Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова



Актуальные проблемы электродинамики

имени А. Г. Свешникова – 2026

международная конференция

Москва – 17 – 18 ноября 2026г.
Сборник тезисов докладов: часть 2

Москва 2026

Международная конференция,
«Актуальные проблемы электродинамики имени А.Г. Свешникова – 2026»
Сборник тезисов
Под редакцией
д.ф.-м.н. Боголюбова А.Н., д.ф.-м.н. Быкова А.А., к.ф.-м.н. Ерохина А.И., к.ф.-м.н. Коняева Д.А., к.ф.-м.н. Минаева Д.В, д.ф.-м.н. Михайлова Е.А. к.ф.-м.н. Мухартовой Ю.В. и к.ф.-м.н. Шапкиной Н.Е.

17 – 18 ноября 2026 г. Физический факультет.
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Программный комитет:

1.	Боголюбов А.Н. (председатель)	д. ф.-м. н., профессор, зав. отделением прикладной математики, физический факультет МГУ
2.	Бородачев Л.В.	д. ф.-м. н., доцент, физический факультет МГУ
3.	Быков А. А.	д. ф.-м. н., профессор, физический факультет МГУ
4.	Еремин Ю.А.	д. ф.-м. н., в.н.с., ВМиК
5.	Малых М. Д.	д. ф.-м. н., зав. кафедрой математического моделирования и искусственного интеллекта, РУДН им. П. Лумумбы
6.	Михайлов Е. А.	д. ф.-м. н., профессор, физический факультет МГУ
7.	Соколов Д.Д.	д. ф.-м. н., профессор, и.о. зав. кафедрой математики, физический факультет МГУ
8.	Поляков П.А.	д. ф.-м. н., профессор, физический факультет МГУ
9.	Тихонравов А.В. (зам. председателя)	д. ф.-м. н., профессор, научный руководитель НИВЦ МГУ

Организационный комитет:

1.	Белокуров В.В. (председатель)	профессор, декан физического факультета МГУ
2.	Коняев Д.А. (зам. председателя)	с.н.с. физического факультета МГУ
3.	Шапкина Н.Е. (зам. председателя)	доцент физического факультета МГУ
4.	Боголюбов Н.А.	н.с. физического факультета МГУ
5.	Волков В.Т.	доцент физического факультета МГУ
6.	Ерохин А.И.	с.н.с. физического факультета МГУ
7.	Минаев Д.В.	доцент физического факультета МГУ
8.	Могилевский И.Е.	доцент физического факультета МГУ
9.	Мухартова Ю.В.	доцент физического факультета МГУ
10.	Петухов А.А.	вед. программист физического факультета МГУ
11.	Хлебников Ф.Б. (секретарь)	вед. программист физического факультета МГУ
12.	Шушарин М.М.	м.н.с. физического факультета МГУ

Страница конференции: https://math.phys.msu.ru/sveshnikov-2026

© Физический факультет МГУ, 2026
© Кафедра математики

Теоретическая и экспериментальная электродинамика

Сохранение энергии в безызлучательной модели разреженной плазмы

Conservation of Energy in the Nonradiant Model of a Rarefied Plasma

Бородачев Л.В.

Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова, физический факультет, Москва, РФ.

borodach2000@mail.ru

Аннотация. На основе масштабного анализа получены оценки порядка малости внутренних электромагнитных полей модели Власова - Дарвина и показана корректность аналитического вида закона сохранения энергии в самосогласованной дарвиновской системе.

Введение

Использование самосогласованного подхода [1], учитывающего взаимозависимое влияние фазового распределения заряженных частиц и внутренних электромагнитных полей, в дискретном кинетическом моделировании неравновесных состояний разреженной плазмы обусловлено, как известно, его высокой эффективностью.

В общем случае полевая часть самосогласованного формализма описывается уравнениями Максвелла, представляющими весь спектр электромагнитных полей плазмы. Однако для низкочастотных процессов свободные поля малозначимы, ибо в сравнении с самосогласованными характеризуются незначительными масштабами и величинами. Очевидно, что в этом случае численный анализ в рамках полного электромагнитного представления оказывается излишне подробным и дорогостоящим.

Оптимальным решением вопроса, по-видимому, является дарвиновское (безызлучательное) описание полевой части плазменной модели. Сохраняя индукционные эффекты, оно оперирует текущими значениями внутренних электромагнитных полей, что обеспечивает вычислительную экономичность всего самосогласованного формализма.

Приближение Дарвина

Исторически основная цель Дж. Дарвина, состояла в получении как можно более точной функции Лагранжа для системы частиц и полей с мгновенным дальнодействием. Как оказалось, при сравнительной малости отношения тепловой скорости (v) к скорости света (c) такую систему удается описать через незапаздывающие потенциалы лагранжианом взаимодействия, точным до величин порядка $(v/c)^2$. Поэтому, структурно отвечая понятию слабого релятивизма, дарвинский лагранжиан не включает тормозное излучение зарядов, представляемое членами третьего порядка малости в разложении по параметру $(v/c) \ll 1$ полной лагранжевой функции [2].

Вводя известные выражения электрического (E) и магнитного (B) полей через скалярный и векторный потенциалы, легко получить аналитическое представление дарвиновского приближения. В системе СГСЕ оно имеют вид

$$\nabla \boldsymbol{E} = 4\pi\rho\,, \tag{1}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\,, \tag{2}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}_p}{\partial t}\,, \tag{3}$$

$$\nabla \boldsymbol{B} = 0\,, \tag{4}$$

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_p + \boldsymbol{E}_v : \nabla \times \boldsymbol{E}_p = 0\,, \nabla \boldsymbol{E}_v = 0\,. \tag{5}$$

Здесь $\boldsymbol{E}_p, \boldsymbol{E}_v$ — соответственно потенциальная (продольная) и вихревая (поперечная) составляющие электрического поля (разложение Гельмгольца).
При этом уравнение непрерывности заряда имеет модифицированный вид:

$$\nabla \boldsymbol{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = \nabla \boldsymbol{J} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{4\pi}(\nabla \boldsymbol{E}_p)\right) = 0\,. \tag{6}$$

Как легко видеть, данное описание отличается от максвелловского лишь опущенной поперечной составляющей тока смещения. Это формальное на первый взгляд отличие имеет весьма важные следствия, в частности, выражающиеся в нетривиальной форме закона сохранения энергии, имеющей в случае замкнутой системы вид [3]:

$$\int_V \sum_\alpha \frac{(nmv^2)_\alpha}{2}\, d\omega + \int_V \frac{(E_p^2 + B^2)}{8\pi}\, d\omega = const, \tag{7}$$

где $\alpha = i, e$ – ионная и электронная (соответствующей плотности n) компоненты плазмы, а V – объем рассматриваемой области.

Таким образом, наблюдается парадоксальная ситуация, при которой активно действующая в рамках самосогласованной безызлучательной модели вихревая составляющая электрического поля (E_v) в энергетическом балансе не участвует.

С позиций физической корректности дарвиновского приближения полей этот момент требует определенного обоснования, что и является целью настоящей работы.

Масштабный анализ безызлучательного формализма

Будем полагать, что значимые изменения основных величин исходной системы уравнений (1) – (6) происходят в характерных масштабах ($L = \lambda_{De}, T = \omega_{pe}$). Тогда усредненные значения $|\nabla \times \vec{u}|$ или $|\nabla \vec{u}|$ можно оценить как (u/L), а усредненное значение $|\,\partial \vec{u}/\,\partial t|$ – как (u/T). При этом величину L/T естественно считать характерной скоростью (v), роль которой в этом случае играет тепловая скорость электронов (v_{Te}).

Сопоставляя в рамках этого подхода различные члены дарвиновского представления, удается оценить порядки малости его полевых компонент по базовому параметру (v/c):

$$E_p = O(1), B = O(v/c), E_v = O(v/c)^2. \tag{8}$$

Отсюда соответствующая оценка $(E_v)^2$ дает $(v/c)^4$ и в рамках безызлучательной аппроксимации полного лагранжиана взаимодействия вклад вихревой составляющей электрического поля (E_v) в энергетический баланс в сравнении с вкладами других полевых компонент (B и E_p) оказывается по порядку отношения скоростей (v/c) малой величиной, что и позволяет безболезненно ее опустить.

Заключение

Проведенный анализ подтверждает справедливость аналитического вида закона сохранения энергии (7) и в этом аспекте снимает вопрос физической корректности полевого дарвиновского описания в рамках самосогласованной модели разреженной плазмы.

Литература

1. *А. А. Власов* Теория многих частиц. М.- Л.: ГИТТЛ, 1950. — 348 с.
2. *G.H. Darwin* // Philosophical Magazine. — 1920. — V. 39. — P. 537-551.
3. *Л. В. Бородачев* Дискретное моделирование низкочастотных процессов в плазме. Автореферат на соискание ученой степени доктора физ.-мат. наук. — Физический факультет МГУ Москва, 2012. — 35 с.

Применение метода Гамильтона-Якоби в теории псевдопараболических уравнений с малым параметром

Application of the Hamilton-Jacobi Method to the Theory of Pseudoparabolic Equations with a Small Parameter

А. А. Быков, Гань Цинчжао

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет,

кафедра математики. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.

abykovmsu@mail.ru

Введение

Под руководством профессора А.Г.Свешникова был выполнен большой цикл работ по исследованию свойств уравнений соболевского типа [1]. В настоящей работе рассматривается трёхмерная начально-краевая задача для обобщённого уравнения Колмогорова–Петровского–Пискунова (***ОКПП***) в неоднородной среде. Мы обобщаем известные свойства решений уравнения Реакции–Адвекции–Диффузии (***РАД***) на уравнение ОКПП, которое характерно наличием слагаемого, пропорционального $(\Delta u)_t$, т.е. производной по времени от лапласиана. Мы покажем, что асимптотический ряд можно построить, используя методы, применяющиеся для решения уравнения ***Гамильтона–Якоби.*** Потенциал гамильтониана вычисляется как функционал от плотности источников (***ФПИ***). Найдена скорость перемещения внутреннего переходного слоя (***ВПС***) в нулевом порядке. Показано, что ВПС эволюционирует так же, как поверхность постоянного эйконала для задачи распространения волн в неоднородной среде. В первом порядке асимптотического ряда скорость перемещения ВПС определяется градиентом плотности источников и кривизной ВПС. Дано обоснование.

Обобщенное уравнение КПП возникает в некоторых задачах теории полупроводников [2]. В трёхмерном случае в безразмерных координатах имеет вид $\frac{\partial}{\partial t}(\Delta u - u) + \alpha \Delta u - u + \beta u^2 = 0$, граничные и начальные условия $u|_{\partial D} = 0$, $u(x,0) = u_0(x)$, где $\alpha > 0$, $D \subset \mathbb{R}^3$. В [1] рассматривались также начально краевые задачи для уравнений $\frac{\partial}{\partial t}(\Delta u - u) = \Delta_p u$, $\frac{\partial}{\partial t}(\Delta u - u) + u(\boldsymbol{V}, \nabla u) = \Delta_4 u$ и другие с соответствующими начальными и граничными условиями, методы и результаты переносятся такеже и на эти классы уравнений.

Уравнение ОКПП с малым параметром

Рассматриваемое в настоящей работе уравнение ОКПП содержит малый параметр при адвекционном и диффузионном слагаемых, а также при производной по времени от лапласиана. Это приводит к существования решений типа контрастной структуры (***КС***), для которого характерны ВПС (узкие области с большим градиентом поля), разделяющие большие области с малым градиентом (пятна КС). Мы выберем такие значения показателя степени при малом параметре в различных слагаемых уравнения ОКПП, при которых эффекты классической диффузии Δu и обобщенного диффузионного члена $(\Delta u)_t$ будут равного порядка:
$(\varepsilon u - \varepsilon^3 \mu \Delta u)_t + \varepsilon^2 \boldsymbol{V} \nabla u = \varepsilon^2 \nabla(\kappa \nabla u) - f(u, \boldsymbol{r})$.

Предположим, что выполнены следующие условия, накладываемые на ФПИ $f(u, \boldsymbol{r})$:

У1. ФПИ есть гладкая функция в области $\vec{r} \in D$, $u \in (-\infty, +\infty)$.

У2. В области D имеется ровно три поверхности равновесия $S_{1,2,3}$: $u = \phi_{1,2,3}(\boldsymbol{r})$, причём $\phi_1(\boldsymbol{r}) < \phi_2(\boldsymbol{r}) < \phi_3(\boldsymbol{r})$ в D, все $S_{1;2;3}$ гладкие.

У3. В окрестности $\Omega(S_j)$ поверхности равновесия S_j, $j \in \{1,2,3\}$, ФПИ представляется в виде $f(u, \boldsymbol{r}) = F_j(u - \phi_j(\boldsymbol{r}), \boldsymbol{r})$, причём $F_j(\omega, \boldsymbol{r})|_{\omega=0} = 0$,

$(F_{1,3}(\omega,\boldsymbol{r}))'_{\omega}|_{\omega=0} > 0,\ (F_2(\omega,\boldsymbol{r}))'_{\omega}|_{\omega=0} < 0$. Здесь $\Omega(\dots)$ есть окрестность указанного объекта.

Назовем величиной дисбаланса функцию

$$J(\vec{r}) = \int\limits_{\varphi_1(\boldsymbol{r})}^{\varphi_3(\boldsymbol{r})} f(u,\boldsymbol{r})du$$

У4. *Всюду внутри D верно условие знакоопределенности дисбаланса:* $J(\boldsymbol{r}) > 0$.

У5. *Пусть стартовая поверхность ВПС:* Υ_{start} *– есть замкнутая выпуклая гладкая, для которой существует покрытие открытыми гладкими частями, каждая из которых задана в параметрической форме:* $\boldsymbol{r}_j(\Theta) = \boldsymbol{r}_{j.start}(\Theta)$, $\Theta \in \Phi_j$, $\boldsymbol{r}_j(\Theta)$*–дважды непрерывно дифференцируемые,* $||[\boldsymbol{r}'_{\theta_1}, \boldsymbol{r}'_{\theta_2}]|| > 0$.

Одномерное уравнение ОКПП

Сначала рассмотрим одномерное уравнение ОКПП:

$\varepsilon u_t - \varepsilon^3 \mu u_{xxt} = \varepsilon^2 \kappa u_{xx} - f(u,x)$,

$a < x < b,\ 0 < t < T,\ u_x(a,t,\varepsilon) = 0,\ u_x(b,t,\varepsilon) = 0,\ u(x,0,\varepsilon) = u^{(0)}(x,\varepsilon),\ u(x,t,\varepsilon) \in C^2(G) \cap C(\bar{G}),\ G = (a,b) \times (0,T),\ \mu > 0,\ k > 0$. Нам понадобятся некоторые свойства одномерного уравнения ОКПП. Будем называть "точкой перехода" координату $x^\star(t,\varepsilon)$, для которой $u(x^\star,t,\varepsilon) = \phi^{(\star)}(x^\star(t,\varepsilon))$. Используем для построения асимптотического ряда методику, разработанную в [4] для уравнения РАД. Частичную сумму асимптотического ряда -го порядка справа и слева от точки перехода представим в виде

$u^{(m\pm)}(x,t,\varepsilon) = \bar{u}^{(m\pm)}(x,t,\varepsilon) + Q^{(m\pm)}(\xi,t,\varepsilon)$,

где $\bar{u}^{(m\pm)}(x,t,\varepsilon)$–регулярная часть, $Q^{(m\pm)}(\xi,t,\varepsilon)$ – функции переходного слоя, ξ – растянутая переменная: $\xi = \frac{x - x^\star(t,\varepsilon)}{\varepsilon}$. Далее найдём

$$\bar{u}^{(m\pm)}(x,t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{m} \varepsilon^k \bar{u}_k^{(\pm)}(x,t)\,, Q^{(m\pm)}(\xi,t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{m} \varepsilon^k Q_k^{(\pm)}(\xi,t).$$

Пусть $f(u,x,\varepsilon) = \bar{f}(x,\varepsilon) + Qf(\xi,\varepsilon) + \Pi f(\zeta,\varepsilon)$, где $\bar{f}(x,\varepsilon) = f(\bar{u}(x,\varepsilon),x,\varepsilon)$. Функции переходного слоя найдём из краевой задачи для уравнения

$$\left(\varepsilon\frac{\partial}{\partial t} - \frac{dx^\star}{dt}\frac{\partial}{\partial \xi} - \varepsilon\mu\frac{\partial^3}{\partial \xi^2 \partial t} + \mu\frac{dx^\star}{dt}\frac{\partial^3}{\partial \xi^3} - k\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\right) Q(\xi,t,\varepsilon) = -Qf(\xi,t,\varepsilon).$$

Здесь $Qf(\xi,t,\varepsilon) = f(\bar{u}(x(\xi),\varepsilon) + Q(\xi,t,\varepsilon),x(\xi)) - f(\bar{u}(x(\xi),\varepsilon),x(\xi))$. Введем оператор $D\phi(\xi) = \phi\left(\tilde{u}^{(\pm)}(\xi),x^\star\right) - \phi\left(\bar{u}_0^{(\pm)}(x^\star),x^\star\right)$, где $\tilde{u}^{(\pm)}(\xi) \equiv \varphi^{(-)}(x^\star) + Q_0^{(-)}(\xi)$ при $\xi \le 0$, $\tilde{u}^{(\pm)}(\xi) \equiv \varphi^{(+)}(x^\star) + Q_0^{(+)}(\xi)$ при $\xi \ge 0$. Обозначим

$$\mathcal{H}_1^{(\pm)}[\varphi^{(\pm)}] = \pm\int\limits_0^{\pm\infty} Q_{0\xi}^{(\pm)}(\xi)\varphi^{(\pm)}(\xi)d\xi\,, \mathcal{H}_2^{(\pm)}[\varphi^{(\pm)}] = \pm\int\limits_0^{\pm\infty} Q_{0\xi\xi}^{(\pm)}(\xi)\varphi^{(\pm)}(\xi)d\xi,$$

$\mathcal{H}_{1,2}[\varphi^{(\pm)}] = \mathcal{H}_{1,2}^{(-)}[\varphi^{(-)}] + \mathcal{H}_{1,2}^{(+)}[\varphi^{(+)}]$. Теперь найдем скорость дрейфа нулевого порядка $W^{(0\star)}(x^\star)$:

$$W^{(0\star)}(x^\star) = \frac{\mathcal{H}_1\left[Df^{(\pm)}\right]}{\| Q_{0\xi}^{(\pm)} \|^2 + \mu \| Q_{0\xi\xi}^{(\pm)} \|^2}.$$

Криволинейные координаты, связанные с фронтом КС

Запишем положение многообразия фронта КС в параметрах Θ и $\hat{t}$, т.е. $\hat{x}(\Theta) = x(\hat{t},\Theta),\ \hat{y}(\Theta) = y(\hat{t},\Theta),\ \hat{z}(\Theta) = z(\hat{t},\Theta)$. В каждой точке (Θ,t) на нормали $\vec{n}(\Theta,\hat{t})$ многообразия $\widehat{\Upsilon}$ введем координату s такую, что $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ на нормали $\boldsymbol{n}$ и $s = \hat{s}$ на $\widehat{\Upsilon}$. Выполним замену переменных $s = \hat{s} + \varepsilon\chi,\ \Theta = \hat{\Theta} + \Lambda,\ t = \hat{t} + \varepsilon\tau$. $\Lambda = (\eta_1,\eta_2)$. Получим уравнение

$$u'_\tau + \varepsilon\frac{1}{\sqrt{q}}\langle \boldsymbol{V}, [\boldsymbol{R}_2, \boldsymbol{R}_3]\rangle u'_\chi + \varepsilon^2\frac{1}{\sqrt{q}}\langle \boldsymbol{V}, [\boldsymbol{R}_3, \boldsymbol{R}_1]\rangle u'_{\eta_1} + \varepsilon^2\frac{1}{\sqrt{q}}\langle \boldsymbol{V}, [\boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_2]\rangle u'_{\eta_2} =$$
$$= \kappa u''_{\chi\chi} + \varepsilon\kappa\frac{1}{\sqrt{q}}\frac{\partial\sqrt{q}}{\partial s}u'_\chi + \varepsilon^2\kappa\left(\frac{1}{\sqrt{q}}\frac{\partial\left(\sqrt{q}q^{2j}\right)}{\partial x^j}u'_{\eta_1} + \frac{1}{\sqrt{q}}\frac{\partial\left(\sqrt{q}q^{3j}\right)}{\partial x^j}u'_{\eta_2}\right) +$$
$$+ \varepsilon^2\kappa\left(q^{22}u''_{\eta_1\eta_1} + 2q^{23}u''_{\eta_1\eta_2} + q^{33}u''_{\eta_2\eta_2}\right) - f\left(u, \hat{s} + \varepsilon\chi, \hat{\Theta} + \Lambda\right).$$

Теперь разложим по степеням малого параметра и убедимся в том, что в нулевом порядке нормальная скорость дрейфа ВПС совпадает со скоростью W_0, найденной для рассмотренной ранее одномерной модели. Далее используем найденную ранее скорость W_0, направляя координату x по нормали в поверхности фронта. Значение $x^\star$ будет равно нормальной координате точки пересечения с поверхностью фронта. Пусть векторная функция $\boldsymbol{r}_0(t,\Theta)$, $\Theta = (\theta_1, \theta_2)$, $\boldsymbol{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$, есть решение задачи Коши $(*)\ \frac{d\boldsymbol{r}_0}{dt} = \boldsymbol{n}(\boldsymbol{r}_0)\cdot W_0(\boldsymbol{r}_0)$, $\boldsymbol{r}_0(t_0,\Theta) = \boldsymbol{r}_{start}(\Theta)$, где $\boldsymbol{r}_{start}(\Theta)$ – точка на Υ_{start}, $W_0(\boldsymbol{r})$ – найденная ранее скорость перемещения поверхности ВПС $\Upsilon_0(t)$ в направлении нормали в точке $\boldsymbol{r}_0(t,\Theta)$, $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r}) = [\boldsymbol{r}'_{\theta_1}, \boldsymbol{r}'_{\theta_2}]/|[\boldsymbol{r}'_{\theta_1}, \boldsymbol{r}'_{\theta_2}]|$.

Уравнения Гамильтона для контрастной структуры. Используя для доказательства теорию Гамильтона–Якоби [3], мы покажем, что законы эволюции ВПС совпадают с законами распространения волнового фронта вплоть до момента появления первой особой точки или до первой точки самоналожения.

Теорема 1. *Пусть выполнены* **У1-5**. *Тогда найдется промежуток* $t \in [t_0, t_1)$, $t_1 > t_0$, *такой, что (1) семейство задач Коши* $(*)$ *однозначно разрешимо на* $[t_0, t_1)$, *при каждом* Θ *кривая* $C_0(\Theta)$ *гладкая, (2) при каждом* $t \in [t_0, t_1)$ *поверхность* $\Upsilon_0(t)$ *гладкая, замкнутая, без особых точек. (3) В некоторой окрестности поверхности* $\Upsilon_0(t)$ *отображение* $(t,\Theta) \leftrightarrow (\boldsymbol{r})$ *является диффеоморфизмом.*

□ Рассмотрим уравнение эйконала: $|\nabla S|^2 = W_0^{-2}(\boldsymbol{r})$. Определим функцию Гамильтона следующим образом: $H(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p}) = |\vec{p}|^2 - W_0^{-2}(\boldsymbol{r})$, $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2, p_3)$. Запишем семейство задач Коши для системы уравнений Гамильтона [3]: $(**)\ \frac{d\tilde{x}}{dt} = 2p_1$, $\frac{d\tilde{y}}{dt} = 2p_2$, $\frac{d\tilde{z}}{dt} = 2p_3$, $\frac{dp_1}{dt} = \frac{\partial W_0^{-2}}{\partial x}(\boldsymbol{r})$, $\frac{dp_2}{dt} = \frac{\partial W_0^{-2}}{\partial y}(\boldsymbol{r})$, $\frac{dp_3}{dt} = \frac{\partial W_0^{-2}}{\partial z}(\boldsymbol{r})$, с начальными условиями, параметризованными параметром θ: $\boldsymbol{r}(t_0,\Theta) = \vec{r}_{start}(\Theta)$, $\boldsymbol{p}_{start}(t_0) = \boldsymbol{p}_{start}(\Theta)$. Векторную функцию $\boldsymbol{p}_{start}(\Theta)$ находим как гладкое (по отношению к параметру Θ) решение уравнения $H(\boldsymbol{r}_{start}(\Theta), \boldsymbol{p}_{start}(\Theta))|_{\Upsilon_{start}} = 0$, $\boldsymbol{p}_{start}(\Theta) = p_{.start}(\Theta)\cdot\boldsymbol{n}_{start}(\Theta)$, $\vec{n}_{start}(\Theta)$ – гладкое поле внутренней нормали к Υ_{start}. Решения системы $(**)$ называют бихарактеристиками, проекцию бихарактеристики из пространства $\mathbb{R}^6$: $\{(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p})\}$ в пространство $\mathbb{R}^3$: $\{\boldsymbol{r}\}$ называют лучом. Обозначим $L(\Theta) = \{\boldsymbol{r}(t,\Theta)\}$, $t \in [t_0, t^\star)$ – луч, исходящий из точки $\vec{\tilde{r}}_{start}(\Theta)$. Значение $t^\star(\Theta)$ определяется только тем, в какой момент луч выходит на границу области, в которой определена ФПИ. Зададим начальные условия для эйконала в виде $S(\boldsymbol{r})|_{\Upsilon_{start}} = 0$. Эйконал найдем в явном виде [3]:
$S(\boldsymbol{r}) = S|_{\Upsilon_{start}} + \int_{L(t_0,t,\Theta)} < p, dx > = S_0 + \int_{L(t_0,t,\Theta)} W_0^{-1}(\boldsymbol{r})dl,$
причем точку на Υ_{start} и значение $t(\boldsymbol{r})$ следует выбрать так, чтобы $L(t_0, t, \theta_1, \theta_2)$ – часть луча $L(\theta_1, \theta_2)$, начинающегося в точке на Υ_{start}, для момента t оканчивалась в точке $\vec{r}$. Семейство поверхностей равной величины эйконала обозначим $\{\widetilde{\Upsilon}(t)\}$. Далее будем называть две параметрически заданных поверхности $\Upsilon(t)$ и $\widetilde{\Upsilon}(t)$ совпадающими, если существует гладкая замена параметризации $\Theta \leftrightarrow \tilde{\Theta}$, после выполнения которой поверхности совпадают как множества точек в $\mathbb{R}^3$. В [3] (и множестве других работ) показано, что в наших обозначениях (1) семейство поверхностей $\{\Upsilon_0(t)\}$ совпадает с семейством $\{\widetilde{\Upsilon}(t)\}$. (2) На лучах выполнены уравнения $\frac{d\boldsymbol{r}}{ds} = W_0(\vec{r})\nabla S$, $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = W_0^2(\boldsymbol{r})\nabla S$. ■

Теорема 2. *Функция* $T(\boldsymbol{r})$ *удовлетворяет уравнению эйконала с учетом диффеоморфизма* $(t,\Theta) \Leftrightarrow (\boldsymbol{r})$.

Многообразия ВПС нулевого порядка в математическом смысле проявляет свойство совпадения с многообразиями константного эйконала в задаче Гюйгенса–Френеля. Время существования гладкой поверхности ВПС нулевого порядка определяется временем достижения волновым фронтом ближайшей точки сборки или появления первой точки самоналожения.

Скорость дрейфа ВПС первого порядка

Дальнейшее разложение по степеням ε позволяет найти следующие члены асимптотического ряда. В первом порядке скорость перемещения ВПС определяется градиентом плотности источников и кривизной ВПС. Этот расчёт выходит за рамки настоящей работы.

Заключение

Мы показали, что уравнение ОКПП с малым параметром имеет решения типа КС и нашли закон эволюции фронта в нулевом порядке.

Литература

1. *Свешников А.Г., Альшин А.Б., Корпусов М.О., Плетнер Ю.Д.* Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа. Физматлит, 2007.
2. *Корпусов М.О., Свешников А.Г.* О "разрушении" за конечное время решений начально-краевых задач для уравнений псевдопараболического типа с псевдолапласианом // ЖВМиМФ, 2005. Т.45. №2. С. 272-286.
3. *Вайнберг Б.Р.* Асимптотические методы в уравнениях математический физики. М., изд-во МГУ, 1982. 295с.
4. *Нефедов. Н. Н.* Развитие методов асимптотического анализа переходных слоев в уравнениях реакции–диффузии–адвекции: теория и применение. ЖВМиМФ, 2021. Т.61. №12. С. 2074-2094.

Коррекция излучающих параметров широкополосной антенны линзой Люнеберга для определения зависимости коэффициента отражения от материалов

Correction of the Radiation Characteristics of a Broadband Antenna with a Luneburg Lens for Determining the Dependence of the Reflection Coefficient of Materials

***Гильмутдинов Р.В.*[1], Меньших Н.Л.[1], Фёдоров С.А.,[1] Поддубный Д.Ю.[1]**

Институт теоретической и прикладной электродинамики РАН, Москва, РФ.

psevduch777@gmail.com

Аннотация. Данная работа посвящена коррекции излучающих характеристик широкополосного облучателя гигагерцового диапазона частот, использующегося в качестве приемной и передающей антенн в бистатическом стенде, с помощью линзы Люнеберга. Предложенная коррекция позволяет сформировать электромагнитное поле с необходимыми характеристиками в области размещения образца материала при исследовании в широкой полосе частот. В вопросах измерения коэффициента зеркального отражения от материалов в свободном пространстве определяющим фактором погрешности являются краевые эффекты. В рамках исследования выполнено численное моделирование характеристик излучения антенны и проведен эксперимент по измерению срезов распределения поля с помощью планарного сканера. Результаты показывают возможность применения данной антенно-линзовой системы для определения параметров различных материалов, подавляя эффекты вторичной дифракции.

Введение

В современной радиофизике и антенной технике формируется тенденция широкого использования диэлектрических линз [1] в создании приемо-передающих систем с заданными характеристиками [2].

Исследования характеристик рассеяния объектов в зависимости от угла падения сталкиваются с рядом фундаментальных ограничений [3], существенно увеличивающих погрешность измерений [4].

Целями данного исследования является: формирование необходимого распределения электромагнитного поля в области позиционирования исследуемого образца при определении модуля коэффициента отражения (МКО).

Описание работы

Рассмотрена линза Люнеберга с градиентным дискретным показателем преломления материала. Численные исследования срезов поля проводились методом интегральных уравнений в программе FEKO. Рассчитанная градиентная линза была изготовлена с помощью метода 3D-печати [5]. Результаты экспериментов и численного расчета распределения поля, сформированного как антенной, так и антенно-линзовой системой, сравнивались между собой.

Линза Люнеберга. Ранее методами компьютерного моделирования [6] была исследована возможность использования линзы Люнеберга в системе антенна-линза для уменьшения методической погрешности определения значений МКО материалов [7]. Данная линза с известными материальными параметрами слоев была изготовлена методом 3D печати. Внешний слой линзы толщиной 10 мм сделан из пенополистирола. Полученная градиентная линза была вмонтирована непосредственно в облучатель - широкополосную антенну - Satimo SH2000, конструкция которой представляет антенну Вивальди.

Для модернизации системы антенна-линза выбрана только часть рабочего диапазона облучателя: от 5 до 10 ГГц.

Исследование антенны с интегрированной линзой Люнеберга. На рис. 1 изображена фотография системы антенны с установленной в нем линзой Люнеберга. Центр линзы расположен на расстоянии 160 мм вдоль оптической оси от основания антенны, что соответствует примерному размещению фазового центра антенны на поверхности линзы Люнеберга. Диаметр линзы составляет 160 мм.

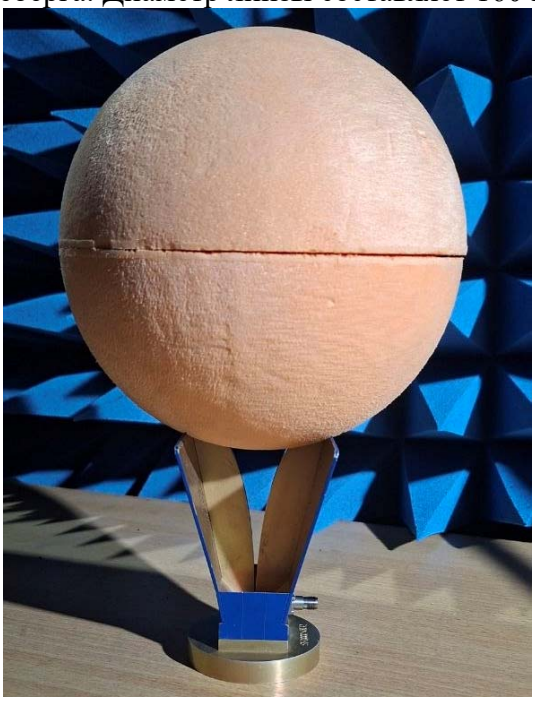
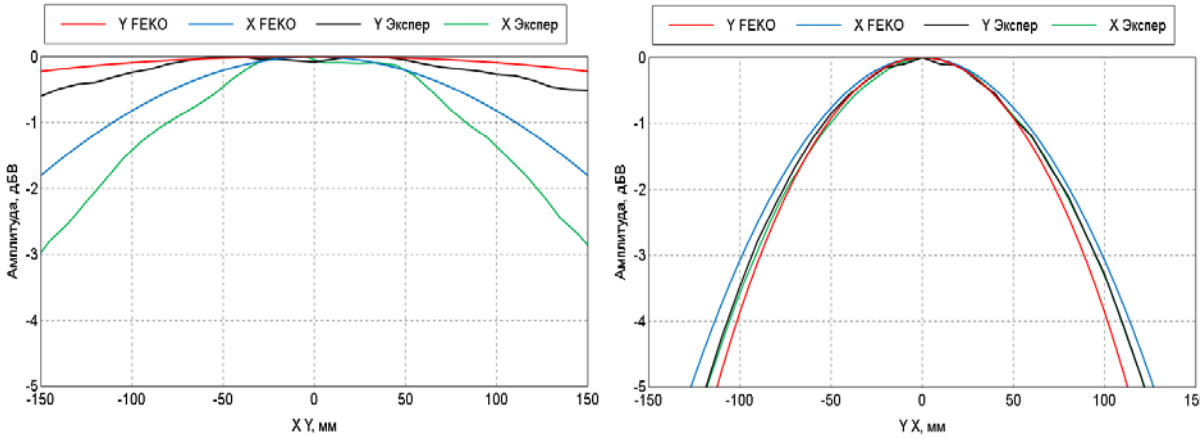


Рисунок 1. Фотография системы антенны с линзой Люнеберга

На рис. 2 изображены численные и экспериментальные амплитудные распределения срезов электромагнитного поля на частоте 5 ГГц для антенны и системы антенны с линзой Люнеберга на расстоянии 625 мм (соответствует месту установки

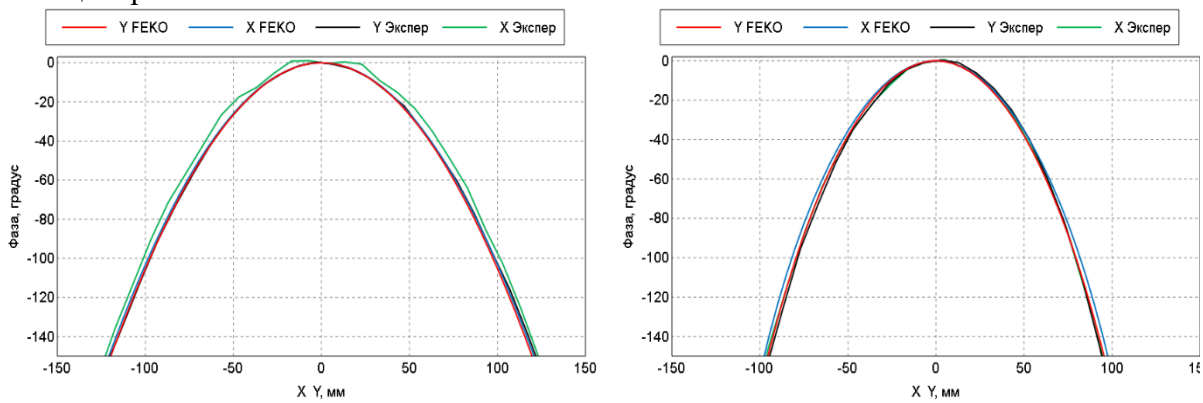
образца). На краях образца (±100 мм) амплитуда падающего поля более чем на 3 дБ ниже, чем при использовании антенны в исходном виде. Полученные результаты показывают [7] возможность уменьшения дифракционных эффектов при определении МКО квадратных образцов размером 200×200 мм.



