Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова



Актуальные проблемы электродинамики

имени А. Г. Свешникова – 2026

международная конференция

Москва – 17 – 18 ноября 2026г.
Сборник тезисов докладов: часть 1

Москва 2026

Международная конференция,
«Актуальные проблемы электродинамики имени А.Г. Свешникова – 2026»
Сборник тезисов
Под редакцией
д.ф.-м.н. Боголюбова А.Н., д.ф.-м.н. Быкова А.А., к.ф.-м.н. Ерохина А.И., к.ф.-м.н. Коняева Д.А., к.ф.-м.н. Минаева Д.В, д.ф.-м.н. Михайлова Е.А. к.ф.-м.н. Мухартовой Ю.В. и к.ф.-м.н. Шапкиной Н.Е.

17 – 18 ноября 2026 г. Физический факультет.
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Программный комитет:

1.	Боголюбов А.Н. (председатель)	д. ф.-м. н., профессор, зав. отделением прикладной математики, физический факультет МГУ
2.	Бородачев Л.В.	д. ф.-м. н., доцент, физический факультет МГУ
3.	Быков А. А.	д. ф.-м. н., профессор, физический факультет МГУ
4.	Еремин Ю.А.	д. ф.-м. н., в.н.с., ВМиК
5.	Малых М. Д.	д. ф.-м. н., зав. кафедрой математического моделирования и искусственного интеллекта, РУДН им. П. Лумумбы
6.	Михайлов Е. А.	д. ф.-м. н., профессор, физический факультет МГУ
7.	Соколов Д.Д.	д. ф.-м. н., профессор, и.о. зав. кафедрой математики, физический факультет МГУ
8.	Поляков П.А.	д. ф.-м. н., профессор, физический факультет МГУ
9.	Тихонравов А.В. (зам. председателя)	д. ф.-м. н., профессор, научный руководитель НИВЦ МГУ

Организационный комитет:

1.	Белокуров В.В. (председатель)	профессор, декан физического факультета МГУ
2.	Коняев Д.А. (зам. председателя)	с.н.с. физического факультета МГУ
3.	Шапкина Н.Е. (зам. председателя)	доцент физического факультета МГУ
4.	Боголюбов Н.А.	н.с. физического факультета МГУ
5.	Волков В.Т.	доцент физического факультета МГУ
6.	Ерохин А.И.	с.н.с. физического факультета МГУ
7.	Минаев Д.В.	доцент физического факультета МГУ
8.	Могилевский И.Е.	доцент физического факультета МГУ
9.	Мухартова Ю.В.	доцент физического факультета МГУ
10.	Петухов А.А.	вед. программист физического факультета МГУ
11.	Хлебников Ф.Б. (секретарь)	вед. программист физического факультета МГУ
12.	Шушарин М.М.	м.н.с. физического факультета МГУ

Страница конференции: https://math.phys.msu.ru/sveshnikov-2026

© Физический факультет МГУ, 2026
© Кафедра математики

Пленарные доклады

Направляемые волны периодически модулированного цилиндрического волновода

Guided Waves in a Periodically Modulated Cylindrical Waveguide

А.А.Быков

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.

abykovmsu@mail.ru

Аннотация. Рассматривается математическая модель распространения волн в цилиндрическом волноводе, погруженном в периодически модулированную слоистую среду. Математическая модель основана на применении метода Галеркина. Решение представляется в виде линейной комбинации координатных функций, каждая из которых точно удовлетворяет уравнениям Максвелла в однородной среде, а на границе набор координатных функций образует полную систему. Для вычисления продольного волнового числа используется разложение поля в ряд Фурье по полной системе Флоке. Построено также разложение решения в ряд по степеням малого параметра.

1. Задача о собственных волнах цилиндрического периодического оптического волновода

В настоящей работе мы рассматриваем скалярную задачу о нахождении собственных волн периодического оптического волновода в цилиндрической геометрии. Математическая модель сводится к решению задачи на собственные значения для однородного скалярного уравнения

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\kappa^2\rho(r,z)u=0$$

в области $r\in[0,+\infty)$, $\phi\in[0,2\pi]$, $z\in(-\infty,+\infty)$, где $r=\sqrt{x^2+y^2}$, с условиями излучения при $r\to+\infty$, которые далее будут сформулированы. Некоторые несущественные ограничения накладываем на плотность среды: $\rho(r,\phi,z)=\rho(r,z)$, $\rho(r,z+b)=\rho(r,z)$, причём $\rho(r,z)=\rho^\star$ при $r\in[0,r^\star]$ и $\rho(r,z)=\rho^{\star\star}$ при $r\geq r^{\star\star}$, $0<r^\star<r^{\star\star}$. Мы сформулируем математическую модель, позволяющую найти все решения, удовлетворяющие условиям Флоке: $u(r,\phi,z+b)=e^{i\gamma b}u(r,\phi,z)$, поэтому условия при $z\to\pm\infty$ не требуются. Мы в настоящей работе ограничиваемся решениями, для которых зависимость от ϕ имеет вид $u(r,\phi,z)=w(r,z)e^{iN\phi}$, N есть заданное целое число, так что условия Флоке переносятся на $w(r,z)$. Для $w(r,z)$ получим уравнение $Lw=0$, где $Lw=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial w}{\partial r}-\frac{N^2}{r^2}w+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}+\kappa^2\rho(r,z)w$.

Представим $w(r,z)$ в виде разложения по системе координатных функций [1]: $v_k(z)=e^{i\gamma_k z}$, где $\gamma_k=\gamma+\frac{2\pi k}{b}$, также удовлетворяющих условию Флоке: $v_k(z+b)=e^{i\gamma b}v_k(z)$. Пусть $n\geq 0$ задано и $V_n(z)=(v_{-n}(z),\dots,v_n(z))^{\mathrm{T}}$, V^{T} есть транспонирование, $R_n(r)=(R_{-n}(z),\dots,R_n(z))^{\mathrm{T}}$, $w_n(r,z)=V_n^{\mathrm{T}}(z)R_n(r)$. Далее индекс n, указывающий число координатных функций (равное $2n+1$) не указываем. Для вычисления $R(r)$ используем неполный метод Галеркина [2]:

$$\int_0^b V^\star Lw\,dz=0.$$

Так как $Lw=V^{\mathrm{T}}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}r\frac{dR}{dr}-\frac{N^2}{r^2}V^{\mathrm{T}}R+\frac{d^2V^{\mathrm{T}}}{dz^2}R+\kappa^2\rho(r,z)V^{\mathrm{T}}R$, получим для $R(r)$ систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$< V^\star|V^{\mathrm{T}} >\cdot \frac{1}{r}\frac{d}{dr}r\frac{dR}{dr} - < V^\star|V^{\mathrm{T}} >\cdot \frac{N^2}{r^2}R - < \frac{dV^\star}{dz}|\frac{dV^{\mathrm{T}}}{dz} >\cdot R + \kappa^2 < \\ < V^\star|\rho|V^{\mathrm{T}} >\cdot R = 0, \quad (1)$$

где

$$< V^\star|V^{\mathrm{T}} >= \int_0^b V^\star V^{\mathrm{T}} dz, \langle V^\star|\rho|V^{\mathrm{T}}\rangle = \int_0^b V^\star \rho(r,z) V^{\mathrm{T}} dz$$

и т.д. Заметим, что при $r \in [0, r^\star]$: $< V^\star|V^{\mathrm{T}} >= bI$, $I_{[-n:n][-n:n]}$ есть единичная матрица, $\langle V^\star|\rho|V^{\mathrm{T}}\rangle = b\rho^\star I$, $\left\langle \frac{dV^\star}{dz}|\frac{dV^{\mathrm{T}}}{dz}\right\rangle = b\cdot \mathrm{diag}(\gamma_{-n}^2, \dots, \gamma_n^2)$. Поэтому при $r \in [0, r^\star]$ из (1) получим систему несвязанных скалярных уравнений второго порядка:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial R_m}{\partial r} - \frac{N^2}{r^2}R_m + (\kappa^2\rho^\star - \gamma_m^2)R_m = 0,$$

$m \in [-n:n]$. Учитывая условия ограниченности при $r \to +0$, получим $R_m(r) = c_m J_N(\alpha_m r)$, где $\alpha_m^2 = \kappa^2\rho^\star - \gamma_m^2$. Аналогично при $r > r^{\star\star}$:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial R_n}{\partial r} - \frac{N^2}{r^2}R_n + \beta_n^2 R_n = 0,$$

$k \in [-n:n]$. Учитывая условия излучения, найдём $R_m(r) = s_m H_N^{(1)}(\beta_m r)$, где $\beta_m^2 = \kappa^2\rho^{\star\star} - \gamma_m^2$. Далее опускаем верхний индекс: $H_m(s) = H_m^{(1)}(s)$.

2. Метод Гомотопии

Для решения задачи о собственных волнах периодического цилиндрического волновода с потерями в данной работе применим неполный метод Галеркина [2] и метод гомотопии, который называют также методом инвариантного погружения [3]. Метод гомотопии основан на погружении заданной задачи в семейство задач, зависящих от искусственно введённого в постановку задачи параметра. Метод Гомотопии порождает задачу Коши для системы дифференциальных уравнений, которая описывает зависимость решения от параметра гомотопии. Метод гомотопии основан на представлении задачи в виде $L(\gamma)u = 0$, где L есть оператор краевой задачи на собственные значения [1]. Величина γ есть спектральный параметр, его значение требуется найти из условия существования нетривиального решения. В рассматриваемом классе задач γ есть волновой вектор, вообще говоря, комплексный. Метод гомотопии состоит в том, что мы погружаем задачу $L(\gamma)u = 0$ в семейство краевых задач на собственные значения $M(\gamma,\tau)u = 0$, где $\tau \in [0,1]$ есть параметр гомотопии. Операторную функцию $M(\gamma,\tau)$ выберем так, чтобы $M(\gamma,1) = L(\gamma)$, а задача $M(\gamma,0)u = 0$ имела известное решение. Затем мы составляем систему дифференциальных уравнений, которая описывает зависимость спектрального параметра и профиля собственной моды от параметра гомотопии. Далее рассматриваем гомотопию $\rho(r,z) = \rho_0 + \tau(\rho_1(r,z) - \rho_0)$, $\tau \in [0,1]$. Мы решаем задачу на собственные значения в предположении, что задача при $\tau = 0$ имеет нетривиальное решение.

3. Нелинейная задача Коши для расчёта направляемых мод

Сформулируем граничные условия для задачи о направляемых модах невозмущённого волновода. Заметим, что $R_m(r^\star) = c_m J_N(\alpha_m r^\star)$, $\left.\frac{dR_m}{dr}\right|_{r^\star} = c_m\alpha_m J'_N(\alpha_m r^\star)$, $R_m(r^{\star\star}) = s_m H_N(\beta_m r^{\star\star})$, $\left.\frac{dR_m}{dr}\right|_{r^{\star\star}} = s_m\beta_m H'_N(\beta_m r^{\star\star})$. Теперь для решения задачи при $\tau = 0$ получим краевую задачу на собственные значения для уравнения

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial R_m}{\partial r} - \frac{N^2}{r^2}R_m + (\kappa^2\rho(r) - \gamma_m^2)R_m = 0, r \in [r^\star, r^{\star\star}],$$

с граничными условиями

$\alpha_m J'_N(\alpha_m r^\star) R_m(r^\star) - J_N(\alpha_m r^\star) \frac{dR_m}{dr}\Big|_{r^\star} = 0, \beta_m H'_N(\beta_m r^{\star\star}) R_m(r^{\star\star}) -$
$H_N(\beta_m r^{\star\star}) \frac{dR_m}{dr}\Big|_{r^{\star\star}} = 0.$

При $m = 0$ эта краевая задача имеет конечное множество решений, из которых выберем решение, имеющее требуемые свойства (обычно это заданное число корней, основная мода корней на промежутке $r \in [0, +\infty)$ не имеет). Найденное отсюда значение γ обозначим γ_0. Пусть $\alpha = (\alpha_{-n}, \dots, \alpha_n)$, $\beta = (\beta_{-n}, \dots, \beta_n)$. Теперь сформулируем задачу гомотопии: это уравнение (1) с граничными условиями

$$\alpha \otimes J'_N(\alpha r^\star) \otimes R(r^\star) - J_N(\alpha r^\star) \otimes \frac{dR}{dr}\Big|_{r^\star} = 0, \quad (2)$$

$$\beta \otimes H'_N(\beta r^{\star\star}) \otimes R(r^{\star\star}) - H_N(\beta r^{\star\star}) \otimes \frac{dR}{dr}\Big|_{r^{\star\star}} = 0, \quad (3)$$

$\otimes$ означает почленное перемножение строк без суммирования.

