = 2\boldsymbol{a}_1 - 2\boldsymbol{a}_2 + 3\boldsymbol{a}_4 - 2\boldsymbol{e}_0 + 3\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_4 = 3\boldsymbol{a}_1 - 2\boldsymbol{a}_2 + 6\boldsymbol{a}_4 - 3\boldsymbol{e}_0 + 4\boldsymbol{e}_2$.

3.4.

$$\text{(а)} \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \text{(б)} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

3.5.

$$\text{(а)} \quad \boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{p}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$(б)\quad \boldsymbol{q}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{q}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{q}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{q}_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3.6. В обозначениях условия задачи 1.5 и ответа к задаче 3.5:
(а) $P + Q = L(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3, X_2) = L(X_1, X_2, \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2)$; $P \cap Q = L(X_1)$;
(б) $P + Q = L(\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \boldsymbol{q}_3, \boldsymbol{q}_4, Y_1) = L(Y_1, Y_2, \boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \boldsymbol{q}_3)$;
$P \cap Q = L\big((2; -2; 1; 1; -1; 1)^T\big)$.