а) Антенна б) Система антенна с линзой Люнеберга

Рисунок 2. Срезы амплитуды поля в зоне нахождения измеряемого объекта, частота 5 ГГц

На рис. 3 показаны измеренные и рассчитанные срезы фазы в плоскости-E, плоскости-H электромагнитного поля антенны и антенно-линзовой системы на частоте 10 ГГц на расстоянии 625 мм.



а) Антенна б) Система антенна с линзой Люнеберга

Рисунок 3. Срезы фазы поля в зоне нахождения измеряемого объекта, частота 10 ГГц

Полученные экспериментальные значения свидетельствуют о том, что свойства изготовленной линзы соответствуют компьютерной модели.

Заключение

Результаты численного моделирования системы формирования электромагнитного поля и экспериментальных исследований показывают, что линзовый коллиматор с облучателем в виде антенны SH2000 и линзой Люнеберга, изготовленной на 3D принтере из PLA пластика, может эффективно использоваться для измерения значений МКО плоских образцов материалов. В исследованном диапазоне частот амплитуда поля на краях образца на 3 дБ меньше, чем при использовании антенны в исходном виде.

Литература

1. *Fernandes C. A., Lima E. B., Costa, J. R.* Dielectric lens antennas. Handbook of antenna technologies. – 2016. – pp. 1001-1064.
2. *Зелкин Е. А., Петрова Р. А.* Линзовые антенны. — М.: Советское радио. — 1974.

3. *Гильмутдинов Р. В., Меньших Н. Л., Федоров С. А., Брук Л. В.* Методика обработки сигналов, позволяющая уменьшить погрешности измерений бистатических характеристик рассеяния образцов материалов // Журнал радиоэлектроники. – 2024. – №. 10. doi.org/10.30898/1684-1719.2024.10.10
4. *Gilmutdinov R. V., Menshikh N. L., Fedorov S. A.* Improving the accuracy of measurements of the bistatic scattering characteristics of material samples of various configurations. Measurement Techniques. – 2024. – V. 67. – pp. 467-476. doi.org/10.1007/s11018-024-02367-1
5. *Balabukha N. P., Baskov K. M., Kamyshanov I. V., Korolev D. P., Menshikh N. L., Poddubny D. Y.* Measuring the Distribution of Electromagnetic Field in the Quiet Zone of the Compact Range Using Reflector Based on Luneburg Lens. *2024 IEEE 9th All-Russian Microwave Conference (RMC)*, Moscow, Russian Federation, 2024, pp. 287-290, doi: 10.1109/RMC62880.2024.10846896
6. *Гильмутдинов Р.В. Меньших Н.Л., Фёдоров С.А.* Использование антенны с корректирующей линзой для измерения параметров рассеяния материалов на бистатическом стенде // Современная электродинамика. – 2024. – № 6 (14), – С. 18-27. doi:10.24412/2949-0553-2024-614-18-*27*
7. *Гильмутдинов Р. В., Меньших Н. Л., Федоров С. А.* Применение линзы Люнеберга для измерения коэффициента отражения на бистатическом стенде // Современная электродинамика. – 2025. – Т. 4, № 6(20). – С. 4-10. DOI 10.24412/2949-0553-2025-620-04-10

Радиолокационные отражения от поверхностей с экспоненциальной корреляцией высот

Radar Reflections from Surfaces with Exponential Height Correlation

***Чжао Хунли*[1], Илюшин Я.А.[1,2]**

1) Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, физический факультет, Москва, РФ; 2) Институт радиотехники и электроники В.А. Котельникова РАН, Москва, РФ.

zhao.h21@physics.msu.ru, ilyushin@phys.msu.ru

Аннотация. В работе исследуется отражение плоских волн и радиолокационных сигналов с синтезированной апертурой от статистически шероховатых поверхностей с экспоненциальной корреляционной функцией высот рельефа. Предлагаются аппроксимации корреляционной функции суммами гауссовых слагаемых, позволяющие реализовать эффективный расчетный алгоритм. Результаты сравниваются с известными асимптотическими законами диффузного отражения. Предлагаемая техника применима к широкому классу задач отражения монохроматических и импульсных полей от рельефных поверхностей.

Введение

счет отражений электромагнитных волн от шероховатых поверхностей [1, 2] является актуальной проблемой. Основной подход – приближение Кирхгофа, сводящее задачу к интегрированию по поверхности фазового экрана с функцией Грина [3]. Среди статистических моделей рельефа выделяются экспоненциальная и гауссова корреляционные функции [4–6]. Экспоненциальная модель лучше согласуется с данными радиолокации небесных тел [7], но гауссова допускает аналитическое вычисление многих интегралов. Цель работы – разработать гибридную модель, аппроксимирующую экспоненциальную корреляционную функцию суммой гауссовых слагаемых, что сохраняет достоверность и вычислительную гибкость.

Радиолокационные сечения рассеяния.

В приближении Кирхгофа сечение рассеяния на единицу площади [6]:

$$\sigma = \frac{Q^4|\Gamma|^2}{4Q_z^2} 2\int_0^\infty \rho\, d\rho\, J_0(Q_\rho \rho)\left[e^{-Q_z^2 h^2(1-C(\rho))} - e^{-Q_z^2 h^2}\right] \quad (1)$$

где $C(\rho) = \langle h(\rho')h(\rho'+\rho)\rangle$ – корреляционная функция высот. После разложения экспоненты в ряд и подстановки экспоненциальной $C(\rho) = \exp(-\rho/l)$ и гауссовой $C(\rho) = \exp(-\rho^2/l^2)$ получаем известные формулы [5, 6]:

$$\sigma = \frac{Q^4|\Gamma|^2}{4Q_z^2}\frac{2}{l} e^{-Q_z^2 h^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(Q_z^2 h^2)^n}{(n-1)!}\left[Q_\rho^2 + \frac{n^2}{l^2}\right]^{-3/2}, \quad (2)$$

$$\sigma = \frac{Q^4|\Gamma|^2}{4Q_z^2} l^2 e^{-Q_z^2 h^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(Q_z^2 h^2)^n}{n!\, n} \exp\left(-\frac{Q_\rho^2 l^2}{4n}\right). \quad (3)$$

Для обратного рассеяния ($\vec{k} = -\vec{k}_0$, $Q_z = 2k\sin\theta$) из (1) при $Q_z h \to \infty$ вытекает асимптотический закон Хагфорса [4, 7]:

$$\sigma = \frac{C|\Gamma|^2}{2(\cos^4\theta + C\sin^2\theta)^{3/2}}, C = \frac{(kl)^2}{4(kh)^4}. \quad (4)$$

Гауссовские аппроксимации

Аппроксимируем $C(\rho) = \exp(-\rho/l)$ суммой M гауссов:

$$C(\rho) \approx \sum_{m=1}^{M} b_m \exp\left(-\frac{\rho^2}{a_m^2 l^2}\right). \quad (5)$$

Параметры a_m, b_m найдены численно методом наименьших квадратов (минимизация невязки $\int_0^\infty [\,\cdot\,]^2 dr$) и приведены в таблице 1.

Таблица 1. Параметры аппроксимации (5)

M	1	2	3	4	5	6
a_m	1.31	0.5522	0.27176	0.146831	0.0845654	0.05105718
		1.911	0.94494	0.511386	0.2946648	0.17793337
			2.320377	1.256645	0.7250617	0.43804789
				2.639987	1.519446	0.91883102
					2.905464	1.74827837
						3.13424879
b_m	0.77	0.4651	0.242893	0.133011	0.0768903	0.04647752
		0.4398	0.43380	0.275621	0.166041	0.1016832
			0.27663	0.383797	0.2887471	0.18981578
				0.182373	0.3295345	0.28762211
					0.1242777	0.27876577
						0.08687598
$\Delta(11)$	0.014	0.0013	0.00017	0.00003	6×10^{-6}	1.5×10^{-6}

Подставляя (5) в (1), получаем сечение рассеяния в виде бесконечной суммы:

$$\sigma = \frac{Q^4 l^2 |\Gamma|^2}{4Q_z} \sum_{n_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{n_M=0}^{\infty} b_1^{n_1}\cdots b_M^{n_M} \frac{(h^2 Q_z^2)^{\Sigma_1}}{n_1!\cdots n_M!\,\Sigma_2} \exp\left(-\frac{l^2 Q_\rho^2}{4\Sigma_2}\right)\mathrm{sgn}(\Sigma_1), \quad (6)$$

где $\Sigma_1 = \sum n_m$, $\Sigma_2 = \sum n_m/a_m^2$, а $\mathrm{sgn}(0) = 0$. Для обратного рассеяния выражение упрощается к безразмерному виду:

$$\sigma = \frac{|\Gamma|^2 (kl)^2}{\cos^2\theta} \sum_{n_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{n_M=0}^{\infty} \frac{4^{\Sigma_1}}{\Sigma_2} \frac{b_1^{n_1}\cdots b_M^{n_M}}{n_1!\cdots n_M!} ((kh)^2\cos^2\theta)^{\Sigma_1} \exp\left(-4(kh)^2\cos^2\theta - \frac{(kl)^2\sin^2\theta}{\Sigma_2}\right)\mathrm{sgn}(\Sigma_1). \quad (7)$$

Радиолокационное отражение ЛЧМ и синтез апертуры

Схема эксперимента показана на рис. 1.

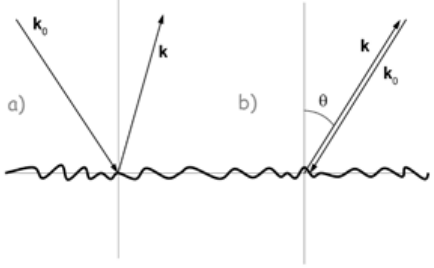


Рисунок 1. К определению сечения рассеяния рельефной поверхностью

В параксиальном приближении поле сферической волны от спутника (высота z, координата x_3) на поверхности:

$$E_{\omega_I}^{(0)}(x_1, y_1) = \frac{1}{z}\exp\left(ik_I z + \frac{ik_I[(x_3 - x_1)^2 + y_1^2]}{2z}\right). \quad (8)$$

Отраженное поле у спутника:

$$E_{\omega_I}^{(R)}(x_3, 0) = \int E_{\omega_I}^{(0)}\, G(k_I, x_1, y_1, x_3, 0) e^{-2ik_I h(x_1, y_1)} dx_1 dy_1, \quad (9)$$

с функцией Грина $G = \frac{k}{2\pi i z}\exp\left(ikz + \frac{ik}{2z}[(x - x')^2 + (y - y')^2]\right)$. Синтез апертуры выполняется интегрированием вдоль траектории с гауссовым весом длины $2L = \frac{1}{2}\sqrt{\lambda z}$ [8]:

$$E_{\omega_I}^{(S)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}L}\int e^{-x_3^2/L^2}\, E_{\omega_I}^{(R)}(x_3, 0) dx_3. \quad (10)$$

Двухчастотная корреляционная функция $\Gamma(\omega_I, \omega_{II}) = \left\langle \tilde{E}_{\omega_I}^{(S)} E_{\omega_{II}}^{(S)} \right\rangle$ после усреднения по гауссовому рельефу сводится к интегралам от многомерных гауссовых распределений [9–11], вычисляемым аналитически. Средний квадрат ЛЧМ-сигнала на выходе согласованного фильтра:

$$\langle |E(t)|^2 \rangle \propto \frac{1}{(2\pi)^2}\iint H(\omega_I) H(\omega_{II}) \Gamma(\omega_I, \omega_{II}) e^{i(\omega_I - \omega_{II})t} d\omega_I d\omega_{II}, \quad (11)$$

где $H(\omega)$ – окно Хэннинга [12].

Численные результаты.

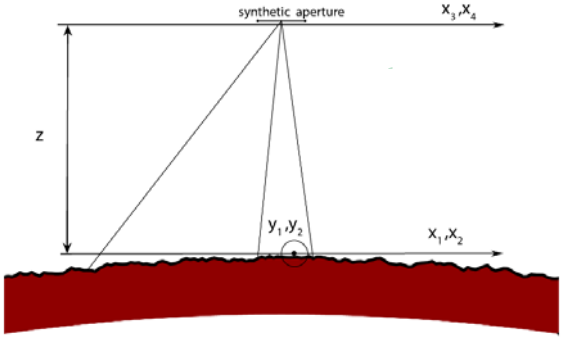


Рисунок 2. Схематическое изображение радиолокации рельефной поверхности с синтезом апертуры

На рис. 3 показаны угловые зависимости сечения обратного рассеяния для $kl = 100$, $kh = 1$. Расчет по точной формуле (2) практически совпадает с законом Хагфорса (4). Аппроксимации (7) с разным числом слагаемых M хорошо воспроизводят результат

в диапазоне углов $\theta \le \theta_{\max}$, где $\theta_{\max}$ связан с минимальным масштабом $a_{\min}$ соотношением $ka_{\min}l\theta_{\max} \approx 2$.

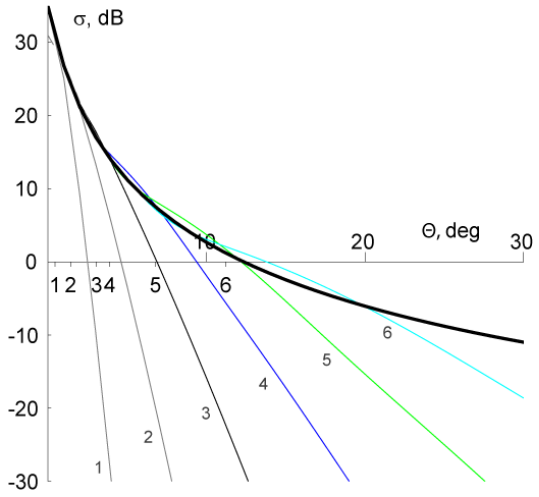


Рисунок 3. Сечения обратного радиолокационного рассеяния рельефной поверхности ($kl = 100, kh = 1$): штриховая кривая – закон Хагфорса (8); жирная кривая – экспоненциальная корреляционная функция (6); Тонкие кривые – аппроксимации экспоненциальной корреляционной функции суммой различного числа M гауссовских слагаемых в (10) (количества слагаемых указаны цифровыми метками при соответствующих кривых)

Различные аппроксимации дают близкие кривые, что свидетельствует о сходимости. Пунктиром показано отражение от гладкой поверхности. Ширина временного интервала, где аппроксимация работоспособна, также определяется минимальным масштабом $a_{\min}$.

Заключение

Предложен подход к расчету отражательных свойств шероховатых поверхностей на основе аппроксимации экспоненциальной корреляционной функции суммой гауссовских слагаемых. Получены аналитические выражения для сечений рассеяния и двухчастотных корреляций ЛЧМ-сигналов с синтезом апертуры. Численные расчеты подтверждают эффективность метода. Подход может быть обобщен на другие корреляционные функции и конфигурации источников.

Работа поддержана грантом Российского Научного Фонда (РНФ) 22-27-00396. Использовано оборудование Центра коллективного пользования сверхвысокопроизводительными вычислительными ресурсами МГУ имени М.В. Ломоносова [13].

Литература

1. *Beckmann P., Spizzichino A.* The Scattering of Electromagnetic Waves from Rough Surfaces. Macmillan, 1963.
2. *Ogilvy J.A.* Theory of Wave Scattering from Random Rough Surfaces. Adam Hilger, 1991.
3. *Goodman J.* Introduction to Fourier Optics. 2nd ed. MacGraw-Hill, 1996.
4. *Hagfors T.* // J. Geophys. Res. 1964. Vol. 69. P. 3779.
5. *Sultan-Salem A.K., Tyler G.L.* // J. Geophys. Res. 2006. Vol. 111. E06S07.
6. *Johnson J.T. et al.* // IEEE Trans. Geosci. Remote Sens. 2007. Vol. 45. P. 2619.
7. *Evans J.V., Hagfors T.* Radar Astronomy. McGraw-Hill, 1968.
8. *Klauder J.R. et al.* // Bell Syst. Tech. J. 1960. Vol. 39. P. 745.
9. *Ilyushin Y.A.* // Planet. Space Sci. 2009. Vol. 57. P. 1458.
10. *Ilyushin Y.A.* // Planet. Space Sci. 2014. Vol. 92. P. 121.

11. *Hartogh P., Ilyushin Y.A.* // Planet. Space Sci. 2016. Vol. 130. P. 30.
12. *Harris F.J.* // Proc. IEEE. 1978. Vol. 66. P. 51.
13. *Voevodin Vl. et al.* // Supercomput. Front. Innov. 2019. Vol. 6. P. 4.

Оценка поля нестационарных процессов в волноводах с помощью метода перевала

Estimation of the Field of Non-Stationary Processes in Waveguides with the Saddle Ppoint Method

Шанин А.В., Князева К. С.

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, физический факультет, Москва, РФ.

knyazevaks05@gmail.com, a.v.shanin@gmail.com

Аннотация. Рассматриваются нестационарные (импульсные) процессы в волноводах. В качестве модели волновода выбрано матричное уравнение Клейна-Гордона-Фока (МУКГФ). Уравнение может быть получено в результате применения волноводного метода конечных элементов. Формальное решение МУКГФ представляет собой осциллирующий интеграл. Для оценки этого интеграла строится обобщение метода перевала.

Введение

Существует множество приложений, связанных с распространением в протяженных структурах. К таким приложениям относятся передача сигналов по каналам связи, медицинская диагностика трубчатых костей человека, неразрушающий контроль железнодорожных рельсов и др.

Огромный вклад в теорию распространения электромагнитных импульсов в среде с дисперсией внесли А. Зоммерфельд и Л. Бриллюэн [1]: А. Зоммерфельд предложил описание для высокочастотных предвестников, распространяющихся непосредственно за фронтом сигнала, а Л. Бриллюэн трактовал предвестники как вклады точек перевала, эволюционирующих при смене точки и времени наблюдения.

А. Зоммерфельд и Л. Бриллюэн рассматривали среду Лоренца, для которой в дисперсионное уравнение входят k^2 и ω^2. Дисперсионная диаграмма соответствующей $k(\omega)$ является двулистной римановой поверхностью, на которой можно деформировать контур интегрирования.

В случае многомодового волновода дисперсионная диаграмма состоит из множества листов, соединенных точками ветвления. Это делает применение стандартного метода перевала крайне затруднительной.

Структура работы следующая. Сначала обсуждается матричное уравнение Клейна-Гордона-Фока (МУКГФ), являющееся хорошей моделью прежде всего акустических волноводов. Затем рассматривается дисперсионная диаграмма для МУКГФ, показывается, что она представляет собой комплексное многообразие. После этого дается решение МУКГФ в виде интеграла, контур интегрирования которого лежит на комплексной дисперсионной диаграмме; на идейном уровне описывается обобщенный метод перевала. В заключении описывается возможное направление дальнейших исследований.

Матричное уравнение Клейна-Гордона-Фока

Матричным уравнением Клейна-Гордона-Фока называется следующее уравнение:

$$\left(\boldsymbol{D}_2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\boldsymbol{D}_1\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{D}_0-\boldsymbol{M}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)U(t,x)=F\delta(t)\delta(x), \qquad (1)$$

где x – продольная координата, t – время, $U(t,x)$ – вектор, описывающий поле в сечении волновода, $\boldsymbol{D}_2, \boldsymbol{D}_1, \boldsymbol{D}_0, \boldsymbol{M}$ – постоянные матричные коэффициенты. В правой части

уравнения (1) стоит импульсное возбуждение, вектор F описывает профиль возбуждения.

Уравнение (1) является моделью волновода,

1) однородного вдоль x,
2) имеющего компактное сечение,
3) состоящего из сред, в которых отсутствует дисперсия и потери.

Последнее требование сужает область применения МУКГФ практически только до класса акустических волноводов. Тем не менее, существует большое количество приложений, где МУКГФ является эффективной моделью.

Чтобы получить (1), можно дискретизовать сечение волновода и применить метод конечных элементов, оставив продольную координату непрерывной. Этот метод называется волноводным методом конечных элементов, полуаналитическим методом конечных элементов и др. Обзор по теме можно найти, например, в [2].

Дисперсионная диаграмма как комплексное многообразие

Подставив $U \sim e^{-i\omega t+ikx}$ в (1), можно получить дисперсионное уравнение:

$$D(\omega, k) = 0, \tag{2}$$

где

$$\det \boldsymbol{B} = 0, \boldsymbol{B}(\omega, k) = -k^2\boldsymbol{D}_2 + ik\boldsymbol{D}_1 + \boldsymbol{D}_0 + \omega^2\boldsymbol{M}. \tag{3}$$

По теореме о неявной функции, решения $(\omega, \mathrm{k}) \in \mathbb{C}^2$ уравнения (2) образуют комплексное многообразие H, если не существует решений, для которых одновременно $\partial_{\mathrm{k}}\mathrm{D} = 0, \partial_{\omega}\mathrm{D} = 0$.

Эти условия вместе с (2) накладывают 3 условия на переменные k и ω, что не является общим случаем. Будем полагать, что такие точки отсутствуют. Комплексное многообразие H назовем комплексной дисперсионной диаграммой.

Множество комплексных решений дисперсионного уравнения можно также рассматривать как риманову поверхность многозначной функции k(ω). Этого подхода придерживаются, например, работа [3], в которой изучается дисперсионное уравнение для упругих волн в изотропной пластине (волны Лэмба), а также [4], где анализируются свойства римановой поверхности трехслойного жидкостного волновода.

Решение МУКГФ

Чтобы решить (1), нужно применить преобразование Фурье по x и преобразование Лапласа по t, решить задачу в спектральной области, и применить обратные преобразования. В результате,

$$U(t,x) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty+i\varepsilon}^{\infty+i\varepsilon} \frac{\boldsymbol{A}(\omega,k)}{D(\omega,k)} F\, e^{-i\omega t+ikx} d\omega\, dk, \tag{4}$$

где $\boldsymbol{A}(\omega, k)$ – присоединенная матрица для $\boldsymbol{B}(\omega, k)$.

Внутренний интеграл в (4) можно вычислить с помощью теоремы вычетов. Особенностями внутреннего интеграла являются полюса, удовлетворяющие (2) при фиксированном k. Можно показать, что для МУКГФ реальных систем выполняется соотношение действительности, т.е. для $k \in \mathbb{R}$ частоты ω, являющиеся решениями дисперсионного уравнения, также действительны. Это означает, что контур внутреннего интеграла в (4) не проходит через особенности. Кроме того, замкнув контур интегрирования в нижней полуплоскости с помощью леммы Жордана, можно получить, что все полюса оказываются внутри замкнутого контура. Применяя теорему вычетов, получаем

$$U(t,x) = -2\pi i \sum_j \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\boldsymbol{A}(\omega_j(k),k)}{\partial_\omega D(\omega_j(k),k)} F\, e^{-i\omega_j(k)t+ikx} dk. \tag{5}$$

Так как решения дисперсионного уравнения образуют комплексное многообразие, то же выражение (5) можно записать следующим образом:

$$U(t,x) = \int_{\Gamma} \Psi|_H \, , \Psi = -2\pi i \frac{\boldsymbol{A}(\omega,k)}{\partial_\omega D(\omega,k)} F \, e^{-i\omega t + ikx} dk, \quad (6)$$

где Γ – сумма образов действительной оси k на H.

Метод перевала на комплексной дисперсионной диаграмме

Пусть x – большой параметр. Перепишем форму Ψ следующим образом:

$$\Psi = -2\pi i \frac{\boldsymbol{A}(\omega,k)}{\partial_\omega D(\omega,k)} F \, e^{ixg} dk, g = k - \frac{\omega}{V}, V = \frac{x}{t}. \quad (7)$$

В основе метода перевала лежит идея деформирования контура интегрирования в область экспоненциальной малости подынтегрального выражения, т.е. в область больших положительных $\mathrm{Im}[g]$. В процессе деформации контур зацепляется за точки перевала, которые дают вклад в поле.

Для случая, когда деформируемый контур двигается по многообразию, нужна существенная математическая формализация, близкая к той, что изложена в [5, 6].

Подробное описание практической реализации метода содержится в [7, 8].

Заключение

В настоящей работе рассмотрены только акустические волноводы. Тем не менее волноводный метод конечных элементов применяется и для моделирования электромагнитных волноведущих систем (см., например, [9]). Поэтому можно ожидать, что инструменты, развитые в [7, 8], можно адаптировать и на электромагнитные волноводы. Расширение области применимости метода открывает перспективное направление для дальнейших теоретических исследований.

Литература

1. *Brillouin L.* Wave propagation and group velocity. — N.Y.: Academic Press, 1960. — 160 p.
2. *Ханазарян А. Д.* Моделирование и исследование волновых процессов в упругих метаматериалах и слоистых волноводах с присоединенными элементами : дисс. на соиск. уч. ст. канд. физ.-мат. н. — Кубанский государственный университет. — 2004. — 125 с.
3. *Randles P. W.*, Miklowitz J. Modal representations for the high-frequency response of elastic plates // International Journal of Solids and Structures. — 1971. — Vol. 7, no. 8. — P. 1031–1055.
4. *Shanin A. V., Knyazeva K. S., Korolkov A. I.* Riemann surface of dispersion diagram of a multilayer acoustical waveguide // Wave Motion. — 2018. — Vol. 83. — P. 148–172.
5. *Федорюк М. В.* Асимптотика преобразования Фурье экспоненты от полинома // Доклады академии наук. — 1976. — Т. 227, № 3. — С. 580–583.
6. *Pham F.* Vanishing homologies and the n variable saddle point method // Proceedings of Symposia in Pure Mathematics. Vol. 40. — Providence: American Mathematical Society, 1983.
7. *Shanin A. V., Korolkov A. I., Knyazeva K. S.* Saddle point method or transient processes in waveguides // Journal of Theoretical and Computational Acoustics. — 2022. — Vol. 30, no. 4. — P. 2150018.
8. *Knyazeva K. S., Saito Y., Korolkov A. I., Shanin A. V.* Saddle point method interpretation of transient processes in car tires // Supercomputing Frontiers an Innovations. — 2023. — Vol. 10, no. 1. — P. 31–45.
9. *Мосунова Н. А.* Математическое моделирование киральных волноведущих систем: дисс. на соиск. уч. ст. канд. физ.-мат. н. — Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова. — 2007. — 107 с.

Теорема единственности для граничной задачи дифракции на шаре с мезоскопическими граничными условиями

Uniqueness Theorem for the Boundary Value Problem of Diffraction by a Sphere with Mesoscopic Boundary Conditions

Крот А.В.

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, Москва, РФ.

m400education@gmail.com

Аннотация. Рассматривается задача дифракции плоской электромагнитной волны на слоистом шаре, состоящем из плазмонного ядра и прозрачной диэлектрической оболочки. На поверхности ядра задается мезоскопическое граничное условие, содержащее параметр Фейбельмана, а на внешней поверхности оболочки — классические условия сопряжения. Доказана теорема единственности решения при выполнении условия, связывающего параметр Фейбельмана и диэлектрические проницаемости сред.

Введение

Наночастицы золота и серебра с диэлектрической оболочкой широко применяются в нанофотонике и биомедицине благодаря локализованному плазмонному резонансу. При размерах ядра в несколько нанометров существенны квантовые эффекты, возникающие в плазмонном металле, такие как объемная нелокальность, смещение электронного облака относительно поверхности металла и затухание Ландау. Их учитывают посредством мезоскопических граничных условий, которые включают в себя параметры Фейбельмана. Недавно была получена аналитическая формула для этих параметров [1]. Установление единственности решения подобной граничной задачи необходимо, в частности, для обоснования метода интегральных уравнений [2]. В работе [3] доказана теорема единственности для задачи дифракции на слоистом шаре с мезоскопическим условием на поверхности ядра при выполнении дополнительного условия. Полученное условие исследовано численно для частиц с золотым и серебряным ядром.

Постановка задачи

Пусть $D_i = \{r < R_i\}$ — плазмонное ядро, $D_c = \{R_i < r < R_c\}$ — прозрачная диэлектрическая оболочка, $D_e = \{r > R_c\}$ — внешняя среда. Среды немагнитны, зависимость от времени $exp(-i\omega t)$, падающее поле $\{\boldsymbol{E}_0, \boldsymbol{H}_0\}$ — плоская волна, распространяющаяся вдоль оси Oz и поляризованная вдоль оси Ox. В областях постоянства параметров поля удовлетворяют уравнениям Максвелла

$$\nabla \times \boldsymbol{E}_{\boldsymbol{\alpha}} = i\omega\mu_0 \boldsymbol{H}_{\boldsymbol{\alpha}}, \qquad \nabla \times \boldsymbol{H}_{\boldsymbol{\alpha}} = -i\omega\varepsilon_\alpha \boldsymbol{E}_{\boldsymbol{\alpha}}, \qquad \alpha = i, c, e, \tag{1}$$

мезоскопическим граничным условиям на поверхности ядра ∂D_i [1]

$$\boldsymbol{n}_i \times (\boldsymbol{E}_i - \boldsymbol{E}_c) = -d_\perp \boldsymbol{n}_i \times \nabla\{\boldsymbol{n}_i \cdot (\boldsymbol{E}_i - \boldsymbol{E}_c)\}, \qquad \boldsymbol{n}_i \times (\boldsymbol{H}_i - \boldsymbol{H}_c) = 0, \tag{2}$$

классическим условиям сопряжения на внешней поверхности оболочки ∂D_c

$$\boldsymbol{n}_c \times (\boldsymbol{E}_c - \boldsymbol{E}_e) = \boldsymbol{n}_c \times \boldsymbol{E}_0, \qquad \boldsymbol{n}_c \times (\boldsymbol{H}_c - \boldsymbol{H}_e) = \boldsymbol{n}_c \times \boldsymbol{H}_0, \tag{3}$$

и условию излучения Сильвера–Мюллера [2]

$$\lim_{r\to\infty} r\left(\boldsymbol{H}_e \times \frac{\boldsymbol{r}}{r} - \frac{1}{\eta_e}\boldsymbol{E}_e\right) = 0, \qquad \eta_e = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_e}. \tag{4}$$

Здесь $\boldsymbol{n}_i$, $\boldsymbol{n}_c$ — внешние нормали, $\varepsilon_{i,c,e}$ — диэлектрические проницаемости. Параметр Фейбельмана $d_\perp(\omega)$ — комплексная величина размерности длины, характеризующая нелокальный отклик электронного газа у границы металл–диэлектрик: $Re\, d_\perp$ задает смещение центра тяжести индуцированного заряда относительно классической поверхности раздела, $Im\, d_\perp$ описывает затухание Ландау. При $d_\perp = 0$ условия (2) переходят в классические.

Теорема единственности

Теорема. Пусть $\omega > 0$, $\varepsilon_e > 0$, $\varepsilon_c > 0$, $Im\,\varepsilon_i > 0$, $d_\perp \in C$ и выполнено неравенство

$$-Im\left[d_\perp \varepsilon_i^* \left(1 - \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_c}\right)\right] \geq 0. \tag{5}$$

Тогда задача (1)–(4) имеет не более одного решения в классе $\boldsymbol{E_\alpha}, \boldsymbol{H_\alpha} \in C^2(D_\alpha) \cap C^1\left(\overline{D_{i,c}}\right)$, $\alpha = i, c, e$.

Схема доказательства. Разность двух решений удовлетворяет однородной задаче. Применим формулу Остроградского–Гаусса к вектору $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}^*$ в областях D_i, D_c и $\{R_c < r < \rho\}$. В оболочке и внешней среде $\nabla \cdot Re\,\boldsymbol{S} = 0$, а в ядре $\nabla \cdot Re\,\boldsymbol{S} = -\omega\, Im\,\varepsilon_i |\boldsymbol{E}_i|^2$. На сфере $r = R_c$ потоки взаимно уничтожаются, так как $\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{n}_c$ зависит только от тангенциальных компонент полей. Скачок потока на сфере $r = R_i$ с помощью условий (2), интегрирования по частям по угловым переменным и равенства $\varepsilon_i E_{i,n} = \varepsilon_c E_{c,n}$, вытекающего из непрерывности $\boldsymbol{n}_i \times \boldsymbol{H}$, приводится к виду

$$\int\limits_{S_{R_i}} (\boldsymbol{S}_i - \boldsymbol{S}_c) \cdot \boldsymbol{n}_i \, d\sigma = i\omega d_\perp \varepsilon_i^* \left(1 - \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_c}\right) \int\limits_{S_{R_i}} \left|E_{i,n}\right|^2 d\sigma. \tag{6}$$

Переходя к пределу $\rho \to \infty$ с учетом условия (4), получаем энергетическое тождество

$$\frac{1}{\eta_e} \int\limits_{S^2} |\boldsymbol{F}|^2 d\Omega + \omega\, Im\,\varepsilon_i \int\limits_{D_i} |\boldsymbol{E}_i|^2 dV - \omega\, Im\left[d_\perp \varepsilon_i^* \left(1 - \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_c}\right)\right] \int\limits_{S_{R_i}} \left|E_{i,n}\right|^2 d\sigma = 0, \tag{7}$$

где $\boldsymbol{F}$ — диаграмма рассеяния. При условии (5) все слагаемые неотрицательны, откуда $\boldsymbol{F} \equiv 0$ и $\boldsymbol{E}_i \equiv 0$. По лемме Реллиха [2] поле равно нулю в D_e, а в силу единственности решения задачи Коши для системы Максвелла и аналитичности полей — и в D_c. В случае $Im\,\varepsilon_i = 0$ равенство нулю поля в ядре следует из нулевых тангенциальных компонент $\boldsymbol{E}_i$, $\boldsymbol{H}_i$ на сфере $r = R_i$ и третьей формулы Грина [2].

Численный анализ условия единственности

При $\varepsilon_i = \varepsilon_i' + i\varepsilon_i''$, $d_\perp = d_1 + id_2$ условие (5) принимает вид

$$f(\lambda) = d_1 \varepsilon_i'' + \left(\frac{|\varepsilon_i|^2}{\varepsilon_c} - \varepsilon_i'\right) d_2 \geq 0. \tag{8}$$

Поскольку ε_i и $d_\perp$ зависят от длины волны и материала ядра, условие (8) проверялось численно. Параметр $d_\perp$ вычислялся по аналитической формуле [1] с параметрами модели Друде для золота ($\hbar\omega_p = 9{,}02$ эВ, $\hbar\gamma = 0{,}071$ эВ) и серебра ($\hbar\omega_p = 8{,}99$ эВ, $\hbar\gamma = 0{,}025$ эВ). На рисунке 1 показана функция $f(\lambda)$ при радиусе ядра 5 нм и показателе преломления оболочки $\sqrt{\varepsilon_c} = 1{,}45$. Условие (8) выполнено при длинах волн больше примерно 330 нм для серебряного и 530 нм для золотого ядра. При меньших длинах волн $f(\lambda) < 0$, и вопрос о единственности остается открытым, поскольку условие (5) является лишь достаточным.

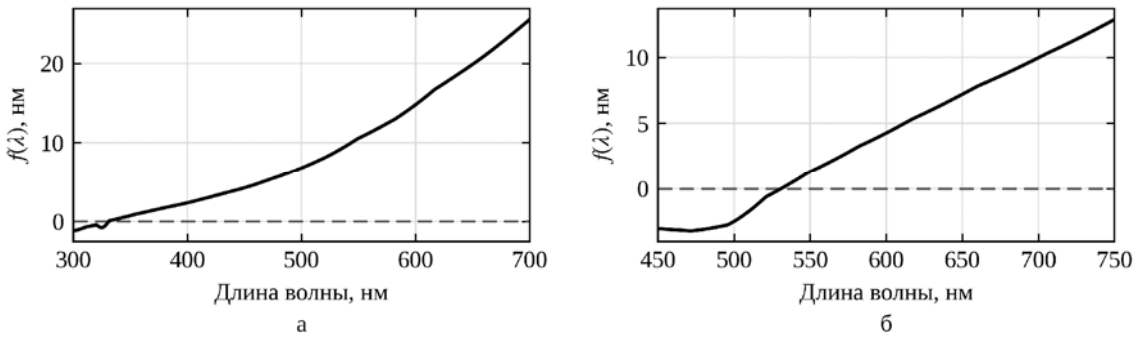


Рисунок 1. Функция $f(\lambda)$ при радиусе ядра 5 нм и $\sqrt{\varepsilon_c} = 1{,}45$: а — серебряное ядро; б — золотое ядро

Заключение

Для задачи дифракции плоской электромагнитной волны на слоистом наноразмерном шаре с мезоскопическим граничным условием на поверхности плазмонного ядра доказана теорема единственности решения при выполнении условия (5) на параметр Фейбельмана и диэлектрические проницаемости ядра и оболочки. Условие сведено к проверке знака функции $f(\lambda)$ и численно проверено для частиц с золотым и серебряным ядром. Ранее подобный результат в публикациях не встречался.