4. Разложение в ряд по степеням малого параметра

Численные результаты применения метода гомотопии мы изложим далее, а теперь рассмотрим малое значение параметра гомотопии τ. Пусть $R(r) = R_0 + \tau R_1 + \cdots$, так что $\langle V^\star | V^{\mathrm{T}} \rangle = A_0 + \tau A_1 + o(\tau)$, $\left\langle \frac{dV^\star}{dz} \middle| \frac{dV^{\mathrm{T}}}{dz} \right\rangle = B_0 + \tau B_1 + o(\tau)$, $\langle V^\star | \rho | V^{\mathrm{T}} \rangle = \langle V_0^\star | \rho_0 | V_0^{\mathrm{T}} \rangle +$
$\tau \langle V_1^\star | \rho_0 | V_0^{\mathrm{T}} \rangle + \tau \langle V_0^\star | \rho_1 | V_0^{\mathrm{T}} \rangle + \tau \langle V_0^\star | \rho_0 | V_1^{\mathrm{T}} \rangle + o(\tau)$.

Для первого члена разложения решения в ряд Тейлора получим задачу

$$A_0 \cdot \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{dR_1}{dr} - A_0 \cdot \frac{N^2}{r^2} R_1 - B_0 \cdot R_1 + \kappa^2 < V_0^\star | \rho_0 | V_0^{\mathrm{T}} > \cdot R_1 = -F_1 - F_2, \quad (4)$$

$F_1 = A_1 \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{dR_0}{dr} - A_1 \frac{N^2}{r^2} R_0 - B_1 R_0$, $F_2 = \kappa^2 \left(\langle V_1^\star | \rho_0 | V_0^{\mathrm{T}} \rangle + \langle V_0^\star | \rho_1 | V_0^{\mathrm{T}} \rangle + \langle V_0^\star | \rho_0 | V_1^{\mathrm{T}} \rangle \right) R_0$.

В аналогичном виде запишем граничные условия. Задача (4) с граничными условиями (2), (3) решается методом функции Грина, причём для $\gamma = \gamma_0 + \tau \gamma_1$ получим явное выражение в квадратурах.

Литература

1. *Гавурин М.К.* Численные методы. М., Наука, 1971.
2. *Свешников А.Г.* Неполный метод Галеркина. // Докл. АН СССР,1977. **236**, №.5. С. 1076-1079.
3. *Касти Дж., Калаба Р.* Методы погружения в прикладной математике. М., Мир, 1976.

Физическая интерпретация решения трехмерной задачи дифракции на идеально проводящем плоском многоугольнике

Physical Interpretation of the Solution for a Three-Dimensional diffraction Problem on a Perfectly Conducting Flat Polygon

Весник М.В.

Институт радиотехники и электроники им. В.А.Котельникова РАН, Москва, РФ.

vesnik@cplire.ru

Аннотация. При помощи недавно разработанного эвристического метода базовых компонентов построено эффективное эвристическое решение трехмерной задачи дифракции на плоском идеально проводящем многоугольнике. Показана возможность учета в эвристических формулах тонких особенностей решения численного расчета.

Введение

К традиционным эвристическим подходам (ТЭП) относят метод геометрической оптики (ГО), метод физической оптики (ФО), геометрическую теорию дифракции (ГТД)

и метод краевых волн (МКВ), который также имеет название физическая теория дифракции (ФТД). Все эвристические методы нуждаются в верификации.

Недавно разработанный метод базовых компонентов (МБК) [1] использует надежное верификационное решение для «настройки» (уточнения) первичных эвристических формул, в отличие от ТЭП уменьшая заложенную методическую погрешность.

Постановка задачи

Рассмотрим трехмерную задачу падения электромагнитной волны на идеально проводящий плоский многоугольник конечных размеров (Рис. 1).

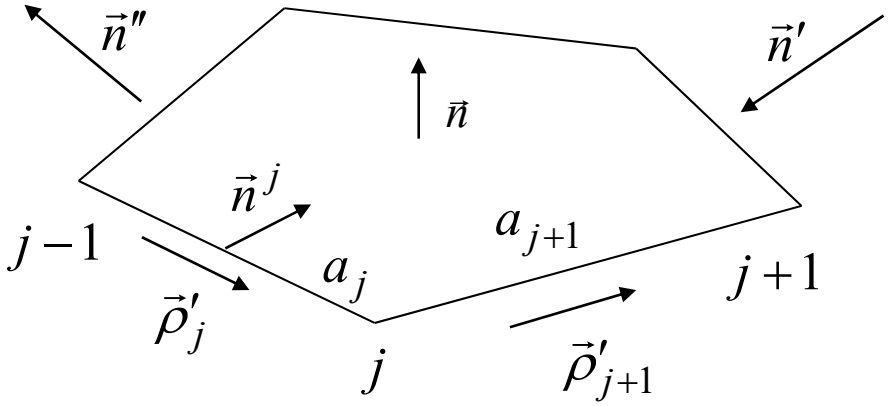


Рисунок 1. Падение электромагнитной волны на плоский многоугольник.

На Рис. 1 использованы обозначения: $\boldsymbol{n}'$ и $\boldsymbol{n}''$ – направляющие вектора падающей волны и точки наблюдения, $\boldsymbol{n}$ – вектор нормали к рассеивателю, $\boldsymbol{n}^j$ – вектор единичной внутренней нормали к -ой стороне на контуре C, окружающем рассеиватель, $\boldsymbol{\rho}'$ – единичный вектор, касательный к контуру, N – количество вершин многоугольника.

Компоненты рассеянного поля в дальней зоне $r \geq 2D^2/\lambda$ [2]

$$E_\vartheta = H_\varphi = ikA^e_\vartheta, E_\varphi = -H_\vartheta = ikA^e_\varphi. \quad (1)$$

Электрический потенциал (1) в приближении физической оптики имеет вид [2]:

$$\boldsymbol{A}^e = \frac{1}{2\pi}\frac{\exp(ikR)}{R}[\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}_0]\,I, I = \iint\limits_S \exp\{ik(\boldsymbol{\Delta},\boldsymbol{\rho})\}ds. \quad (2)$$

Здесь $k = 2\pi/\lambda$, $\boldsymbol{\Delta}$ – вспомогательный вектор: $\boldsymbol{\Delta} = (\boldsymbol{n}' - \boldsymbol{n}'') - \boldsymbol{n}[(\boldsymbol{n}' - \boldsymbol{n}''), \boldsymbol{n}]$.

Преобразуем [1], [3] интеграл I из (2) при помощи теоремы Стокса:

$$I = \iint\limits_S \exp\{ik(\boldsymbol{\Delta},\boldsymbol{\rho})\}ds = \frac{i}{k|\boldsymbol{\Delta}|^2}\oint\limits_C (\boldsymbol{\Delta},\boldsymbol{n}^j)\exp\{ik(\boldsymbol{\Delta},\boldsymbol{\rho})\}dt. \quad (3)$$

Просуммировав вдоль контура С вклад всех сторон многоугольника, получим [1]:

$$I = \sum_{j=1}^{N} I_j, I_j = \frac{1}{k|\boldsymbol{\Delta}|^2}\frac{(\boldsymbol{\Delta},\boldsymbol{n}^j)}{(\boldsymbol{\Delta},\boldsymbol{\rho}'_j)}\exp\{ik(\boldsymbol{\Delta},\boldsymbol{\rho}'_j)t\}\Big|_{t_{j-1}}^{t_j}. \quad (4)$$

Для выполнения принципа взаимности поляризационную составляющую будем брать на «условной кромке» – прямой на поверхности рассеивателя, которая характеризуется единичными векторами: касательной к условной кромке ρ', и внутренней нормалью $\boldsymbol{n}^\gamma = (0, -\cos{}^{\gamma}/_{2}, -\sin{}^{\gamma}/_{2})$, причем $\boldsymbol{n}^\gamma = \boldsymbol{\Delta}/|\boldsymbol{\Delta}|$.

В соответствии с (2), для получения полного вклада кромки в рассеянное поле нужно добавить к интегралу I_j множитель $\exp(ikR)/R$ и $[\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}_0]$ (поляризационную составляющую физоптики). Заменим эту поляризационную составляющую на поляризационные составляющие условной кромки $U''_{TH\beta}$ и $U''_{TE\beta}$ [1]:

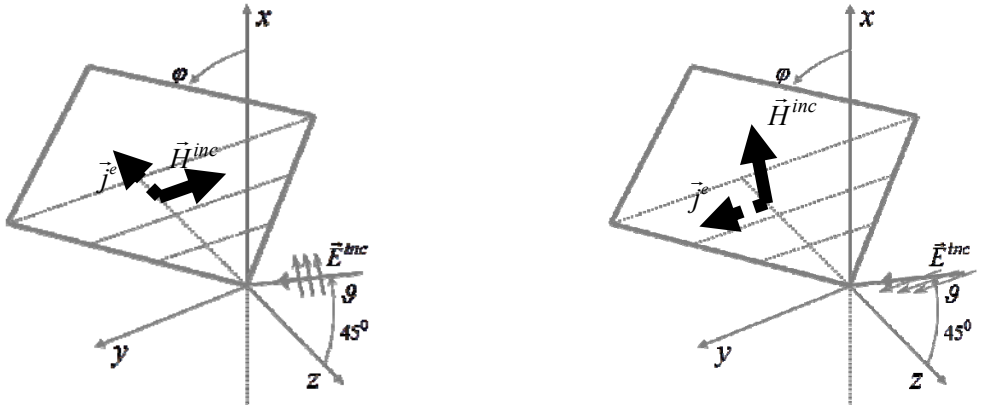
$$U''_{TH\beta} = f(\varphi\gamma, \varphi\gamma_0)(\cos\varphi\gamma + \cos\varphi\gamma_0) = 2\sin\frac{\varphi\gamma}{2}\sin\frac{\varphi\gamma_0}{2}, \quad (5)$$

$$U''_{TE\beta} = g(\varphi\gamma, \varphi\gamma_0)(\cos\varphi\gamma + \cos\varphi\gamma_0) = -2\cos\frac{\varphi\gamma}{2}\cos\frac{\varphi\gamma_0}{2},$$

где $\varphi_{\gamma 0} = \arccos\left(\boldsymbol{n}'_\gamma/|\boldsymbol{n}'_\gamma|, \boldsymbol{n}^\gamma\right)$, $\varphi_\gamma = \arccos\left(\boldsymbol{n}''_\gamma/|\boldsymbol{n}''_\gamma|, \boldsymbol{n}^\gamma\right)$.

Результаты расчета

Геометрия задачи дифракции на идеально проводящем плоском многоугольнике (квадрате со стороной *ka*) из [4] показана на Рис.2.