Литература

1. *Eriksen M. H., Tserkezis C., Mortensen N. A., Cox J. D.* Nonlocal effects in plasmon-emitter interactions // Nanophotonics. — 2024. — Vol. 13, no. 15. — P. 2741.
2. *Колтон Д., Кресс Р.* Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. — М.: Мир, 1987.
3. *Крот А. В., Еремин Ю. А.* Теорема единственности для граничной задачи дифракции на слоистом наноразмерном шаре с мезоскопическими граничными условиями // Вестник Московского университета. Серия 15. Вычислительная математика и кибернетика. — 2026. — Т. 50, № 4. — (в печати).

Анализ переменного профиля показателя преломления в плоской линзе с отрицательными значениями ε и μ

Analysis of the Variable Refractive Index Profile in a Flat Lens with Negative Values of ε and μ

Скобелев С. П.[1], Кушнерёв М. М.[2]

1) ПАО «Радиофизика», Москва, РФ; 2) Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Долгопрудный, РФ.

s.p.skobelev@mail.ru, kushneryov.mm@phystech.edu

Аннотация. Предложен новый алгоритм расчета кусочно-линейного профиля квадрата отрицательного показателя преломления в плоской линзе. Алгоритм базируется на последовательном определении значений показателя преломления в точках входа горизонтального луча и координат указанных точек с использованием уже полученных значений показателя преломления в точках выхода и их координат. Указанные параметры определяются путем решения строгого интегрального уравнения, следующего из условия равенства эйконалов для всех лучей, проходящих через линзу.

Введение

Поперечно неоднородные плоские линзы типа линзы Вуда представляют интерес для разработок и исследований в течение последних двух десятилетий в связи с развитием технологий создания искусственных сред, называемых метаматериалами, особое место среди которых занимают материалы с одновременно отрицательными значениями диэлектрической (ε) и магнитной (μ) проницаемостями [1].

Характеристики плоских линз с отрицательными проницаемостями, исследовались в работах [2], [3] и [4]. Профиль показателя преломления (который также является отрицательным) по всему поперечному размеру линзы в [3] аппроксимируется квадратичной формулой, а в [2] - трехчленной формулой, содержащей также и би-квадратичное слагаемое, что дает хорошее приближение для длиннофокусных систем. Квадрат профиль в [4] между точками входа и выхода луча аппроксимируется линейной функцией, также хорошо работающей для длиннофокусных систем, но дает неоднозначные результаты в случаях короткофокусных систем.

Цель работы – разработка модификации метода [4], сводная от указанного недостатка.

Модификация метода и результаты применения

Продольное сечение линзы показано на рис. 1. Линза характеризуется толщиной b и фокусным расстоянием f. Профиль показателя преломления линзы $n(z)$ является

отрицательной четной функцией поперечной координаты z. Значение указанной функции на оси линзы $n_0 = n(0)$ считается заданным. Луч входит, распространяющийся параллельно оси, входит в линзу в точке A, распространяется в линзе до точки выхода B, испытывает обратное преломление и приходит в точку фокуса F.

Согласно [4] предполагается, что квадрат показателя преломления, т.е. функция $n^2(z)$ на участке $[z_1, z_2]$ возрастает по линейному закону от значения $n_1^2 = n^2(z_1)$ до значения $n_2^2 = n^2(z_2)$. Как показано в [4], задача определения указанных значений на концах отрезка сводится к квадратному уравнению относительно значения m_1=-n_1, решение которого определяется формулой

$$m_1 = \frac{\beta + \sqrt{\beta^2 - (4/3)\sin^2\theta}}{2}, \qquad (1)$$

где $\beta = m_0 + (l - f)/b$, m_0=-n_0 и $l = \sqrt{z_2^2 + f^2}$ – длина пути от B до F. Кроме того метод [4] позволяет рассчитать значения $m_2 = m(z_2) = \sqrt{m_1^2 + \sin^2\theta}$ и $z_1 = z_2 - b\sin\theta/2m_1$. Таким образом, метод [4] позволяет рассчитывать зависимость показателя преломления (1) в линзе с параметрами b, f и n_0 от координаты точки входа луча, и зависимость показателя преломления в точке выхода от координаты точки выхода.

Примеры зависимостей значений квадрата показателя преломления, рассчитанные согласно методу [4] для $n_0 = -1$ ($m_0 = 1$) и фокусных расстояниях $f = 0.2b$, $f = 0.5b$, $f = b$ и $f = 2b$, приведены на рис. 2 на интервале от 0 до z/b=3, а также на рис.3 на интервале от 0 до z/b=0.4. Для удобства визуализации, кривая для $f = 0.2b$ смещена вверх на 0.5, а кривые для $f = b$ и $f = 2b$ - на -0.5 и -1 вниз.

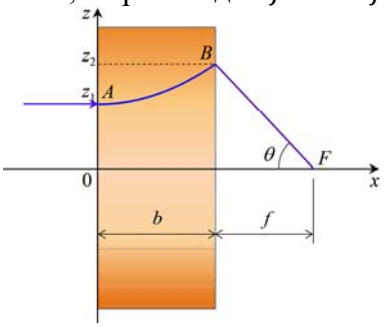


Рисунок 1.

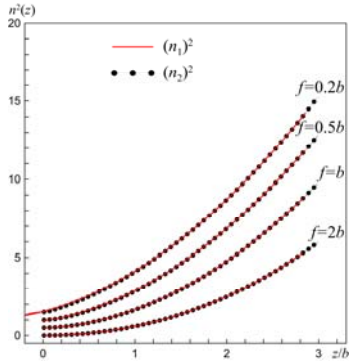


Рисунок 2

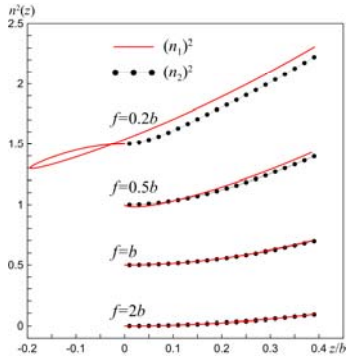


Рисунок 3.

Результаты показывают, что кривые квадратов показателя преломления, полученные для точек входа и для точек выхода, имеют хорошее совпадение при больших z и при фокусных расстояниях, превышающих толщину линзы (длиннофокусный случай). Приближение фокуса к поверхности линзы приводит к увеличению различий между кривыми в области, примыкающей к оси линзы, что дает неоднозначные решения и даже неправильные решения задачи для n_1.

Новый алгоритм, предлагаемый ниже для устранения указанной неоднозначности, состоит в следующем. Первый участок между точками входа и выхода луча выбирается в области больших z, например, $z_2 = 3b$, где метод [4] обеспечивает высокую точность определения показателя преломления, и вычисляются значения m_1, m_2 и z_1. Далее отрезок $[z_1, z_2]$ делится на Q частей с координатами внутренних точек разделения $z_3, z_4, \ldots, z_{Q+1}$. Координата z_1 выбранного первого участка далее обозначается как z_2, а новая точка с координатой $z_1 < z_2$ далее рассматривается как нижняя граница нового участка между точками входа и выхода луча. Точка с координатой z_{Q+1} считается верхней границей нового участка. Значения m_3, m_4, …, m_{Q+1} в точках z_3, z_4, …, z_{Q+1} рассчитываются согласно [4]. Значение m_1 в новой точке z_1 рассчитывается по формуле $m_1 = \sqrt{m_Q^2 - \sin^2\theta}$, $\sin\theta = z_{Q+1}/l$ и $l = \sqrt{z_{Q+1}^2 + f^2}$. Координата точки z_1 пока остается неизвестной. Ее определение осуществляется с использованием строгого интегрального

уравнения относительно функции $m(z)$, следующего из условия равенства эйконалов для всех лучей, проходящих через линзу, которое можно записать в виде

$$S + m_1 b - l = m_0 b - f, \tag{2}$$

где

$$S = \int_{z_1}^{z_Q} \sqrt{m^2(z) - m_1^2}\,dz = \sum_{q=1}^{Q} S_q\,, S_q = \int_{z_q}^{z_{q+1}} \sqrt{m^2(z) - m_1^2}\,dz. \tag{3}$$

Интегралы в (3) вычисляются с использованием линейной аппроксимации

$$m^2(z) = m_q^2 + \frac{z - z_q}{z_{q+1} - z_q}(m_{q+1}^2 - m_q^2) \tag{4}$$

на каждом q-м отрезке. Интегрирование в (3) с учетом (4) дает

$$\begin{aligned} &S_1 = \frac{2}{3}(z_2 - z_1)\sqrt{m_2^2 - m_1^2} \text{ и} \\ &S_q = \frac{2}{3}\frac{z_{q+1} - z_q}{m_{q+1}^2 - m_q^2}\left[\left(m_{q+1}^2 - m_1^2\right)^{\frac{3}{2}} - \left(m_q^2 - m_1^2\right)^{\frac{3}{2}}\right], q = 2, 3, \dots, Q. \end{aligned} \tag{5}$$

Подстановка (5) в интегральное уравнение (2) сводит его к линейному алгебраическому уравнению относительно z_1, решение которого можно записать в виде.

$$z_1 = z_2 - \frac{3}{2}\frac{l - f - (m_1 - m_0)b - S_2 - S_3 - \dots - S_Q}{\sqrt{m_2^2 - m_1^2}}. \tag{6}$$

Далее последовательность действий, описанных выше, повторяется для выбранного количества отрезков Q, но сдвинутых на один отрезок вниз, в результате чего определяются значения m_1 и z_1 для новой точки, приближающейся к оси линзы и т.д. Если начальный участок не разбивается на более мелкие отрезки, что соответствует $Q = 1$, то интегралы (5) для $q = 2, 3, \dots$ исключаются из рассмотрения.

Примеры применения предложенного алгоритма приведены на рис. 4, 5 и 6.

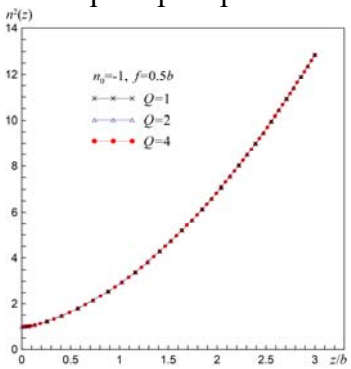


Рисунок 4.

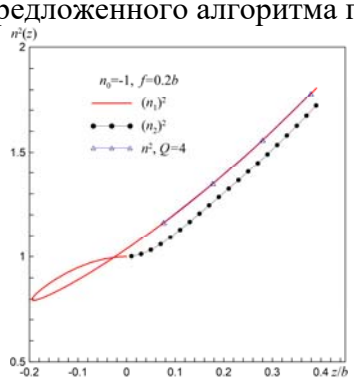


Рисунок 5.

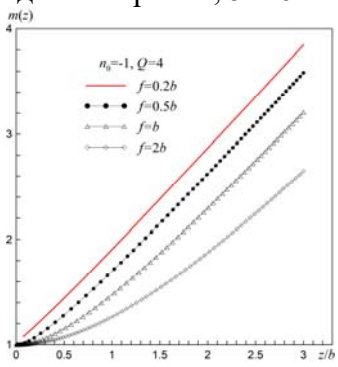


Рисунок 6.

Заключение

В работе предложен новый алгоритм для расчета кусочно-линейного профиля квадрата отрицательного показателя преломления в плоской линзе, позволяющий устранить неоднозначность решения в предыдущем методе. Алгоритм базируется на последовательном определении значений показателя преломления в точках входа горизонтального луча и координат указанных точек с использованием уже полученных значений показателя преломления в точках выхода и их координат. Указанные параметры определяются путем решения строгого интегрального уравнения, следующего из условия равенства эйконалов для всех лучей, проходящих через линзу.

Литература

1. *Веселаго В. Г.* Электродинамика веществ с одновременно отрицательными значениями ε и μ // Успехи физических наук. — 1968. — Т. 10, № 4. — С. 509–517.

2. *Driscoll T., Basov D. N., Starr A. F., Rye P. M., Nemat-Nasser S., Schurig D., Smith D. R.* Free-space microwave focusing by a negative-index gradient lens // Applied Physics Letters. — 2006. — V. 88. — P. 081101.
3. *Pinchuk A. O., Schatz G. C.* Metamaterials with gradient negative index of refraction. // J. Opt. Soc. Am. A. — 2007. — V. 24, № 10. — P. A39-A44.
4. *Кушнерёв М. М., Скобелев С. П.* Сравнительные особенности фокусировки волн обобщенной линзой Микаэляна с положительным и отрицательным показателями преломления // Радиотехника. — 2022. — Т. 86, № 4. — С. 51–59.

О задаче рассеяния фотона из поляризационно-запутанной пары на проницаемом шаре

On the Problem of Scattering of a Partner Photon in a Polarization-Entangled Pair by a Penetrable Sphere

Лопушенко И. В.

Независимый исследователь

lopushenko.ivan@yandex.ru

Аннотация. В данной работе классическое решение задачи дифракции плоской электромагнитной волны на проницаемом шаре, получаемое методом разделения переменных, применяется для решения задачи рассеяния на таком шаре одного фотона из запутанной по поляризации пары. Данная задача естественным образом возникает при описании распространения неклассического излучения в рассеивающих средах и актуальна в широком классе современных проблем диагностики, сенсорики и коммуникаций с использованием квантовых каналов зондирования и связи. Демонстрируется возможность масштабирования построенного решения на случай распространения поляризационно-запутанных фотонов в таких мутных средах, структура которых удовлетворяет условиям получения векторного уравнения переноса излучения из уравнений Максвелла.

Введение

Инструменты электромагнитного зондирования и диагностики, уже имеющие в своём арсенале как скалярные, так и поляризационные свойства света, в настоящее время продолжают стремительно развиваться, получая в своё распоряжение новые степени свободы. К таковым относится и классический свет со сложной структурой волнового фронта, в том числе обладающий орбитальным угловым моментом, и свет, обладающий квантовыми корреляциями [1]. Наличие дополнительных степеней свободы у таких источников света равносильно наличию ранее не используемых каналов, пригодных для получения дополнительной информации об изучаемых объектах, что потенциально открывает путь к дальнейшему совершенствованию существующих сенсоров. В настоящей работе рассматривается задача, которая, подобно задаче дифракции на шаре, является базовой для любого последующего моделирования распространения света с квантовыми корреляциями в рассеивающих средах, и решение которой является необходимым для интерпретации экспериментальных измерений, осуществляемых с неклассическими источниками света.

Метод решения

Теоретическим фундаментом настоящей работы является утверждение, что по крайней мере в линейном режиме рассеивающие свойства многомодового квантового света полностью определяются исключительно классической матрицей рассеяния S изучаемого объекта [2]. Наряду с возможностью описания рассеяния двух- и многофотонных квантовых состояний в терминах либо тензорного произведения векторов Джонса, либо тензорного произведения Т-матриц, каждой из которых можно поставить матрицы рассеяния во взаимно-однозначное соответствие [3,4], это обстоятельство позволяет использовать все накопленные возможности аппарата

решения классических задач дифракции для изучения процессов рассеяния многофотонных квантовых состояний, включая состояния с квантовой запутанностью. Существующие при этом классические решения, оперирующие терминами напряженностей электрического и магнитного полей, вектора Стокса или матрицы когерентности, интерпретируются в терминах квантовых вероятностей, волновых функций (для чистых состояний) и матрицы плотности (для смешанных состояний) [4].

Этот переход от напряженностей к квантовым вероятностям и от вектора Стокса к матрице плотности, отмеченный ещё в работе [5], обладает рядом особенностей и как скрытых, так и явных трудностей, возможности учёта которых при решении практических задач в настоящее время активно изучаются. В настоящей работе утверждается, что готовое классическое решение для задачи дифракции плоской электромагнитной волны на проницаемом шаре, также известное, как теория Ми [6], можно практически немедленно использовать для моделирования поведения волновой функции и матрицы плотности такого двухфотонного поляризационно-запутанного состояния, в котором один из фотонов рассеялся на заданном шаре, в то время как второй фотон беспрепятственно распространялся в отдельном канале, не претерпевая рассеяния. Дополнительным ограничением на данное решение в настоящее время также является отсутствие квантовой интерференции между фотонами из данной пары.

Как и в случае с классическим поляризованным светом, при рассеянии на шаре такое двухфотонное состояние остается чистым вне зависимости от степени запутанности. Примерами полностью запутанных квантовых состояний являются состояния Белла, которые в рассматриваемом случае математически записываются как $\frac{\sqrt{2}}{2}(|HH\rangle \pm |VV\rangle)$ и $\frac{\sqrt{2}}{2}(|HV\rangle \pm |VH\rangle)$. Главная особенность этих состояний — их неразделимость: невозможно описать состояние одного фотона независимо от другого. Это означает, что поляризация каждого отдельного фотона не определена до момента измерения, однако они строго коррелированы (или антикоррелированы). При измерении в линейном H-V базисе мы с одинаковой вероятностью обнаружим либо оба фотона с горизонтальной/вертикальной поляризацией (в первом случае), либо один фотон с горизонтальной, а второй с вертикальной поляризацией (во втором случае). Здесь запись $|HH\rangle$ эквивалентна записи $|H\rangle\otimes|H\rangle$, где $\otimes$ является операцией тензорного произведения.

Как для состояний Белла, так и для частично запутанных состояний (когда множители перед кет-векторами отличаются друг от друга, делая наблюдаемые состояния не равновероятными) с использованием предложенных подходов [2-4] можно показать, что для рассматриваемой задачи решением будет выражение, в котором вместо $|H\rangle$ и $|V\rangle$ для рассеянного фотона из пары будут использованы выражения для напряженностей рассеянного поля, полученного в теории Ми при рассеянии горизонтально и вертикально поляризованной волн, соответственно, при условии корректного пересчета полученного результата в терминах квантовых вероятностей [4]. К данному результату можно также прийти с помощью строгих квантово-механических выкладок [7]. Тем не менее, автору в данный момент неизвестны полноценные систематические исследования рассеивающих свойств сферических частиц и их ансамблей для квантово-скоррелированных состояний.

Результаты моделирования

С помощью предлагаемого метода легко построить как волновую функцию рассеянного двухфотонного состояния, так и его матрицу плотности в зависимости от направления распространения рассеянного фотона, и её производные характеристики, такие как согласованность, также известную как показатель запутанности C (англ. concurrence). Результаты, показанные на левом графике на рис. 1, демонстрируют, что запутанность может вести себя отличным образом от привычной диаграммы рассеяния, что, в свою очередь, может потенциально говорить как раз о возможности извлечения

дополнительной информации о рассеивателе или рассеивающей среде в случае использования механизма квантовых корреляций.

Предлагаемое решение было масштабировано автором на случай распространения фотона из поляризационно-запутанной пары в мутной среде, что, в свою очередь, опосредованно позволило провести его экспериментальную апробацию. Для данного обобщения было использовано то обстоятельство, что, в условиях ансамбля невзаимодействующих друг с другом частиц и при других условиях, накладываемых в процессе вывода векторного уравнения переноса излучения из уравнений Максвелла [8], мутная среда может быть рассмотрена как среда с известными коэффициентами рассеяния, поглощения и оптической анизотропии, в которой каждый акт рассеяния представляет собой рассеяние Ми на шаре или его частные случаи, от рассеяния Релея до рассеяния Релея-Дебая-Ганса (РДГ) [4]. В этом случае, использование метода Монте Карло для статистического моделирования путей распространения фотонов в данной среде позволяет отслеживать поведение двухфотонных волновых функций с помощью предложенной процедуры, основанной на решении Ми, в данном конкретном примере ограниченной приближением РДГ. Важным дополнительным налагаемым требованием является неразличимость фотонов не только по поляризации, но и по геометрическим траекториям [4]. Усреднение полученного распределения двухфотонных состояний по ансамблю даёт итоговую матрицу плотности смешанного состояния. На правом графике рис. 1 показано сравнение показателя запутанности, полученного из смоделированной матрицы плотности для рассеянного состояния Белла $\frac{\sqrt{2}}{2}(|HV\rangle + |VH\rangle)$, и показателя запутанности, полученного экспериментально с помощью томографии квантовых состояний на образцах с известными рассеивающими свойствами [4], демонстрирующее работоспособность предложенного подхода. В настоящее время ведется работа по дальнейшему обобщению предложенного подхода на более сложные задачи, в том числе на случай рассеяния обоих фотонов из запутанной пары в рассеивающей среде.

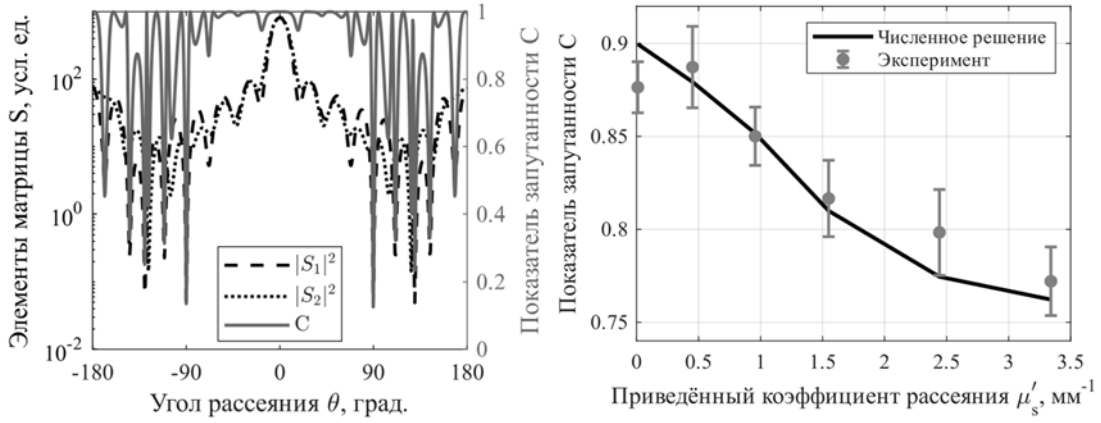


Рисунок 1. Сравнение согласованности C с диаграммой рассеяния для шара с размерным параметром $kr = 8$ и показателем преломления 1.5 (слева), и с экспериментом, осуществленным методом томографии квантовых состояний при их прохождении через мутную среду [4] (справа)

Литература

1. *Kleine, T., Ornelas, P., Peters, C., Guo, Z., Sephton, B., Nape, I., Shen, Y. and Forbes, A.* Topological Robustness of Orbital Angular Momentum Entanglement in Stochastic Channels // Physical Review Letters. — 2026. — Vol. 137, no. 5. — P. 050602.
2. *Rachbauer, L. M., Bouchet, D., Leonhardt, U. and Rotter, S.* How to find optimal quantum states for optical micromanipulation and metrology in complex scattering problems: tutorial // Journal of the Optical Society of America B. — 2024. — Vol. 41, no. 9. — P. 2122.
3. *Freter, L., Zerulla, B., Krstić, M., Holzer, C., Rockstuhl, C. and Fernandez-Corbaton, I.* Tensor product space for studying the interaction of bipartite states of light with nanostructures // Physical Review A. — 2024. — Vol. 110, no. 4. — P. 043516.

4. *Besaga, V. R., Lopushenko, I. V., Sieryi, O., Bykov, A., Setzpfandt, F. and Meglinski, I.* Bridging Classical and Quantum Approaches for Quantitative Sensing of Turbid Media with Polarization-Entangled Photons // Laser & Photonics Reviews. — 2026. — Vol. 20, no. 10. — P. e01172.
5. *James, D. F. V., Kwiat, P. G., Munro, W. J. and White, A. G.* Measurement of qubits // Physical Review A. — 2001. — Vol. 64, no. 5. — P. 052312.
6. *Lopushenko, I.* MATLAB interface to W. Wiscombe's Mie scattering Fortran program // Zenodo. — 2025. — Record 17069741. — URL https://doi.org/10.5281/zenodo.17069741
7. *Ciattoni, A.* Classically tuning the quantum interference of two photons scattered by a macroscopic lossy sphere // Physical Review A. — 2026. — Vol. 114, no. 1. — P. 013707.
8. *Mishchenko, M. I.* Vector radiative transfer equation for arbitrarily shaped and arbitrarily oriented particles: a microphysical derivation from statistical electromagnetics // Applied Optics. — 2002. — Vol. 41, no. 33. — P. 7114.

Математические задачи электромагнитной дифракции на металлических и диэлектрических телах с ребрами

Mathematical Problems of Electromagnetic Diffraction by Metallic and Dielectric Bodies with Edges

Боголюбов А.Н., Могилевский И.Е., Ерохин А.И.

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, физический факультет, Москва, РФ;

Bogan7@yandex.ru, mogilevsky@physics.msu.ru

Аннотация. В работе рассматривается ряд актуальных задач электромагнитной теории дифракции на телах сложной формы. Электромагнитное поля в окрестности ребра представляется в виде суммы сингулярной части, для которой получена оценка в соответствующей норме, и гладкой добавки. В основе выделения сингулярной части электромагнитного поля лежит метод, впервые предложенный В.А. Кондратьевым для выделения сингулярной части решения эллиптических дифференциальных уравнений в областях с угловыми и коническими точками.

Введение

В настоящее время весьма актуальными являются задачи дифракции электромагнитного поля на сложных диэлектрических структурах при наличии ребер на их границах. Известно, что наличие ребер на границах и поверхностях разрывов диэлектрической проницаемости приводит к появлению особенностей у электромагнитного поля в окрестности особой точки границы [1]. Одним из способов преодоления этих проблем является выделение особенности решения в явном виде, то есть построение асимптотики по гладкости электромагнитного поля в окрестности ребра [1,2]. Здесь и далее под словом «асимптотическое представление» имеется в виду запись решения в виде суммы сингулярной и гладкой частей.

Описание работы

Рассмотрен ряд задач, посвященных выделению сингулярной части электромагнитного поля в окрестности ребер границы, поверхностей разрыва диэлектрической проницаемости, в окрестности ребра металло-диэлектрического клина, в окрестности конической точки. Хотя физические и математические постановки этих задач значительно различаются, каждая из них приводит к эллиптическому дифференциальному уравнению с различными дополнительными условиями, и в основе построения сингулярной части электромагнитного поля лежит общий метод выделения сингулярной части решения эллиптических краевых задач, впервые предложенный В.А. Кондратьевым [3].

В качестве примера рассмотрим задачу дифракции электромагнитной волны на диэлектрической клиновидной структуре (зависимость от координаты z отсутствует). Предполагается, что электромагнитное поле имеет гармоническую зависимость от времени вида $e^{-i\omega t}$: $\mathbf{E}(x,y,z,t) = \mathbf{E}(x,y,)e^{-i\omega t}, \mathbf{H}(x,y,z,t) = \mathbf{H}(x,y,)e^{-i\omega t}$

Магнитная проницаемость среды $\mu \equiv 1$. Диэлектрическая проницаемость ε — кусочно непрерывная скалярная вещественная функция.

Полное поле удовлетворяет системе уравнений Максвелла

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{E} = ik\mathbf{H}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} = -ik\mathbf{E}, \end{cases} \tag{1}$$

где $k = \frac{\omega}{c}$ — волновой вектор, и условиям сопряжения на границе раздела диэлектриков

$$\begin{aligned} &(\mathbf{H} \cdot \mathbf{n})|_C = 0, [(\mathbf{H} \times \mathbf{n})]|_C = 0, \\ &(\mathbf{E} \cdot \mathbf{n})|_C = 0, [(\mathbf{E} \times \mathbf{n})]|_C = 0, \end{aligned} \tag{2}$$

где C — плоскость разрыва диэлектрической проницаемости, $\mathbf{n}$ — вектор нормали.

Полное поле ищется в виде суммы поля падающей плоской волны и дифрагированного поля $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \widetilde{\mathbf{E}}, \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \widetilde{\mathbf{H}}$.

Для падающего поля рассматриваются два типа поляризации: $\mathbf{E}_0 = \{0; 0; E_1 e^{ikr\cos\varphi}\}, \mathbf{H}_0 = \{0; 0; H_1 e^{ikr\cos\varphi}\}$.

Для дифрагированного поля ставятся условия излучения Зоммерфельда на бесконечности.

С помощью подхода, впервые предложенного В.А. Кондратьевым [3], удается получить следующее представление радиальной компоненты электрического поля задачи дифракции в окрестности ребра диэлектрического клина:

$$\begin{aligned} E_r = \\ = \chi \sum_{-\delta<\nu_k^{(1)}<1} r^{\nu_k^{(1)}-1} \left\{ C_k^{(1)} \cos\left[(\pi-\varphi)\nu_k^{(1)}\right] + \right. \\ \left. + D_k^{(1)} \cos\left[(\pi-|\omega_0-\varphi|)\nu_k^{(1)}\right] \right\} + \chi \sum_{-\delta<\nu_k^{(2)}<1} r^{\nu_k^{(2)}-1} \left\{ C_k^{2} \cos\left[(\pi-\varphi)\nu_k^{(2)}\right] + \right. \\ \left. + D_k^{(2)} \cos\left[(\pi-|\omega_0-\varphi|)\nu_k^{(2)}\right] \right\} + \Re(r,\varphi), \end{aligned} \tag{3}$$

где $\nu_k^{(1)}$ и $\nu_k^{(2)}$ — решения уравнений

$$\begin{aligned} &\sin \pi\nu_k^{(1)} - \alpha \sin\left(\pi\nu_k^{(1)} - \nu_k^{(1)}\omega_0\right) = 0, \\ &\sin \pi\nu_k^{(2)} + \alpha \sin\left(\pi\nu_k^{(2)} - \nu_k^{(2)}\omega_0\right) = 0, \\ &\alpha = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1} \end{aligned} \tag{4}$$

(кроме $\nu_k = 0$), $\chi(r) = \begin{cases} 1, r \le d/2 \\ 0, r > d, \end{cases}$ $\chi(r) \in C^\infty$— срезающая функция, $\Re(r,\varphi)$ — гладкая часть решения.

Заключение

Представление поля в окрестности ребра диэлектрического клина позволяет повысить точность математического моделирования дифракции электромагнитного поля на сложных телах, содержащих клиновидные структуры. Знание точного вида особенности электромагнитного поля позволяет точно приблизить сингулярную часть решения и свести задачу к аппроксимации гладкой части, что дает возможность получить скорость сходимости приближенного решения к точному, соответствующую гладкому случаю.

Литература

1. *Боголюбов А. Н., Могилевский И. Е., Свешников А. Г.* Асимптотическое представление электромагнитного поля диэлектрического волновода в окрестности угловой точки линии разрыва диэлектрической проницаемости // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. — 2015. — Т. 55, № 3. — С. 446–459.

2. *Боголюбов А. Н., Могилевский И. Е., Шушарин М. М.* Сингулярная часть электромагнитного поля в задачах дифракции на телах с рёбрами формы для различных типов граничных условий // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. — 2024. — Т. 64, № 11. — С. 1–14.
3. *Кондратьев, В. А.* Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками // Труды Московского Математического Общества. — 1967. — Т. 16. — С. 227—313.

Магниторотационная неустойчивость в вертикально стратифицированных кеплеровских аккреционных дисках

Magnetorotational Instability in Vertically Stratified Keplerian Accretion Discs

Парусов К.Ю., Постнов К.А., Шакура Н.И.

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Государственный астрономический институт имени П. К. Штернберга, Москва, РФ

parusovky@my.msu.ru

Исследована магниторотационная неустойчивость в кеплеровском диске с вертикальным однородным магнитным полем и политропным распределением плотности по цилиндрической z-координате. Линеаризованная система уравнений идеальной магнитной гидродинамики сведена к уравнению шестого порядка. Для планарных возмущений проведены локальный и нелокальный модальные анализы, получены дискретные вертикальные моды и оценка критического магнитного поля.

Введение

Аккреция вещества в дифференциально вращающемся диске требует переноса углового момента от внутренних слоёв к внешним [1]. Кеплеровское течение устойчиво по центробежному критерию Рэлея, однако при наличии магнитного поля в проводящей среде может развиваться магниторотационная неустойчивость (МРН) [2]. Она рассматривается как один из механизмов возбуждения турбулентности и переноса углового момента в аккреционных дисках.

При локальном модальном анализе пространственная зависимость возмущений задаётся гармоническими функциями. Нелокальный подход позволяет учитывать границы течения и определять допустимые моды как решения краевой задачи, его применение к радиальной структуре кеплеровских дисков обсуждается в [3]. Цель настоящей работы — исследовать влияние вертикальной стратификации на МРН и сопоставить результаты локального анализа со спектром вертикальной краевой задачи.

Модель и общее уравнение для возмущений

Рассматривается тонкий диск с кеплеровским вращением $\Omega(r) \propto r^{-3/2}$, пронизанный однородным вертикальным магнитным полем B_0. Используются уравнения идеальной МГД и приближение Буссинеска: возмущения плотности сохраняются только в силе плавучести. Вертикальная плотность задаётся политропным профилем

$$\rho_0(z) = \rho_c \left(1 - \frac{z^2}{z_0^2}\right)^n. \qquad (1)$$

Здесь ρ_c — плотность в плоскости симметрии, z_0 — полутолщина диска. Основной модельный случай $n = 3/2$ соответствует постоянной фоновой энтропии; для сравнения рассматривается однородная плотность, $n = 0$. Альфвеновская скорость равна $c_A(z) = B_0/\sqrt{4\pi\rho_0(z)}$.

Для осесимметричных возмущений с зависимостью $f(z)e^{i\omega t - ik_r r}$ проводится локальный анализ по радиусу с сохранением вертикальных производных. Последовательное исключение возмущений давления, магнитного поля и остальных компонент скорости приводит к дифференциальному уравнению шестого порядка для

$u_r(z)$. В общей постановке сохраняются радиальное волновое число k_r, вертикальная скорость u_z и частота плавучести N_z. Полученное уравнение задаёт основу для дальнейшего решения полной вертикальной спектральной задачи.

Локальный анализ планарных возмущений

Для аналитического исследования выделяется планарный предел $k_r = 0, u_z = 0$. В локальной аппроксимации вблизи плоскости симметрии с учётом структурной поправки для $n = 3/2$ получено биквадратное дисперсионное соотношение. Его две ветви имеют вид

$$\widetilde{\omega}^2 = a\kappa^2 + \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + a\kappa^2(4+3a)}, \quad a = \left(\frac{c_A(0)}{c_S}\right)^2. \tag{2}$$

Здесь $\widetilde{\omega} = \omega/\Omega$, $\kappa = k_z z_0$, $c_S = \Omega z_0$ — характерная скорость порядка скорости звука. При $a > 0$ нижняя ветвь неустойчива, если $\widetilde{\omega}^2 < 0$, то есть $0 < \kappa^2 < 3(1+a)/a$. Рост магнитного поля сужает диапазон неустойчивых волновых чисел. При однородной плотности максимальный инкремент равен $3\Omega/4$ и не зависит от поля, тогда как в рассматриваемой локальной стратифицированной модели он увеличивается с ростом a. Это отличие связано с вертикальными производными альфвеновской скорости.

Глобальный анализ планарных возмущений

В планарном пределе вертикальная зависимость возмущений исследуется без гармонического анзаца по z. Вводится оператор $L = c_A^2(z)d^2/dz^2$, позволяющий записать уравнение четвёртого порядка в виде

$$\omega^2(\Omega^2 - \omega^2)u_r + \left(\frac{d\Omega^2}{d\ln r} - 2\omega^2\right)Lu_r - L^2u_r = 0. \tag{3}$$

Подход с выделением собственных функций вертикального оператора использован в [4]. Для профиля (1) при $n = 3/2$ и координате $x = z/z_0$ соответствующая задача на собственные значения принимает вид

$$\Phi_j''(x) + E_j(1-x^2)^{3/2}\Phi_j(x) = 0, \quad \Phi_j'(\pm 1) = 0. \tag{4}$$

Условия Неймана следуют из принятого требования отсутствия радиального возмущения магнитного поля на границах диска. Собственные функции Φ_j задают вертикальные профили u_r. Индекс j обозначает номер моды и отличается от показателя политропы n. Решение задачи (4) методом конечных разностей даёт первые собственные значения $E_0 = 0$, $E_1 \simeq 6{,}46$, $E_2 \simeq 22{,}67$, $E_3 \simeq 48{,}48$. Первые моды представлены на рисунке 1.