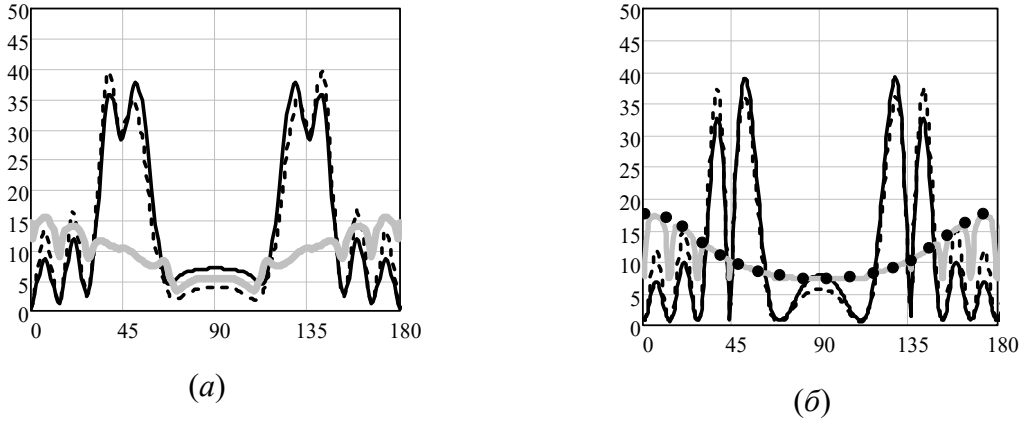


(*а*) (*б*)

Рисунок 2. Геометрия задачи. Сплошной черной стрелкой показан вектор магнитного поля падающей волны, штриховой стрелкой – поверхностный электрический ток.

Обозначим как *E*(*а*) амплитуду рассеянного поля, падающего как показано на Рис. 2 (*а*), и как *E*(*б*) – амплитуду рассеянного поля, падающего как показано на Рис. 2(*б*) .

Примеры решений задачи дифракции из [4] показаны на Рис.3, 4.

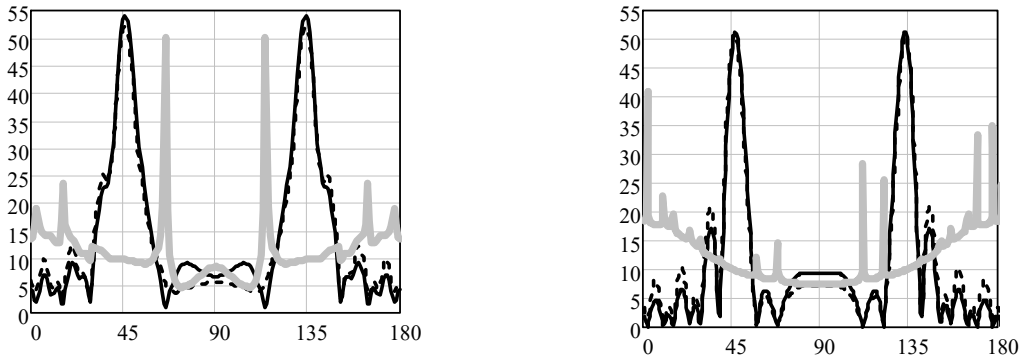


(*а*) (*б*)

Рисунок 3. Диаграмма рассеяния для *ka*=38. По горизонтали отложен угол *φ*, по вертикали – амплитуда поля.

На графике Рис. 3 (*а*) – численное решение, на графике Рис. 3 (*б*) – эвристическое решение. Сплошной черной кривой показана амплитуда ДР |*E*(*а*)+0.2|, пунктирной – амплитуда ДР |*E*(*б*)+0.2|. Серой кривой показан модуль «кривой сравнения» 10|(*E*(*б*)+ 0.2)/(*E*(*а*)+0.2)|. Черным пунктиром на Рис. 3 (*б*) показана «кривая сравнения» до настройки: 10|*E*(*б*)/*E*(*а*)|.

На графике Рис. 4 (*а*) – численное решение, на графике Рис. 4 (*б*) – эвристическое решение. Сплошной черной кривой показана амплитуда ДР |E(*а*)|, пунктирной – амплитуда ДР |E(*б*)+0.04|. Серой кривой показан модуль «кривой сравнения» 10|(E(*б*)+0.04)/E(*а*)|.



(*а*) (*б*)

Рисунок 4. Диаграмма рассеяния для *ka*=40. По горизонтали отложен угол *φ*, по вертикали – амплитуда поля.

Более полный комплект эвристических формул для рассматриваемой задачи приведен в [1, 5, 6]. Разработанные формулы позволяют рассматривать в том числе и модельные задачи на полубесконечных рассеивателях [7].

Заключение

При помощи МБК на основе сравнения с верификационным численным решением проведена настройка эвристических формул и интерпретация численного расчета. Установлено, что причиной осцилляций «кривой сравнения» в диаграмме рассеяния может быть наличие небольших постоянных «добавок» в численном расчете.

Литература

1. *M.V. Vesnik*, The method of the generalized Eikonal: new approaches in the diffraction theory. Berlin: Walter de Gruyter; 2015. https://doi.org/10.1515/9783110311297
2. *Вайнштейн Л. А.*, Электромагнитные волны. 2-е изд., М.: Радио и связь, 1988
3. *M.V. Vesnik, P.Y. Ufimtsev*, "An Asymptotic Feature of Corner Waves Scattered by Polygonal Plates", Electromagnetics, Vol. 12, NN 3-4, pp. 265-272, Jul.-Dec. 1992
4. *М.В. Весник*, Физическая интерпретация численного решения задачи дифракции электромагнитной волны на плоском идеально проводящем рассеивателе. Журнал радиоэлектроники [электронный журнал]. 2017. №4. http://jre.cplire.ru/jre/apr17/7/text.pdf
5. *М.В. Весник*, «Свойства дифракционных коэффициентов в задаче дифракции на трехмерном плоском многоугольнике. Ч. 1: Основы метода базовых компонентов», Р и Э, 2020, том 65, № 11, с. 1052–1060, DOI: 10.31857/S0033849420110194
6. *М.В. Весник*, «Свойства дифракционных коэффициентов в задаче дифракции на трехмерном плоском многоугольнике. Ч. 2: Применение метода базовых компонентов для решения практических задач», Радиотехника и электроника, 2020, том 65, № 12, с. 1147–1159, DOI: 10.31857/S0033849420120189
7. *Vesnik M.V.*, “Efficiency of Different Heuristic Approaches to Calculation of Electromagnetic Diffraction by Polyhedrons and other Scatterers”, Radio Science, Volume 49, Issue 10, October 2014, Pages 945–953, doi: 10.1002/2014RS005520

Моделирование растрескивания таблетки из диоксида урана в тепловыделяющем элементе

Modeling of Uranium Dioxide Pellet Cracking in a Fuel Element

Аронов П.С. [1]***, Галанин М.П.*** [1]***, Родин А.С.*** [1]

1) *Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, РФ.*

aronovps@mail.ru, galan@keldysh.ru, rals@bk.ru

Аннотация. В работе решена задача учета растрескивания топливной таблетки из диоксида урана при моделировании напряженно-деформированного состояния участка тепловыделяющего элемента. Использованы модели дискретных и размазанных трещин. Представлены результаты серии осесимметричных расчетов, выполнен их анализ.

Введение

В процессе эксплуатации тепловыделяющего элемента (твэла) в нем происходит большое количество взаимосвязанных сложных физических процессов. В большинстве существующих интегральных кодов в целях снижения вычислительной сложности для описания данных процессов использованы многочисленные упрощающие предположения [1, 2]. В то же время большой интерес представляет и более подробное изучение некоторых отдельных явлений. В частности, практически важной задачей является разработка вычислительных алгоритмов, учитывающих процесс хрупкого разрушения таблеток в процессе их нагрева.

Экспериментально известно [2], что ядерное топливо из диоксида урана (UO2) в реакторах растрескивается в ходе эксплуатации под воздействием совокупности факторов. Образовавшиеся трещины оказывают большое влияние на характеристики топлива, без их учета невозможно выполнить реалистичное моделирование состояния твэла. Для описания трещин используют разнообразные приближения и подходы. В данной работе использованы метод размазанных трещин и метод дискретных трещин. Выполнена серия расчетов, в которых исследовано влияние выбранной модели на итоговое напряженно-деформированное состояние участка твэла для режима выхода тепловыделения в таблетках на номинальную мощность.

Описание работы

При проведении моделирования рассматривался участок твэла, включающий в себя N топливных таблеток и соответствующую им часть оболочки. Таблетка имеет форму цилиндра с внутренним отверстием, фасками и лунками на торцах. Топливный столб, состоящий из поставленных друг на друга таблеток, помещен внутрь цилиндрической оболочки. Между столбом и оболочкой в начальный момент времени обычно имеется зазор. В таблетках задавалась постоянная по пространству мощность тепловыделения, которая за время t_0 по линейному закону возрастала от нуля до номинального значения. При нагреве таблетки расширялись и вступали в контакт друг с другом и с оболочкой.

Математическая модель. В расчетной области последовательно решались тепловая и механическая задачи для каждого выбранного момента времени $t \in (0, t_0]$ в осесимметричном приближении. Тепловая задача включала в себя стандартное нестационарное уравнение теплопроводности для температуры $T(\boldsymbol{x}, t)$ со следующими граничными условиями: на внешней поверхности оболочки ставилось условие первого рода, на внутренней поверхности оболочки и внешних поверхностях таблеток — условие неидеального теплового контакта с постоянным коэффициентом теплообмена, на всех других поверхностях — условие теплоизоляции (нулевого теплового потока). Механическая задача включала в себя уравнения равновесия со следующими граничными условиями: нижние торцы оболочки и нижней таблетки закреплены по оси, к внешней поверхности оболочки и верхнему торцу верхней таблетки приложены заданные давления. Оболочка считалась термоупругопластическим телом, таблетка — термоупругим телом, на контактных поверхностях задавались условия скольжения

без трения. Использованы реалистичные модели свойств материалов (диоксида урана и сплава циркония), взятые из библиотеки MATPRO [3].

Для моделирования трещин в хрупком материале обычно применяют два метода: дискретных трещин и размазанных трещин.

Метод дискретных трещин реализован следующим образом: в таблетку закладывалось Q траекторий потенциальных трещин в поперечном направлении. По сути эти трещины разбивали исходную таблетку на $Q + 1$ фрагмент. При решении механической контактной задачи учитывался контакт фрагментов друг с другом. При образовании зазоров между данными фрагментами наблюдалась разгрузка напряженного состоянии всей таблетки.

В работе выбрана идеологически близкая [2] модель размазанных трещин. В ней предполагалось, что в каждой точке тела выделены три направления, совпадающие с главными осями полного тензора деформаций. Для каждого направления с использованием заданной кривой разрушения материала вычислялся эффективный модуль Юнга E_i. В итоговые соотношения модели входят функции памяти $e_i = E_i/E_0$ (E_0 — значение модуля Юнга для не растрескавшегося материала). Значение e_i позволяет оценить развитие трещины в i-м направлении: если $e_i = 1$, то трещина еще не возникла, если $e_i = 0$, то трещина полностью сформировалась. Более подробно модель описана в [4].

Для математической модели построен вычислительный алгоритм, основанный на методе конечных элементов. Для учета механического контакта применен либо метод множителей Лагранжа на мортарной сетке, либо метод Неймана—Дирихле (вариант метода декомпозиции области без перекрытия).