Для каждой вертикальной моды $L\Phi_j = -\lambda_j\Phi_j$, где $\lambda_j = E_j c_A^2(0)/z_0^2$ — размерное собственное значение. Подстановка в (3) при кеплеровском вращении даёт

$$\omega^4 - \left(\Omega^2 + 2\lambda_j\right)\omega^2 + \lambda_j\left(\lambda_j - 3\Omega^2\right) = 0. \tag{5}$$

Нетривиальная мода неустойчива при $0 < \lambda_j < 3\Omega^2$. Нулевая мода $E_0 = 0$ не приводит к экспоненциальному росту. Поскольку первое ненулевое собственное значение определяет наименьшее магнитное натяжение, граница подавления всех неустойчивых мод равна

$$c_{A,\mathrm{cr}}(0) = \sqrt{\frac{3}{E_1}}\,\Omega z_0 \simeq 0{,}68\, c_S. \tag{6}$$

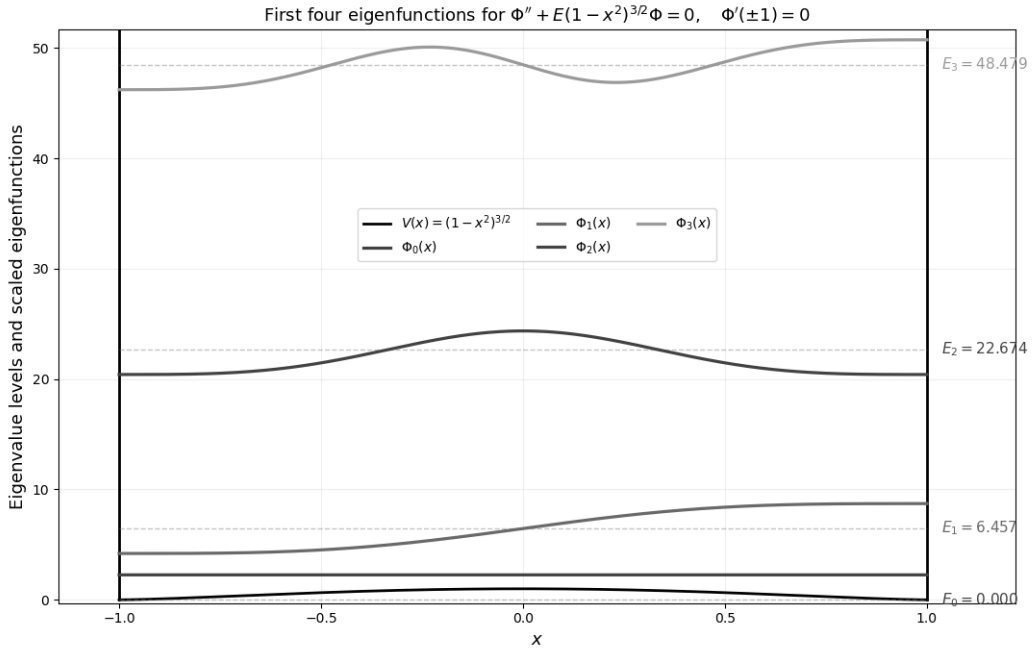


Рисунок 1. Первые собственные функции и собственные значения вертикальной краевой задачи (4)

Эта оценка относится к политропной планарной модели с принятыми граничными условиями. Спектральное решение полной задачи шестого порядка требует отдельной постановки граничных условий и в настоящую оценку не входит.

Заключение

Учет вертикальной структуры позволил получить общее уравнение шестого порядка и исследовать локальную зависимость области МРН и максимального инкремента от фонового поля. В упрощённой планарной постановке найдены дискретные вертикальные моды и определён критический уровень магнитного поля. Дальнейшая работа направлена на решение полной спектральной задачи с радиальной зависимостью возмущений и вертикальными движениями.

Работа выполнена при поддержке РНФ, проект № 25-12-00012.

Литература

1. *Shakura N. I., Sunyaev R. A.* Black holes in binary systems. Observational appearance // Astronomy & Astrophysics. 1973. Vol. 24. P. 337–355.
2. *Balbus S. A., Hawley J. F.* A powerful local shear instability in weakly magnetized disks. I. Linear analysis // The Astrophysical Journal. 1991. Vol. 376. P. 214–222.
3. *Шакура Н. И., Постнов К. А., Колесников Д. А., Липунова Г. В.* Магниторотационная неустойчивость в кеплеровских дисках: нелокальный подход // Успехи физических наук. 2023. Т. 193, № 12. С. 1340–1355.
4. *Gammie C. F., Balbus S. A.* Quasi-global, linear analysis of a magnetized disc // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 1994. Vol. 270. P. 138–152.

Молния – естественный источник синхротронного излучения рентгеновских и гамма-фотонов

Lightning as a Natural Source of Synchrotron Radiation of X-Ray and Gamma-Ray Photons

Петров Н.И.

Научно-технологический центр уникального приборостроения РАН, Москва, РФ

petrovni@mail.ru

Аннотация. Предложена физическая модель формирования вихревого тока в плазменном канале молниевых разрядов вследствие аномального эффекта Холла, вызванного явлением релятивистского спин-орбитального взаимодействия. Показано существование быстрых электромагнитных поверхностных плазмонных волн (ППВ), распространяющихся вдоль канала молниевого разряда со скоростью, близкой к скорости света в вакууме. Это позволяет рассматривать канал молниевого разряда как ускоритель заряженных частиц, генерирующий микроволновое, рентгеновское, гамма- и радиочастотное излучение импульсом тока, движущимся по спиральной траектории, с помощью механизмов синхротронного и циклотронного излучения.

Введение

Молния – одно из самых энергетически мощных физических явлений в атмосфере. Недавно было обнаружено, что молния является источником земных гамма-вспышек – одного из самых мощных природных фотонных излучений на Земле [1]. Механизм возникновения высокоэнергетического излучения молнией до сих пор неясен. Рентгеновское и γ-излучение, наблюдаемое при вспышках молний и длинных разрядах в атмосфере, обычно связывают с тормозным излучением убегающих электронов высокой энергии [2]. Однако точный механизм, ответственный за образование электронов с высокой энергией, до конца не изучен.

В настоящей работе предложен альтернативный физический механизм формирования рентгеновского и гамма-излучения, вызванного поляризационным током и связанным с ним электромагнитным полем, движущимся с релятивистской скоростью вдоль изогнутого канала молниевого разряда. Современные теоретические модели высокоэнергетического излучения молнии, основанные на релятивистских расчетах лавинного убегания, не могут объяснить обнаруженное излучение в диапазоне от 10 до 100 МэВ [3, 4]. Некоторые основные свойства, такие как спектр излучения, энергия отсечки, поляризация и диаграмма направленности излучения, все еще нуждаются в объяснении. Отметим, что предлагаемый механизм синхротронного излучения [5], в отличие от существующих моделей, не требует наличия крупномасштабной области электрического поля высокой интенсивности для ускорения электронов и затравочных частиц, необходимых для релятивистских процессов лавинообразного распространения убегающих электронов.

Поверхностные плазмонные волны, распространяющиеся вдоль канала молнии

На рис. 1 представлены зависимости скорости и длины распространения ППВ от частоты и проводимости канала. Расчеты показывают существование быстрых электромагнитных поверхностных волн, распространяющихся вдоль канала молниевого разряда со скоростью, близкой к скорости света в вакууме. Установлено, что для высокочастотных поверхностных плазмонных волн ультрарелятивистские скорости достигаются при проводимостях и радиусах разрядного канала, характерных для молнии.

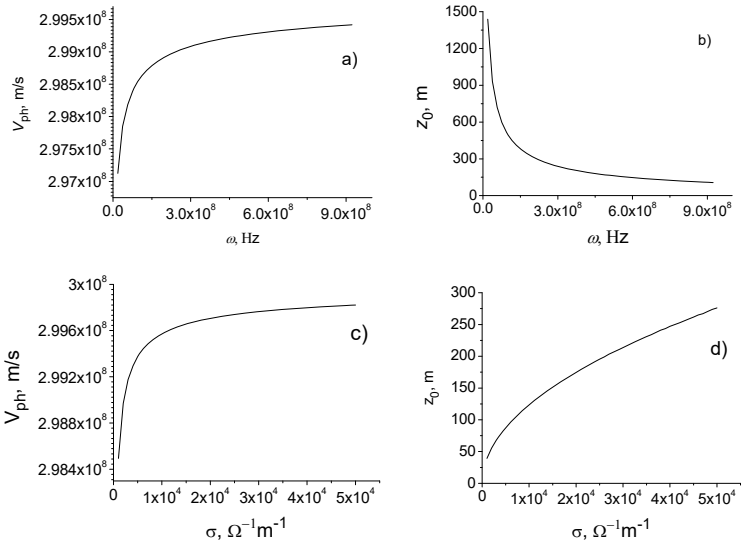


Рисунок 1. Зависимости скорости (a, c) и длины распространения (b, d) от частоты (a, b), и проводимости канала (c, d). (a, b) – $\sigma = 10^4$ Ом$^{-1}$м$^{-1}$; (c, d) – $\omega = 10^9$ Гц.

Формирование спиральной структуры канала пробоя молнии

Как было показано выше, импульсы тока обратного удара в молнии распространяются с релятивистскими скоростями, близкими к скорости света в вакууме. Поэтому для описания поведения частиц в канале грозового разряда целесообразно использовать уравнение Дирака. В этом случае гамильтониан, описывающий электрон во внешнем электрическом поле, имеет вид [6]:

$$\widehat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + e\Phi - \frac{\hat{p}^4}{8m^2c^2} - \frac{e\hbar}{2m^2c^2}\hat{s}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{p}) - \frac{e^2\hbar^2}{8m^2c^2}div\boldsymbol{E}, \quad (1)$$

где $\boldsymbol{E} = -\nabla\Phi$ – электрическое поле, e – заряд электрона, m – масса электрона, ħ – постоянная Планка, c – скорость света, $\hat{s}$ – оператор спина электрона, и $\hat{p} = -i\hbar\nabla$ - оператор импульса.

Последние три члена уравнения (1) описывают релятивистские поправки порядка $\left(\frac{v}{c}\right)^2$ к $\frac{\hat{p}^2}{2m} + e\Phi$. На рис. 2 приведены фотографии каналов пробоя лабораторной искры и молнии в атмосфере.

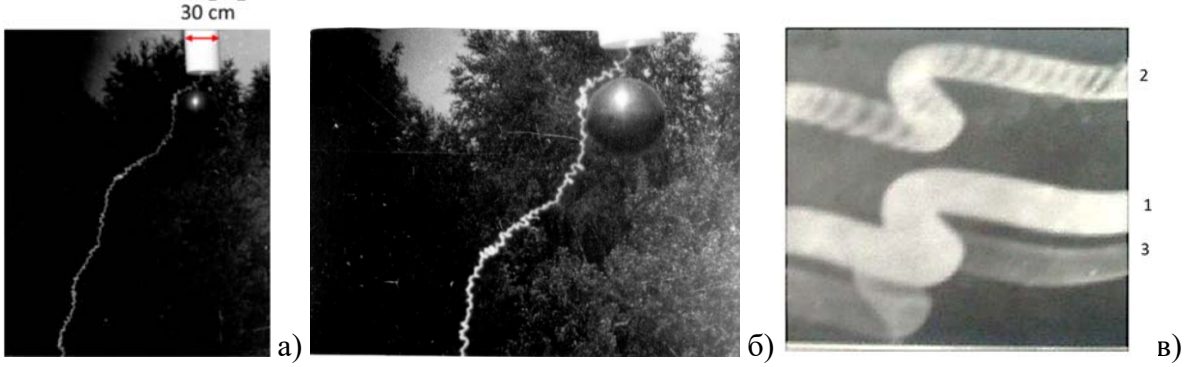


Рисунок 2. Траектория вихревого тока в лабораторном положительном искровом разряде в воздушном промежутке длиной 6 м [7]: Шаг спирали равен 1.5 ÷ 2.5 см, диаметр спирали ≈ 3 см, диаметр металлической сферы = 30 см. (б) Увеличенное изображение верхней части (а). (в) Фотография, полученная путем увеличения части изображения канала молнии [8]: 1 – начальная стадия, 2 – промежуточная стадия, 3 – последняя стадия.

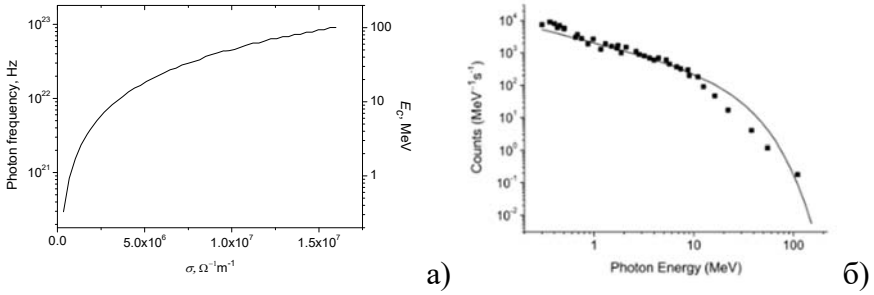
Синхротронное излучение молнии

В ультрарелятивистском случае полная мощность излучения определяется как [9]:

$$W = \frac{2}{3}\frac{e^2 c}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\alpha^4\gamma^4}{R^2}, \quad (2)$$

где $\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$ – релятивистский фактор Лоренца, ε_0 – диэлектрическая постоянная вакуума, $\alpha = \frac{v}{c}$, v – скорость ППВ, и R – радиус кривизны изгиба траектории.

На рис. 3 представлены зависимости частоты и энергии фотонов от проводимости канала молнии, а также нормированный спектр излученных фотонов.



а) б)

Рисунок 3. (а) частота и энергия фотонов как функция от проводимости канала. $\omega = 3.1 \cdot 10^9$ Гц; (б) нормированный спектр фотонов (сплошная кривая) и измеренный спектр [4].

Заключение

В работе показано, что теоретические модели формирования вихревого тока в плазменном канале молнии и генерации рентгеновского и гамма-излучения по механизму синхротронного излучения, согласуются с данными наблюдений [4], [10], [11].

Литература

1. *Fishman, G. J., et al.* Discovery of intense gamma-ray flashes of atmospheric origin. Science — 1994. — V. 264. — P. 1313-1316.
2. *Gurevich A.V., Milikh G.M., and Roussel-Dupre R.* Runaway electron mechanism of air breakdown and preconditioning during a thunderstorm // Phys. Lett. A. — 1992. —V. 165. —P. 463-468.
3. *Dwyer J.R. and Smith D.M.* A comparison between Monte Carlo simulations of runaway breakdown and terrestrial gamma-ray flash observations // Geophys. Res. Lett. — 2005. — V. 32. — L22804.
4. *Tavani M., Marisaldi M., Labanti C., et al.* Terrestrial Gamma-Ray Flashes as Powerful Particle Accelerators // Phys. Rev. Lett. — 2011. — V. 106. — P. 018501.
5. *Petrov N.I.* Synchrotron mechanism of X-ray and gamma-ray emissions in lightning and spark discharges // Sci. Rep. — 2021. — V. 11. — P. 19824.
6. *Берестецкий В.Б., Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П.* Квантовая электродинамика. — 4-е изд., ФИЗМАТЛИТ, 2002.—720 с.
7. *Petrov N.I., Petrova G.N.* Physical mechanisms of high-frequency electromagnetic field generation by a Lightning discharge // Proceedings EMC'99, Zurich, Switzerland — 1999. — P. 581-586.
8. *Tikhonov I.A.* Evolution of the linear lightning in the course of the electric spark // Eastern European Scientific Journal. - 2015, - V. 2. – P. 22-27.
9. *Тернов И.М.* Синхротронное излучение // УФН — 1995. — Т. 165. — С. 429–456.
10. *Parkevich E.V., Shpakov K.V., Baidin I.S., Rodionov A.A., Khirianova A.I., Bolotov Ya.K., and Ryabov V.A.* Angular anisotropy of hard x rays produced by laboratory atmospheric discharges // J. Appl. Phys. — 2024. — V. 136. — P. 163302.

11. *Petrov N.I.* Lightning as a natural source of synchrotron radiation of X-ray and gamma-ray photons // Phys. Rev. E. – 2025. – V. 111. – 035205.

Гармонические электромагнитные волны в средах, квадратично нелинейных по пространственным переменным

Harmonic Electromagnetic Waves in Media with Quadratic Nonlinearity with Respect to Spatial Variables

Плещинский Н. Б. [1], ***Шипило А. Э.*** [1]

1) *Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт вычислительной математики и информационных технологий, Казань, РФ.*

pnb@kpfu.ru, shadowfire-1@mail.ru

Аннотация. Исследован ряд задач теории распространения и дифракции электромагнитных волн в предположении, что среда квадратично нелинейная по пространственным переменным.

Введение

Нелинейность среды учитывается в уравнениях Максвелла в выражении вектора поляризации $P(E)$ [1]. Если диэлектрическая проницаемость ε квадратично зависит от вектора E, то появляются волны с комбинационными временными и пространственными частотами. Упрощает дело предположение о гармонической зависимости компонент поля от времени. В данной работе предполагается, что квадратичная нелинейность среды имеет место только по пространственным переменным.

Гармонические волны в квадратично нелинейных средах

Нелинейное уравнение Гельмгольца. Гармонически зависящая от времени функция имеет вид $f(r,t) = A(r)\cos(\varphi(r) - \omega t)$, ее комплексная амплитуда $f(r) = A(r)[\cos\varphi(r) + i\sin\varphi(r)]$. Тогда $f^2(r) = A^2(r)[\cos 2\varphi(r) + i\sin 2\varphi(r)]$.

Пусть каждая компонента нелинейной части вектора поляризации имеет вид

$$P_{x,y,z}(r,t) = A^2_{x,y,z}(r)\cos\big(2\varphi_{x,y,z}(r) - \omega\big). \quad (1)$$

В этом случае уравнения Максвелла для комплексных амплитуд имеют вид $rot\, H = -i\omega\varepsilon_0\varepsilon E - i\omega E^2, rot\, E = i\omega\mu_0\mu H$. Пусть также компоненты поля не зависят от координаты y. Тогда ненулевые компоненты комплексных амплитуд электрического и магнитного векторов H-поляризованного поля выражаются через потенциальную функцию $E_y(x,z)$, которая удовлетворяет нелинейному уравнению Гельмгольца вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k^2 u + \nu u^2 = 0. \quad (2)$$

Нелинейные собственные волны плоского волновода. Будем искать в полосе $0 < x < a$ ненулевые решения уравнения (1), распространяющиеся в направлении оси z и равные нулю на границах полосы, в виде

$$u(x,z) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(z)\sin\frac{\pi n}{a}x. \quad (3)$$

Тогда

$$u^2(x,z) = \sum_{m_1=1}^{+\infty}\sum_{m_2=1}^{+\infty} u_{m_1}(z)\,u_{m_2}(z)\sin\frac{\pi m_1}{a}x\sin\frac{\pi m_2}{a}x. \quad (4)$$

После проектирования на ортогональную систему функций имеем

$$u_k''(z) + \gamma_k^2 u_k(z) + \nu\sum_{m_1=1}^{+\infty}\sum_{m_2=1}^{+\infty} u_{m_1}(z)\,u_{m_2}(z)I_{m_1 m_2 k} = 0, k = 1,2,\ldots, \quad (5)$$

$$I_{m_1,m_2,k} = \frac{2}{a}\int_0^a \sin\frac{\pi m_1}{a}x \cdot \sin\frac{\pi m_2}{a}x \cdot \sin\frac{\pi k}{a}x \cdot dx. \quad (6)$$

Функции $u_k(z)$ будем искать в виде разложений по малому параметру ν:

$$u_k(z) = u_{k0}(z) + \nu u_{k1}(z) + \nu^2 u_{k2}(z) + \cdots, \quad (7)$$

эти функции находятся как решения уравнений

$$u''_{k0}(z) + \gamma_k^2 u_{k0}(z) = 0, \gamma_n = \sqrt{k^2 - \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2}, n = 1,2, \ldots$$
$$u''_{k1}(z) + \gamma_k^2 u_{k1}(z) + \sum_{m_1=1}^{+\infty}\sum_{m_2=1}^{+\infty} u_{m_{1_0}}(z)\, u_{m_{2_0}}(z) I_{m_1 m_2 k} = 0, \ldots, \quad (8)$$

точнее, как суммы решений однородного уравнения вида $c_{kj}e^{i\gamma_k z}$ и частных решений.

По аналогии с тем, как строятся функции Матье [2], потребуем, чтобы при $\nu \to 0$ функция $u(x,z)$ совпала с потенциальной функцией ТЕ-волны волновода с номером l. Точнее, чтобы $u_{l0}(z) = e^{i\gamma_l z}$ и $u_{k0}(z) = 0$ при $k \neq l$. Тогда $c_{l0} = 1$ и $c_{k0} = 0, k \neq l$. Поэтому уравнение для функций $u_{k1}(z)$ принимает вид $u''_{k1}(z) + \gamma_k^2 u_{k1}(z) = -e^{2i\gamma_l z} I_{llk}$ и его решения

$$u_{k1}(z) = c_{k1}e^{i\gamma_k z} + d_{k1}e^{2i\gamma_l z}, d_{k1} = \frac{1}{4\gamma_l^2 - \gamma_k^2} I_{llk}. \quad (9)$$

Можно считать, что $c_{k1} = 0$. И так далее …

Отражение плоской волны от нелинейного полупространства. Пусть на границу раздела линейной и нелинейной сред набегает плоская волна $u^0(x) = e^{ikx}$ (одномерная задача). Потенциальная функция $u = E_y$ должна удовлетворять уравнению $u'' + k^2 u = 0$ в линейной среде при $x < 0$ и уравнению $u'' + k^2 u + \nu u^2 = 0$ в нелинейной среде при $x > 0$. Ищем функции $u^-(x) = ae^{-ikx}, x < 0$ и $u(x), x > 0$. Из условий сопряжения следует, что $u'(0) + iku(0) = 2ik, a = u(0) - 1$. Первое равенство – граничное условие для нелинейного уравнения.

Будем искать решение нелинейного уравнения в виде (ν – малый параметр)

$$u(x) = u_0(x) + \nu u_1(x) + \nu^2 u_2(x) + \cdots \quad (10)$$

Имеем последовательность граничных задач

$$u_0'' + k^2 u_0 = 0,\ u_0'(0) + iku_0(0) = 2ik;$$
$$u_1'' + k^2 u_1 + u_0^2 = 0, u_1'(0) + iku_1(0) = 0; \quad (11)$$
$$u_2'' + k^2 u_2 + 2u_0 u_1 = 0, u_2'(0) + iku_2(0) = 0;$$

и так далее. Очевидно, $u_0(x) = e^{ikx}$. С учетом условия на бесконечности

$$u_1(x) = -\frac{1}{2k^2}e^{ikx} + \frac{1}{3k^2}e^{2ikx},$$
$$u_2(x) = \frac{1}{3k^4}e^{ikx} - \frac{1}{3k^4}e^{2ikx} + \frac{1}{12k^4}e^{3ikx} \ldots \quad (12)$$

Следовательно,

$$a = -\frac{\nu}{6k^2} + \frac{\nu^2}{12k^4} - \frac{\nu^3}{18k^6} + \cdots \quad (13)$$

Заключение

Если среда квадратично нелинейная только по пространственным переменным, то при малом коэффициенте нелинейности потенциальные функции собственных волн плоского волновода и решения задач об отражении волны от границы раздела линейной и нелинейной сред могут быть получены в виде сходящихся рядов.

Литература

1. *Никольский В.В.* Электродинамика и распространение радиоволн. — М.: Наука, 1978. — 544 с.
2. *Мак-Лахлан Н.В.* Теория и приложения функций Матье. — М.: ИЛ, 1953. — 476 с.

Асимптотическое разложение решения задач электромагнитной дифракции на объектах с коническими точками

Asymptotic Expansion of the Solution to Problems of Electromagnetic Diffraction on Objects with Conical Points.

***Ровенко В.В.*[2], Боголюбов А.Н.[1], Могилевский И.Е.[1]**

1) Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, физический факультет, Москва, РФ; 2) НИЦ «Курчатовский институт», Москва, РФ.

rovenko.vladimir@physics.msu.ru

Аннотация. В работе рассматривается подход к актуальным задачам электродинамики, связанным с электромагнитной и скалярной дифракцией на объектах со сложной геометрией, содержащих конические точки. Изучается электромагнитный векторный случай с использованием потенциалов Дебая, сводящих задачу к скалярным краевым задачам Дирихле и Неймана с использованием метода явного выделения особенностей. Строится асимптотическое представление поля в окрестности вершины конуса. Полученные результаты имеют теоретическое и прикладное значение для проектирования маскирующих оболочек, антенных систем и микроволновых устройств.

Введение

В настоящее время весьма актуальными являются задачи скалярной и электромагнитной дифракции на сложных структурах при наличии рёбер и конических точек на их границах. Наличие таких особенностей приводит к появлению сингулярностей поля в их окрестности, что существенно усложняет применение численных методов. Одним из эффективных способов преодоления этих проблем является явное выделение особенности решения, то есть построение асимптотического представления решения в окрестности особой точки границы. При этом существенно используются результаты по асимптотике решений эллиптических краевых задач, представленные в работах В.А. Кондратьева [1], а также С.А. Назарова и Б.А. Пламеневского [2]. В нашей работе основной акцент сделан на трёхмерной задаче электромагнитной дифракции на идеально проводящем теле с конической точкой. Скалярный случай используется как модельный для отработки метода выделения особенности.

Постановка и решение задачи

Постановка задачи. Рассматривается трёхмерная задача электромагнитной дифракции на ограниченном идеально проводящем теле, содержащем коническую точку. Источники сосредоточены в конечной области D_0, находящейся вне тела. Для гармонической зависимости $e^{-i\omega t}$ уравнения Максвелла имеют вид [3]:

$$rot\,\boldsymbol{H} = -ik\boldsymbol{E} + \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}, \operatorname{supp}\boldsymbol{j} \subset D_0 \subset \mathbb{R}^3\backslash\Omega$$
$$rot\,\boldsymbol{E} = ik\boldsymbol{H}, div\,\boldsymbol{H} = 0, div\,\boldsymbol{E} = 0. \quad (1)$$

На идеально проводящей поверхности ставятся граничные условия:

$$(\boldsymbol{H},\boldsymbol{n})|_{\partial\Omega} = 0, [\boldsymbol{E},\boldsymbol{n}]|_{\partial\Omega} = 0, \quad (2)$$

На бесконечности выполняются условия излучения Зоммерфельда. В окрестности конической точки ставится условие Мейкснера, требующее конечности плотности электромагнитной энергии в любой ограниченной области, включая окрестность особенности:

$$\lim_{r\to\infty} r\left(\overline{\nabla}\times \boldsymbol{E}, \boldsymbol{H} - ik\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}\times\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right) = 0\,,\ \int\limits_{B_R\cap\Omega} (|\boldsymbol{E}|^2 + |\boldsymbol{H}|^2)\,dV < \infty \tag{3}$$

Это условие выделяет физически допустимые сингулярности поля вблизи особенности границы.

Преобразования для построения решения. Для выделения сингулярной части поля в окрестности конической точки используется представление решения через потенциалы Дебая U и V:

$$\boldsymbol{E} = rot\ rot\ (\boldsymbol{e}_r r U_r) + ik\ rot\ (\boldsymbol{e}_r r V_r), \tag{4}$$

$$\boldsymbol{H} = -ik\ rot\ (\boldsymbol{e}_r r U_r) + rot\ rot\ (\boldsymbol{e}_r r V_r) \tag{5}$$

Сначала задача рассматривается в бесконечном конусе. В дальнейшем использование срезающей функции позволит исходную задачу дифракции свести к рассматриваемой задаче. Делая преобразования как в [4] получим, что потенциалы U и V удовлетворяют скалярным уравнениям Гельмгольца:

$$\Delta U = f_1(M), U|_{\theta=\alpha} = 0, \tag{6}$$

$$\Delta V = f_2(M), \frac{\partial V}{\partial\theta}\Big|_{\theta=\alpha} = 0. \tag{7}$$

Здесь (r,θ,φ) – сферическая система координат, α – половина угла раствора конуса. В окрестности конической точки для потенциалов выполняется условие

$$\Psi\sim r^{\beta}, \beta > -{}^{3}\!/_{2}, r\to 0, \tag{8}$$

а физическое требование конечности энергии поля приводит к более сильному ограничению $\beta > 1/2$. Следуя В.А. Кондратьеву, введём пространство функций V_γ^l с нормой:

$$\|U\|^2_{V_\gamma^l} = \sum_{s=0}^{l}\int\limits_{D_0} r^{2\gamma-2(l-s)}\left|\frac{\partial^s U}{\partial x^s}\right|^2 dV. \tag{9}$$

После замены $\tau = \ln\frac{1}{r}$ и преобразования Фурье по τ для образов $\widehat{U}$, $\widehat{V}$ получаются уравнения:

$$(i-\lambda)\lambda\widehat{U} + \Delta_{\theta,\varphi}\widehat{U} = \hat{F}. \tag{10}$$

Решение ищется в виде рядов по присоединённым функциям Лежандра:

$$\widehat{U}(\lambda,\theta,\varphi) = \sum_{n,m}\frac{\hat{F}_{nm}(\lambda)}{(i-\lambda)\lambda - n_m(n_m+1)}P_{n_m}^{(m)}(\cos\theta)e^{im\varphi}. \tag{11}$$

Особые точки — полюсы первого порядка:

$$\lambda_{1,2} = \frac{i}{2}[1\pm(2n_m+1)] \Rightarrow \lambda_1 = i(n_m+1), \lambda_2 = -in_m. \tag{12}$$

Применение теоремы о вычетах даёт асимптотическое представление решения:

$$U(r,\theta,\varphi) = \Re + \sum_{h_1<n_m+1<h_2} \mathrm{C}_{n,m} r^{n_m+1} P_{n_m}^{(m)}(\cos\theta)e^{im\varphi}. \tag{13}$$

Аналогичное представление справедливо для V. Для задачи Дирихле n_m являются корнями уравнения (14), а для задачи Неймана — корнями уравнения (15):

$$P_{n_m}^{(m)}(\cos\alpha) = 0, \tag{14}$$

$$\frac{\partial P_{n_m}^{(m)}(\cos\theta)}{\partial\theta}\Big|_{\theta=\alpha} = 0. \tag{15}$$

Использование срезающей функции $\chi(r)$ позволяет перейти от задачи в бесконечном конусе к исходной задаче дифракции.

Наиболее существенное различие между задачами для потенциалов U и V проявляется в спектре собственных чисел ν_m (обозначаемые ранее как n_m), которые определяют показатели степенного поведения решений вблизи вершины конуса. Для

задачи Дирихле минимальное собственное число ν_m^D всегда положительно и для большинства практически важных случаев превышает единицу. Например, для конуса с углом раствора 2α наименьшее собственное число при $m = 0$ приближённо равно $\nu_0^D \approx \pi/(\pi - \alpha)$. Это означает, что электрический потенциал вблизи вершины ведёт себя как $r^{\nu_0^D}$ с показателем степени, большим или равным единице. Для задачи Неймана минимальное собственное число ν_{min}^N может принимать значения, сколь угодно близкие к нулю при $\alpha \to \pi$, что принципиально влияет на регулярность решения: при острых конусах ($\alpha < \pi/2$, т.е. полный угол $< \pi$) $\nu_{min}^N > 1$; тупых конусах ($\alpha > \pi/2$, т.е. полный угол $> \pi$) $\nu_{min}^N < 1$; для полупространства ($\alpha = \pi/2$, т.е. полный угол π) $\nu_{min}^N = 1$; для щели (полный угол $\to 2\pi$): $\nu_{min}^N \to 0$. Таким образом, различные граничные условия приводят к качественно разным спектрам собственных чисел, что определяет принципиально разное поведение решений в окрестности сингулярности границы.

Влияние асимптотики потенциалов на электромагнитное поле

Подстановка асимптотических представлений (13) для потенциалов в формулы (4)–(5) позволяет установить характер сингулярностей компонент полей:

$$\boldsymbol{E} = rot\ rot\ (\boldsymbol{e}_r U_r) + ik\ rot\ (\boldsymbol{e}_r V_r) \sim r^{\nu_m^D - 2} + r^{\nu_m^N - 1}, \quad (16)$$

$$\boldsymbol{H} = -ik\ rot\ (\boldsymbol{e}_r U_r) + rot\ rot\ (\boldsymbol{e}_r V_r) \sim r^{\nu_m^D - 1} + r^{\nu_m^N - 2}. \quad (17)$$

Таблица 2. Наиболее сингулярные члены в разложениях полей и условия их преобладания.

Поле	Наиболее сингулярный член	Условие преобладания
$\boldsymbol{E}$	$r^{\nu_m^D - 2}$	$\nu_m^D - 2 < \nu_m^N - 1$
$\boldsymbol{E}$	$r^{\nu_m^N - 1}$	$\nu_m^D - 2 > \nu_m^N - 1$
$\boldsymbol{H}$	$r^{\nu_m^D - 1}$	$\nu_m^D - 1 < \nu_m^N - 2$
$\boldsymbol{H}$	$r^{\nu_m^N - 2}$	$\nu_m^D - 1 > \nu_m^N - 2$

Наиболее сингулярные члены в разложениях (16) и (17) определяют поведение полей при $r \to 0$ (Таблица 1).Так, в случае острого конуса ($\alpha < \pi/2$): $\nu_{min}^D > 1$, $\nu_{min}^N > 1$, оба поля имеют слабые сингулярности или ограничены. Условие Мейкснера (3) накладывает ограничения на показатели сингулярности. Для члена вида r^{ν} в компонентах поля в шаре радиуса R:

$$\int_{D_\varepsilon} r^{2\nu} r^2 \sin\theta\, dr = \int_{D_\varepsilon} r^{2\nu+2} \sin\theta\, dr < \infty \Rightarrow \nu > -3/2.$$

Для полей в случае тупого конуса: для электрического поля условие $\nu_m^N - 1 > -\frac{3}{2} \Rightarrow \nu_m^N > -\frac{1}{2}$ обычно выполняется, а вот для магнитного $\nu_m^N - 2 > -\frac{3}{2} \Rightarrow \nu_m^N > \frac{1}{2}$ может нарушаться для очень тупых углов. Таким образом, магнитное поле вблизи вершины тупого конуса может иметь более сильную сингулярность, чем электрическое поле, что соответствует физическому эффекту концентрации магнитного поля у тупых металлических вершин.

Заключение

Построено асимптотическое разложение решения трёхмерной задачи дифракции электромагнитной волны на ограниченном идеально проводящем теле, содержащем коническую точку, для условий Дирихле и Неймана. Показана возможность явного выделения сингулярной части поля и её отделения от гладкой составляющей. Метод может быть применён для задач с несколькими коническими особенностями, а также совмещён с численными методами для уточнения решения. Сингулярность определяется углом раствора конуса, типом граничного условия и размерностью задачи. Результаты

востребованы при проектировании маскирующих оболочек, антенных систем и микроволновых устройств.

Литература

1. *Кондратьев В. А.* Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими и угловыми точками // Тр. ММО, **16**, Издательство Московского университета, М., 1967, 209–292
2. *Назазаров С. А., Пламеневский Б. А.* Эллиптические задачи в областях с кусочно-гладкой границей. — М.: Наука, 1991. — 334 с.
3. *Свешников А. Г., Могилевский И. Е.* Избранные математические задачи теории дифракции. — М.: Издательство физического факультета МГУ, 2012. — 239 с.
4. *Rovenko V.V., Mogilevsky I.E.* Solution of boundary problems for elliptic equation in domains with conical or corner points // PIERS Proceedings 2017, United States, p. 2102-2105.

Изменение характера рассеянного металлическим треугольником импульсного сигнала в окрестностях максимумов интенсивности рассеяния

Change in the Character of a Pulse Signal Scattered by a Metallic Triangle in the Vicinity of Scattering Intensity Maxima

***Суюндуков И. С.*[1,2], *Лебедев А. М.*[2]**

1) *Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Москва, РФ; 2) Институт теоретической и прикладной электродинамики РАН, Москва, РФ*

suyundukov.is@phystech.edu, lebedev_am@mail.ru

Аннотация. В данной работе рассматривается нестационарная задача рассеяния электромагнитной волны на идеально проводящем треугольнике в приближении физической оптики. Падающая волна имеет произвольную форму и поляризацию, а рассеянная волна рассматривается в дальней зоне. В работе выводится критерий узкой направленности (малой угловой ширины) окрестностей конусов дифракционных лучей вокруг сторон треугольника в зависимости от спектральной характеристики падающей волны. Такое исследование представляет интерес при анализе вопросов повышения эффективности радиолокации, а также снижения интенсивности рассеяния объектом, поскольку в реальных условиях падающая электромагнитная волна не является монохроматической.

Введение

Рассеянный сигнал от металлического треугольника определяется его геометрией и спектральной характеристикой падающего сигнала. В отличие от монохроматического воздействия, при импульсном сигнале рассеянное поле является функцией не только направления наблюдения, но и времени.

Для характеристики пространственного распределения рассеянного импульса в каждом направлении рассматривалось максимальное по времени значение амплитуды рассеянного поля. На его основе строилась угловая диаграмма пиковых значений поля, позволяющая определить направления максимального рассеяния и оценить угловую ширину областей повышенной интенсивности рассеяния.

При анализе рассеяния в данной работе использовано приближение физической оптики, которое позволяет получить приемлемое описание рассеянного поля в окрестности конусов дифракционных лучей (КДЛ) при направлениях падения волны, близких к нормальному.

Описание работы

Ниже обсуждаются цели работы и принятые условия, описано решение нестационарной задачи двухпозиционного рассеяния на идеально проводящем

треугольнике в приближении физической оптики, получен критерий узкой направленности рассеяния в окрестностях КДЛ.

Постановка задачи. Рассматривается задача рассеяния электромагнитной волны на объекте с идеально проводящей поверхностью. Из удаленного источника на объект падает плоская электромагнитная волна произвольной формы и поляризации, напряженность электрического поля которой в свободном пространстве задается в следующем виде:

$$\mathbf{E}_{\text{пад}}(\mathbf{r},t)=\mathbf{E}\left(t-\frac{\mathbf{r}\mathbf{u}_0}{c}\right), \tag{1}$$

где $\mathbf{u}_0$ — единичный вектор в направлении падения волны, c — скорость света, а функция $\mathbf{E}(t)$ равна нулю в начале координат при $t \le t_0$, где t_0 — начальный момент времени.

Решение задачи в приближении физической оптики. В дальней зоне напряженности электрического и магнитного полей определяются через производную по времени от векторного потенциала поверхностного тока на треугольнике [1]:

$$\begin{cases}\mathbf{E}_{\text{расс}}(\mathbf{r},t)=\dfrac{1}{c}\left(\dfrac{\partial\mathbf{A}_{\triangle}(\mathbf{r},t)}{\partial t}\times\mathbf{u}\right)\times\mathbf{u};\\ \mathbf{H}_{\text{расс}}(\mathbf{r},t)=\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\mathbf{A}_{\triangle}(\mathbf{r},t)}{\partial t}\times\mathbf{u},\end{cases} \tag{2}$$

где $\mathbf{u}$ — единичный вектор в направлении точки наблюдения, c — скорость света. Здесь и далее используется система единиц Гаусса.

Введем обозначение для интеграла от падающего поля по времени

$$\mathbf{I}(t)=\int_{t_0}^{t}\mathbf{E}(\tau)d\tau. \tag{3}$$

В работе [2] получено решение данной задачи в приближении физической оптики. Производная от векторного потенциала по времени имеет следующий вид:

$$\frac{\partial\mathbf{A}_{\triangle}(\mathbf{r},t)}{\partial t}=\frac{S}{\pi r\tau_3}\,\mathbf{n}\times\left[\mathbf{u}_0\times\left(\frac{\mathbf{I}(T+\tau_2)-\mathbf{I}(T)}{\tau_2}-\frac{\mathbf{I}(T+\tau_1)-\mathbf{I}(T)}{\tau_1}\right)\right]. \tag{4}$$

Здесь S — площадь треугольника, $T = t - r/c + \mathbf{m}\mathbf{r}_1/c$, $\mathbf{m} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_0$, $\mathbf{r}_1$ — радиус-вектор первой вершины треугольника, $\tau_i = \mathbf{m}\mathbf{b}_i/c$, где $i = 1, 2, 3$, $\mathbf{b}_i$ — направляющие векторы сторон треугольника, $\mathbf{n}$ — вектор внешней нормали к поверхности треугольника.

Критерий малости угловой ширины конуса дифракционных лучей. Разложим падающее поле в интеграл Фурье:

$$\mathbf{E}(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathbf{S}_{\text{пад}}(\omega)e^{i\omega t}\frac{d\omega}{2\pi}. \tag{5}$$

Подставляя (5) в (3), а затем (3) в (4), имеем

$$\frac{\partial\mathbf{A}_{\triangle}(\mathbf{r},t)}{\partial t}=\frac{S}{\pi r\tau_3}\,\mathbf{n}\times$$
$$\times\left[\mathbf{u}_0\times\int_{-\infty}^{+\infty}\mathbf{S}_{\text{пад}}(\omega)e^{i\omega T}\left(e^{i\omega\tau_2/2}\frac{\sin\left(\frac{\omega\tau_2}{2}\right)}{\frac{\omega\tau_2}{2}}-e^{i\omega\tau_1/2}\frac{\sin\left(\frac{\omega\tau_1}{2}\right)}{\frac{\omega\tau_1}{2}}\right)\frac{d\omega}{2\pi}\right]. \tag{6}$$

Из спектра рассеянного сигнала получаем, что угловая окрестность КДЛ вокруг i-й стороны треугольника определяется неравенством

$$\left|\frac{\omega\tau_i}{2}\right|\leqslant\frac{\pi}{4}. \tag{7}$$

Далее, воспользовавшись определением τ_i и формулой $\omega\lambda = 2\pi c$, при небольших углах падения волны на треугольник получаем критерий узкой направленности (малой угловой окрестности) КДЛ вокруг стороны b_i треугольника

$$\lambda \ll b_i \sin\alpha_0, \tag{8}$$

где α_0 — угол между векторами $\mathbf{b}_i$ и $\mathbf{u}_0$.

Критерий означает, что основное рассеяние сосредоточено в узкой угловой окрестности КДЛ, если характерная длина волны падающего сигнала значительно меньше проекции соответствующей стороны треугольника на плоскость, перпендикулярную направлению падения.

Также при небольших углах падения можно оценить угловой размер окрестности КДЛ, где сосредоточена значительная интенсивность рассеяния:

$$|\Delta\alpha| \leqslant \frac{\lambda}{4b_i \sin\alpha_0}. \quad (9)$$

Заключение

Исследовано аналитическое решение нестационарной задачи рассеяния на идеально проводящем треугольнике в приближении физической оптики. Получен критерий узости угловой окрестности конуса дифракционных лучей, в которой сосредоточена основная часть энергии рассеяния, определяемый через угол падения и длину стороны треугольника и выполняющийся при достаточно малой характерной длине волны падающего сигнала. В другой формулировке можно утверждать, что КДЛ будет узким либо для импульсного сигнала с достаточно широким спектром, либо для радиосигнала с достаточно высокой несущей частотой. Проведена оценка ширины угловых окрестностей конусов дифракционных лучей.

Литература

1. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. Том 2. Теория поля. — М.: Физматлит, 2012. — 536 с.
2. *Лебедев А. М., Суюндуков И. С.* Аналитическое и численное решение нестационарной задачи рассеяния идеально проводящим треугольником в приближении физической оптики // Журнал радиоэлектроники. — 2026. — № 4.

Обобщение условий Щукина-Леонтовича для импедансных тел с ребром на границе

Generalization of Shchukin-Leontovich Boundary Condition for Impedance Bodies with Edge on the Boundary

Шушарин М. М, Могилевский И. Е., Боголюбов А. Н.

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, физический факультет, Москва, РФ

nirashush1999@gmail.com, imogilevsky@mail.ru, bogan7@yandex.ru

Аннотация. Рассматривается задача дифракции на теле высокой проводимости при наличии рёбер на границе. В окрестности ребра условия Щукина-Леонтовича неприменимы, так как радиус кривизны границы много меньше толщины скин-слоя. Работа посвящена построению приближённых граничных условий на проводящем цилиндре с ребром. Используется метод, впервые представленный в работах О.И. Паныча. Решение во внутренней области представляется в виде потенциала простого слоя, а во внешней – через функцию Грина. В этом случае условие на скачок нормальной производной принимает вид интегро-дифференциального уравнения. Устремляя в нём проводимость к бесконечности, можно получить приближённые соотношения для решения на границе.

Введение

Приближённые граничные условия, представленные в работах А.Н. Щукина и М.А. Леонтовича, были получены для задач дифракции на телах высокой проводимости с достаточно гладкой границей [1]. Условия Щукина-Леонтовича, также называемые импедансными, в широком ряде задач позволяют избежать расчёта электромагнитного поля внутри проводника и более точны, чем условия идеальной проводимости. Результаты, изначально полученные для плоских границ из соображений

геометрической оптики, были существенно расширены в работах О.И. Паныча [2], где для границ конечной кривизны получены старшие порядки аппроксимации, зависящие от кривизны границы.

Одним из критериев применимости импедансных условий является малость толщины скин-слоя по сравнению с радиусом кривизны границы проводника. В данной работе рассматривается задача дифракции на цилиндре с ребром, где это условие нарушается. Задача дифракции на теле высокой проводимости с условиями сопряжения на границе сводится к системе интегро-дифференциальных уравнений на границе методом, впервые представленным в работах О.И. Паныча. Исследуя полученную систему при стремлении проводимости к бесконечности, можно получить соотношения для поведения электромагнитного поля на границе раздела сред.

Описание работы

Вдали от ребра импедансные граничные условия могут применяться без изменений. Для вывода приближённых граничных условий в окрестности ребра в работе используется подход, основанный на предложенном О.И. Панычем методе получения старших компонент приближённых граничных условий для поверхностей конечной кривизны. Основным достоинством данного метода является сведение задачи в области к задаче на поверхности раздела сред, что позволяет исследовать поведение решения на границе без построения асимптотики поля.

Пусть волновые числа вне и внутри проводящего тела имеют вид $k_e = \frac{\omega}{c}$, $k_i^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon'\mu$, соответственно, где комплексная диэлектрическая проницаемость $\varepsilon' = \varepsilon + i\frac{4\pi\sigma}{\omega}$, а источники $\boldsymbol{j}$ заданы на конечном носителе. Предполагаем, что проводимость во внутренней области Ω_i высока, то есть, $\sigma \to \infty$. Задача состоит из системы уравнений Максвелла, условий непрерывности тангенциальных компонент напряжённостей, условия Мейкснера на ребре и условий Зоммерфельда на бесконечности. Она может быть сведена к системе уравнений Гельмгольца для компонент поля во внутренней и внешней областях, причем на поверхности раздела сред появятся условия на скачок нормальных производных, из которых и будет получаться исследуемая система уравнений.

Решение во внутренней области строим в виде потенциала простого слоя, а во внешней – через функцию Грина *G* задачи Дирихле:

$$\begin{gathered}\{\boldsymbol{E}^i;\boldsymbol{H}^i\}(M) = \iint\limits_S \{\boldsymbol{\mu};\boldsymbol{\nu}\}(Q)\psi_i(M,Q)dS_Q\,, M \in \Omega_i,\\ \{\boldsymbol{E}^e;\boldsymbol{H}^e\}(M) = \{\boldsymbol{E}_0;\boldsymbol{H}_0\} + \frac{k_i^2}{k_e^2}\gamma \iint\limits_S \frac{\partial G}{\partial n}\iint\limits_S \{\boldsymbol{\mu};\boldsymbol{\nu}\}\psi_i dS_Q dS_{Q'}\,, M \in \Omega_e,\end{gathered} \quad (1)$$

где $\psi_i = \frac{e^{ik_iR_{MQ}}}{R_{MQ}}$, $\{\boldsymbol{E}_0;\boldsymbol{H}_0\}$ – решения однородной задачи с условиями Дирихле для соответствующих компонент полей, $G(M,Q)$ – функция Грина задачи Дирихле во внешней области Ω_e, $\gamma = 1$ для нормальной компоненты напряжённости электрического поля E_n, претерпевающей скачок, и $\gamma = 0$ для всех остальных компонент.

По построению такое решение удовлетворяет всем условиям задачи, кроме условия на разрыв нормальной производной на границе. Из него и получается система интегро-дифференциальных уравнений для плотностей $\{\boldsymbol{\mu};\boldsymbol{\nu}\}(Q)$, которую можно решать приближённо, раскладывая по степеням малого параметра $\frac{1}{|k_i|}$ входящие в неё потенциалы простого и двойного слоя. Вывод асимптотических формул для потенциалов опирается на отсутствие сингулярности электромагнитного поля вблизи ребра, что реализуется для ограниченного ряда задач. Получив приближённые выражения для плотностей $\{\boldsymbol{\mu};\boldsymbol{\nu}\}(Q)$, подставляем их в предполагаемый вид решения (1). Полученные соотношения для компонент поля на границе устремятся к классическим импедансным

условиям при удалении от границы или при устремлении угла раствора к 180°. Вблизи ребра вид коэффициентов в приближённых граничных условиях значительно усложняется, а также присутствуют слагаемые (экспоненциально затухающие при удалении от ребра), учитывающие поле с противоположной стороны границы от ребра.

Заключение

Для задачи дифракции на импедансном теле с ребром на границе получены приближённые граничные условия для решений, регулярных в окрестности ребра. Дальнейшее развитие данного метода связано с обобщением полученного результата на более общий случай, а также с его упрощением для практического применения. Полученные граничные условия могут быть использованы для построения приближённых решений задач дифракции на высокопроводящих телах сложной формы.

Литература

1. *А. Г. Свешников, И. Е. Могилевский* Избранные математические задачи теории дифракции // Физический Факультет МГУ им. М.В. Ломоносова, 2012.
2. *О. И. Паныч* О приближённых краевых условиях в задачах диффракции // Диссертация на соискание учёной степени кандидата ф.-м. наук, кафедра математики, Москва, 1951.
3. *А. Г. Свешников, А. Н. Боголюбов, В. В. Кравцов* Лекции по математической физике // Физический Факультет МГУ им. М.В. Ломоносова, 1993.

Функционально-дифференциальные уравнения для атомарных функций $\mathrm{fip}_{a,n}(x)$

Functional Differential Equations of the Atomic Functions $\mathrm{fip}_{a,n}(x)$

***Коновалов Я.Ю.*[1], *Будунова К.А.*[2], *Кравченко О.В.*[2,3]**

1) Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Москва, РФ; 2) Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, Москва, РФ; 3) Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН, Москва, РФ.

kon20002000@mail.ru, olekravchenko@gmail.com

Аннотация. Для двупараметрического семейства бесконечно гладких функций $\mathrm{fip}_{a,n}(x) = \Theta_{n-1}(x) * \mathrm{h}_a(x)$ найдены все функционально-дифференциальные уравнения вида $F^{(p)}(x) = c_1 F(\lambda x + \beta_1) + \cdots + c_N F(\lambda x + \beta_N)$ с конечным числом слагаемых. Доказано, что нетривиальное уравнение существует только при $\lambda = a^r$, $p = r$, $r \in \mathbb{N}$. Известно, что при $a \in \mathbb{N}$ и при $a^d \in \mathbb{N}$ уравнения существуют при любом n. Кроме того, при $n = 0$ и $n = 1$ уравнения существуют для любого $a > 1$. В данной работе показано, что при $n = 2$ уравнения существуют для $a^d = \frac{m}{2}$, $m \in \mathbb{N}$ и ни в каком другом случае уравнения для $\mathrm{fip}_{a,n}(x)$ построить нельзя.

Введение

Атомарные функции определяются как финитные решения функционально-дифференциальных уравнений (ФДУ) [1–3]; простейший пример — функция $\mathrm{up}(x)$, имеющая носитель $[-1; 1]$ и удовлетворяющая уравнению

$$\mathrm{up}'(x) = 2\mathrm{up}(2x + 1) - 2\mathrm{up}(2x - 1). \qquad (1)$$

Уравнение (1) задаёт функцию $\mathrm{up}(x)$ с точностью до постоянного множителя. При учете дополнительного нормировочного условия (задание значения максимума или интеграла) функция определяется однозначно. Основываясь на уравнении (1) можно получить точные значения в двоично-рациональных точках, производные любого порядка в виде конечных комбинаций сдвигов и другие свойства функции.

Функции $\mathrm{fip}_{a,n} = \Theta_{n-1} * \mathrm{h}_a$, где Θ_{n-1} — B-сплайн степени $n - 1$, введены в [4, 5]. Хотя сверточное определение позволяет эффективно исследовать свойства новых функций и применять их на практике, для некоторых приложений, например задач коллокации, полезно знать вид функционально-дифференциального уравнения, задающего функцию. Также этот вопрос имеет фундаментальное значение для классификации функций. В работах [4, 5] описана методика построения уравнений для $\mathrm{fip}_{a,n}$ при целых значениях a, а также для $a = \sqrt[d]{m}$. В [6] представлен общий вид уравнения для n= 1 и произвольного $a > 1$. Вопрос о существовании ФДУ в общем случае оставался открытым; в настоящей работе он решён.

Описание работы

Постановка задачи. Преобразование Фурье функции $F = \mathrm{fip}_{a,n}(x)$, $a > 1$, $n \in \mathbb{N}$, имеет вид

$$\hat{F}(t) = \mathrm{sinc}^n \frac{t}{2} \prod_{k=1}^{\infty} \mathrm{sinc} \frac{t}{a^k}, \qquad \mathrm{sinc}\, u = \frac{\sin u}{u}; \qquad (2)$$

F чётна, бесконечно дифференцируема, $\mathrm{supp}(F) = [-R, R]$, $R = n/2 + 1/(a - 1)$. Рассматриваются уравнения следующего вида

$$F^{(p)}(x) = \sum_{j=1}^{N} c_j F(\lambda x + \beta_j), \qquad \lambda > 1, p \in \mathbb{N}_0, N < \infty, c_j \neq 0. \qquad (3)$$

После преобразования Фурье (3) принимает вид $(it)^p\hat{F}(t) = E(t)\hat{F}(t/\lambda)$, где экспоненциальный многочлен $E(t)$ однозначно определяется числами λ, β_j и c_j. С учетом (2), выражение для $E(t)$ приобретает следующий вид

$$E(t) = \frac{(it)^p \operatorname{sinc}^n \frac{t}{2} \prod_{k=1}^{\infty} \operatorname{sinc} \frac{t}{a^k}}{\operatorname{sinc}^n \frac{t}{2\lambda} \prod_{k=1}^{\infty} \operatorname{sinc} \frac{t}{\lambda a^k}}. \quad (4)$$

Для того, чтобы $E(t)$ представлял собой сумму фазовых множителей необходимо чтобы он являлся целой функцией. Таким образом, требуется, чтобы множество нулей знаменателя (4) полностью содержалось во множестве нулей числителя.
Выпишем нули числителя и знаменателя (4) в таблицу 1.

Таблица 3. Множество нулей числителя и знаменателя (4)

Числитель	$\operatorname{sinc}^n \frac{t}{2}$	Серия n-кратных корней $2\pi l,\ l \in \mathbb{Z},\ l \neq 0$.
	$\prod_{k=1}^{\infty} \operatorname{sinc} \frac{t}{a^k}$	Последовательность серий однократных корней $a^k \pi l,\ l \in \mathbb{Z},\ l \neq 0$.
знаменатель	$\operatorname{sinc}^n \frac{t}{2\lambda}$	Серия n-кратных корней $2\pi\lambda l,\ l \in \mathbb{Z},\ l \neq 0$.
	$\prod_{k=1}^{\infty} \operatorname{sinc} \frac{t}{\lambda a^k}$	Последовательность серий однократных корней $\lambda a^k \pi l,\ l \in \mathbb{Z},\ l \neq 0$.

Известно [4,5], что для целых значений a уравнения вида (3) существуют при любом n, поэтому далее рассматриваем $a \notin \mathbb{Z}, a > 1$. В этом случае все серии корней бесконечных произведений различны. Выбор $\lambda \in \mathbb{Z}$ формально обеспечивает выполнение условия, однако в этом случае отношение бесконечных произведений превращается в бесконечное произведение тригонометрических многочленов, приводя к бесконечному числу слагаемых в правой части (3). Другой способ обеспечить выполнение условия выбрать $\lambda = a^r$. Тогда каждый корень $a^{k+r}\pi l$ знаменателя оказывается одновременно и корнем числителя. Подставим $\lambda = a^r$ в (4)

$$E(t) = \frac{(it)^p \operatorname{sinc}^n \frac{t}{2} \prod_{k=1}^{r} \operatorname{sinc} \frac{t}{a^k}}{\operatorname{sinc}^n \frac{t}{2a^r}} = \frac{(it)^p \operatorname{sinc}^n \frac{t}{2} \left(\prod_{k=1}^{r-1} \operatorname{sinc} \frac{t}{a^k} \right) \cos \frac{t}{2a^r}}{\operatorname{sinc}^{n-1} \frac{t}{2a^r}}. \quad (5)$$

В этом случае, как видно из последней записи (5), один из корней знаменателя $2\pi\lambda l$ также оказывается корнем числителя. Таким образом, требуется сделать корнями числителя оставшиеся $2\pi\lambda l$ кратности $n-1$. Для того, чтобы эти корни оказались в числе n-кратных корней числителя $2\pi l$, требуется $\lambda \in \mathbb{Z}$, что влечет за собой $a = \sqrt[r]{\lambda}$. Методика построения уравнений для $\operatorname{fip}_{a,n}(x)$ в этом случае рассмотрена в [4,5].

Для получения новых уравнений исследуем возможность найти эти корни среди серий $a^k \pi l,\ k = 1, \ldots, r-1$. Рассмотрим $n = 1$. В этом случае однократный корень знаменателя (4) является корнем последнего множителя произведения в числителе. Других корней знаменателя не остается. Выберем p=r и запишем явный вид $E(t)$, подставляя в (5) $n = 1$

$$E(t) = (it)^p \operatorname{sinc} \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2a^r} \prod_{k=1}^{r-1} \operatorname{sinc} \frac{t}{a^k} =$$
$$= \frac{a^{\frac{r(r-1)}{2}}}{2^r} \left(e^{\frac{it}{2}} - e^{-\frac{it}{2}} \right) \left(e^{\frac{it}{2a^r}} + e^{-\frac{it}{2a^r}} \right) \prod_{k=1}^{r-1} \left(e^{\frac{it}{a^k}} - e^{-\frac{it}{a^k}} \right) \quad (6)$$

Обратное преобразование Фурье (6) позволяет получить явный вид правой части уравнения (3), которое при любых a и r задает функцию $\mathrm{fip}_{a,1}(x)$. Наиболее простой вид (7) оно имеет при $r = 1$ (ранее приводилось в [6])

$$F' = \frac{a}{2}\left(F\left(ax + \frac{a+1}{2}\right) + F\left(ax + \frac{a-1}{2}\right) - F\left(ax - \frac{a-1}{2}\right) - F\left(ax - \frac{a+1}{2}\right)\right). \quad (7)$$

Рассмотрим $\mathrm{n} = 2$. Тогда (5) имеет корень знаменателя $2\pi a^r l$, который должен быть представлен в виде $a^k \pi l$, $1 \le k \le r-1$, а именно при некотором $k = k_0$ $\forall l_1 \in \mathbb{Z}$ должно выполняться $2a^{r-k_0} l_1 = l_2 \in \mathbb{Z}$. Следовательно, $a^{r-k_0} = \frac{m}{2}$, где $m \in \mathbb{Z}$. В этом случае (5) представится в виде

$$E(t) = \frac{(it)^p \mathrm{sinc}^2 \frac{t}{2}\left(\prod_{k=1,k\neq k_0}^{r-1} \mathrm{sinc}\frac{t}{a^k}\right)\mathrm{sinc}\frac{t}{a^{k_0}}\cos\frac{t}{2a^r}}{\mathrm{sinc}\frac{t}{ma^{k_0}}}. \quad (8)$$

Из вида (8) следует, что $r \ge 2$. Подставив $p = r$, получим (8) в виде суммы фазовых множителей, обратное преобразование Фурье которой даст правую часть уравнения (3). Отметим, что при выборе четных m, мы возвращаемся к случаю когда a^{r-k_0} является целым числом, рассмотренному ранее в [4,5].

Рассмотрим $n \ge 3$. Аналогично предыдущему, для (5) нам требуется разместить серию корней знаменателя $2\pi a^r l$ кратности $\mathrm{n}-1$ среди серий корней числителя $a^k \pi l$. Это означает, что должно одновременно выполняться $a^{r-k_1} = \frac{m_1}{2}$, $a^{r-k_2} = \frac{m_2}{2}$,…, $a^{r-k_{n-1}} = \frac{m_{n-1}}{2}$ из чего следует, что a^{r-k_1} и a^{r-k_2} должны быть целыми числами. Таким образом, при $\mathrm{n} \ge 3$ мы не можем построить уравнения вида (2) для функций $\mathrm{fip}_{a,n}(x)$, отличных от рассмотренных в [4,5].

Заключение

Для функций $\mathrm{fip}_{a,n}(x)$ получен полный список ФДУ с одним сжатием и конечным числом слагаемых. Тем самым установлено, при каких n функции $\mathrm{fip}_{a,n}(x)$ являются атомарными. Для всех уравнений сжатие равно a^r, порядок равен r. Помимо ранее известных уравнений для случаев $n = 0$, $n = 1$, $a \in \mathbb{N}$ и $a^d \in \mathbb{N}$ установлено существование и предложена методика построения уравнений для $\mathrm{fip}_{a,n}(x)$ при $n = 2$ и $a^d = m/2$, $m \in \mathbb{N}$. Уравнения с несколькими различными сжатиями и с бесконечным числом слагаемых остаются вне рассмотрения.

Литература

1. *Рвачёв В.Л., Рвачёв В.А.* Об одной финитной функции // Доклады АН УССР. Сер. А. — 1971. — № 8. — С. 705–707.
2. *Рвачёв В.А.* Финитные решения функционально-дифференциальных уравнений и их применения // Успехи математических наук. — 1990. — Т. 45, вып. 1. — С. 77–103.
3. *Кравченко В.Ф.* Лекции по теории атомарных функций и некоторым их приложениям. — М.: Радиотехника, 2003. — 512 с.
4. *Konovalov Ya.Yu.* New infinitely differentiable spline-like basis functions // 2019 PhotonIcs & Electromagnetics Research Symposium — Spring (PIERS-Spring). — IEEE, 2019. — P. 114-122.
5. *Коновалов Я.Ю.* Новое семейство бесконечно гладких функций с компактным носителем // Физические основы приборостроения. — 2020. — Т. 9, № 2(36). — С. 48–59.
6. *V. F. Kravchenko et al*., R-, Atomic and WA-system Functions Theory in Physical Problems // *2021 Photonics & Electromagnetics Research Symposium (PIERS)*, Hangzhou, China, 2021, pp. 2532-2541, doi: 10.1109/PIERS53385.2021.9694966.

Сходимость алгоритма сплит-степ с точки зрения мощности сигнала на примере плоской волны

Convergence of the Split-Step Algorithm in Terms of Signal Power: the Case of a Plane Wave.

Кузнецов Г. В. [1] ***Делицын А. Л.*** [2]

1) Национальный исследовательский университет «Высшая Школа Экономики», факультет компьютерных наук, Москва, РФ; 2)Российский Биотехнологический Университет (РОСБИОТЕХ), Москва, РФ.

gvkuznetsov@edu.hse.ru, delitsyn@mail.ru

Аннотация. В данной работе представлены результаты исследования сходимости сплит-степ Фурье метода на примере плоской монохроматической волны на основе одномерного нелинейного уравнения Шредингера с точки зрения мощности исходного сигнала. Получен сводный график предельного допустимого уровня мощности сигнала для использования алгоритма сплит-степ при симуляции распространения по многоканальной волоконно-оптической линии связи в зависимости от протяженности этой линии.

Описание работы

Исследование сходимости алгоритма SSFM (англ: split-step Fourier method) – достаточно актуальная и важная задача, т.к. именно этот метод один из наиболее используемых численных методов (превосходящих линейную компенсацию по точности) решения Нелинейного уравнения Шредингера (НУШ) или системы уравнений Манакова при симуляции распространения сигнала в протяженной волоконно-оптической линии связи.

Сам по себе алгоритм сплит-степ применим не только для решения НУШ, но и любого другого нелинейного уравнения. В общем виде SSFM представляет из себя два шага. Если обозначить линейную часть рассматриваемого (одномерного) уравнения за $\widehat{D}$ а нелинейную часть (с отброшенной временной частью) за $\widehat{N}$, численное решение SSFM можно выписать в общем виде [1]:

$$q(L,t) = \left(\prod_{m=1}^{n} e^{h\widehat{N}} e^{h\widehat{D}} \right) q(0,t). \quad (1)$$

Здесь $q(0,t)$ – начальные данные, L – длина рассматриваемой пространственной области, $q(L,t)$ – решение некоторого нелинейного уравнения на выходе из этой области, h – шаг сетки, на которую область L разбита для численного решения, n – число отрезков сетки.

Однако благодаря тому, что НУШ с отброшенной временной частью имеет явное аналитическое решение [1], в нелинейной волоконной оптике его использование, а вместе с тем и исследование становится особенно привлекательным. Существует несколько вопросов о сходимости SSFM в рамках решения НУШ. Во-первых, порог сходимости SSFM по мощности входного сигнала. Во-вторых, область сходимости НУШ по частоте. Основная техническая трудность данных двух вопросов заключается в том, что явное аналитическое решение для сигнала произвольной формы даже в случае одномерного НУШ с одной поляризацией не существует. Впрочем, существует исключительный и, кроме того, простой случай, в котором точное решение можно выписать в явном виде: гармонический сигнал или плоская монохроматическая волна. Именно с гармоническим сигналом, который сохраняет свою форму в ходе эволюции, можно сравнивать сигнал, полученный при помощи численного моделирования. На его примере, а также на примере решения солитонного типа [2] исследовался частотный аспект сходимости SSFM [3, 4, 5]. Было установлено соотношение

$$h_z < \frac{h_t^2}{\pi} \quad (2)$$

(впервые получено в работе [3]) величин отрезков сетки, необходимое для сходимости. Было показано, что в случае постоянного сигнала (гармонический сигнал нулевой частоты) расхождение SSFM вызвано ошибкой округления. Также в [3, 5] упоминается, что соотношение (2) является достаточным, но не необходимым и в случае, когда ширина пика неустойчивости в частотной области меньше шага сетки $\Delta\omega$, расхождения алгоритма не происходит (точнее происходит вне наблюдаемой области [4]) даже при сильном отклонении шага h_z от условия (2).

Настоящая работа представляет из себя дополнение к вышеупомянутым исследованиям, ориентированное на более практический лад и отвечающее на вопрос: *при каком уровне мощности сигнала алгоритм сплит-степ начинает расходиться*. В качестве результата исследования приводится график зависимости критического уровня мощности (LP), при котором алгоритм начинает расходиться, от числа симулируемых спанов (протяженности линии).

Главным инструментом исследования была платформа, реализованная на языке MATLAB, при помощи которой проводилась симуляция распространения гармонического сигнала по одноканальной волоконно-оптической линии связи с переменным числом спанов (от 1 до 30). Протяженность одного спана фиксирована и равна 80 км, затухание отсутствует.

Отправная точка для построения графика – линия протяженностью один спан. Выбирается начальное значение LP = 34 дБм, которое затем начинает уменьшаться (с шагом 0.025 дБм). Фиксируется значение LP при котором отличие аналитического сигнала и полученного с помощью SSFM в точке максимума (на гребне синусоидальной волны) становится более 3%. Далее LP возвращается к начальному значению, число спанов увеличивается на 1 и шаги повторяются. Последнее рассмотренное число спанов – 30 шт, что соответствует общей протяженности линии 2400 км. В ходе симуляции был получен следующий график:

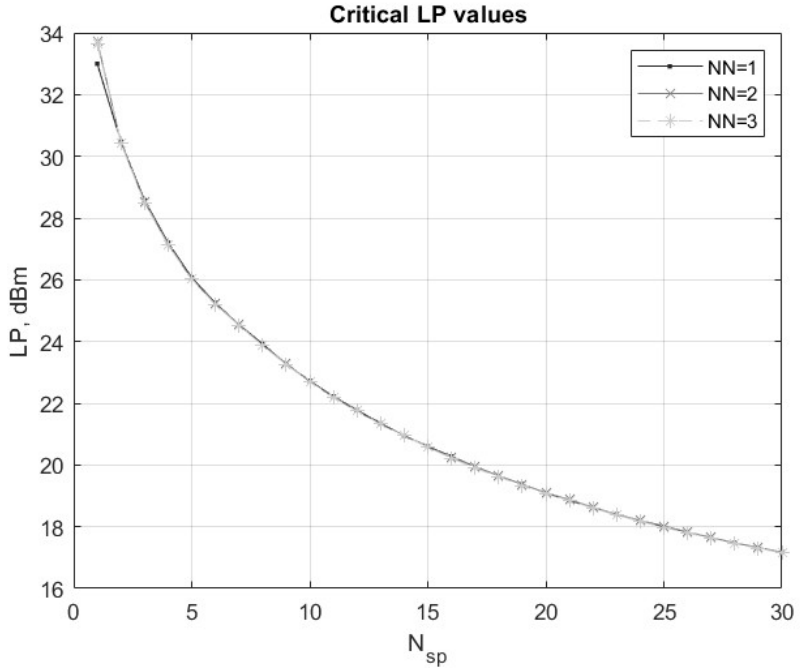


Рисунок 1. График зависимости критического значения параметра мощности, начиная с которого алгоритм SSFM расходится. NN – это множитель, на который умножается частота плоской волны (Начальное значение – 1.27 ГГц).

Как видно из Рис.1, кратное увеличение частоты гармонического сигнала почти не влияет на поведение предельного уровня мощности сигнала для SSFM. Следует отметить, что обезразмеренные шаги сетки $h_z = 0.5178$ и $h_t = 0.3967$ значительно

отклоняются от условия (2), однако измельчение шага h_z вплоть до 0.041 (для удовлетворения (2)) не приводит к заметному изменению пороговых значений LP.

Заключение

Исследована расходимость SSFM на примере плоской волны. Зафиксировано убывание предельного допустимого значения уровня мощности сигнала при росте протяженности линии, не зависящее от частоты передаваемого гармонического сигнала.

Литература

1. *Agrawal G*. Nonlinear fiber optics. – Academic press, 2012.
2. *Delitsyn, A.L., Konyaev, D.A., Kakurin, V., Gromov, V.A.*, Perturbation theory with accelerated convergence for fibre-optic nonlinearity compensation, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation Journal, Vol. 153, 109492, 2026.
3. *Weideman J. A. C., Herbst B. M.* Split-step methods for the solution of the nonlinear Schrödinger equation //SIAM Journal on Numerical Analysis. – 1986. – Т. 23. – №. 3. – С. 485-507.
4. *Yang J.* Nonlinear waves in integrable and nonintegrable systems. – Society for Industrial and Applied Mathematics, 2010.
5. *Lakoba T. I.* Instability analysis of the split-step Fourier method on the background of a soliton of the nonlinear Schrödinger equation //Numerical Methods for Partial Differential Equations. – 2012. – Т. 28. – №. 2. – С. 641-669.

Квантово-подобные алгоритмы управления электроэнергетическими системами

Quantum-like Algorithms for Electric Power Systems Management

***Малетин Н.В.*[1], *Минаев Д.В.*[2,3]**

1) Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Центр инжиниринга перспективных технологий, Москва, РФ; 2) Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, физический факультет, Москва, РФ; 3) Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Центр квантовых технологий, Москва, РФ.

maletinnv@my.msu.ru, minaevdv@physics.msu.ru

Аннотация. Задачи управления электроэнергетическими системами (ЭЭС) являются вычислительно емкими, так как ЭЭС включает в себя большое количество элементов, вырабатывающих, преобразующих, передающих, распределяющих, потребляющих электроэнергию и образующих сложно-замкнутую разветвленную систему. Традиционные подходы применимы, но их сложность быстро растет, что мотивирует развитие новых алгоритмов, включая квантовые. Одним из активно развивающихся направлений квантовых вычислений являются квантовые и квантово-подобные отжигатели.

Квантовые, цифровые, гибридные и физико-инспирированные отжигатели являются одним из наиболее разработанных и перспективных направлений развития квантовых и квантово-подобных вычислений. Наиболее мощные современные гибридные и цифровые отжигатели уже используются при решении практических задач оптимизации промышленного и квази-промышленного масштаба, т.к. могут работать параллельно с 10^5-10^7 бинарных переменных.

К таким отжигателям относятся гибридный квантово-классический отжигатель D-Wave, цифровые отжигатели Toshiba, Fujitsu и Hitachi и оптоэлектронная когерентная машина Изинга NTT (Nippon Telegraph and Telephone) способные работать параллельно с 10^6, 10^7, $0.5\cdot10^6$, 10^5 и 10^5 бинарными переменными соответственно. Большое количество примеров использования этих отжигателей для решения практических и

квазипрактических бизнес-задач оптимизации приведено в соответствующих разделах сайтов этих компаний.