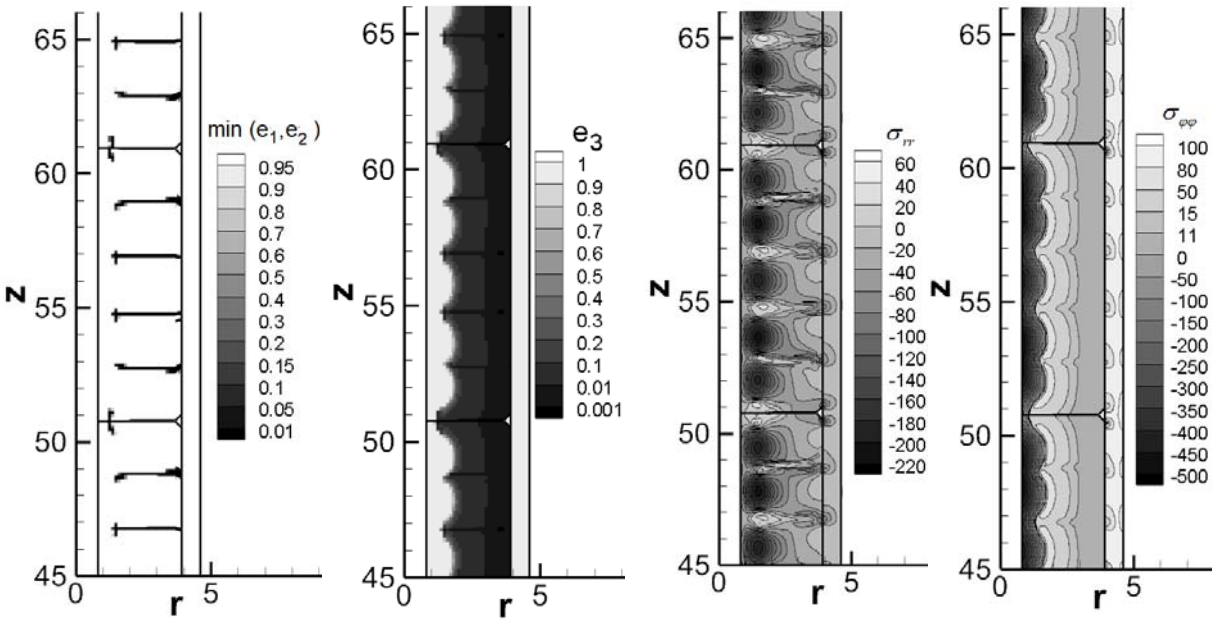
Результаты расчетов. Во всех проведенных термоупругих расчетах без учета растрескивания вблизи внешних поверхностей топливных таблеток возникали области растягивающих осевых и окружных напряжений с максимальной величиной порядка 1 ГПа. Данное значение кратно превышает предел прочности на растяжение для диоксида урана.

Выполнена серия расчетов для одной таблетки с лункой с использованием метода дискретных трещин. Начальный зазор выбран таким образом, чтобы таблетка не вступала в контакт с оболочкой. Проведены расчеты, в которых закладывались траектории для потенциального развития 1, 2, 3 и 4 трещин. Траектории соответствуют различным поперечным сечениям $z = const$. Проведенные расчеты показали, что увеличение количества потенциальных поперечных трещин является эффективным способом уменьшения нефизических значений осевых напряжений в топливных таблетках, но не приводит к существенному уменьшению растягивающих окружных напряжений. Для достижения нужного эффекта для окружных напряжений нужно вводить кроме поперечных еще и радиальные трещины. Для этого нужно решать задачу в трехмерном приближении. Более подробно результаты приведены в [5].

Выполнен расчет с 10 таблетками без лунок с использованием модели размазанных трещин. Принималось, что начальный зазор равен нулю, поэтому таблетки сразу вступали в контакт с оболочкой. На рис. 1 продемонстрировано распределение нескольких величин в конце расчета на участке, в который входят верхняя половина 5-й таблетки (координата z меняется от 45 до 51), 6-я таблетка (z меняется от 51 до 61), нижняя половина 7-й таблетки (z меняется от 61 до 66) и кусок оболочки (координата r меняется от 4 до 4.6).

На рис. 1.а показано распределение величины, которая соответствует минимуму из значений функций памяти e_1 и e_2. Данная величина характеризует распространение трещин в сечении rz. В каждой таблетке образовалось четыре горизонтальные трещины, а также две трещины, которые распространялись от торцов таблетки. На рис. 1.б показано распределение функции памяти e_3, характеризующее процесс растрескивания в окружном направлении. В данном направлении образуются

не отдельные трещины (это противоречит требованию осевой симметрии), а происходит равномерное растрескивание материала в некоторой подобласти. На рис. 1.в-г приведено распределение радиальных и окружных напряжений. В результате развития четырех горизонтальных трещин каждая таблетка оказалась поделена в осевом направлении на условные пять сегментов. В каждом сегменте вблизи внутренней поверхности таблетки расположены зоны сжимающих радиальных и окружных напряжений. Зоны растягивающих окружных напряжений расположены ближе к внешней поверхности. Для всех напряжений значение максимального растягивающего усилия не превышает предела прочности материала, заданного выбранной кривой разрушения.



а б в г

Рисунок 1. Распределения функций памяти (а, б), радиальных (в) и окружных (г) напряжений

Литература

1. Разработка и применение интегральных кодов для анализа безопасности АЭС / под ред. *Р.В. Арутюняна*. — М.: Наука, 2011. — 304 с. — (Труды ИБРАЭ РАН; вып. 12).
2. Fuel Analysis and Licensing Code: FALCON MOD01: Volume 1: Theoretical and Numerical Bases. — Palo Alto, CA: EPRI, 2004. — 246 p.
3. *Hagrman D.L.* MATPRO — A Library of Materials Properties for Use in the Analysis of Light Water Reactor Fuel Rod Behavior. — NUREG/CR-6150 TREE-1280, 1993.
4. *Aronov P.S., Galanin M.P., Lukin V.V., Rodin A.S.* Simulation of Uranium Dioxide Pellet Cracking Using Smeared Crack Model // Technical Physics. — 2026. — Vol. 71. — P. 203–210.
5. *Aronov P.S., Galanin M.P., Rodin A.S.* Modeling of fuel pellets fracture using discrete crack method // 2026 International Conference on Integrated Intelligence and Cognitive Engineering (ICIICE), Dubai, United Arab Emirates. — 2026. — P. 1–6.

Спектральная задача теории резонансного рассеяния

Spectral Problem in the Theory of Resonant Scattering

Делицын А.Л.

РОСБИОТЕХ, Москва, РФ.

МФТИ ВШМ, Долгопрудный, РФ.

delitsyn@mail.ru

Задача рассеяния в волноводе может иметь резонансный характер. Типичными задачами являются безотражательное прохождение волной двух барьеров, разворот волны в заданном направлении, гашение волны резонатором. Для исследования подобной задачи применяются различные подходы – нестационарная теория рассеяния, метод сращивания асимптотических разложений, метод частичных областей.

В настоящем сообщении рассматривается метод, основанный на рассмотрении задачи рассеяния как внутренней краевой задачи с нелокальными краевыми условиями. Доказано, что резонансная частота определяется как собственное значение подобной задачи с нелинейным вхождением спектрального параметра. Применяемый метод позволяет единообразно рассматривать большое количество различных задач. Основные результаты получены для задачи рассеяния для скалярного уравнения Гельмгольца. Показано, что данный метод применим к векторной задаче.

Литература

1. *А.Л. Делицын, И.К. Трошина*, “Резонансное обращение сигнала в волноводе при помощи резонатора”, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., **66**:4 (2026), 575–583
2. *A. Delitsyn, D.S. Grebenkov*, «Resonance scattering in a waveguide with identical thick perforated barriers». Applied Mathematics and Computation 412, (2022), 126592
3. *A. Delitsyn, D.S. Grebenkov*, «Mode matching methods for spectral and scattering problems». The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics 71 (4), (2018), 537-580
4. *А.Л. Делицын*, “Замечание о резонансном рассеянии в волноводе на двух барьерах”, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., **52**:7 (2012), 1289–1293

Нейросетевое решение задачи характеризации толщин напыляемых оптических покрытий

Neural Network Solution to the Problem of Characterizing the Thicknesses of Deposited Optical Coatings

Леонов А.С. [1,2]***, Тихонравов А.В.*** [1]***, Шарапов Р.Д.*** [1,3]***,***

1) *Научно-исследовательский вычислительный центр МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, РФ; 2) Национальный исследовательский ядерный университет (МИФИ), Москва, РФ: 3) Физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, РФ.*

asleonov@mephi.ru, tikh@srcc.msu.ru, sharapovroma9898@gmail.com

Аннотация. Рассматривается задача технологического контроля – определения толщин слоев многослойных оптических покрытий в процессе их напыления по наборам измеряемых спектральных коэффициентов пропускания. Задача решается с помощью нейросетевых алгоритмов. Генерируется трехслойная полносвязная нейросеть и для нее – специализированная обучающая выборка, отвечающая условиям задачи. После глубокого обучения нейросеть применяется к модельному набору коэффициентов пропускания, вычисленному по толщинам возмущенного теоретического дизайна

оптического покрытия. Практически мгновенно получаемое нейросетевое решение – оценки толщин напыленных слоев – имеет высокую точность.

Введение

Создание многослойных оптических покрытий составляет часть многих современных оптических и оптоэлектронных технологий. Такие покрытия при создании приборов для лазерной, медицинской, космической и других областей имеют десятки и сотни тонких слоев, наносимых на оптические элементы в вакуумных напылительных установках. Возникающая здесь задача проектирования дизайна слоев напыления, т.е. определение их числа и их оптических толщин по требуемой спектральной характеристике создаваемой оптической системы, в настоящее время весьма эффективно решается (см., например, [1]). Однако, при технологической реализации создания такого дизайна возникают ошибки толщин напыленных слоев, ведущие к искажению требуемых спектральных характеристик получаемой оптической системы. Поэтому весьма актуальной является проблема мониторинга толщин напыляемых слоев в соответствии с требуемым их теоретическим дизайном. Один из вариантов проблемы мониторинга можно математически сформулировать в виде следующей задачи: при контроле -го слоя напыления найти по набору уже измеренных спектральных характеристик одного, двух, …, k слоев толщины всех этих слоев. Такая задача часто называется задачей характеризации толщин. Если принять известную математическую модель вычисления оптической характеристики $T(\lambda;\mathbf{d})$ системы k напыленных слоев по длине волны λ и вектору толщин слоев $\mathbf{d}=(d_1,d_2,\dots,d_k)$ с заданными показателями преломления (см., например, [1]), то сформулированная задача состоит в решении системы относительно $\mathbf{d}$ уравнений:

$$T(\lambda;d_1)=T_1^{(\exp)}(\lambda),T(\lambda;d_1,d_2)=T_2^{(\exp)}(\lambda),\dots,T(\lambda;d_1,d_2,\dots,d_k)=T_k^{(\exp)}(\lambda).$$

Здесь $T_i^{(\exp)}(\lambda),i=1,\dots,k,$– это измеренная спектральная характеристика системы i слоев. Систему уравнений такого рода можно решать традиционными методами (минимизация невязок и др.) Основным недостатком такого подхода является большое время решения системы, не адекватное характерным временам технологического напыления. Для преодоления этого недостатка мы используем в предлагаемой работе нейросетевые алгоритмы решения указанной задачи характеризации.

Описание работы

Нейронная сеть и обучение. Используемая нами нейронная сеть, реализованная на персональном компьютере (ПК) для решения задачи характеризации k слоев, имеет своими входными данными матрицу $\mathbf{T}_k=\left[T_i(\lambda_j)\right]_{i=1,j=1}^{k,N}$, где i – номер спектра, а j – номер длины волны в сетке N измерений спектра. Нейросетевое решение этой задачи (выход нейросети) представляется вектором $\mathbf{d_k}=(d_1,d_2,\dots,d_k)$. Использовалась стандартная архитектура нейросети: полносвязный трехслойный персептрон (см., например, [2]) с числом нейронов в слоях 200, 100, 50. Для глубокого обучения этой нейросети была сгенерирована выборка 500 пар вида $D_k=\{\mathbf{d_k}+\delta\mathbf{d_k},\mathbf{T_k}(\lambda,\mathbf{d_k}+\delta\mathbf{d_k})\}$. Пары формируются следующим образом. Задается случайный вектор возмущения точного дизайна $\delta\mathbf{d_k}$, состоящий из независимых нормально распределенных случайных величин с нулевым средним и среднеквадратичным отклонением δ. По набору толщин возмущенного дизайна $\mathbf{d_k}+\delta\mathbf{d_k}$ и по известному закону $T(\lambda;\mathbf{d})$ вычисляются наборы спектров

$\mathbf{T_k}(\lambda,\mathbf{d_k}+\delta\mathbf{d_k})=(T(\lambda;d_1+\delta d_1),T(\lambda;d_1+\delta d_1,d_2+\delta d_2),\dots,T(\lambda;d_1+\delta d_1,d_2+\delta d_2,\dots,d_k+\delta d_k))$.Нейросеть была обучена на выборке D_k с использованием стандартной функции потерь MSE (см. [2]). Для тестирования работы нейросети ей были предъявлены наборы модельных спектров вида $\mathbf{T_k}(\lambda,\mathbf{d_k}+\delta\tilde{\mathbf{d}}_\mathbf{k})$, которые были найдены из другого модельного возмущенного дизайна $\mathbf{d_k}+\delta\tilde{\mathbf{d}}_\mathbf{k}$по той же схеме, что и для D_k.

Численные эксперименты. Проводилось тестирование нейросетей для решения задачи характеризации теоретического дизайна оптической системы из работы [3]. В этой системе содержатся 24 чередующихся слоя двух веществ с известными показателями преломления и оптимальным дизайном $\mathbf{d}_{24}$. В качестве спектральной характеристики $T(\lambda; \mathbf{d})$ был взят коэффициент пропускания этой оптической системы, заданный на равномерной сетке 1000 длин волн $\lambda \in [400{,}850]$нм. Уровень возмущения данных при генерации обучающей и тестовой выборки составлял 1% ($\delta\{|\delta d_i|\}/d_i = 0.01, i = \overline{1{,}24}$).

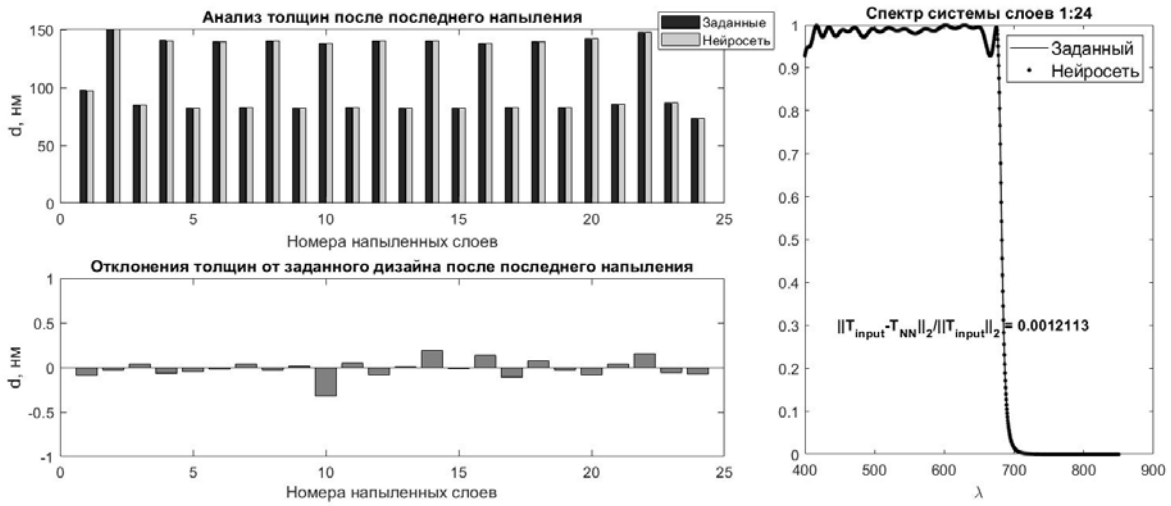


Рисунок 1. Слева: верхний график – сравнение модельного дизайна оптической системы, по которому вычислялись входные данные для нейросети и найденного нейросетевого решения; нижний график – ошибка полученного нейросетевого решения (в нм). Справа: сравнение спектров системы 24 слоев для модельного дизайна и для дизайна, найденного нейросетью

Полученные результаты при характеризации последнего 24-го слоя системы с помощью нейросети представлены на рисунке. Аналогичные результаты получались и при характеризации одной, двух и т.д. толщин напыленных слоев.

Обсуждение результатов. Для каждого набора слоев длины $k, k = \overline{1{,}24}$,(одного, двух, и т.д. до 24-х) была создана своя нейросеть и собственная выборка для глубокого обучения с указанными выше характеристиками. Время обучения нейросетей существенно различается, составляя 5 – 20 сек для первых сетей и около 50 мин для последних. Время расчета нейросетевого дизайна с помощью этих сетей слабо зависит от номера k и составляет около 0.3 – 0.4 сек. Следует отметить высокую точность полученных нейросетевых решений. Например, последняя, 24-я, нейросеть находит приближенное решение с абсолютной точностью лучше, чем 0.4 нм и с относительной точностью около 0.003. При этом относительная невязка входных спектральных данных – коэффициента пропускания системы 24-х слоев $T_{input}(\lambda)$ и расчетного коэффициента пропускания $T_{NN}(\lambda)$ по вычисленному нейросетью дизайну составляет около 0.0012, что можно видеть из правого графика на рисунке. Близкие результаты получались и для других реализаций входных данных нейросети. При тестировании нейросетей с номерами от одного до 24 по 100 реализациям входных данных оказалось, что среднеквадратичная ошибка решения получается в диапазоне 0.01 – 0.15 нм для сетей с $k = \overline{1{,}15}$ и от 0.15 до 0.38 нм для сетей с $k = \overline{16{,}24}$.

Заключение

Проведенные численные эксперименты показывают, что нейросетевой метод решения задачи характеризации толщин напыленных слоев оптической системы имеет высокую точность и быстродействие, близкие к требуемым в технологии. Эти

характеристики можно улучшить, оптимизируя структуру нейросетей (используя, например, сверточные сети, другое число слоев, нейронов и т.д.)

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант № 26-11-00023).

Литература

1. *Tikhonravov A.* Optical Coatings: design, characterization, monitoring – Bellingham, WA, United States: SPIE, 2024. – 234 p.
2. *Минский М., Пейперт С.* Персептроны. – М.: Мир, 1971. – 261 с.
3. *Шинкарев В. Д., Лукьяненко Д. В., Тихонравов А. В., Ягола А. Г.* Алгоритм контроля процесса напыления оптических покрытий на основе выборочных данных широкополосных измерений. // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2023. – Т. 26, № 3. – С.169-178.

Решение задачи дифракции с мезоскопическими граничными условиями в присутствии подложки методом дискретных источников

Solution of the DiffractionProblem with Mesoscopic Boundary Conditions in the Presence of a Substrate using the Discrete Sources Method

***Еремин Ю. А*[1], *Лопушенко В. В.*[1]**

1) *Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, Москва, РФ.*

eremin@cs.msu.ru, lopushnk@cs.msu.ru

Аннотация. На основе метода дискретных источников проведено исследование граничной задачи дифракции плоской волны на слоистой плазмонной наночастице, располагающейся на поверхности прозрачной подложки. Для учета возникающих в ядре частицы квантовых эффектов используются мезоскопические граничные условия с параметрами Фейбельмана. Полученные результаты наглядно показывают необходимость учета возникающих квантовых эффектов, особенно при использовании наночастиц небольшого диаметра.

Введение

Биосенсорика на основе поверхностного плазмонного резонанса (ПР) является одной из самых передовых технологий распознавания и количественного анализа целевых веществ. В сенсорах на основе локализованного ПР в присутствии подложки эффективность сильно зависит от нескольких параметров, таких как размер частиц, их форма, межчастичное расстояние и глубина проникновения поля в окружающую среду. При конструировании подобных биосенсоров необходимо оптимизировать их параметры в целях повышения разрешающей способности [1]. Сферические золотые наночастицы чаще всего используются в биосенсорике, однако в частицах диаметром порядка нескольких нанометров возможно проявление квантовых эффектов (КЭ), таких как пространственная нелокальность, смещение электронного облака по отношению к поверхности частицы и затухание Ландау [2]. В этом случае влияние КЭ может существенно искажать оптические характеристики, снижая интенсивность поля в зоне усиления. В данной работе для решения задачи дифракции на слоистой частице в присутствии диэлектрической подложки используется метод дискретных источников [3]. Для упрощения вычислительной схемы решения задачи с мезоскопическими граничными условиями в присутствии подложки используется модель фиктивного слоя, которая позволяет существенно упростить вычисление Фурье гармоник тензора Грина полупространства и правой части, избегая дополнительного дифференцирования интегралов Вейля-Зоммерфельда.

Постановка задачи дифракции

Пусть сферическая слоистая частица целиком располагается в верхнем полупространстве $D_0\colon (z>0)$ и отстоит от прозрачной диэлектрической подложки $D_1\colon (z<0)$ на расстояние h, а $\Sigma\colon (z=0)$ — плоская граница раздела сред. Плазмонное ядро частицы D_i, и область фиктивной оболочки D_s имеют сферические поверхности $\partial D_{i,s}$. Все среды предполагаются немагнитными, а их диэлектрические проницаемости обозначим $\varepsilon_\nu, \nu = 0,1,i,s$. При этом в фиктивном слое $\varepsilon_s = \varepsilon_0$. Рассмотрим плоскую электромагнитную волну линейной поляризации $\{\mathbf{E}^0, \mathbf{H}^0\}$, распространяющуюся из верхнего полупространства в полуплоскости $\varphi = \pi$ под углом $\pi - \theta_0$ относительно нормали к подложке, совпадающей с осью Oz. Тогда постановка граничной задачи рассеяния с учетом мезоскопических граничных условий на поверхности металлического ядра может быть записана в следующем виде:

1. Система уравнений Максвелла в областях постоянства параметров среды

$$\nabla \times \mathbf{H}_\nu(M) = -jk\varepsilon_\nu \mathbf{E}_\nu(M), \nabla \times \mathbf{E}_\nu(M) = jk\mathbf{H}_\nu(M), M \in D_\nu, \nu = 0,1,i,s; \quad (1)$$

2. Мезоскопические граничные условия на поверхности ядра

$$\mathbf{n}_i \times \big(\mathbf{E}_i(P) - \mathbf{E}_s(P)\big) = -d_\perp \mathbf{n}_i \times \nabla\big\{\mathbf{n}_i \cdot \big(\mathbf{E}_i(P) - \mathbf{E}_s(P)\big)\big\},$$
$$\mathbf{n}_i \times \big(\mathbf{H}_i(P) - \mathbf{H}_s(P)\big) = 0, P \in \partial D_i\ ; \quad (2)$$

3. Условия сопряжения для полей на внешней поверхности слоя

$$\mathbf{n}_s \times \big(\mathbf{E}_s(Q) - \mathbf{E}_0^s(Q)\big) = \mathbf{n}_s \times \mathbf{E}_0^0(Q),$$
$$\mathbf{n}_s \times \big(\mathbf{H}_s(Q) - \mathbf{H}_0^s(Q)\big) = \mathbf{n}_s \times \mathbf{H}_0^0(Q), Q \in \partial D_s\ ; \quad (3)$$

4. Условия сопряжения для полей на поверхности подложки

$$\boldsymbol{e}_z \times \big(\mathbf{E}_0(Q) - \mathbf{E}_1(Q)\big) = 0;\ \boldsymbol{e}_z \times \big(\mathbf{H}_0(Q) - \mathbf{H}_1(Q)\big) = 0, Q \in \Sigma; \quad (4)$$

5. Условия излучения на бесконечности следующего вида

$$\lim_{r\to\infty} r \cdot \left(\mathbf{H}_\nu^s(M) \times \frac{\boldsymbol{r}}{r} - \sqrt{\varepsilon_\nu}\mathbf{E}_\nu^s(M)\right) = 0, r = |M|, \nu = 0,1, z \neq 0;$$
$$\max(|\mathbf{E}_\nu^s(x,y)|, |\mathbf{H}_\nu^s(x,y)|) = O(\rho^{-0.5}),\ \rho = \sqrt{x^2+y^2},\ \rho \to \infty, \nu = 0,1, z = \pm 0. \quad (5)$$

Здесь $\{\mathbf{E}_\nu, \mathbf{H}_\nu\}$ - полные поля в областях $D_\nu, \nu = 0,1,i,s$, $\{\mathbf{E}_\nu^s, \mathbf{H}_\nu^s\}$ – рассеянные поля в $D_{0,1}$, $\boldsymbol{n}_{i,s}$ — единичные внешние нормали к поверхностям $\partial D_{i,s}$, $d_\perp$ – параметр Фейбельмана, $\varepsilon_\nu, \nu = 0,1,i,s$ — диэлектрические проницаемости сред в соответствующих областях, при этом $\mathrm{Im}\ \varepsilon_{s,0,1} = 0$, $\mathrm{Im}\ \varepsilon_i \leq 0$, $k = \frac{\omega}{c}$, временная зависимость величин выбрана в виде $\exp(j\omega t)$.