Другим перспективным классом научно-практических задач для отжигателей являются задачи оптимизации функций от непрерывных переменных со сложным ландшафтом. Прежде всего это задачи параметризации сложных моделей различной природы, часто решаемые оптимизационными методами. Использование методов квантового отжига при решении такого класса задач обсуждается, например, для задач вычислительного материаловедения [1], медицинской томографии [2], инверсии сейсмических данных [3].

Задача расчета параметров установившегося режима электроэнергетических систем (ЭЭС) при наличии ограничений на режимные параметры является ресурсоемкой вычислительной задачей и также может быть сведена к задаче оптимизации функции со сложным ландшафтом от непрерывных и дискретных переменных [4]. Полученная задача оптимизации может быть далее сведена к задаче QUBO и решена с помощью квантового, гибридного или классического отжигателя, или квантового компьютера вентильного типа.

Полная постановка задачи подразумевает под собой:

- учет наличия в ЭЭС всех 4-х различных типов узлов;
- учет нелинейного характера зависимостей мощностей нагрузок от напряжений в узлах;
- учет ограничений на напряжения, токи и соблюдение условий статической устойчивости.

Для i-го узла ($i \neq 0$) уравнение баланса токов – это выражение вида:

$$\sum_{j=1, j\neq i}^{N} \dot{Y}_{ij} \cdot \dot{U}_j - \dot{J}_i - \dot{J}_{i0} = 0, \quad (1)$$

где

$$\dot{J}_i = \frac{\bar{S}_i}{\bar{U}_i}, \quad (2)$$

$$\dot{J}_{ij} = \dot{Y}_{ij} \cdot \dot{U}_j, \quad (3)$$

- i и/или j – номера/индексы узлов, при этом индекс 0 присвоен балансирующему узлу, для которого уравнение баланса токов не записывается;
- $\dot{Y}_{ii}$ и $\dot{Y}_{ij}$ – собственная проводимость i-го узла и взаимная проводимость между i-м и j-м узлами в исходной схеме, при этом для всех ветвей $\dot{Y}_{ij} = \dot{Y}_{ji}$, а если связь между узлами отсутствует, то $\dot{Y}_{ij} = 0$;
- $\dot{Y}_{i0}$ – проводимость ветви, связывающей i-й узел с балансирующим узлом, при этом $\dot{Y}_{i0} = 0$, если связь с i-м узлом отсутствует.

Все узлы в электрической системе можно свести к четырем типам: Vδ-узел – балансирующий и одновременно базисный узел; PQ-узел – узел нагрузки; PV-узел – узел генерации с неизменным действующим значением напряжения; PX-узел – узел генерации, диапазон неизменных действующих значений напряжения которого имеет технологические ограничения.

Ограничения на режимные параметры ЭСС задаются следующими неравенствами:

1) модули напряжений узлов лежат в заданных диапазонах

$$\widetilde{U}_i^{(\min)} \leq U_i \leq \widetilde{U}_i^{(\max)}; \quad (4)$$

2) модули токов ветвей не превышают предельно допустимых значений

$$J_{ij} = \left|(\dot{U}_i - \dot{U}_j)\dot{Y}_{ij}\right| \leq \tilde{J}_{ij}^{(crit)}; \quad (5)$$

3) условие статической устойчивости для контролируемых ветвей (сечений)

$$\frac{\partial P_{ij}^{(b)}}{\partial \delta_{ij}} > 0, \quad (6)$$

где $P_{ij}^{(b)}$ – активная мощность в начале контролируемой ветви, передаваемая от i-го узла к j-му узлу, δ_{ij} – угол сдвига фаз между напряжениями в начале и в конце ветви.

Для перевода исходной задачи, задаваемой системой уравнений и неравенств, к задаче оптимизации с ограничениями воспользуемся тремя хорошо известными основными приемами:

1. Первый прием состоит в том, что задачу решения любого уравнения

$$f(X_i) = 0, \quad (7)$$

где X_i – множество переменных $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_I}$, можно заменить на эквивалентную задачу оптимизации

$$f^2(X_i) \to min, \quad (8)$$

Решение уравнений с комплексными функциями

$$\dot{f}(X_i) = f'(X_i) + j \cdot f''(X_i) = 0, \quad (9)$$

очевидно, эквивалентно решению задачи оптимизации

$$\dot{f}(X_i) \cdot \bar{f}(X_i) = \left(f'(X_i)\right)^2 + \left(f''(X_i)\right)^2 \to min. \quad (10)$$

2. Второй прием заключается в том, что любое неравенство

$$g\left(X_j\right) \le 0, \quad (11)$$

где X_j – множество переменных $x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_J}$, можно заменить на эквивалентное равенство с помощью введения дополнительной переменной z

$$g\left(X_j\right) + z^2 = 0. \quad (12)$$

3. Третий прием состоит в том, что решение уравнения

$$g\dot{f}(X_i) = f'(X_i) + j \cdot f''(X_i) = 0, \quad (13)$$

при условии

$$g\left(X_j\right) \le 0, \quad (14)$$

используя 1-й и 2-й приемы, можно заменить на эквивалентную задачу оптимизации

$$(X_k, z) = \dot{f}(X_i) \cdot \bar{f}(X_i) + \lambda \cdot \left(g\left(X_j\right) + z^2\right)^2 \to min, \quad (15)$$

где $X_k = X_i \cup X_j$, а коэффициент λ, который, по аналогии с методом Лагранжа, часто называют коэффициентом Лагранжа, является достаточно большим действительным числом. Используя эти три приема несложно свести исходную задачу к задаче оптимизации.

Проведенные нами численные оценки показывают, что вычислительных мощностей гибридного отжигателя D-Wave, работающего параллельно с 1 млн. бинарных переменных, достаточно для решения задач определения параметров установившегося режима электроэнергетических систем высокого и сверхвысокого напряжения промышленного масштаба:

- с относительным шагом дискретизации $\Delta \approx 0.1\%$ могут быть проведены расчеты для достаточно крупных энергорайонов с количеством узлов до $N \approx 1\,200$;
- с относительным шагом дискретизации $\Delta \approx 1\%$ могут быть проведены расчеты для достаточно крупных региональных сетей с количеством узлов до $N \approx 2\,350$;
- а с относительным шагом дискретизации $\Delta \approx 3\%$ могут быть проведены расчеты для достаточно крупных объединенных сетей с количеством узлов до $N \approx 4\,500$.

Благодарности

Исследование выполнено при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (государственное задание № FENU-2026-

0004 «Классические, нейросетевые и квантовые оптимизационные алгоритмы для решения задач оперативно диспетчерского управления объектами электроэнергетики»).

Литература

1. *Maletin N.V., Dremov V.V., Klebanov I.I.* On the possibility of using quantum annealers to solve problems of parametrization of intermolecular interaction potentials // Laser Phys. Lett. 20 ─ 2023. 115205
2. *Nau M.A. et al.* 2022 Hybrid adiabatic quantum computing for tomographic image reconstruction -- opportunities and limitations (arXiv:2212.01312)
3. *Maletin Nickolay V., Tokarev Mikhail Y. and Minaev Dmitry V*. The potential application of quantum annealing for solving the problem of synchronous inversion in the presence of multimodal a priori information on the estimated elasticity characteristics // Laser Phys. Lett. 22 ─ 2025. 125209
4. *Maletin N., Gorshkov K., Safonov V., Minaev D. et al.* 2026 QUBO Formulation of the Power Flow Problem for Quantum Annealing: Formulas, Scalability Assessment and Numerical Estimates // Laser Phys. Lett., accepted September 19, 2026

Разработка нейросети для оптической диагностики фрактальных структур

Neural Network Development for Optical Diagnostics of Fractal Structures

***Моргунов П.А.*, Рыжикова Ю.В., Рыжиков С.Б.**

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, физический факультет, Москва, РФ

ryzhikovaju@rambler.ru

Аннотация. В работе рассматривается создание нейросетевого алгоритма для автоматизированного неразрушающего контроля качества оптических элементов и апериодических дифракционных решеток с фрактальными свойствами. Реализован математический аппарат генерации двумерных бинарных решеток Фибоначчи и двойного периода с контролируемым уровнем стохастической деградации. Осуществлен переход из пространственной области в частотную для выделения устойчивых дифракционных признаков дальнего порядка. Разработана, обучена и протестирована ML-архитектура на базе глубокой сети ResNet18. Исследован предел деградации оптического дальнего порядка и зафиксирован переход нейросетевой точности при достижении критического уровня шума.

Введение

Апериодические дифракционные решетки и другие устройства с фрактальными признаками получили широкое распространение [1]-[2]. Общетеоретические аспекты исследований самоподобных решетчатых систем имеют отношение к важной фундаментальной проблеме фрактальной оптики, состоящей в установлении общих закономерностей, определяющих связь между особенностями структуры изучаемых объектов и их спектральными и скейлинговыми характеристиками. Решение указанной проблемы позволит усовершенствовать оптическую диагностику фрактальных решетчатых объектов.

Традиционные аналитические и численные методы дифракционного анализа [3] требуют идеальных или слабо зашумленных условий для успешной идентификации паттернов самоподобия апериодических систем и их спектров. Однако в реальных условиях синтеза и последующей эксплуатации устройств, выполненных на базе апериодических фракталоподобных структур неизбежно возникают локальные дефекты – вакансии, примеси, нарушения литографического процесса, которые приводят к существенной деградации структуры. В связи с этим возникает острая необходимость в разработке высокоточных, устойчивых алгоритмов неразрушающего контроля и

дефектоскопии, способных распознавать дальний порядок в условиях экстремального структурного шума.

Актуальность представленной работы обусловлена необходимостью глубокой интеграции классических методов физической оптики и передовых алгоритмов Data Science, в частности, методов машинного обучения [4] и решения задач идентификации фракталоподобных систем.

Цель данной работы состоит в разработке, математическом обосновании и программной реализации комплексного вычислительного конвейера для автоматической классификации 2D-решеток Фибоначчи и двойного периода с использованием нейросетевых архитектур, оперирующих в пространстве пространственных частот Фурье, а также в анализе пределов устойчивости этих структур.

Схема вычислительного эксперимента

На рисунке 1 приведена реализованная схема вычислительного эксперимента. Генератор данных был реализован в среде MATLAB. Базовые объекты представляли собой бинарные матрицы размерностью 256x256 пикселей. В качестве данных выступали детерминированные 1D-последовательности Фибоначчи и двойного периода [5]. Процесс структурной деградации моделировался путем искусственного внесения случайного бинарного шума - инверсии логического состояния пикселя ($0 \leftrightarrow 1$). Общее количество инвертируемых пикселей N_{flips} вычислялось по формуле: $N_{flips} = \left\lfloor \frac{P_{noise}}{100} * 256^2 \right\rfloor$, где N_{flips} – целое количество пикселей матрицы, подвергшихся принудительной инверсии, P_{noise} – целевой уровень дефектов в процентах (задается в диапазоне от 0% до 50%).



Рисунок 1. Схема вычислительного эксперимента

Формирование датасета включает два типа матриц: train (8000 матриц) – для симуляции непрерывного шума от 0% до 50% и test (2000 матриц) для фиксированного шага (0%, 5%, 15%, 30%, 45%), включая сверхточный шаг 1% в критической зоне ($46\% - 50\%$). Все сгенерированные матрицы подвергались двумерному быстрому преобразованию Фурье (2D БПФ) для вычисления модуля комплексного пространственного спектра $S(u, v)$.

Конвейер машинного обучения был спроектирован с использованием библиотеки PyTorch для языка программирования Python. Был разработан класс FractalFourierDataset, автоматически отбраковывающий поврежденные тензоры. В качестве классификатора использовалась сверхточная архитектура ResNet18. Оригинальная архитектура была модифицирована: входной слой переопределен на прием 1 канала (черно-белые фурье-спектры), выходной – на 2 класса (решетки Фибоначчи и двойного периода). Был осуществлен отказ от Transfer Learning: т.е. сеть обучалась «с нуля». Это позволило фильтрам ResNet18 автоматически настроиться на вычисление пространственных расстояний между дифракционными пиками (для поиска коэффициента скейлинга ζ). Обучение производилось оптимизатором AdamW с функцией потерь CrossEntropy и применением смешанной точности. Точность на train-выборке достигла >99,4% за 5 эпох [6].

Результаты численного моделирования

На рисунке 2 представлены результаты работы нейросетевого классификатора ResNet18. Он описывает зависимость точности (Accuracy) предсказаний модели от уровня стохастического шума в тестовой выборке данных (от 0% до 50%).

Вплоть до 47% шума нейросеть продемонстрировала безошибочную классификацию. Визуально в пространственной области при 47% инвертированных пикселей матрица абсолютно неотличима от хаотичного шума. Однако в частотной области дискретное преобразование Фурье аккумулирует остаточные корреляции. Обученная сеть ResNet18 выступила в роли нелинейного многомерного пространственного коррелятора, подтвердив теоретические выводы из работ [7] – [8] об оптической устойчивости 2D фракталоподобных структур. Обнаружен резкий обвал классификационной точности, начинающегося с порога 48% дефектов. При достижении ровно 50% шума точность модели падает до 48% (что эквивалентно случайному бинарному угадыванию).

При 50% случайной инверсии пикселей математическое ожидание состояния любой ячейки решетки становится равным $p(1) = p(0) = 0.5$. Это означает, что бинарная система переходит в состояние термодинамического равновесия с максимальной энтропией Шеннона. Взаимная информация между идеальной решеткой и зашумленной становится строго равной нулю, и когерентный дальний порядок уничтожается на макроскопическом уровне.



Рисунок 2. Устойчивость нейросетевой классификации к структурным дефектам

Заключение

В рамках работы была успешно решена задача автоматизированной классификации сильно зашумленных двумерных фракталоподобных апериодических структур на основе алгоритмов глубокого обучения. Исследование позволило количественно верифицировать фундаментальные свойства масштабной инвариантности систем со скрытой симметрией самоподобия (структуры Фибоначчи и двойного периода). Основным результатом работы стало тестирование обученной ML-модели на test-выборке для построения высокоточной кривой деградации классификатора и эмпирического поиска предела информационной устойчивости дальнего порядка выбранных апериодических структур с фрактальными свойствами. Исследование выполнено в рамках государственного задания МГУ имени М.В. Ломоносова.

Литература

1. *Ryzhikova Yu., Ryzhikov S.* Spectral features of structuring fractal objects // EPJ Web of Conferences. — 2025. — Vol.318. — P. 04001.

2. *Боголюбов А.Н., Петухов А.А., Шапкина Н.Е.* Математическое моделирование волноводов, содержащих локальные вставки с фрактальной структурой // Вестник Моск. Ун-та. Серия 3. Физика, астрон. — 2011. — Т. 66, №2. — С. 20-23.
3. *Ильинский А.С., Свешников А.Г.* Численные методы в теории дифракции (Курс лекций). — М.: Издательство Московского университета, 1975. — 90 с.
4. *Флах П.* Машинное обучение. Наука и искусство построения алгоритмов, которые извлекают знания из данных. — М.: ДМК Пресс, 2023. — 401 с.
5. *Negro L.D.* Optics of Aperiodic Structures – Fundamentals and Device Applications. — CRC Press Taylor & Francis Group, 2014. — 509 p.
6. *Гудфеллоу Я., Бенджио И., Курвилль А.* Глубокое обучение: практическое руководство. — М.: ДМК Пресс, 2018. — 652 с.
7. *Korolenko P.V., Logachev P.A., Ryzhikova Yu.V.* Optical properties of 1D and 2D approximants of quasicrystalline structures // Physics of Wave Phenomena. — 2015. — Vol. 23, no. 1. — P. 46-51.
8. *Korolenko P.V., Ryzhikov S.B., Ryzhikova Yu.V.* Pattern stability in diffraction of light from structures with self-similarity symmetry // Physics of Wave Phenomena. — 2013. — Vol. 21, no. 4. — P. 256-260.

Анализ влияния гидроакустического канала при обнаружении локационных сигналов

Analysis of the Influence of the Hydroacoustic Channel on the Detection of Locational Signals

Назаров Л.Е.*, *Смольянинов И.В.

Фрязинский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН

levnaz2018@mail.ru, ilia159@mail.ru

Аннотация. Приведены результаты анализа искажающего влияния гидроакустического канала со свойством частотной зависимости коэффициента затухания амплитуды локационных сигналов при их распространении. Показано, что модель рассматриваемого канала задается соотношением, определяющим частотную зависимость коэффициента затухания амплитуды локационных сигналов с учетом параметров солености и температуры воды.

Введение

Комплексные огибающие цифровых локационных сигналов искажаются при распространении по гидроакустическим каналам как случайно-неоднородным средам, обусловленных рядом их физических свойств – рассеянием на воздушных пузырьках, рыбах, органических и неорганических частицах, на турбулентных и слоистых нерегулярных распределений температуры, солености и плотности воды, др. [1], [2].

При корреляционной обработке используемых сигналов эти искажения приводят к деградации вероятностных характеристик правильного обнаружения $P_{\text{обн}}$ и к энергетическим потерям ΔE по отношению к приему сигналов без искажений. Методики исследований локационных сигналов при распространении по гидроакустическим каналам и радиолокационных сигналов при распространении по радиоканалам (например, с учетом околоземной ионосферы) тождественны [1]. Методики представлений искажений для общего класса цифровых сигналов (локационных сигналов) с различными видами манипуляции при распространении по физическим средам распространения приведены в ряде работ [4] – [6].

Постановка задачи

При обнаружении локационных сигналов $s(t)$ на основе алгоритма Неймана-Пирсона вероятность правильного обнаружения $P_{\text{обн}}$ при распространении по каналам с аддитивным белым гауссовским шумом (АБГШ) определяется отношением

сигнал/помеха E/N_0 и вероятностью ложной тревоги $P_{\text{лтр}}$. Например, для когерентного обнаружения справедливо соотношение

$$P_{\text{обн}} = 1 - F\left(\frac{h}{\sqrt{2E/N_0}} - \sqrt{\frac{2E}{N_0}}\right), \quad (1)$$

где N_0 – односторонняя спектральная плотность шума; h – порог, задаваемый вероятностью ложной тревоги $P_{\text{лтр}} = 1 - F\left(h/\sqrt{2E/N_0}\right)$; E – энергия сигнала; $F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx$.

В докладе рассмотрен класс интенсивно используемых локационных сигналов: сигналы с линейным частотным заполнением (ЛЧМ), сигналы с ортогональным частотным разделением (OFDM). В частности, ЛЧМ сигнал длительностью T определяется как $s(t) = A\cos(2\pi f t + \pi m t^2/T^2)$, $-T/2 \le t \le T/2$.

База ЛЧМ сигналов задается соотношением $m = 2f_{\text{д}}T$ и $\beta = 2\pi m/T^2$.

Модель гидроакустического канала с затуханием сигналов. Известны эмпирические формульные соотношения, которые определяют модель гидроакустических каналов с затуханием. Наиболее известное соотношение, определяющее зависимость коэффициента затухания b от частоты f в диапазоне 3...500 кГц, имеет вид [1], [2]:

$$b = 8.686 \cdot 10^{-9} f^2 \left(\frac{SAf_t f^2}{f_t^2 + f^2} + \frac{Bf^2}{f_t}\right)(1 - 6.54 \cdot 10^{-4} p), \quad (2)$$

здесь $f_t = 21.9 \cdot 10^{9-1520/(T+273)}$ – релаксационная частота (Гц); T – температура (°C); S – соленость ‰ (промилле); p – давление (Па); значения параметров $A = 2.05 \cdot 10^{-2}$, $B = 2.95 \cdot 10^{-2}$.

Результаты моделирования. В докладе приведены результаты моделирования когерентного и некогерентного обнаружения ЛЧМ локационных сигналов с использованием модели (2) и алгоритма Неймана-Пирсона, $P_{\text{лтр}} = 10^{-3}$ [3].

Для оценивания влияния искажений сигналов $\hat{s}(t)$ при приеме за счет зависимости коэффициента b от частоты f моделирование произведено при условии эквивалентности энергий исходных сигналов $s(t)$ и сигналов $\hat{s}(t)$.

На рисунке 1 в качестве примера приведен вид искаженного $\hat{s}(t)$(черный) и без искажений $s(t)$ (серый) ЛЧМ сигнала (несущая частота $f = 100$ кГц, длительность 0.01 сек, частотная полоса $\Delta F = 60$ кГц, амплитуда сигнала $s(t)$ $A = 1$). Параметры канала - соленость *S* до 45‰, температура воды *T*=10°C, длина канала $z = 250$ м.

Видно искажение огибающей сигнала $\hat{s}(t)$ при распространении относительно постоянной огибающей $s(t)$ (энергии сигналов равны).

На рисунке 2 дана соответствующая вероятностная характеристика при когерентном приеме данного ЛЧМ сигнала и приведенной модели акустического канала. Видно, что энергетические потери достигают 0.5 дБ. Подобные вероятностные характеристики получены также для других локационных сигналов и их когерентного и некогерентного обнаружения.

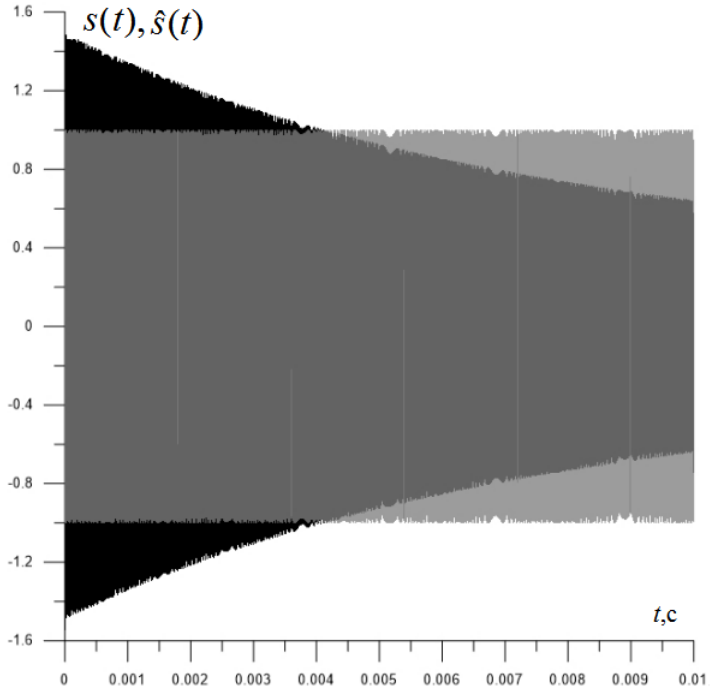


Рисунок 1. Вид искаженного $\hat{s}(t)$ (черный) и неискаженного $s(t)$ (серый) ЛЧМ сигнала.

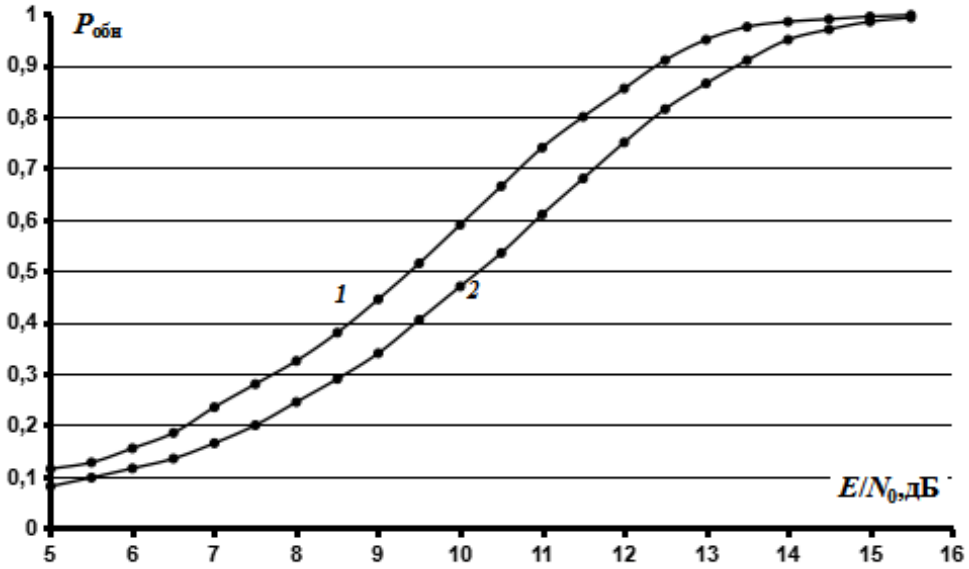


Рисунок2. Вероятностные характеристики когерентного обнаружения ЛЧМ сигнала (1 – идеальный акустический канал (получено с использованием (1)), 2 – модель акустического канала с затуханием).

Заключение

Приведено описание модели акустического канала с частотным затуханием сигналов, включающей ряд физических характеристик, в частности, соленость и температуру. С использованием данной модели вычислены путем моделирования алгоритма обнаружения Неймана – Пирсона для ряда локационных сигналов. В частности, показано наличие энергетических потерь до 0.85 дБ и до 1.0 дБ соответственно для ЛЧМ сигналов с частотной полосой 60 кГц, несущей частоты 100 кГц и солености 45‰ для когерентного и некогерентного приема. Полученные значения энергетических проигрышей необходимо учитывать при оценке точности измерения

параметров, например, фаз или разности фаз гидроакустических интерферометрических систем [4].

Работа выполнена за счет бюджетного финансирования в рамках государственного задания ИРЭ РАН.

Литература

1. *Исимару А.* Распространение и рассеяние волн в случайно неоднородных средах. М.: Мир, 1980. Т. 1. 580 с.
2. *Бреховских Л.М., Лысанов Ю.П.* Теоретические основы акустики океана. М.: Наука, 2007. 370с.
3. *Тихонов В.И. Оптимальный прием сигналов. М.: Радио и связь, 1983. 320с.*
4. *Каевицер В.И., Разманов В.М., Кривцов А.П., Смольянинов И.В.* Дистанционное зондирование морского дна сигналами с линейной частотной модуляцией // Радиотехника. 2008. № 8. С.35-42.

Проблема выбора пространственной конфигурации молекулярной системы

The problem of Choosing the Spatial configuration of a Molecular System

Плохотников К.Э.

1) Физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, РФ; 2) Финансовый университет при Правительстве РФ, Москва, РФ

psygma@yandex.ru

Введение

В докладе представлена недавно опубликованная монография автора [1] с одноименным названием. Монография опубликована в черно-белом варианте на бумаге, а также в цвете в виде отдельного pdf-файла. Монография состоит из восьми глав и трех частей.

Описание работы

В монографии обсуждается проблема выбора пространственной конфигурации произвольной молекулярной системы с точки зрения квантовых и классических позиций. Иначе говоря, ставится вопрос: почему та или иная молекулярная система имеет вполне определенную пространственную конструкцию ее атомов?

В первой части монографии (главы I – IV) обсуждается построение эффективного численного алгоритма решения уравнения Шредингера, описывающего произвольную молекулярную систему. Предложенный алгоритм решения уравнения Шредингера базируется на методе Монте-Карло. В качестве подходящей молекулярной системы рассматривался кластер воды. В итоге всего комплекса вычислительных экспериментов обнаружилось наличие бесконечного множества решений в форме пространственных конфигураций атомов молекулярной системы при одной и той же энергии диссоциации. Формулируется проблема выбора решений. В рамках квантовой механики решить проблему выбора не удалось. Пришлось перейти к классическому формату описания молекулярной системы.

Во второй части монографии (главы V – VII) произвольная молекулярная система описывается с классических позиций путем определения функции потенциальной энергии, поиска ее локально равновесных (стационарных) точек в конфигурационном пространстве. Предложен новый формализм построения набора потенциалов: двухчастичного, трехчастичного и т.д. многочастичного потенциала максимальной частичности. Исследуется вопрос о числе стационарных точек моноатомного (состоящего из одинаковых атомов) и мультиатомного (состоящего из, вообще говоря, разных атомов) кластеров. В качестве подходящего тренажера для апробации теоретических выводом рассматривается водный кластер. Вводится понятие “матрицы

формы” молекулярной системы или “морфы”. Подробно обсуждается матрица формы бинарного потенциала. Именно матрица формы позволяет решить проблему выбора пространственной конфигурации молекулярной системы вплоть до выбора одной-единственной конфигурации, которая одновременно может выступать в качестве глобального минимума соответствующей функции потенциальной энергии.

В третьей части монографии (глава VIII) тема матрицы формы углубляется, ей придается особый смысл и значение. Матрица формы сама по себе может выступать в качестве исчерпывающего способа пространственного описания произвольной молекулярной системы, включая всевозможные водные кластеры. По существу, матрица формы сводит анализ конфигурации атомов кластера к изучению некоторой оптимальной геометрии. Формулируется критерий разрешимости матрицы формы. Элементы разрешимой матрицы формы выступают в качестве модулей бинарных расстояний между соответствующей парой радиус векторов атомов кластера. Для неприводимой морфы формулируется алгоритм поиска в определенном смысле наиболее близкой разрешимой матрицы формы.

Во всех трех частях приводится множество примеров численного расчета молекулярных систем, как в рамках квантового, так и классического форматов. В частности, рассчитывались, а в ряде случаев и сравнивались с экспериментом, пространственные конфигурации молекул водорода, кислорода, воды, кластеров воды, бензола, фрагментов ДНК, включая азотистые основания (аденин, гуанин, цитозин, тимин), дезоксирибозу, нуклеотиды, олигонуклеотиды.

Заключение

Суммируя отзывы трех официальных рецензентов монографии, отмечу. Монография оставляет хорошее впечатление, она выполнена на высоком научном уровне, скреплена единой проблематикой выбора пространственной конфигурации атомов молекулярной системы. Монография хорошо иллюстрирована, все переходы от одной главы к последующей аргументированы. Важность введения понятия “матрицы формы” обосновано и подробно проиллюстрировано. Предложенные в монографии форматы численного моделирования молекулярных систем могут быть широко востребованы в практике.



Рис.1. Внешний вид монографии К.Э. Плохотникова, “Проблема выбора пространственной конфигурации молекулярной системы”

Литература

1. *Плохотников К.Э.* Проблема выбора пространственной конфигурации молекулярной системы: монография/ К.Э. Плохотников. — М.: ИНФРА-М, 2026. — 207с. DOI 10.12737/2245564; ISBN 978-5-16-021996-7 (print), ISBN 978-5-16-114746-7.

О подвижном управлении в системе дробного порядка с распределёнными параметрами

About Movable Control in Fractional-Order System with Distributed Parameters

Постнов С. С.

МИРЭА – Российский технологический университет, Москва, РФ.

postnov.sergey@inbox.ru

Аннотация. Рассматриваются системы дробного порядка с распределёнными параметрами, поведение которых описывается псевдодифференциальным уравнением типа уравнения колебаний или диффузии, в котором производная по времени имеет нецелый порядок (диффузионно-волновым уравнением). Анализируется задача оптимального управления такой системой в предположении о том, что управление является подвижным и зависит как сложная функция от закона движения источника управляющего воздействия. Данная задача сводится к обобщённой проблеме моментов, для которой проанализированы условия корректности и разрешимости.

Введение

Одной из актуальных задач в области моделирования управляемых систем с распределёнными параметрами является задача поиска так называемого подвижного управления, которое входит в основное уравнение и зависит от закона движения источника управляющего воздействия (при этом также не исключается зависимость непосредственно от времени и координат). Такие задачи возникают при моделировании процессов прецизионной обработки материалов, исследования структуры вещества, зондирования искусственных или природных сред и т.д. Целью моделирования таких процессов является построение управления, реализующего оптимальное в некотором смысле воздействие на исследуемую систему, например, такой закон движения источника, при котором достигается наиболее однородный прогрев образца или переход системы в заданное состояние за минимальное время при ограничении на допустимую мощность воздействия.

Для систем, поведение которых описывается классическим уравнением теплопроводности или волновым уравнением, подобные задачи были исследованы в работах [1, 2] (см. также ссылки в них). В настоящей работе задача подвижного управления исследована для систем с распределёнными параметрами, поведение которых описывается дробно-дифференциальным уравнением типа уравнения теплопроводности или волнового уравнения, в котором производная по времени имеет нецелый порядок (такие уравнения часто называются диффузионно-волновыми). Исследование проводится методом моментов.

Описание работы

Рассматриваются системы, состояние которых описывается диффузионно-волновым уравнением следующего вида:

$$r(x)\ {}_0^C D_t^\alpha Q(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}\left[w(x)\frac{\partial Q(x,t)}{\partial x}\right] - q(x)Q(x,t) + u(x,t) \qquad (1)$$

где $Q(x,t)$ – состояние системы, $u(x,t) = u\big(x,t,x_0(t)\big)$ – подвижное управление, $x_0(t)$ – закон движения источника управляющего воздействия, ${}_0^C D_t^\alpha$ – левосторонний оператор дробного дифференцирования по времени, понимаемый в смысле определения Капуто,

$\alpha \in (0,2), t \geq 0, x \in [0, L]$. Функции $r(x), w(x) > 0$ и $q(x)$ считаются непрерывными на отрезке $[0, L]$.

Для уравнения (1) задаются начальные и граничные условия следующего вида:

$$\frac{\partial^k Q(x, 0+)}{\partial t^k} = \varphi^k(x), \quad x \in [0, L], k = 0, \dots, [\alpha] \tag{2}$$

$$\left[b_i \frac{\partial Q(x,t)}{\partial x} + a_i Q(x,t) \right]_{x=x^i} = h_i(t), \quad t \geq 0, i = 1,2, \tag{3}$$

где a_i и b_i – коэффициенты, $b_1 \leq 0, b_2 \geq 0, x^1 = 0, x^2 = L$, $h_i(t) \in L_p[0,T]$ – некоторые функции, $p > 1$. Предполагается, что подвижное управление определяется функцией следующего вида:

$$u(x,t) = I(t)\psi\big(x - x_0(t)\big), \tag{4}$$

где $I(t) \in L_p[0,T]$ определяет интенсивность управляющего воздействия, $x_0(t) \in L_p[0,T]$ – положение источника этого воздействия, а функция $\psi(x)$ определяет форму пространственного распределения интенсивности воздействия. В общем случае управление определяется парой функций $I(t), x_0(t)$, а целью управляющего воздействия является перевод системы в заданное (желаемое) состояние $Q^*(x)$ в момент времени $T > 0$:

$$Q(x,T) = Q^*(x), x \in [0, L]. \tag{5}$$

Рассматриваются следующие две задачи оптимального управления: найти управление $u(x,t)$ такое, что система, описываемая уравнением (1) с начальными условиями (2) и граничными условиями (3) достигнет при $t = T$ состояния (5) и при этом либо норма управления будет минимальной при заданном времени T, либо время перехода в заданное состояние будет минимальным при заданном ограничении на норму управления $\|u(x,t)\| \leq l$ ($l > 0$ – заданное число). В частных случаях вместо нормы управления $u(x,t)$ может рассматриваться норма вектора $U(t) = \big(I(t), x_0(t)\big)$ или одной из функций $I(t), x_0(t)$.

Поставленные выше задачи оптимального управления для диффузионно-волнового уравнения сводятся к обобщённой -проблеме моментов следующего вида. Пусть задана система функций $g_n(t) \in L_{p'}[0,T]$ и набор чисел c_n, хотя бы одно из которых отлично от нуля. Пусть также задано число $l > 0$. Необходимо найти функцию $W(t) \in L_p(0,T]$ $(1/p + 1/p' = 1)$ такую, что выполненяются следующие соотношения:

$$\int_0^T g_n(\tau) W(\tau) d\tau = c_n, n = 1,2, \dots, \tag{6}$$

$$\|W(t)\| \leq l, \tag{7}$$

где

$$W(t) = I(t) \frac{1}{\|X_n\|^2} \int_0^L \psi\big(x - x_0(t)\big) X_n(x) dx. \tag{8}$$

$$g_n(t,T) = \frac{E_{\alpha,\alpha}[-\lambda_n (T-t)^\alpha]}{(T-t)^{1-\alpha}}, \tag{9}$$

числа c_n определяются через параметры задачи, $E_{\alpha,\beta}(t)$ – двухпараметрическая функция Миттаг-Леффлера. Собственные значения λ_n и собственные функции $X_n(x)$ являются решением следующей задачи Штурма-Лиувилля:

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} \left(w(x) \frac{\partial}{\partial x} \right) - q(x) \right] X(x) + \lambda r(x) X(x) = 0, \tag{10}$$

$$\left[b_i \frac{\partial X(x)}{\partial x} + a_i X(x) \right]_{x=x^i} = 0, \quad i = 1,2. \tag{11}$$

Рассмотрен ряд частных случаев. Если полагать, что закон движения источника $x_0(t)$ задан, а управляющее воздействие реализуется только за счёт изменения интенсивности $I(t)$, то проблема моментов (6)-(7) линейна и при конечном n может быть явно решена при выполнении условия

$$\alpha > 1/p. \quad (12)$$

В случае подвижного управления, определяемого законом движения $x_0(t)$, при заданном законе изменения интенсивности $I(t)$ проблема моментов (6)-(7) является уже нелинейной. В этом случае при точечном управляющем воздействии конечномерная проблема моментов (6)-(7) будет корректна и разрешима при выполнении условия:

$$\sum_{n=1}^{N} c_n \xi_n \le \int_0^T \max_u \left(-\sum_{n=1}^{N} \lambda_n \xi_n g_n(t) I(t) X_n\left(x_0(t)\right) \right) dt \forall \xi_n, n = 1, \dots, N. \quad (12)$$

Заключение

В настоящей работе исследована задача подвижного управления для систем дробного порядка, моделируемых диффузионно-волновым уравнением. Показана возможность применения метода моментов, при этом получаемая проблема моментов является линейной при управлении только мощностью воздействия и нелинейной при управлении законом движения источника управляющего воздействия. Исследован ряд частных случаев поставленной задачи.