Приближенное решение задачи (1) – (5) для рассеянного поля в D_0 строится с помощью метода дискретных источников (МДИ) с учетом осевой симметрии и поляризации, удовлетворяя классической системе уравнений Максвелла во всех областях постоянства параметров среды $D_\nu, \nu = 0,1,i,s$, условиям излучения (5) и дополнительно условиям сопряжения для полей на бесконечной границе раздела полупространств Σ. В основу представления для рассеянного поля положим Фурье компоненты тензора Грина полупространства, которые могут быть записаны в виде интегральных представлений Вейля-Зоммерфельда [3]. Условия сопряжения для полей на поверхности подложки выполняются автоматически за счет использования компонент тензора Грина в представлении для решения. Построение представлений для полей выполняется на основе векторных потенциалов, индуцированных источниками, распределенными вдоль оси симметрии рассеивателя Oz [4], число которых может различаться в зависимости от номера гармоники по φ.

Результаты моделирования

Будем рассматривать задачу дифракции плоской волны P-поляризации на золотой сфере с фиктивным слоем, расположенной на поверхности прозрачной призмы. Полупространство D_0 заполнено водой ($\sqrt{\varepsilon_0} = 1.33$), а подложкой является стекло BK7 с показателем $\sqrt{\varepsilon_1} = 1.52$. Квантовые параметры, необходимые для вычисления

параметра Фейбельмана (ПФ) для золота, определены следующим образом [2]: $\hbar\omega_p = 9.02$ эВ, $\hbar\gamma = 0.071$ эВ, $v_F = 1.39 \cdot 10^{12}$ мкм/с, $\mathfrak{D} = 8.62 \cdot 10^{8}$ мкм^2/с, где ω_p-плазменная частота металла, γ– скорость затухания Друде, v_F - скорость Ферми $\mathfrak{D}$ - коэффициент диффузии электронов и $\hbar$ - приведенная постоянная Планка. Мы используем аналитическую формулу для ПФ, полученную в работе [5].

Определим интегральный коэффициент усиления (КУ) интенсивности поля на внешней поверхности фиктивного слоя ∂D_s как

$$\kappa(\lambda) = \int\limits_{\partial D_s} |\mathbf{E}_0^N + \mathbf{E}_0^0|^2 \mathrm{d}\sigma \,/\, \int\limits_{\partial D_s} |\mathbf{E}_0^0|^2 \mathrm{d}\sigma.$$

Толщина фиктивного слоя при расчетах предполагалась равной 0.1 нм. Представляет также интерес суммарная интенсивность рассеянного поля в верхнем полупространстве

$$\sigma_{scs}(\lambda) = \int\limits_{\Omega^+} \sigma_{scs}(\lambda, \theta, \varphi) d\Omega,$$

где $\Omega^+ = \{0^\circ \le \theta \le 90^\circ; 0^\circ \le \varphi \le 360^\circ\}$ — единичная верхняя полусфера, $\sigma_{scs}(\lambda, \theta, \varphi) = |F_\theta(\theta, \varphi)|^2 + \left|F_\varphi(\theta, \varphi)\right|^2$, а $\mathbf{F}(\theta, \varphi)$ — диаграмма направленности рассеянного поля.

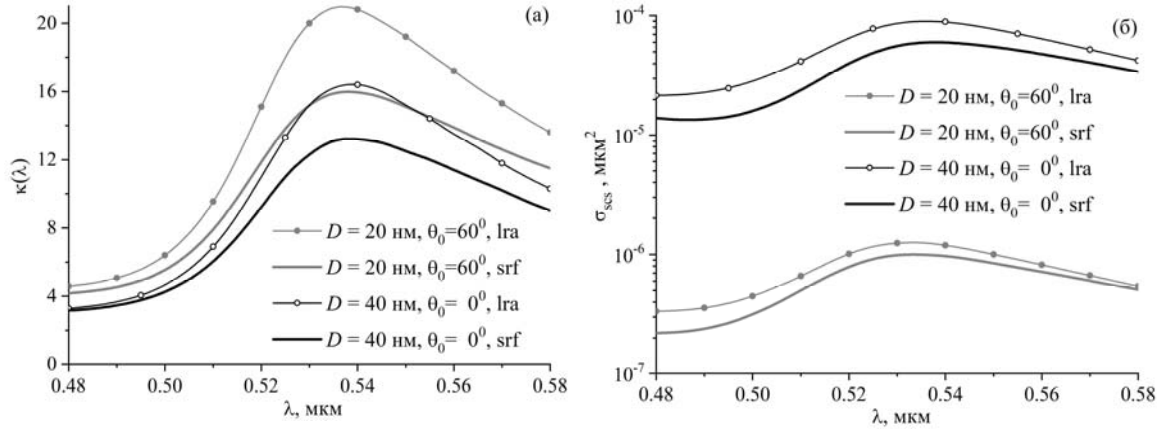


Рисунок 1. Интегральный КУ (а) и сечение рассеяния (б), вычисленные для золотых сфер диаметров D = 20 и 40 нм при одинаковом смещении относительно подложки h = 2 нм в классическом (lra) и мезоскопическом (srf) случаях

На Рис. 1а приведены результаты сравнительного анализа КУ для сфер диаметром D=20 и 40 нм при углах падения плоской волны соответственно $\theta_0 = 60°$ и 0°. Можно видеть, что увеличение угла падения приводит к росту амплитуды ПР как в локальном, так и мезоскопическим случаях. Что касается сечения рассеяния (Рис. 1б), то здесь ситуация предсказуемая. Частица большего диаметра дает больший вклад в рассеянное поле, причем это различие составляет до двух порядков величин. Такое различие между интенсивностью ближнего и дальнего полей является следствием различного вклада Фурье-гармоник в ближнее и дальнее поля для частиц на подложке.

Заключение

Разработана и реализована концепция фиктивного слоя, позволяющая проводить анализ ближнего поля плазмонных наночастиц с мезоскопическими граничными условиями, располагающихся на прозрачной подложке. Обнаружено существенное различие в поведении КУ интенсивности ближнего поля частицы при увеличении угла наклона направления внешнего возбуждения относительно нормали к подложке. При этом учет КЭ приводит к снижению величины КУ до 25%.

Литература

1. *Semwal V., Jensen O.R., Bang O., Janting J.* Investigation of Performance Parameters of Spherical Gold Nanoparticles in Localized Surface Plasmon Resonance Biosensing // Micromachines. — 2023. — Vol. 14. — 1717.
2. *Raza S., Bozhevolnyi S.I., Wubs M., Mortensen N.A.* Nonlocal optical response in metallic nanostructures. Topical Review // J. Phys. Condens. Matter. — 2015. — Vol. 27, 183204.
3. *Еремин Ю.А., Свешников А.Г.* Квазиклассические модели квантовой наноплазмоники на основе метода Дискретных источников (обзор) // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2021. — Т. 61, № 4. — С. 34–62.
4. *Еремин Ю.А ., Лопушенко В.В.* Метод дискретных источников для исследования влияния квантовых эффектов на оптические характеристики плазмонных наночастиц с покрытием // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. — 2026. — Т. 66, № 2. — С.280-288.
5. *Eriksen M.H.*, *Tserkezis C.*, *Mortensen N.A.*, *Cox J.D.* Nonlocal effects in plasmon-emitter interactions // Nanophotonics. — 2024. — Vol. 3. no. 15. — P. 2741-2751.

О задаче многих тел с близкодействием

On the Many-Body Problem with Short-Range Interaction

***Малых М. Д.*[1,2], Севастьянов Л. А.[1,2]**

1) Российский университет дружбы народов им. П. Лумумбы; 2)Лаборатория информационных технологий им. М.Г. Мещерякова Объединённый институт ядерных исследований, Москва, РФ.

malykh-md@rudn.ru

Аннотация. Рассматривается классическая задача о взаимодействии заряженных частиц в рамках представления о близкодействии. По методу Галеркина эта задача сведена к динамической системе, в которой к уравнениям, описывающим динамику частиц, добавляются уравнения, описывающие колебания поля в ящике. Эта задача представляет собой упрощение, отличное от того, которое ведет к классической механике. Ее предлагается рассматривать как простейшую математическую модель, описывающую задачу многих тел с близкодействием. Эта модель состоит из уравнений движения частиц, к которым добавлены уравнения, описывающие собственные колебания поля в ящика.

Введение

Исследование движения пучка заряженных частиц во внешнем электромагнитном поле с учетом взаимодействия частиц является одной из важнейших и востребованных задач в плазменной электронике. В рамках общепринятого подхода к ее исследованию, отрезок времени разбивается на дискретные шаги длины Δt. На каждом шаге по текущим положениям зарядов и их скоростям, задающим токи, вычисляют наведенное поле как решение уравнений Максвелла. Затем это наведенное поле добавляют к внешнему полю и вычисляют новые положения и скорости частиц, которые они приобретают в этом поле под действием силы Лоренца. Описанная схема допускает множество вариаций, однако эти детали нисколько не снимают разделения по процессам: за один шаг по времени сначала заряды и их скорости порождают поле, а потом поле через силу Лоренца действует на тела. Вполне очевидно, что сказанное дает описание численного метода исследования некоторой математической модели задачи многих тел с близкодействием. Близкодействие учитывается в модели явно: на каждом шаге вычисляется поле и взаимодействие между частицами осуществляется через это поле, для описания которого используются уравнения Максвелла, то есть гиперболические уравнения, которые описывают распространения сигналов со скоростью света с. Однако модель сама по себе остается неописанной, более того, обычно избегают обсуждения сходимости описанного численного метода, то есть исследования предела при $\Delta t \to 0$.

С математической точки зрения здесь необходимо соединить в одну систему две модели: нелинейную динамическую систему, описывающую движение зарядов на основе закона Лоренца, и линейную систему уравнений Максвелла, описывающую динамику электромагнитного поля. По отделенности эти модели хорошо изучены. Динамические системы с аналитическими правыми частями решаются в аналитических функциях. Уравнения Максвелла, как и вообще линейные уравнения в частных производных, естественно решаются в пространствах Собелева. Однако при соединении этих моделей мы должны рассматривать динамические системы, правые части которых являются элементами пространств Соболева, и уравнения Максвелла, токи и заряды в которой являются комбинациями δ-функций.

В настоящей работе мы хотим рассмотреть простейшую постановку задачи многих тел с близкодействием, описывающимся волновым уравнением. Чтобы добавить к волновому уравнения краевые условия, мы рассмотрим задачу в конечной области. Вопрос о постановки условий излучения в такой задаче не кажется нам тривиальным, хотя обычно в рамках упрощающих предположений принимают, что поле в дальней зоне должно быть равно нулю.

Математическая модель близкодействия

Пусть имеется N одинаковых тел массы m. В предположении близкодействия друг на друга они создают поле с потенциалом u и движутся в нем в соответствии со 2-м законом Ньютона. Проще всего сказанное можно записать так: динамику частиц описывает система

$$m\ddot{\boldsymbol{r}}_n = -\nabla u|_{\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_n}, n = 1,2,\dots,N,$$

а динамику поля – волновое уравнение

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u + \rho,$$

где ρ – плотность распределения массы:

$$\rho = \gamma \sum_{n=1}^{N} \delta_s(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_n)$$

Здесь уместно считать δ_s сглаживанием дельта-функции Дирака, переходящим при $s \to 0$ в дельта-функцию. Мы предполагаем, что тела не излучают волн, заметных в дальней зоне. Чтобы исследовать эту задачу численно, мы поместим системы в ящик Дирихле G и поставим на его границе условия Дирихле.