Литература

1. *Бутковский А. Г., Пустыльников Л. М.* Теория подвижного управления системами с распределёнными параметрами. – М.: Наука, 1980. – 384 с.
2. *Кубышкин В. А., Финягина В. И.* Подвижное управление в системах с распределёнными параметрами. – М.: Синтег, 2005. – 221 с.

Моделирование гистерезисных явлений в вязкоупругих биоматериалах: дробно-дифференциальный подход

Modeling Hysteresis Phenomena in Viscoelastic Biomaterials: A Fractional Calculus Approach

Постнова Е.А.

Российский университет медицины, ИПУ РАН им. В.А. Трапезникова, Москва, Россия

post-ea@ya.ru

Аннотация. В работе реализовано математическое моделирование, основанное на аппарате дробного дифференциально-интегрального исчисления, для описания гистерезисных явлений в вязкоупругих биоматериалах. Приводится пример моделирования деформации аневризмы для случая циклической нагрузки с вычислением основных характеристик данной ткани.

Введение

В физике и механике вязкоупругих сред важное место занимает задача построения математических моделей, адекватно описывающих поведение биоматериалов. Одним из распространённых подходов к их изучению выступает метод структурного моделирования, при котором исследуемая среда представляется в виде совокупности простейших элементов, наделённых базовыми свойствами. Например, линейной упругостью («пружина») либо линейной вязкостью («демпфер»). На основе различных сочетаний указанных элементов были построены модели Максвелла, Кельвина- Фойхта, и ряд других, динамика которых описывается дифференциальными уравнениями целого порядка. Однако перечисленные классические модели обладают существенными ограничениями: в частности, ни одна из комбинаций «пружины» и «демпфера» не позволяет воспроизвести гистерезисные эффекты, возникающие при деформировании материала. Указанное обстоятельство стимулировало развитие альтернативных

подходов, один из которых базируется на применении операторов дробного дифференциально-интегрального исчисления.

Первый подход был предложен в ключевой работе 1948 года А. Н. Герасимова [1], который использовал дробную производную для описания вязкоупругих материалов, опередив на 20 лет аналогичную работу Капуто. В данной работе он связал гистерезис и вязкоупругое поведение материалов через дробное исчисление и описал упругое последействие с помощью интегрального уравнения Больцмана:

$$\sigma(t) = E\varepsilon(t) + \int_0^{\infty} G(\tau)\varepsilon(t-\tau)d\tau, \quad (1)$$

где $\sigma(t)$ – механическое напряжение, $\varepsilon(t)$ – относительная деформация, $G(\tau)$ – наследственная функция. На основе этого получено фундаментальное соотношение между деформацией и напряжением через дробную производную порядка α:

$$\sigma(t) = \chi \frac{d^{\alpha}\varepsilon(t)}{dt^{\alpha}}, \quad (2)$$

где χ – параметр, зависящий от свойств материала. При $\alpha = 0$ соотношение (2) переходит в закон Гука, а при $\alpha = 1$ – в закон Ньютона для вязкости. Для промежуточных значений подобная модель А. Н. Герасимова даёт гистерезисную зависимость, что аналогично поведению вязкоупругого материала. В связи с этим дробная производная позволила математически описать: упругое последействие, внутреннее трение, энергетические (гистерезисные) потери, наследственные свойства материалов. Таким образом, работа Герасимова заложила основу применения дробного исчисления в механике вязкоупругих материалов, связав феноменологические наблюдения гистерезиса с математическим аппаратом дробных производных.

Дальнейшее эффективное использование дробно-дифференциальных моделей для описания свойств биологических материалов подтверждается многочисленными экспериментальными результатами. Например, в работе [2] экспериментально исследовалась частотная зависимость модуля сдвига селиконового геля и желатина. Авторами было показано, что поведение материала соответствует дробно-дифференциальной модели Фойхта (W. Voigt). Аналогичные исследования [3], но для изучения модуля сдвига биологических тканей, показали, что полученные экспериментальные зависимости согласуются с дробно-дифференциальной моделью Зинера (C. Zener). Существуют и другие многочисленные работы, ссылки на которые можно найти в работе В. А. Кубышкина [4].

Описание работы

В данной работе используется дробно-дифференциальная модель Капуто-Майнарди для решения следующей задачи: определить характеристики биологической ткани на основе экспериментальных данных, полученных при циклической деформации аневризмы (циклическое нагружение-разгружение).

Описание модели. Модель Капуто-Майнарди строится на основе следующего дифференциального уравнения:

$$\left[1 + \frac{1}{B}\,{}_0^C D_t^{\alpha}\right]\sigma(t) = m\left[1 + \frac{1}{A}\,{}_0^C D_t^{\alpha}\right]\varepsilon(t), \quad (3)$$

где A, B, m – параметры модели, ${}_0^C D_t^{\alpha}$ – дробная производная Капуто порядка α $(0 < \alpha < 1)$. Решение уравнения Капуто-Майнарди выражается как функция зависимости деформации материла от времени [5]:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E_{\infty}} + \left(\frac{1}{E_0} - \frac{1}{E_{\infty}}\right)\int_0^t E_{\alpha}\left(-\frac{(t-\tau)^{\alpha}}{\tau^{\alpha}}\right)\cdot {}_0^C D_t^{\alpha}\sigma(\tau)d\tau, \quad (4)$$

где $\varepsilon(t)$ – относительная деформация, $\sigma(t)$ – механическое напряжение, $E_0 = m$ – модуль упругости ткани в момент приложения нагрузки, $E_{\infty} = mA/B$ – модуль упругости при

$t \to \infty$, при этом E_α – функция Миттаг-Лефлера, ${}_0^C D_t^\alpha$ – дробная производная Капуто порядка α.

Алгоритм. Для обработки экспериментальных данных, полученных при деформации аневризмы на разрывной машине Instron 5944 [6], был написан программный код на Matlab версии R2022b, в котором было реализовано решение модели Капуто-Майнарди (4). При этом программа, работала таким образом, чтобы расхождение теоретических и экспериментальных значений относительной деформации ε было наименьшим. Особенности реализации алгоритма следующие: 1) для оптимизации используется метод наименьших квадратов; 2) при наличии краевых эффектов в точке $t = 0$ производная Капуто обнуляется, чтобы избежать возникновения особенностей. Значения параметра α изменялись в интервале [0,01; 0,99] с шагом 0,01.

Результаты. Первый график на рисунке 1 (пунктирная линия) показывает экспериментальные данные, второй (сплошная линия) – результат моделирования с оптимальными параметрами и минимальным коэффициентом R^2. Из рисунка видно, что зависимость $\sigma(\varepsilon)$ имеет «петлеобразный» характер, что говорит о наличии гистерезиса, т.е. существует запаздывание деформации относительно приложенного напряжения и несовпадение путей нагрузки и разгрузки материала. При этом «петля» смещается по горизонтальной оси, что можно объяснить наличием остаточной деформации (ползучести).

В результате численного моделирования были получены следующие значения параметров $\alpha = 0{,}03; R^2 = 0{,}9967$. Полученные численные данные можно интерпретировать следующим образом. Поскольку стенку аневризмы можно рассматривать как композит из коллагеновых волокон, эластиновых сетей, протеогликанового матрикса и воды, где каждый компонент имеет своё время релаксации, то при наложении различных процессов суммарная релаксация не описывается одной экспонентой. В этом случае получается степенной закон, и именно его аппроксимирует дробная производная порядка α.

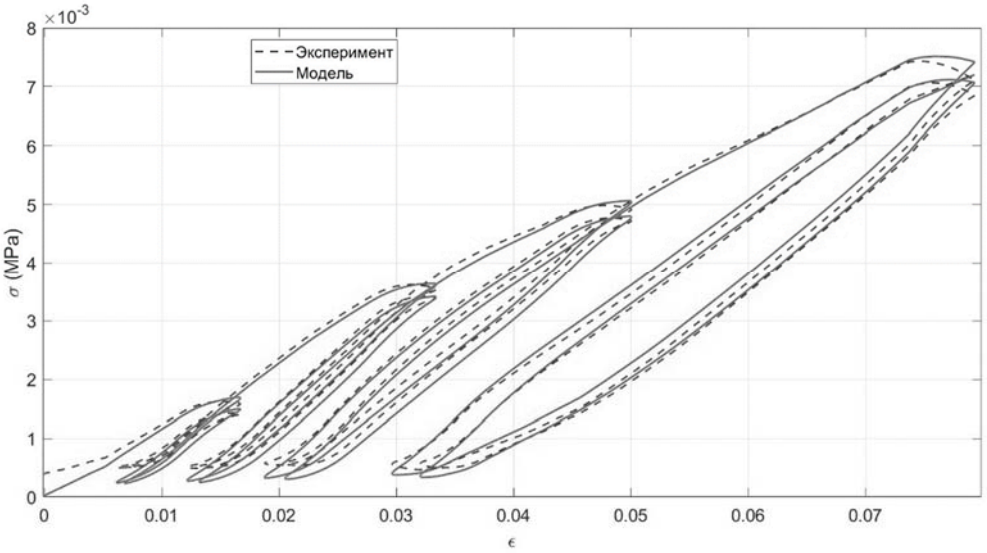


Рисунок 1.Циклическая деформация аневризмы (эксперимент – пунктирная линия, модель Капуто-Майнарди – сплошная линия).

Полученное значение дробной производной может свидетельствовать о том, что доминирует какой-либо один быстрый процесс релаксации, а все остальные происходят слишком медленно, чтобы проявиться на масштабе эксперимента.

Заключение

Полученные результаты наглядно демонстрируют, что дробно-дифференциальная модель Капуто-Майнарди позволяет учитывать не только предысторию нагружения

материала при циклической нагрузке, но и давать численные характеристики его вязкоупругих свойств. Поэтому она будет полезна при изучении, например, прочностных свойств различных вязкоупругих материалов или их патологий.

Литература

1. *О. Г. Новоженова* Биография и научные труды Алексея Никифоровича Герасимова. О линейных операторах, упруго-вязкости, элевтерозе и дробных производных. – М.: Издательство «Перо», 2018. – 5,26 МБ. [Электронное издание].
2. *Meral F. S., Royston T. J., Magin R.* Fractional calculus in viscoelasticity: An experimental study // Commun. Nonlinl Schi. Numer. Simul. – 2010. – Vol. 15. – P. 939-945.
3. *Nasholm S. P., Holm S.* On a fractional Zener elastic wave equation // Frac. Calc. Anal. – 2013. – Vol. 16, No. 1. – P. 26-50
4. *Кубышкин В. А., Постнов С. С.* Дробное интегро-дифференциальное исчисление и его приложения в теории управления. – М.: ИПУ РАН, 2014. – 154 с.
5. *Caputo M., Mainardi F*. A new dissipation model based on memory mechanism Pure Appl. Geophys. – 1971. – Vol. 91. – P. 134-147
6. *Липовка А.И., Карпенко А.А., Чупахин А.П., Паршин Д.В.* Исследование прочностных свойств сосудов абдоминального отдела аорты: результаты экспериментов и перспективы. Прикладная механика и техническая физика, т.63, № 2, 2022, с.84-93

Решение задачи дифракции электромагнитной волны на коллинеарных импедансных пластинах

Solving the Problem of Electromagnetic Wave Diffraction by Collinear Impedance Plates

Сархандеева А.А.*, *Тумаков Д. Н.

Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт вычислительной математики и информационных технологий, Казань, РФ.

sarhandeeva.04@gmail.ru, dtumakov@kpfu.ru

Аннотация. Рассмотрена задача дифракции плоской электромагнитной волны на системе коллинеарных металлических пластин с учетом скин-эффекта. Задача сведена к интегральному уравнению Фредгольма второго рода на объединении непересекающихся отрезков. При дискретизации уравнения возникает блочная матрица, в которой диагональные блоки содержат логарифмическую сингулярность, выделяемую аналитически, а недиагональные блоки описывают взаимное влияние пластин через регулярные функции Ханкеля. Полученные результаты имеют теоретическое и прикладное значение при проектировании экранирующих конструкций и щелевых антенн миллиметрового диапазона.

Введение

Задачи дифракции электромагнитных волн на тонких металлических экранах относятся к числу классических проблем теоретической электродинамики. При высокой проводимости материалов граничные условия на поверхности экрана принимают импедансный вид (условие Леонтовича), что позволяет свести краевую задачу к интегральному уравнению относительно плотности поверхностного тока и существенно упрощает численное моделирование.

В большинстве работ по задачам дифракции на импедансных экранах ограничиваются рассмотрением одиночного рассеивателя. Между тем в реальных устройствах — щелевых антеннах, частотно-селективных поверхностях, составных экранирующих конструкциях — присутствуют несколько близко расположенных проводящих элементов. Поля, создаваемые токами на каждом из них, переотражаются от соседних пластин и интерферируют, что качественно меняет картину рассеяния.

Переход от одной пластины к системе приводит к разделению области интегрирования уравнения на несколько непересекающихся отрезков. При дискретизации это дает матрицу с блочной структурой, где диагональные блоки описывают самовоздействие каждой пластины и содержат логарифмическую сингулярность в ядре, а недиагональные — взаимное влияние пластин через регулярное ядро. Обработка этих двух типов блоков требует применения различных численных приемов.

Целью настоящей работы является построение математической модели дифракции электромагнитной волны на системе двух коллинеарных импедансных пластин с учетом скин-эффекта.

Описание работы

Рассмотрим две металлические пластины, расположенные в плоскости $z = 0$ вдоль оси x на двух непересекающихся отрезках $[a_1, b_1]$ и $[a_2, b_2]$. Пусть на систему пластин падает плоская TE-поляризованная электромагнитная волна вида

$$u_0(x, z) = A_0 e^{-ik(x \sin\phi + z \cos\phi)}, \quad (1)$$

где $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ — волновое число, ϕ — угол падения.

Геометрия рассматриваемой задачи представлена на Рисунке 1.

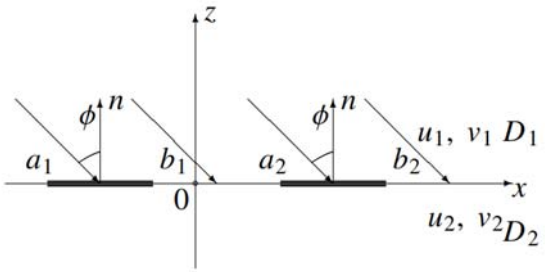


Рисунок 1. Схема падения электромагнитной волны на систему из двух металлических пластин в плоскости $z = 0$: a_i и b_i координаты краев i-й пластины; ϕ — угол падения относительно нормали n; u_1, v_1 и u_2, v_2 — предельные значения полей E_y и H_x на границах полупространств D_1 ($z > 0$) и D_2 ($z < 0$)

На поверхности каждого проводника, с учетом конечной толщины скин-слоя δ, задается приближенное условие Леонтовича [1], [2]

$$u(x, 0) + \chi \frac{\partial u}{\partial z}(x, 0) = 0, x \in [a_1, b_1] \text{ и } [a_2, b_2], \quad (2)$$

где $\chi = k\delta(1 + i)$ — импедансный коэффициент. При $\delta \to 0$ это условие вырождается в классическое $u = 0$ для идеально проводящего экрана.

Сведение к интегральному уравнению. Представим полное поле в виде суммы падающего и рассеянного полей $u = u_0 + u_s$. Запишем рассеянное поле через потенциал простого слоя с неизвестной плотностью $\mu(\tau)$

$$u_s(x, z) = \int_a^b \mu(\tau) G(x - \tau, z) d\tau, \quad (3)$$

где $G(x, z) = \frac{i}{4} H_0^{(2)}(k\sqrt{x^2 + z^2})$ — функция Грина, $H_0^{(2)}$ — функция Ханкеля второго рода нулевого порядка.

Потенциал простого слоя с ограниченной плотностью непрерывен на поверхности, согласно теории потенциалов, а его нормальная производная испытывает скачок, равный $-\mu(x)$. В силу симметрии задачи получим, что $\partial u_s / \partial z|_{z=+0} = -1/2\ \mu(x)$.

Тангенциальная составляющая магнитного поля $H_x = \mathrm{v}$ терпит разрыв, равный плотности поверхностного тока $\mu(\mathrm{x}) = \mathrm{v}_2(\mathrm{x}) - \mathrm{v}_1(\mathrm{x}) = \omega(\mathrm{x})$. Тогда подставим представление поля в граничное условие Леонтовича (2) и получим

$$u_0(x,0) + \int_a^b \omega(\tau) K(x - \tau) d\tau + \chi\left(\frac{u_0}{\partial z}(x,0) - \frac{1}{2}\omega(x)\right) = 0, \quad (6)$$

где $K(\xi) = \frac{i}{4} H_0^{(2)}(k|\xi|)$.

После перегруппировки и переопределения ядра $\widetilde{K}(\xi) = i/2\, H_0^{(2)}(k|\xi|)$ приходим к интегральному уравнению Фредгольма второго рода для $x \in [a_1, b_1]$ и $[a_2, b_2]$

$$-\chi\omega(x) + \sum_{i=1}^{2} \int_{a_i}^{b_i} \omega(\tau)\, K(\tau - x) d\tau = 2u_0(x,0). \quad (7)$$

Дискретизация и блочная структура матрицы. Для численного решения уравнения (7) применим метод коллокаций [3], который более эффективен перед методом Галеркина для решения данной задачи [4]. Искомую функцию $\omega(x)$ на каждом отрезке разложим по полиномам Чебышева первого рода с сингулярным весом, учитывающим краевую особенность на металле [5]

$$\omega(x) \approx \frac{1}{\sqrt{(b_i - x)(x - a_i)}} \sum_{n=1}^{N} C_n^i \tilde{T}_{n-1}^i(x), x \in [a_\mathrm{i}, b_i], \quad (8)$$

где C_n^i — неизвестные коэффициенты разложения, N — число базисных функций на одну пластину, $\tilde{T}_{n-1}^i(x)$ — полиномы Чебышева, отображенные на отрезок $[a_\mathrm{i}, b_i]$.

В качестве точек коллокации выбираем узлы Чебышева на каждом отрезке. Подстановка разложения (8) в интегральное уравнение (7) приводит к системе линейных алгебраических уравнений размерности $2N \times 2N$ с блочной структурой

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}, \quad (9)$$

где каждый блок A_{pq} имеет размер $N \times N$, C_q — блок вектора неизвестных коэффициентов для -й пластины, f_p — блок правой части, вычисленный в точках коллокации на p-й пластине.

Для вычисления элементов матрицы используем формулу

$$A_{kj}^{(pq)} = -\chi\pi\, \delta_{kj}\delta_{pq} + \iint K(\tau, x) \frac{\tilde{T}_{j-1}^{(q)}(\tau)}{\sqrt{(b_q - \tau)(\tau - a_q)}} \frac{\tilde{T}_{k-1}^{(p)}(x)}{\sqrt{(b_p - x)(x - a_p)}} d\tau dx, \quad (9)$$

где δ_{kj} и δ_{pq} — символы Кронекера, индексы p и q обозначают номера пластин (наблюдатель и источник соответственно), k и j — номера базисных функций.

Диагональные блоки A_{11} и A_{22} $(p = q)$ описывают самовоздействие пластин и содержат логарифмическую особенность в ядре $K(\tau, x) = \ln|\tau - x| + r(\tau, x)$, выделяемую аналитически, $r(\tau, x)$ — регулярная часть. Недиагональные блоки A_{12} и A_{21} $(p \neq q)$ описывают взаимное влияние пластин.

Заключение

В работе построена математическая модель дифракции ТЕ-поляризованной волны на системе двух коллинеарных импедансных пластин. Краевая задача сведена к интегральному уравнению Фредгольма второго рода на объединении непересекающихся отрезков. Применение метода коллокаций с сингулярным базисом привело к системе линейных алгебраических уравнений с выраженной блочной структурой. Установлено, что диагональные блоки, отвечающие за самовоздействие, требуют аналитического выделения логарифмической особенности, тогда как недиагональные блоки, описывающие взаимное влияние экранов, вычисляются напрямую через регулярные

функции Ханкеля. Такое разделение процедур гарантирует корректный учет краевых условий на металле и оптимизирует вычислительные затраты. Благодаря описанной структуре матрицы алгоритм может быть адаптирован для экранов с большим числом элементов, а также эффективно распараллелен.

Литература

1. *Ильинский А. С., Смирнов Ю. Г.* Дифракция электромагнитных волн на проводящих тонких экранах. — М.: ИПРЖ, 1996. — 176 с.
2. *Тамм И. Е.* Основы теории электричества. — 10-е изд. — М.: Наука, 1989. — 504 с.
3. *Карчевский Е. М.* Численные методы решения интегральных уравнений и комплекс программ на языке Matlab. — Казань: Казанский университет, 2017. — 61 с.
4. *Sarkhandeeva A. A., Tumakov D. N.* Electromagnetic wave diffraction by a metal plate accounting for the skin effect // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2026. — Vol.47, no. 8. — P. 3831–3841.
5. *Гордеева А. Н., Тумаков Д. Н.* Рассеяние электромагнитной волны на системе параллельных металлических экранов // Учен. зап. Казан. гос. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. — 2008. — Т. 150, кн. 1. — С. 38–55.

Нахождение комплексных постоянных распространения собственных волн в слоях с потерями для решения задачи подавления токов, бегущих по металлической поверхности

Defining Complex Eigenwaves Propagation Constants in Layers with Losses to Solve the Problem of Suppression of Currents Traveling along Metal Surface

Лебедев А. М., Семизбаев А.Д., Фурманова Т.А.

Институт теоретической и прикладной электродинамики РАН, Москва, РФ.

itae@itae.ru

Аннотация. В работе рассматривается способ определения комплексных постоянных распространения собственных волн в плоском слое поглощающего покрытия на металлической поверхности, обсуждаются условия получения достаточно больших значений постоянной затухания выбором параметров слоя. Актуальность результатов работы определяется необходимостью правильного выбора параметров покрытия для эффективного подавления поверхностных токов и связанных с ними волн, которые являются причиной нежелательных дифракционных явлений.

Введение

Актуальность задачи подавления traveling waves [1] – поверхностных токов и связанных с ними волн, возникших в результате первичной дифракции и далее самостоятельно распространяющихся по металлическому рассеивателю, вытекает из необходимости уменьшать проявления эффектов вторичной дифракции. Действительно, вторичная дифракция приводит к повышению радиолокационной заметности объектов, ухудшает направленность излучения антенными системами, способна нарушить электромагнитную совместимость приёмо-передающих элементов конструкции (смотри, например, [2]), снижает помехозащищённость приёмных антенн, когда поверхностные токи наводятся полями внешних нежелательных источников.

Развивается подход к подавлению traveling waves как собственных волн. Действительно, самостоятельно распространяющиеся волны описываются как решения уравнения Гельмгольца с нулевой правой частью и, следовательно, представимы как в общем случае суперпозиция собственных волн объекта. В работе предложен метод расчёта постоянной распространения h' и постоянной затухания h'' (действительной и мнимой частей комплексной постоянной распространения $h = h' - i \cdot h''$) в двумерном случае для собственной E волны основного (низшего) типа в слое поглотителя постоянной толщины на плоской металлической поверхности. E (или TH) волна имеет составляющую вектора напряжённости электрического поля, перпендикулярную

поверхности металла. Ситуация, в которой численно определяются h' и h'', физически близка к движению traveling wave вдоль большой гладкой металлической поверхности, когда для подавления указанной волны на поверхность нанесено поглощающее покрытие. Поэтому параметры поглотителя, обеспечивающие достаточно полное затухание поверхностного тока на участке поглотителя определённой длины, будут близки в обоих случаях. Оценка постоянной затухания в двумерном случае позволяет минимизировать этап подбора достаточно эффективного покрытия в сериях натурных и вычислительных экспериментов. Из изложенного ясно, что выбор параметров оптимального поглощающего покрытия для эффективного подавления поверхностных токов и для минимизации локального коэффициента отражения в целях снижения интенсивности рассеяния – это разные процедуры, приводящие к разным результатам.

В данной работе оценки постоянных затухания собственных E волн в слое были получены из численного решения соответствующего характеристического уравнения. Была оценена возможность увеличения постоянной затухания собственной волны поглотителя до достаточно больших значений вариацией действительной и мнимой частей диэлектрической и магнитной проницаемостей поглотителя.

Описание работы

Рассмотрим предлагаемый метод нахождения комплексных постоянных распространения для собственных E волн основного типа в слое магнитодиэлектрика с потерями и результаты проведённых расчётов.

Определение комплексных постоянных распространения для собственных E волн слоя при вариации параметров поглощающего слоя. Значения комплексных постоянных распространения $h = h' - i \cdot h''$ собственных E волн слоя поглотителя на металлической поверхности, когда диэлектрическая и магнитная проницаемости поглотителя комплексные $\varepsilon = \varepsilon' - i \cdot \varepsilon''$, $\mu = \mu' - i \cdot \mu''$, определялись как нули модуля левой части характеристического (дисперсионного) уравнения для слоя. Левая часть характеристического уравнения представляет собой детерминант системы двух однородных линейных уравнений относительно амплитуд полей вне и внутри слоя. Уравнения системы получаются из условий непрерывности тангенциальных к границе составляющих напряжённостей электрического и магнитного полей [3, 4]. Известно, что такая система имеет отличные от нуля решения (здесь – собственные волны слоя на металлической поверхности) лишь когда определитель системы обращается в нуль. В соответствии с [3, 4], характеристическое уравнение для слоя на металлической поверхности имеет вид

$$\sqrt{h^2 - k_0^2} \cdot a - {}^1\!/_{\varepsilon} \cdot \sqrt{\varepsilon \cdot k_0^2 - h^2} \cdot a \cdot \mathrm{tg}\left(\sqrt{\varepsilon \cdot k_0^2 - h^2} \cdot a\right) = 0,$$

где k_0 - волновое число, a – толщина слоя.

Положение нуля модуля левой части характеристического уравнения на плоскости комплексного переменного $h = h' - i \cdot h''$ определялось по картине линий уровня для этого модуля. На рис. 1 приведён пример линий уровня в координатах h'/k_0, h''/k_0 для случая определения комплексной постоянной распространения собственной волны в слое поглотителя толщиной *2мм* с параметрами $\varepsilon'=30$, $\varepsilon''=3$, $\mu'=4.75$, $\mu''=0.5$ на частоте 3ГГц.

В данном случае из картины линий уровня следует наличие двух корней у характеристического уравнения и, следовательно, двух собственных волн у слоя с заданными параметрами.

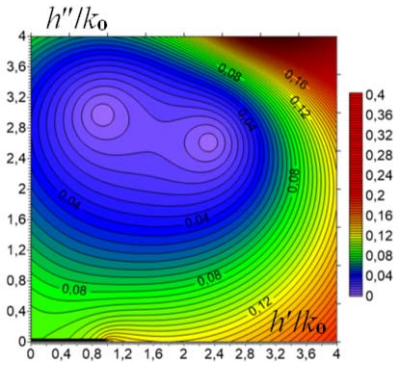


Рисунок 1. Пример линий уровня модуля левой части характеристического уравнения на плоскости комплексного переменного $h = h' - i \cdot h''$

Значение постоянной распространения интересующего низшего типа собственной волны составляет $h/k_0 \approx 2.34 - i2.56$. Правильность выбора корня характеристического уравнения обеспечена прослеживанием изменения положения корня при малых приращениях значений электродинамических параметров от значений для свободного пространства $\varepsilon = 1$, $\mu = 1$, когда единственное значение постоянной распространения h действительно и равно k_o – вдоль поверхности металла распространяется ТЕМ волна с вектором $\boldsymbol{E}$, перпендикулярным поверхности, как предельный случай поверхностной волны в слое среды с $\varepsilon \to 1$, $\mu \to 1$.

На рис. 2 представлены некоторые результаты расчётов комплексной постоянной распространения собственной волны в слое поглотителя на металле при толщине слоя *2мм*, частоте *3ГГц* и вариации параметров поглотителя.

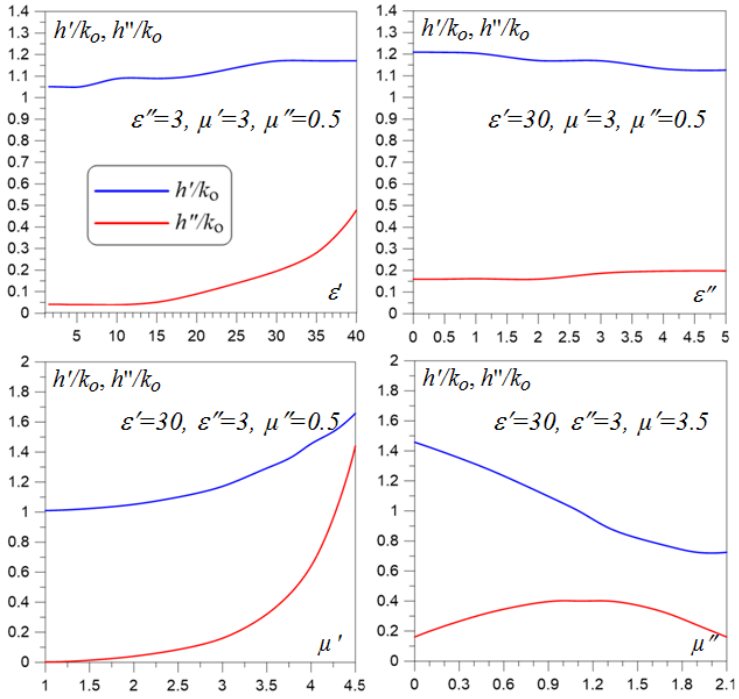


Рисунок 2. Вычисленные зависимости постоянных распространения h′ и затухания h″ собственной E волны низшего типа от электродинамических параметров слоя

Видно, что наиболее эффективно можно обеспечить достаточно большие значения постоянной затухания h'' подбором значений действительной и мнимой частей магнитной проницаемости поглотителя μ' и μ'' – после того, как μ' превысила некоторый порог, начиная с которого μ' и μ'' начинают значительно влиять на величину h''.

Заключение

Расчёты показали более сильное влияние действительной и мнимой частей магнитной проницаемости поглотителя на постоянную затухания собственной волны в слое поглотителя.

Целесообразно развить использованный в работе метод нахождения комплексных постоянных распространения собственных волн на случай многослойного поглотителя, и далее развить методы оптимизации параметров слоя поглотителя, обеспечивающего наибольшее поглощение собственной волны в полосе частот.

Литература

1. *Knott E.F., Shaeffer J.F., Tuley M.T.* Radar cross Section. — 2nd ed., SciTech Publishing, Inc., USA. 2004. — 637 p.
2. *Лебедев А.М., Фурманова Т.А., Семененко В.Н., Семизбаев А.Д.* Формирование приповерхностных максимумов излучения собственными волнами тонких металлических стержней // Современная электродинамика. — 2025. — Т. 4, № 6(20). — С. 11-18. doi:10.24412/2949-0553-2025-620-11-18
3. *Никольский В.В., Никольская Т.И.* Электродинамика и распространение радиоволн. — М.: Наука, 1989. — 540 с.
4. *Баскаков С.И.* Электродинамика и распространение радиоволн. — М.: Высшая школа, 1992. — 416 с.

Асимметричные пограничные слои в сингулярно возмущенной задаче реакция-диффузия-адвекция в кольце

Asymmetric Boundary Layers in a Singularly Perturbed Reaction-Diffusion-Advection Problem in a Ring

Волков В.Т. [1]***, Орлов А.О.*** [2]***, Сюн Чжусюань*** [3]

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова,

физический факультет, Москва, РФ.

volkovvt@mail.ru[1]*, orlov.andrey@physics.msu.ru*[2]*, 3273187750@qq.com*[3]

Аннотация. Данная работа посвящена исследованию сингулярно возмущенной краевой задачи для уравнения реакции-диффузии-адвекции в двумерной кольцевой области. Особенностью задачи является сильная анизотропия физических параметров диффузии и адвекции, что приводит к возникновению разномасштабных пограничных слоев на внешней и внутренней границах кольца.

Описание работы

Формулировка задачи задается уравнением

$$\varepsilon^4 \Delta u = \varepsilon(\boldsymbol{A}(u, r, \psi, \varepsilon), \nabla u) + B(u, r, \psi, \varepsilon) \quad (1)$$

с граничными условиями Дирихле на внутренней и внешней границах кольца и периодическими условиями по угловой переменной ψ.

Естественным следствием кольцевой геометрии является то, что адвективный перенос определяется радиальной составляющей вектора скорости. Ключевой особенностью модели является сильная анизотропия физических параметров: сверхслабая диффузия порядка $O(\varepsilon^4)$ в сочетании со слабой адвекцией порядка $O(\varepsilon)$. Дисбаланс между диффузией и адвекцией приводит к качественно новому эффекту – образованию асимметричных пограничных слоев принципиально разных масштабов. А именно, в зависимости от направления радиального адвективного переноса на одной из границ кольца образуется пограничный слой толщиной $O(\varepsilon^3)$, а на другой – слой толщиной $O(\varepsilon)$.

Для построения формального асимптотического приближения решения с многомасштабными пограничными слоями применяется метод граничных функций

А.Б. Васильевой. Для доказательства существования, локальной единственности и асимптотической устойчивости построенного стационарного решения используется модифицированный асимптотический метод дифференциальных неравенств Н.Н. Нефедова. В отличие от классических схем, в исследуемой задаче из-за асимметрии пограничных слоев уже для обоснования нулевого приближения асимптотики требуется построение и модификация формальной асимптотики вплоть до третьего порядка.

Исследование выполнено в рамках государственного задания МГУ имени М.В. Ломоносова.

Литература

1. *Bukzhalev E.E.* A singularly perturbed equation with a boundary-layer solution whose expanded variables depend on various powers of a perturbation parameter // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2003. — V. 43, №12. — P. 1707–1717.
2. *Levashova N.T., Nefedov N.N., Nikolaeva O.A.* Existence and asymptotic stability of a stationary boundary-layer solution of the two-dimensional reaction–diffusion–advection problem. // Differential Equations. — 2020. — V. 56, № 2. — P. 199–211.

Обратная коэффициентная задача для обобщённого уравнения Колмогорова–Петровского–Пискунова с периодическим фронтом

Inverse Coefficient Problem for a Generalized Kolmogorov–Petrovsky–Piskunov Equation with a Periodic Front

Быков А. А., Ли С.

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.

abykovmsu@mail.ru.

Под руководством и при участии профессора А. Г. Свешникова был выполнены циклы работ в области исследования обратных и некорректно поставленных задач [1], [2] и в области исследования уравнений соболевского типа [3], [4]. В настоящей работе мы решаем задачу, включающую эти два направления и рассматриваем обратную коэффициентную задачу для трёхмерного обобщённого уравнения Колмогорова-Петровского-Пискунова (**ОКПП**) в неоднородной среде с периодическим фронтом. Уравнение ОКПП характерно наличием слагаемого, пропорционального производной по времени от лапласиана. Исходная обратная задача для трёхмерного уравнения ОКПП с малым параметром сводится к двумерной задаче восстановления пространственно-неоднородной скорости дрейфа дисбаланса $W_{\mathrm{disb}}(x,y)$. Прямая задача об эволюции фронта решается методом асимптотического разложения по степеням малого параметра. Для решения некорректной обратной задачи предлагается двухэтапная стратегия регуляризации: на первом этапе применяется регуляризованное сглаживание наблюдаемых данных для устойчивого вычисления производных методом total variation (**TV**), на втором-метод alternating direction method of multipliers (**ADMM**) для восстановления функции $W_{\mathrm{disb}}(x,y)$. Эффективность подхода демонстрируется на численном примере с гладким периодическим фронтом.