Естественным методом решения уравнения колебаний в конечной области является метод Галеркина. Пусть ϕ_n – нормированные собственные функции оператора Лапласа в G, а α_n^2 – соответствующие собственные значения. Тогда

$$u(x,y,z,t) = \sum_{j=1}^{\infty} u_j(t)\phi_j(x,y,z),$$

где u_j – неизвестные пока коэффициенты. Если усечь сумму по j до любого конечного числа J слагаемых, то получится система, которая в пределе $s \to 0$ принимает вид:

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}_n}{dt^2} = -\sum_{j=1}^{J} u_j(t)\nabla\phi_j\big|_{\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_n}, n = 1,2,\dots,N$$

и

$$\frac{1}{c^2}\frac{d^2u_j}{dt^2} + \alpha_j^2 u_j = \gamma \sum_{n=1}^{N} \phi_j\big|_{\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_n}, j = 1,2,\dots,J.$$

Начальную задачу для выписанной системы уравнений можно и нужно рассматривать как математическую модель, описывающую задачу многих тел с близкодействием. Первая группа уравнений – это уравнение движения, 2-ой закон Ньютона, а вторая группа уравнений описывает собственные колебания поля в

резонаторе G. Превращение ящика G в резонатор в рамках теории близкодействия кажется вполне естественным.

Обсуждение

Выписанная система обыкновенных дифференциальных уравнений удовлетворяет всем условиям классической теоремы Коши. Компьютерные эксперименты показали, что эта система богата законами сохранения. Однако нам пока не ясно, каким образом можно исследовать их аналитически. Мы надеемся, что дальнейшие эксперименты с этой новой задачей позволят прояснить этот вопрос.

Относительно исходной системы эта задача представляет собой упрощение, однако, упрощение, отличное от того, которое ведет к классической механике. При выводе системы мы ограничиваем число колебаний в ящике конечным числом мод (метод Галеркина) и сразу переходим к пределу при $s \to 0$. При этом предел $c \to \infty$ делает задачу сингулярно возмущенной, причем телам отвечают медленные переменные, а полю – быстрые.

Литература

1. *Гамбарян М.М., Малых М.Д.* О задаче многих тел с близкодействием // Discrete and Continuous Models and Applied Computational Science. - 2022. - Т. 30. - №1. - С. 52-61. doi: 10.22363/2658-4670-2022-30-1-52-61

Применимость использования приближения точечных рассеивателей для описания характеристик рассеяния сложного объекта

Applicability of the Point-Scatterer Approximation for Describing the Scattering Characteristics of the Complex Object

Балабуха Н. П.[1], Гильмутдинов Р.В.[1], Меньших Н. Л.[1]

1) Институт теоретической и прикладной электродинамики РАН, Москва, РФ.

n_bala@mail.ru, psevduch777@gmail.com, nl_menshikh@itae.ru

Аннотация. В работе рассматривается актуальная задача радиолокации. Любой сложный объект можно представить как набор неких отдельных рассеивателей, однако, понять, когда надо учитывать их взаимодействие, не всегда просто. В работе рассмотрена задача рассеяния электромагнитной волны на двух вертикально стоящих цилиндрах. Проведено сравнение результатов расчета с использованием строгого метода и в приближении двух точечных рассеивателей. Полученные результаты имеют теоретическое и прикладное значение в науке и технике. Приведено сравнение полученных результатов расчетов с результатами экспериментальных исследований.

Введение

В радиолокации важной задачей является определение центров рассеяния сложного объекта по его измеренной характеристике рассеяния [1]. Сложный объект часто можно представить как набор точечных рассеивателей [2-3]. Однако, в таком представлении невозможно правильно учесть взаимодействие между собой этих рассеивателей. Ведь в действительности, каждый центр рассеяния [4] имеет определенную геометрию с конкретными размерами: полость заданной формы, плоская грань или набор граней в виде уголкового отражателя, часть сферы или цилиндра и т.д.

В данной работе рассмотрена задача рассеяния плоской электромагнитной волны на двух одинаковых цилиндрах, один из которых зафиксирован, а второй вращается вокруг первого по дуге окружности. Такая задача имитирует два близкорасположенных центра рассеяния сложного объекта, которые нельзя считать точечными. Между цилиндрами возникает взаимодействие, которое можно описать конкретными механизмами [3].

Целью работы является выделение области применимости приближения сложного объекта двумя точечными рассеивателями при описании его характеристики рассеяния.

Исследуемая модель и методы решения

Модель расчета. Два вертикально стоящих цилиндра с диаметром $d = 100$ мм и длиной образующей $h = 200$ мм, центры которых расположены на расстоянии $L = 200$ мм друг от друга, облучаются плоской монохроматической электромагнитной волной. Цилиндры металлические, поверхности их считаются идеально-проводящими. Один цилиндр вращается по дуге окружности радиусом 200 мм (расстояние от центра вращения до центра цилиндра), а центр второго цилиндра совмещен с осью вращения первого цилиндра (рисунок 1а).

Проведены расчеты диаграммы обратного рассеяния (ДОР) рассматриваемой системы из двух цилиндров на частотах 3, 5, 7 и 10 ГГц при вертикальной (ВП) и горизонтальной поляризации (ГП) падающей электромагнитной волны. Расчеты проведены в программном пакете FEKO с использованием метода моментов (ММ).

В приближении точечных рассеивателей задачу можно решить с использованием приближенного метода физической оптики (ФО). Считаем, что у нас есть два одинаковых точечных рассеивателя с известной эффективной площадью рассеяния (ЭПР). Из-за вращения одного относительного другого возникает дополнительный набег фазы в отраженной волне, который легко учесть для монохроматической волны.

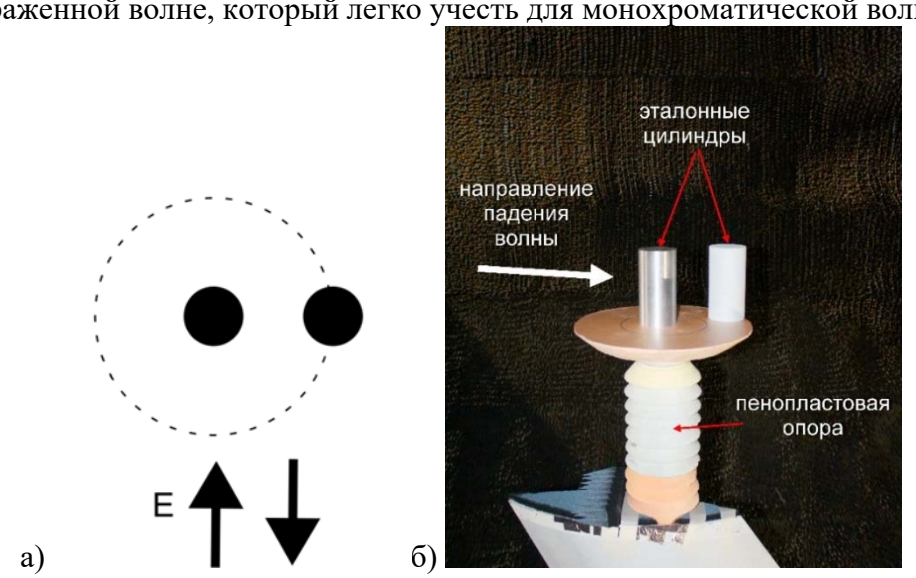


Рисунок 1. Модель расчета, вид сверху (а) и фото объекта при измерении (б)

ЭПР боковой поверхности цилиндра выражается формулой:

$$\sigma = \frac{2\pi(d/2)h^2}{\lambda}, \quad (1)$$

где λ – длина волны.

Тогда напряженность электромагнитного поля, отраженного от каждого цилиндра отдельно, может быть выражена через ЭПР боковой поверхности цилиндра - σ по формуле (2), а суммарная ЭПР системы из двух цилиндров будет выражена по формуле с использованием этих полей, где учтена задержка по фазе, связанная с положениями цилиндров в пространстве:

$$E_1 = \sqrt{\frac{\sigma}{4\pi}}, E_2 = E_1 \exp(-2i(2\pi/\lambda)L\cos\varphi), \quad (2)$$

$$\sigma_{\text{сист}} = 10\log(4\pi|E_1 + E_2|^2). \quad (3)$$

В выражении (3) прописана зависимость ЭПР системы из двух цилиндров от угла вращения подвижного цилиндра. Такая формула описывает ЭПР двух точечных рассеивателей с заданным уровнем ЭПР каждый.

Экспериментальные исследования. Были проведены экспериментальные исследования зависимости ЭПР двух одинаковых цилиндров от угла вращения одного

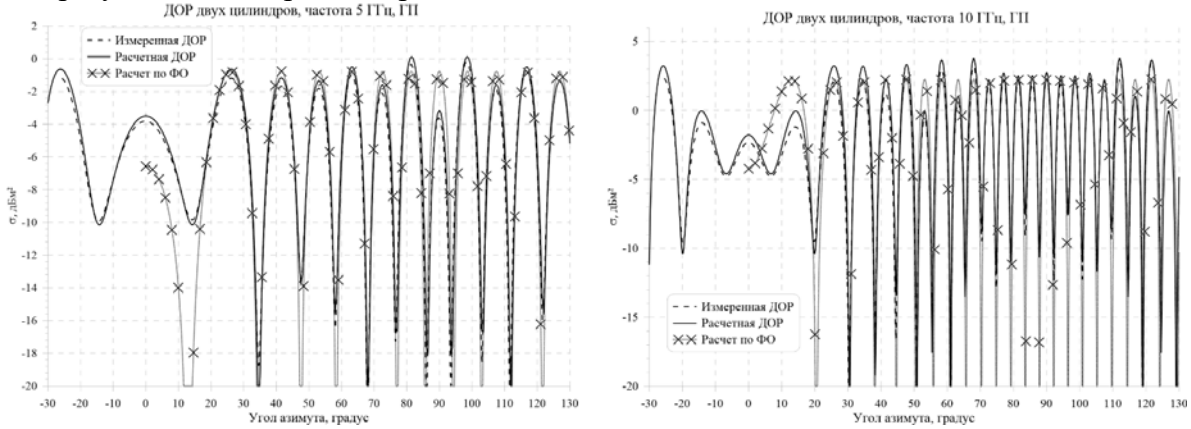
из них. Вид установки объекта на опорно-поворотное устройство автоматизированного измерительного комплекса – компактного полигона (АИК-КП) показан на рисунке 1б.

В экспериментальных исследованиях измерялась ДОР двух цилиндров в широкой полосе частот от 2,6 до 12,4 ГГц с большим числом частотных точек. Это позволило построить радиолокационное изображение объекта средствами программного обеспечения АИК-КП. Это помогает понять, на каких длинах волн мы еще можем выделить взаимодействие между цилиндрами в отдельный центр рассеяния.

Результаты исследований

ДОР системы из двух цилиндров похожа на типовую интерференционную картину, сформированную двумя когерентными источниками с одинаковой амплитудой. Причем, это наблюдается во всем исследуемом диапазоне частот, просто с уменьшением длины волны уменьшается расстояние между максимами ДОР.

На рисунке 2 представлены ДОР системы из двух цилиндров на частотах 5 и 10 ГГц при ГП. На каждом рисунке представлено три ДОР системы из двух цилиндров: расчет ММ, результаты измерений и расчет с использованием ФО.



а) б)

Рисунок 2. ДОР системы из двух цилиндров на частоте 5 ГГц (а) и 10 ГГц (б) при ГП

Надо отметить, что расчет по ФО почти везде позволяет верно определить положение максимумов ЭПР на ДОР. Отличие наблюдается только в области ±20°, т.е. в области тени, где один цилиндр затеняет второй. При этом проекция расстояния между центрами цилиндров на ось, перпендикулярную направлению распространения волны, составляет менее 70 мм, т.е. совпадение положений максимумов начинается раньше, чем заканчивается область тени (геометрическая граница в данной задаче – 30°). В этой области расчет с использованием ФО дает отличие и по уровням значений ЭПР, и по положению максимумов. В остальной области углов в расчете по ФО все максимумы имеет одинаковое значение ЭПР, что и понятно – рассеянные на каждом цилиндре поля сложились в фазе. Точный расчет, как и результаты измерений в АИК-КП, показывают, что это не всегда так. Уровень максимумов зависит от фактора взаимодействия между двумя цилиндрами, который расчет по ФО не учитывает. Поэтому при угле 90° и длине волны 30 мм влияние взаимодействия уменьшается, ДОР, полученная ФО, близка к ДОР, полученной ММ.