Обобщённое уравнение КПП с малым параметром

Рассматривается сингулярно возмущённая [4] начально-краевая задача

$$(u-\varepsilon^2\mu\Delta u)_t+\varepsilon^2\boldsymbol{V}\nabla u=\varepsilon^2\nabla(\kappa\nabla u)+f(u,\boldsymbol{r}),\qquad \boldsymbol{r}=(x,y,z)\in D\subset\mathbb{R}^3, \tag{1}$$

с краевыми условиями периодичности по x и y и начальным условием, обеспечивающим решение типа контрастной структуры (КС). Предполагаем, что функция плотности

источников $f(u, \boldsymbol{r}, \varepsilon)$ удовлетворяет условиям: (**У1)** $f(u, \boldsymbol{r})$ – гладкая функция в области $\boldsymbol{r} \in D$, $u \in (-\infty, +\infty)$. (**У2)** В D имеется ровно три поверхности равновесия $S_{1,2,3}$: $u = \varphi_{1,2,3}(\boldsymbol{r})$, причём $\varphi_1 < \varphi_2 < \varphi_3$ в D, все $S_{1,2,3}$ гладкие. (**У3)** На S_1 и на S_3 верно $f'_u > 0$, на S_2 верно $f'_u < 0$. (**У4)** Всюду внутри D выполнено условие знакоопределённости дисбаланса:

$$J(\boldsymbol{r}) = \int_{\varphi_1}^{\varphi_3} f(u, \boldsymbol{r}) du > 0.$$

(**У5)** $f(u, x, y, z) = f(u, x, y)$, $f(u, x + mL_x, y + nL_y) = f(u, x, y)$. Начальные данные и решение также периодичны по x и y.

Мы используем разложение $f(u, \boldsymbol{r}, \varepsilon)$ в ряд по степеням ε: $f(u, \boldsymbol{r}, \varepsilon) = f_0(u, \boldsymbol{r}) + \varepsilon f(u, \boldsymbol{r}) + \cdots$ Для дисбаланса J получим $J = J_0 + \varepsilon J_1 + \cdots$ Асимптотический анализ [5] даёт скорость дрейфа нулевого порядка $W_0 = \mathrm{C} J_0(\boldsymbol{r})$, значение коэффициента C найдено в [6]. В настоящей работе полагаем $J_0 = 0$, т.е. в нулевом порядке среда сбалансирована. Для скорости дрейфа первого порядка найдём $W_1 = \nu(\lambda J_1(\boldsymbol{r}) + \beta H)$, где H есть средняя кривизна поверхности, заданной в виде $z = Z(x, y)$:

$$H = \frac{\left(1 + Z_y^2\right) Z_{xx} - 2 Z_x Z_y Z_{xy} + (1 + Z_x^2) Z_{yy}}{2(1 + Z_x^2 + Z_y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

В частности, для $f_0(u) = \gamma u(U^2 - u^2)$, получим $\nu = (1 + 4\mu/(5\theta^2))^{-1}$.

Математическая модель и основное уравнение

Рассмотрим класс решений, для которых $u(x, y, z, t) = v(x, y, z - W_{\text{solid}} t)$, $z(x, y, t) = Z(x, y) + W_{\text{solid}} t$. Скорость фронта по нормали $W_n = \frac{W_{\text{solid}}}{\sqrt{1 + |\nabla Z|^2}}$. Пусть положение поверхности фронта известно в два момента времени t_a и t_b: $\hat{z}_1(x_i, y_j)$, $\hat{z}_2(x_i, y_j)$, причём наблюдения содержат аддитивный гауссов шум с известной дисперсией. Тогда $\widehat{W}_{\text{solid}} = \frac{\langle \hat{z}_2 \rangle - \langle \hat{z}_1 \rangle}{t_b - t_a}$, $\hat{Z} = \hat{z}_1 - \widehat{W}_{\text{solid}} t_a$, здесь используются средние значения. Требуется найти оценку скорости W_{solid} и восстановить $W_{\text{disb}}(x, y)$ из ***основного уравнения обратной задачи:***

$$W_{\text{disb}}(x, y) = \frac{W_{\text{solid}}}{\sqrt{1 + |\nabla Z|^2}} - 2\kappa H(x, y), \tag{2}$$

Общий коэффициент ε сокращён. Задача восстановления $W_{\text{disb}}(x, y)$ относится к классу некорректных по Тихонову. Источники некорректности: неустойчивость численного дифференцирования, разреженность данных нелинейность относительно Z. Эти особенности требуют применения специализированной стратегии регуляризации.

Метод регуляризации

Первый этап. TV-регуляризованное сглаживание наблюдений:

$$\hat{f} = \arg \min_{f \in BV(\Omega)} \left\{ \alpha \int_\Omega |\nabla f| \, dxdy + \frac{1}{2} \int_\Omega |f - z_{\text{obs}}|^2 \, dxdy \right\}, \tag{3}$$

которое решается первично-двойственным алгоритмом Шамболя-Пока. После сглаживания вычисляются производные $\hat{Z}_x, \hat{Z}_y, \hat{Z}_{xx}, \hat{Z}_{xy}, \hat{Z}_{yy}$ и средняя кривизна $\widehat{H}$.

Второй этап. Строится промежуточная величина $b(x, y) = \frac{\widehat{W}_{\text{solid}}}{\sqrt{1 + |\nabla \hat{Z}|^2}} - 2\kappa \widehat{H}(x, y)$, решается задача TV-регуляризации

$$\widehat{W}_{\text{disb}} = \operatorname{argmin}_W \left\{ \frac{1}{2} \| W - b \|_{L^2}^2 + \lambda \int_\Omega |\nabla W| \, dxdy \right\}. \tag{4}$$

Эта задача решается методом ADMM; вводя вспомогательную переменную Z и двойственную переменную U, получаем итерации $W^{(k+1)} = \frac{b + \rho(Z^{(k)} - U^{(k)})}{1 + \rho}$, $Z^{(k+1)} =$

$\operatorname{argmin}_Z\{\lambda \| \nabla Z \|_{L^1} + \frac{\rho}{2} \| W^{(k+1)} - Z + U^{(k)} \|^2\}$, $U^{(k+1)} = U^{(k)} + (W^{(k+1)} - Z^{(k+1)})$, решается также алгоритмом Шамболя-Пока с параметром регуляризации λ/ρ, где $\rho > 0$ – параметр штрафа.

Результаты численного эксперимента

Для исследования эффективности алгоритма зададим гладкую дважды периодическую функцию $\tilde{Z}(x, y)$, которая моделирует форму движущегося фронта КС. Зададим также скорость движения фронта как единого целого $\widetilde{W}_{\text{solid}}$. После этого из основного уравнения найдём функцию $\widetilde{W}_{\text{disb}}(x, y)$ аналитически, используя символьное дифференцирование. Далее моделируем данные наблюдений, в которые добавляется гауссов шум: $\hat{Z}(x, y) = \tilde{Z}(x, y) + \delta \cdot Gaussian - Noise$. Восстанавливаем $W_{\text{disb}}(x, y)$, используя алгоритм регуляризации, величину параметра регуляризации выбираем по невязке, результат обозначим $\widehat{W}_{\text{disb}}(x, y)$. При этом восстанавливается также $\widehat{W}_{\text{solid}}$. Рассмотрим модельную функцию

$$Z_{\text{disb}}^{\text{true}}(x, y) = \sum_{-\infty}^{+\infty} z(x - mL_x, y - nL_y), \qquad z(x, y) = z_{\text{amp}} \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_x^2} - \frac{y^2}{2\sigma_y^2}\right),$$

где $b_{\text{amp}} = 0.8$, $\sigma_x = \sigma_y = 0.8$. Расчётная область $[-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$ дискретизировалась сеткой 64×64, шаг по времени $\Delta t = 0.5$, уровень шума $\sigma = 1.5\%$. Параметр μ варьировался в пределах $\{0;\ 0.3;\ 0.8\}$.

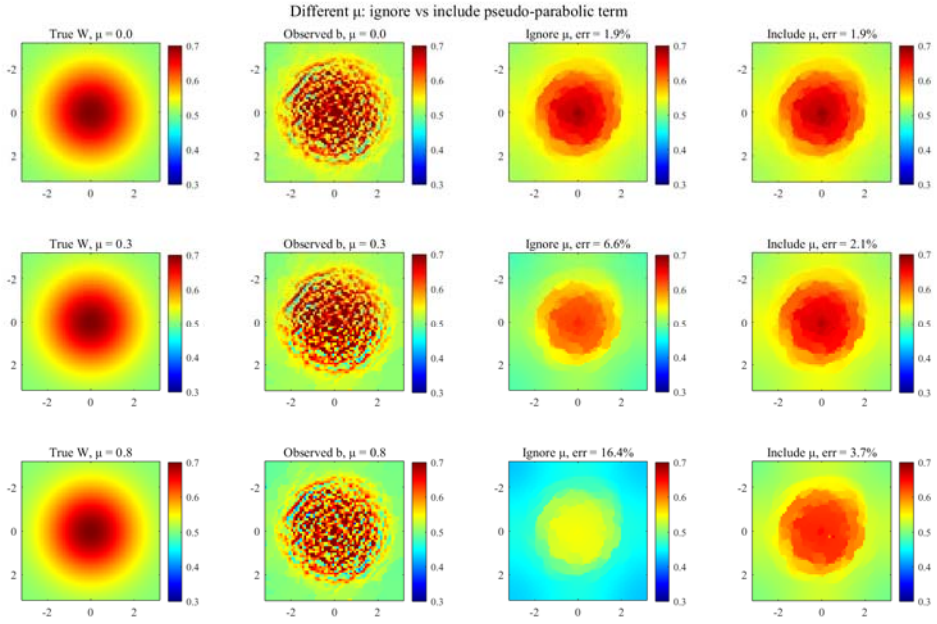


Рисунок 1.

На рис.1 показано восстановление $W_{\text{disb}}(x, y)$ при различных значениях параметра μ (строки: $\mu = 0,\ 0.3,\ 0.8$). Столбцы: истинное поле, зашумлённые данные $b^{(\mu)}$, результаты обращения без учёта и с учётом псевдопараболической поправки. Над изображениями указана относительная ошибка.

При $\mu = 0$ оба варианта совпадают: ошибка 1.9%, что соответствует нижней границе точности метода при заданном уровне шума. При $\mu = 0.3$ игнорирование поправки приводит к потере амплитуды в центральной части поля и ошибке 6.6%, тогда как её учёт снижает ошибку до 2.1%. Наконец, при $\mu = 0.8$ вариант без поправки даёт ошибку 16.4% и практически теряет структуру поля, а вариант с её учётом сохраняет ошибку на уровне 3.7%.

Полученные результаты согласуются с асимптотической оценкой: псевдопараболическое слагаемое вносит в скорость дрейфа поправку порядка $\mu(I_2/$

$I_1)W_{\text{disb}}$, которая при $\mu\sim0.1$ составляет единицы процентов, а при $\mu\sim1$ становится сравнимой с основным вкладом. Игнорирование поправки приводит к систематическому смещению оценки, линейно растущему с μ; её учёт стабилизирует ошибку восстановления. Таким образом, численный эксперимент подтверждает необходимость включения псевдопараболической поправки в обратную задачу и устойчивость стратегии TV + ADMM к измерительному шуму.

Заключение

В работе рассмотрена обратная коэффициентная задача для обобщённого уравнения КПП с периодическим фронтом. На основе асимптотического анализа получено уравнение динамики фронта, связывающее форму поверхности с пространственно-неоднородной скоростью дрейфа дисбаланса. Основной результат состоит в том, что псевдопараболическое слагаемое вносит дополнительный вклад в знаменатель выражения для скорости дрейфа нулевого порядка; для переходного слоя типа $\tanh$ отношение вкладов равно $1/5$. Для решения некорректной обратной задачи предложена двухэтапная стратегия регуляризации, включающая TV-сглаживание наблюдаемых данных и TV-регуляризацию, решаемую методом ADMM. Численный эксперимент подтверждает эффективность подхода: при уровне шума 1.5% относительная ошибка восстановления не превышает 3%, тогда как игнорирование псевдопараболической поправки приводит к росту ошибки до 16% при $\mu = 0.8$. В качестве дальнейшего развития предполагается обобщение подхода на случай непериодического фронта и применение метода к экспериментальным данным. Работа развивает подход, заложенный в исследованиях профессора А. Г. Свешникова по уравнениям соболевского типа и некорректно поставленным задачам.

Литература

1. *Свешников А.Г., Тихонравов А.В.* Математические методы в задачах анализа и синтеза слоистых сред. // Матем. моделирование. 1989. Т. 1, N– 7. С. 13-38.
2. *Свешников А.Г., Тихонравов А.В., Трубецков М.К.* Нелокальный метод оптимизации многослойных оптических систем. // Матем. моделирование. 1995. Т. 7, N– 8. С. 105-127.
3. *Свешников А.Г., Альшин А.Б., Корпусов М.О., Плетнер Ю.Д.* Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа. М.: Физматлит, 2007. 368 с.
4. *Корпусов М.О., Свешников А.Г.* О разрушении за конечное время решений начально-краевых задач для уравнений псевдопараболического типа типа с псевдолапласианом. // ЖВМиМФ. 2005. Т. 45, N– 2. С. 272-286.
5. *Нефедов Н.Н.* Развитие методов асимптотического анализа переходных слоёв в уравнениях реакции-диффузии-адвекции: теория и применение // ЖВМиМФ. 2021. Т. 61, N– 12. С. 2074-2094.
6. *Быков А.А., Гань Цинчжао.* Применение метода Гамильтона-Якоби в теории псевдопараболических уравнений с малым параметром. Труды конференции “Актуальные проблемы электродинамики 2026 имени А.Г. Свешникова”.

Численное решение уравнения Аллена-Кана на тайловых адаптивно измельчаемых сетках

Numerical Simulation of Allen-Cahn Equation by Tiled AMR

Толмачёва Н.С., Иванов А.В.

Институт прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН, Москва, РФ

tniserg@gmail.com, aiv.racs@gmail.com

Аннотация. Работа посвящена особенностям AMR (Adaptive Mesh Refinement) алгоритмизации на примере численного решения уравнения Аллена-Кана. Описана тайловая версия AMR. Рассмотрены различные критерии измельчения сетки,

аппроксимации оператора Лапласа на границе измельчения сетки, алгоритмы измельчения шага по времени, особенности реализации явных и неявных схем.

Описание работы

Адаптивно измельчаемые сетки (Adaptive Mesh Refinement, AMR) эффективны при численном решении задач, в которых существенные изменения происходят только в небольших зонах (например, движущиеся фронты, границы раздела фаз), а в остальной части расчётной области решение меняется медленно или остаётся почти постоянным. Использование же равномерной мелкой сетки на всей расчетной области приводит к огромным затратам памяти и времени, в то время как применение AMR дает такую же высокую точность, а затраты на расчёт сокращаются в десятки и сотни раз [1].

Кроме трудностей, связанных с программной реализацией, есть проблемы с локальностью данных и алгоритмической сложностью доступа к соседям, что отрицательно влияет на производительность. С точки зрения организации данных есть два предельных случая — блочно-структурированный AMR (например, AMReX [2]) и древовидный AMR (например, p4est [3]). У блочно-структурированного AMR относительно быстрый доступ к соседям и приемлемая локальность данных, но есть сложности с избыточными затратами памяти. У древовидного AMR перерасход памяти минимален, но затруднен доступ соседним ячейкам и наблюдается низкая локальность данных. Оба подхода испытывают сложности с перестроением сетки. Золотой серединой является т. н. «тайловый» (tiled) AMR или TAMR. В этом подходе сетка организована в виде дерева тайлов — кубических блоков ячеек относительно небольшого фиксированного размера. TAMR объединяет достоинства двух предельных случаев, позволяя избавиться от их недостатков. TAMR реализован на языке C++ в виде модуля библиотеки aiwlib.

Хорошим вариантом для тестирования AMR является уравнение Аллена-Кана. Решениями этого нелинейного уравнения с диффузионным членом являются профили резких движущихся фронтов, разделяющих области с плавным изменением функции. В связи с этим требуется измельчение сетки на фронте и перестроение сетки в процессе решения. При этом возникают традиционные для AMR сложности — необходимость формулировки критерия измельчения сетки, аппроксимации оператора диффузии на границе разбиения сетки и измельчения временного шага при измельчении сетки. Хотя способы решения этих проблем с математической точки зрения хорошо известны [4] – [6], с алгоритмической точки зрения возможны различные варианты, отличающиеся эффективностью и сложностью программной реализации.

В работе сравниваются различные критерии измельчения сетки, основанные на модуле градиента решения, модуле лапласиана и модулях разности решений на различных уровнях измельчения (решение на крупной и мелкой сетках). Проводится сравнение эффективности программной реализации различных вариантов аппроксимации оператора Лапласа на границе разбиения сетки, основанных на интерполяции решения в крупной ячейке. Приводятся различные алгоритмы измельчения шага по времени на областях с измельченной сеткой. Рассмотрена реализация как явных, так и неявных численных схем.

Литература

1. *Provatas N., Goldenfeld N., Dantzig J.* Efficient computation of dendritic solidification using adaptive mesh refinement // Physical Review Letters. — 1998. — Vol. 80, no. 15. — P. 3308–3311.
2. *Zhang W., Almgren A., Beckner V., Bell J., Blaschke J., Chan C., Day M., Friesen B., Gott K., Graves D. et al.* AMReX: A framework for block-structured adaptive mesh refinement // Journal of Open Source Software. – 2019. – Vol. 4, No. 37. – P. 1370.
3. *Burstedde C., Wilcox L. C., Ghattas O.* p4est: Scalable algorithms for parallel adaptive mesh refinement on forests of octrees // SIAM Journal on Scientific Computing. – 2011. – Vol. 33, No. 3. – P. 1103–1133.

4. *Berger M. J., Colella P.* Local adaptive mesh refinement for shock hydrodynamics // Journal of Computational Physics. – 1989. – Vol. 82, No. 1. – P. 64–84.
5. *Feng X., Prohl A.* Numerical analysis of the Allen-Cahn equation and approximation for mean curvature flows // Numerische Mathematik. – 2004. – Vol. 94, No. 1. – P. 33–65.
6. *Nochetto R. H., Savaré G., Verdi C.* A posteriori error estimates for variable time-step discretizations of nonlinear evolution equations // Communications on Pure and Applied Mathematics. – 2000. – Vol. 53, No. 5. – P. 525–589.

N-кратные ортогональные вейвлеты Кравченко на основе атомарных функций и их применение к задачам радиофизики

N-Band Orthogonal Kravchenko Wavelets Based on Atomic Functions and Their Application to Radiophysics Problems

***Юрин А.В.*[1], Будунова К.А.[1], Кравченко О.В.[1,2]**

1) Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, Москва, РФ;
2) Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН, Москва, РФ.

yualexmy@yandex.ru, olekravchenko@gmail.com

Аннотация. В докладе предложено построение ортонормированных вейвлетов Кравченко с коэффициентом масштабирования $N > 2$. Масштабирующая функция в частотной области получена на основе частичной суммы сдвигов атомарной функции, образующей разложение единицы. Ортонормированность вейвлет-системы обеспечивается за счет фазирования канальных фильтров с атомарным профилем переходных полос. Полученные частотные функции характеризуются бесконечной гладкостью, а коэффициенты вейвлет-фильтров убывают быстрее любой степени. Практическая значимость предложенного подхода продемонстрирована на примере обработки георадарного профиля фильтрами вейвлетов с коэффициентом масштабирования $N = 3$. Предложенное решение позволило на одном уровне разложения одновременно компенсировать затухание отраженного сигнала, удалить постоянную составляющую и ослабить фоновый шум.

Введение

В [1], [2] предложено и обосновано построение ортонормированных вейвлетов Кравченко с использованием частичной суммы атомарных функций, что обеспечивает бесконечную гладкость и финитность спектра [3]. Обобщение традиционного двоичного до -кратного масштабирования реализуется посредством сжатия спектра масштабирующей функции с ростом N и последующего разделения частотной оси на $N-1$ вейвлетов с атомарным профилем переходных полос. Такие вейвлеты при обработке сигналов различной физической природы позволяют улучшить частотную избирательность и сократить число уровней вейвлет-разложения. Для вейвлетов Мейера похожее обобщение выполнено в [4].

Описание работы

Масштабирующая функция φ и вейвлеты ψ^k, $k = 1, \dots, N-1$, с коэффициентом масштабирования $N > 2$ задаются уравнениями

$$\hat{\varphi}(\omega) = H_0\left(\frac{\omega}{N}\right)\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{N}\right), \qquad \hat{\psi}^k(\omega) = H_k\left(\frac{\omega}{N}\right)\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{N}\right). \tag{1}$$

Система $\{\varphi_{j,n}(x), \psi^k_{j,m}(x)\}$ в $L_2(\mathbb{R})$ ортонормирована тогда и только тогда, когда матрица модуляции частотных функций является унитарной, что эквивалентно выполнению уравнений совершенной реконструкции:

$$\sum_{l=0}^{N-1} H_k\left(\omega - 2\pi l/N\right)\overline{H_{k'}(\omega - 2\pi l/N)} = \delta_{kk'},\ k, k' = 0, \dots, N-1. \tag{2}$$

Энергетическое равенство

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}|H_k(\omega)|^2 = 1$$

необходимо, но недостаточно, поскольку оно даёт лишь жёсткий фрейм, а ортогональность требует обращения в нуль внедиагональных элементов (2).

В случае построения -кратных вейвлетов на основе атомарной функции up(•) спектр масштабирующей функции задаётся следующей формулой:

$$\hat{\varphi}_N(\omega) = \sqrt{\sum_{p=-(N-1)}^{N-1} up\left[(2N-1)\omega/2\pi + p\right]} \qquad (3)$$

с носителем $[-2\pi N/(2N-1),\ \ 2\pi N/(2N-1)]$, который сужается к [-$\pi$, π] при $N \to \infty$. Сдвиги φ_N ортонормированы при любом N поскольку выполняется условие ортогональности целочисленных сдвигов

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\hat{\varphi}_N(\omega + 2\pi p)|^2 = 1. \qquad (4)$$

Низкочастотный фильтр получается с использованием периодизации сжатых в N-раз масштабирующих функций

$$H_0(\omega) = \sum_{p\in\mathbb{Z}} \hat{\varphi}_N\big(N(\omega + 2\pi p)\big).$$

Для построения фильтров вейвлетов H_k определяется полифазной матрицей **B** размера NxN с элементами

$$B_{0,q}(\omega) = H_0\left(\omega - \frac{2\pi q}{N}\right), \qquad B_{N-1,q}(\omega) = e^{-i(N-1)\omega}\cdot e^{\frac{i2\pi(N-1)q}{N}} H_0\left(\omega - \frac{2\pi q}{N} - \pi\right),$$

$$B_{p,q}(\omega) = e^{-ip\omega} e^{\frac{i2\pi pq}{N}} \sum_{\eta=\pm 1}\left[H_0\left(\omega - \frac{2\pi q}{N} - \eta\frac{\pi p}{N}\right)\cdot H_0\left(\omega - \frac{2\pi q}{N} - \eta\frac{\pi(p+1)}{N}\right)\right],$$

$$p, \qquad q = 0, \ldots, N-1.$$

которая используется для вычисления матрицы Грама **G** с элементами $G_{p,k}(\omega) = \langle \mathbf{b}_p, \mathbf{b}_k\rangle$, где вектор-строка имеет вид $\mathbf{b}_p(\omega) = [B_{p,0}(\omega), \ldots, B_{p,N-1}(\omega)]$. Далее проводится процедура ортогонализации Грама – Шмидта

$$\mathbf{g}_m(\omega) = \mathbf{b}_m(\omega) - \sum_{k=0}^{m-1}\frac{\big(\mathbf{b}_m(\omega), \mathbf{h}_k(\omega)\big)}{\big(\mathbf{h}_k(\omega), \mathbf{h}_k(\omega)\big)}\mathbf{h}_k(\omega)\,, \mathbf{h}_0(\omega) = \mathbf{b}_0(\omega), \mathbf{h}_m(\omega) = \frac{\mathbf{g}_m(\omega)}{\|\mathbf{g}_m(\omega)\|},$$

$$m = 0 \ldots N-1,$$

а функции H_k извлекаются из первого столбца получившейся унитарной матрицы при $q = 0$.

Для подтверждения эффективности обработки сигналов предложенными вейвлетами было проведено численное моделирование и обработка данных подповерхностного зондирования георадаром водонасыщенного горизонта с линзами глинистых осадков [5] с физическими свойствами среды $\varepsilon_r = 10.3 - 15.5$, $\sigma = 0.8 - 2.5$ мСм/м (рисунок 1, *а*, *б*) и следующими параметрами геородарного зондирования (рисунок 1, *в*): использовался зондирующий сигнал в виде импульса Рикера с центральной частотой 100 МГц и разносом между антеннами 1 м, шаг зондирования по профилю составлял 0.1 м с протяженностью всего георадарного профиля 30 м. Для обработки было выбрано окно стабильного сигнала от 20 нс до 300 нс.

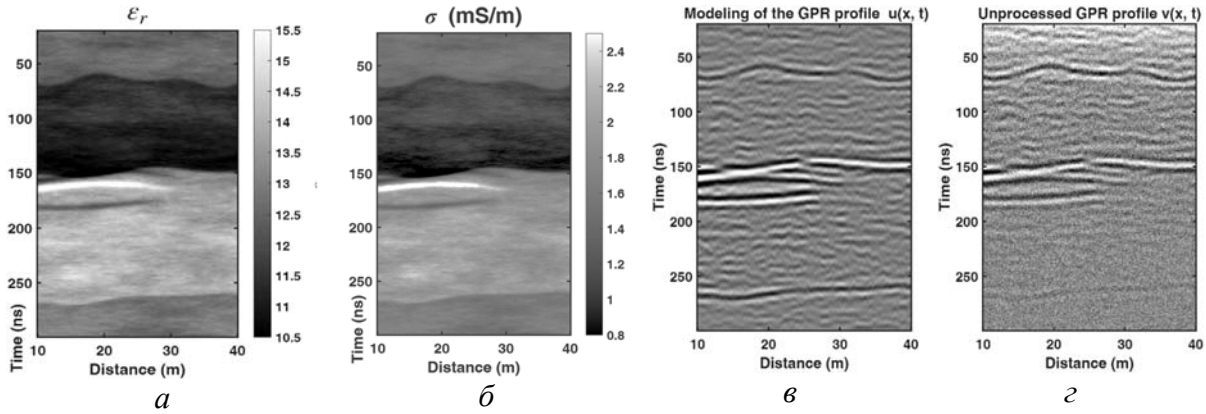


Рисунок 1. Двумерные модели физических параметров среды и результат численного моделирования волнового поля георадара: *а*) разрез относительной диэлектрической проницаемости ε_r; *б*) разрез удельной электрической проводимости σ, мСм/м; *в, г*) смоделированная радарограмма $u(x,t)$ без искажений и с искажениями $v(x,t)$

С целью тестирования вейвлет-алгоритма в исходный сигнал добавлен комплекс характерных искажений (рисунок 1, *г*). В их число вошли: постоянная составляющая, вызванная низкочастотными наводками в приемном тракте георадара; амплитудное затухание сигнала с глубиной, обусловленное проводимостью водонасыщенной среды и геометрическим расхождением волнового фронта; высокочастотный шум, возникающий из-за электромагнитных помех и теплового шума приёмного тракта.

При обработке георадарных данных 3-полосным вейвлетом Кравченко (N=3) на одном уровне разложения (рис. 2, *а*) одновременно устраняются три вида искажения сигнала (рис. 2, *б*). Аппроксимирующие коэффициенты (фильтр H_0) полностью исключаются из обратного синтеза, что устраняет постоянную составляющую сигнала. Шумы выделяются высокочастотным вейвлет-фильтром H_2, и к полученным детализирующим коэффициентам применяется жесткая пороговая обработка, которая исключает все шумовые выбросы. Потеря энергии радиоволн из-за проводимости среды компенсируется амплитудным выравниванием, которое применяется локально к детализирующим коэффициентам среднечастотного канала (фильтр H_1), что позволяет выделить глубокие границы (150–300 нс) без усиления высокочастотного шума.

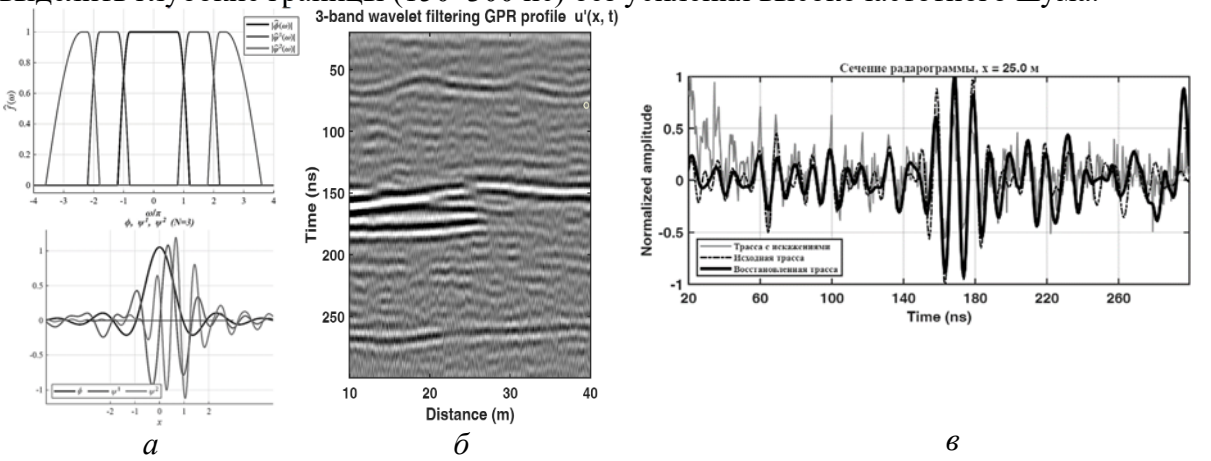


Рисунок 2. Результаты трехполосной вейвлет-фильтрации (N=3) на одном уровне разложения: а) исходное зашумленное волновое поле $v(x, t)$ с постоянной составляющей; б) восстановленная радарограмма $u'(x, t)$; в) сопоставление нормированных одномерных сечений (трасс) сигналов на отметке профиля x = 25.0 м.

В результате обработки отношение сигнал/шум по всему двумерному разрезу выросло на 7 дБ. Пример с результатами обработки для среза по одной трассе георадарных данных показан на рисунке 2, *в*.

Заключение

Предложена конструкция ортонормированных -кратных вейвлетов Кравченко с коэффициентом масштабирования $N > 2$. Атомарный профиль переходных полос обеспечивает убывание коэффициентов фильтров быстрее любой степени. На модельной радарограмме показана эффективность одновременного устранения разных видов искажения сигнала, которые разделяются вейвлет-фильтрами на одном уровне разложения. Разработанные вейвлеты также являются перспективным математическим аппаратом для задач цифровой обработки радиолокационных изображений.

Литература

1. *Кравченко В.Ф., Юрин А.В.* Новый класс вейвлет-функций в цифровой обработке сигналов и изображений // Успехи современной радиоэлектроники. — 2008. — № 5. — С. 3–64.
2. *Кравченко В.Ф., Кравченко О.В.* Конструктивные методы алгебры логики, атомарных функций, вейвлетов, фракталов в задачах физики и техники. — М.: Техносфера, 2018.
3. *Рвачёв В.А.* Финитные решения функционально-дифференциальных уравнений и их применения // Успехи математических наук. — 1990. — Т. 45, вып. 1. — С. 77–103.
4. *Подкур П.Н., Смоленцев Н.К.* Вейвлеты Мейера с коэффициентом масштабирования N > 2 // Вестник Томского гос. ун-та. Управление, вычислительная техника и информатика. — 2021. — № 56. — С. 77–86.
5. *Schmelzbach C.*, *Huber E.* Efficient Deconvolution of Ground-Penetrating Radar Data // IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing. — 2015. — Vol. 53, No. 9. — P. 5209–5217.

Оглавление

Теоретическая и экспериментальная электродинамика 2

Сохранение энергии в безызлучательной модели разреженной плазмы

Бородачев Л.В. 2

Применение метода Гамильтона-Якоби в теории псевдопараболических уравнений с малым параметром

А. А. Быков, Гань Цинчжао 4

Коррекция излучающих параметров широкополосной антенны линзой Люнеберга для определения зависимости коэффициента отражения от материалов

Гильмутдинов Р.В.[1], Меньших Н.Л.[1], Фёдоров С.А.,[1] Поддубный Д.Ю.[1] 7

Радиолокационные отражения от поверхностей с экспоненциальной корреляцией высот

Чжао Хунли[1], Илюшин Я.А.[1,2] 10

Оценка поля нестационарных процессов в волноводах с помощью метода перевала

Шанин А.В., Князева К. С. 14

Теорема единственности для граничной задачи дифракции на шаре с мезоскопическими граничными условиями

Крот А.В. 17

Анализ переменного профиля показателя преломления в плоской линзе с отрицательными значениями ε и μ

Скобелев С. П.[1], Кушнерёв М. М.[2] 19

О задаче рассеяния фотона из поляризационно-запутанной пары на проницаемом шаре

Лопушенко И. В. 22

Математические задачи электромагнитной дифракции на металлических и диэлектрических телах с ребрами

Боголюбов А.Н., Могилевский И.Е., Ерохин А.И. 25

Магниторотационная неустойчивость в вертикально стратифицированных кеплеровских аккреционных дисках

Парусов К.Ю., Постнов К.А., Шакура Н.И. 27

Молния – естественный источник синхротронного излучения рентгеновских и гамма-фотонов

Петров Н.И. 30

Гармонические электромагнитные волны в средах, квадратично нелинейных по пространственным переменным

Плещинский Н. Б. [1], Шипило А. Э. [1] 33

Асимптотическое разложение решения задач электромагнитной дифракции на объектах с коническими точками

Ровенко В.В.[2], Боголюбов А.Н. [1], Могилевский И.Е.[1] 35

Изменение характера рассеянного металлическим треугольником импульсного сигнала в окрестностях максимумов интенсивности рассеяния

Суюндуков И. С.[1,2], Лебедев А. М.[2] 38

Обобщение условий Щукина-Леонтовича для импедансных тел с ребром на границе

Шушарин М. М, Могилевский И. Е., Боголюбов А. Н. 40

Математическое моделирование и численные методы – 2..... 43

Функционально-дифференциальные уравнения для атомарных функций $\mathrm{fip}_{a,n}(x)$

Коновалов Я.Ю.[1], Будунова К.А.[2], Кравченко О.В.[2,3] 43

Сходимость алгоритма сплит-степ с точки зрения мощности сигнала на примере плоской волны

Кузнецов Г. В. [1] Делицын А. Л.[2] 46

Квантово-подобные алгоритмы управления электроэнергетическими системами

Малетин Н.В.[1], Минаев Д.В.[2,3] 48

Разработка нейросети для оптической диагностики фрактальных структур

Моргунов П.А. , Рыжикова Ю.В., Рыжиков С.Б. 51

Анализ влияния гидроакустического канала при обнаружении локационных сигналов

Назаров Л.Е., Смольянинов И.В. 54

Проблема выбора пространственной конфигурации молекулярной системы

Плохотников К.Э. 57

О подвижном управлении в системе дробного порядка с распределёнными параметрами

Постнов С. С. 59

Моделирование гистерезисных явлений в вязкоупругих биоматериалах: дробно-дифференциальный подход

Постнова Е.А. 61

Решение задачи дифракции электромагнитной волны на коллинеарных импедансных пластинах

Сархандеева А.А., Тумаков Д. Н. 64

Нахождение комплексных постоянных распространения собственных волн в слоях с потерями для решения задачи подавления токов, бегущих по металлической поверхности

Лебедев А. М., Семизбаев А.Д., Фурманова Т.А. 67

Асимметричные пограничные слои в сингулярно возмущенной задаче реакция-диффузия-адвекция в кольце

Волков В.Т. [1], Орлов А.О. [2], Сюн Чжусюань [3] 70

Обратная коэффициентная задача для обобщённого уравнения Колмогорова–Петровского–Пискунова с периодическим фронтом

Быков А. А., Ли С. 71

Численное решение уравнения Аллена-Кана на тайловых адаптивно измельчаемых сетках

Толмачёва Н.С., Иванов А.В. 74

N-кратные ортогональные вейвлеты Кравченко на основе атомарных функций и их применение к задачам радиофизики

Юрин А.В.[1], Будунова К.А.[1], Кравченко О.В.[1,2] 76

Оглавление 80