Отличия между результатами расчета и измерений не превосходят 1 дБ. Отличия между расчетом по ФО и точным расчетом в максимумах ДОР, за исключением области тени, составляют 1-2 дБ и менее.

Заключение

Результаты исследований показали, что в исследуемом диапазоне частот наблюдается четкая интерференционная картина, созданная системой из двух цилиндров. Экспериментальные результаты совпадают с результатами расчетов, погрешность не превосходит 1 дБ.

За исключением области тени положение максимумов точно предсказывает и простой физикооптический расчет, использующий приближение двух точечных рассеивателей с заданным уровнем ЭПР. Уровень ЭПР в максимумах ДОР, рассчитанный с использованием такого подхода, отличается от расчета, выполненного строгим методом, на 1-2 дБ, что определяется влиянием взаимодействия между двумя рассеивателями.

Литература

1. *E. A. Knott.* Radar cross section measurements. – N.Y.: VNR, 1993 – 557 pp.
2. *D.R. Wehner*. High resolution radar. – Boston: Artech house. 1995 – 593 pp.
3. *Н.П. Балабуха, А.С. Зубов, В.С. Солосин*. Компактные полигоны для измерения характеристик рассеяния объектов. – М.: Наука, 2007 – 266 с.
4. *С.И. Моряков, С.М. Нестеров, П.Н. Скоков, И.А. Скородумов.* Способ корректировки диаграмм обратного рассеяния радиолокационного объекта при исключении или снижении уровня отражений от элементов его конструкции // Журнал радиоэлектроники [электронный журнал]. – 2020. №6. Режим доступа: http://jre.cplire.ru/jre/jun20/7/text.pdf. DOI 10.30898/1684-1719.2020.6.7.

Задачи на собственные значения в магнитной гидродинамике галактических дисков

Eigenvalue Problems in Magnetohydrodynamics of Galactic Discs

***Михайлов Е. А.*[1,2], *Хасаева Т.Т.*[1]**

1) Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, физический факультет, Москва, РФ; 2) Физический институт имени П.Н. Лебедева РАН, Москва, РФ.

ea.mikhajlov@physics.msu.ru

Спиральные галактики обладают регулярными структурами магнитного поля, измеряемого с помощью современных радиотелескопов, дающих возможность определить меру фарадеевского вращения [1]. С точки зрения теоретической физики их возникновение ассоциируется с действием динамо средних полей. Его действие основано на наличии двух разномасштабных течений в межзвездной среде: крупномасштабном вращении вокруг центра галактики, угловая скорость которого меняется с расстоянием до оси, и мелкомасштабных турбулентных потоках, обладающих ненулевой спиральностью, зависящей от вертикальной координаты. Усреднение уравнений магнитной гидродинамики позволяет получить эволюционную задачу для магнитного поля в диске, которая достаточно легко (в рамках предположения об экспоненциальной зависимости компонент от времени) приводится к задаче на собственные значения.

Знак собственных значений позволяет определить, возможно ли возбуждение роста крупномасштабного магнитного поля при малых начальных условиях (связанных, например, с мелкомасштабным динамо или бирмановскими механизмами), а их величина – понять темп экспоненциального роста тех или иных мод. В более ранних работах [2] подобные задачи, как правило, решались лишь в упрощенном случае, когда описание процесса можно было свести к обыкновенным дифференциальным уравнениям. В то же время, более подробный анализ делался лишь численно.

В настоящей работе мы представляем результаты исследования собственных значений в рамках так называемого планарного приближения. Оно было предложено для тонких галактических дисков [3] и первоначально подразумевало лишь численное решение. В его рамках считается, что основную роль играют радиальная и азимутальная составляющие поля. Также некоторые частные производные вдоль направления, перпендикулярного к экваториальной плоскости, могут быть заменены более простым соотношением.

Тем не менее, несмотря на ряд упрощений, данная задача на собственные значения оказывается точно разрешимой лишь в случае постоянных коэффициентов, отвечающих за течения [4]. Хотя данные результаты представляют определенный математический интерес, их применимость оказывается ограниченной: так, они оказывают малополезны при учете внешних областей галактик, где как крупномасштабные, так и мелкомасштабные движения ионизованной среды заметно ослабевают.

Рассмотрение задачи с меняющимися показателями требует использования методов теории возмущений собственных значений [5]. Так, сначала решается невозмущенная задача, для которой собственные функции сводятся к функциям Бесселя первого порядка, а собственные значения выражаются через ее корни. После этого остальные слагаемые рассматриваются как возмущения, и находятся скорректированные собственные значения в предположении об их не очень большой величине.

Результаты, полученные с помощью методов теории возмущений, верифицируются численно. Можно отметить хорошее соответствие данных обоих подходов друг другу.

Отдельно хотелось бы отметить исследование собственных функций и собственных значений с учетом периферийных областей галактик (вплоть до 30 кпк от центра). С учетом свойств функции Бесселя [6], можно предполагать убывание поля с расстоянием по закону $r^{-1/2}$, что соответствует данным астрономических наблюдений [7].

Литература

1. *R. Beck, A. Brandenburg, D. Moss, A. Shukurov, D. Sokoloff* Galactic Magnetism: Recent Developments and Perspectives // Annual Review of Astronomy and Astrophysics. – 1996. – V. 34. – P. 155 – 206.
2. *А. А. Рузмайкин, Д. Д. Соколов, А. М. Шукуров* Магнитные поля галактик // М., Наука, 1988.
3. *D. Moss* On the generation of bisymmetric magnetic field structures in spiral galaxies by tidal interactions // Monthly Notices of Royal Astronomical Society. — 1995. — 275. — P.191 – 194.
4. *E. A. Mikhailov* Symmetry of the magnetic fields in galactic dynamo and the material arms // Magnetohydrodynamics. — 2020. — Vol. 56, no. 4. — P. 303–315.
5. *Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц* Курс теоретической физики: Учеб. пособие для вузов. В. 10 т. Т.3. Квантовая механика (нерелятивистская теория) Под ред. Л.П. Питаевского // М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. – 800 с.
6. *А. Г. Свешников, А. Н. Боголюбов, В. В. Кравцов* Лекции по математической физике. // М., Издательство Московского университета Москва, 1993.
7. *Y. Hu, A. Lazarian* Mapping the Galactic magnetic field orientation and strength in three dimensions // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. – V. 524. – P. 2379 – 2394.

Маломодовые модели динамо и правила Вальдмайера

Low-mode Dynamo Models and Waldmeier Rules

Соколов Д.Д.*[1], *Юшков Е.В.*.[2] , *Макрова И.В.

1)Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, физический факультет, Москва, РФ

Sokoloff.dd@gmail.com, yushkov.msu@mail.ru, iras27072005@gmail.com

В докладе на конкретном примере анализируется тактика, которую по мнению авторов, разумно применять при численном моделировании сложных физических систем. Правила Вальдмайера представляют собой три эмпирически найденные соотношения между параметрами 11-летнего цикла солнечной активности. Эти соотношения представляют собой некоторые корреляции между временем нарастания цикла, его высотой и другими подобными характеристиками. Физической прициной цикла активности является периодическое изменение магнитного поля Солнца, возбуждаемого эффектами электромагнитной индукцией. Этот процесс называется солнечным динамо. Современная вычислительная физика вполне в состоянии численно моделировать этот процесс при условии, что его управляющие параметры известны. Реально они известны не очень хорошо, а их временные флуктуации, в результате которых возникают правила Вальдмайера, известны еще намного хуже. В результате воспроизведение правил Вальдмайера методами прямого численного моделирования требует огромного объема вычислений при экстенсивном переборе параметров. В докладе мы показываем, как можно разумно огрубить задачу для того, чтобы сохраняя ее физическое содержание, сделать объем вычислений сравнительно небольшим и разобраться, какие именно физические факторы приводят к возникновению правил Вальдмайера.

Математическое моделирование и численные методы – 1

Роль памяти случайных процессов в эволюции средних характеристик магнитного поля

The Role of the Memory of Stochastic Processes in the Evolution of the Mean Characteristics of the Magnetic Field

Дуканов И.А. [1,2]***, Юшков Е.В.***[1,3]***, Соколов Д.Д.***[1,2]

1) *Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия, 2) ИЗМИРАН, Москва, Россия 3) ИКИ РАН, Москва, Россия*

yushkov.msu@mail.ru

Аннотация. Исследуется влияние временной памяти флуктуаций α-эффекта на эволюцию магнитного поля в модели однородного изотропного динамо. Сравниваются белый шум в интерпретации Ито, процесс с независимыми обновлениями и процесс Орнштейна — Уленбека. Получены условия роста ансамблевой средней магнитной энергии при нулевом среднем α-эффекте. Показано, что этот рост может сочетаться с затуханием почти всех отдельных реализаций вследствие вклада редких событий.

Описание работы

В стохастических задачах математической физики флуктуации параметров и внешних воздействий часто описывают с помощью хорошо изученных случайных моделей. При выборе такой модели естественно ориентироваться на среднее значение и дисперсию флуктуаций. Однако совпадение этих характеристик и даже одинаковые распределения в отдельный момент времени ещё не обеспечивают схожего поведения системы. Существенной оказывается временная структура случайного воздействия: наличие памяти, длительность корреляций и характер обновления случайных значений. В работе исследуется, как выбор модели флуктуаций влияет на эволюцию средних физических характеристик и насколько эта эволюция соответствует поведению отдельных реализаций.

Демонстрационным примером служит задача магнитного динамо в пространственно однородной и изотропной турбулентной проводящей среде [1–3, 5]. Рассматривается линейная система уравнений для спектральных плотностей магнитной энергии и магнитной спиральности. Параметр, связанный с гидродинамической спиральностью потока, флуктуирует во времени вокруг нулевого среднего значения. Сопоставляются три способа описания этих флуктуаций: белый шум при интерпретации стохастического уравнения по Ито, кусочно-постоянный процесс с независимыми гауссовыми обновлениями и процесс Орнштейна — Уленбека с экспоненциально затухающими временными корреляциями.

В основе исследования лежит модель среднего магнитного поля Штейнбека — Краузе — Рэдлера [4]. В пространственно однородной и изотропной среде эволюция среднего магнитного поля описывается уравнением

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \mathrm{rot}(\alpha B) + \beta \Delta B,$$

где α — коэффициент -эффекта, связанный с гидродинамической спиральностью потока, а β — коэффициент турбулентной диффузии. В работе коэффициент α считается пространственно однородным и случайно меняющимся во времени вокруг нулевого среднего значения. После преобразования Фурье задача сводится к системе уравнений для спектральных плотностей магнитной энергии и спиральности. Благодаря свойствам этой системы её решение можно выразить через накопленный за время наблюдения эффект флуктуаций α. Пространственные флуктуации и обратное влияние магнитного поля на течение в рассматриваемой модели не учитываются.

Сравнение трёх моделей показывает, что временная структура флуктуаций существенно влияет на среднюю энергию магнитного поля. В модели с независимыми

обновлениями и в модели Орнштейна — Уленбека рост средней энергии возможен, если совместное действие интенсивности флуктуаций и времени их памяти достаточно велико по сравнению с турбулентной диффузией. Конкретное условие роста зависит от формы временной корреляции. В то же время отдельные реализации в обеих моделях асимптотически затухают. Для белого шума в интерпретации Ито, принятой в статье, средняя энергия также затухает. При сопоставлении моделей необходимо учитывать, как задаются интенсивность флуктуаций и время корреляции.

Для каждой модели вычисляются аналитические выражения для ансамблевых средних, темпов их роста и показателей Ляпунова, характеризующих асимптотическое поведение отдельных реализаций. Показывается, что в рассмотренных моделях с конечной памятью средняя магнитная энергия может экспоненциально возрастать даже при нулевой средней спиральности потока. Условия роста определяются соотношением дисперсии флуктуаций, времени их корреляции и коэффициента турбулентной диффузии. При фиксированной дисперсии изменение времени корреляции способно изменить знак темпа роста средней энергии, тогда как показатель Ляпунова в этих моделях остается отрицательным.

Таким образом, рост средней энергии может сопровождаться затуханием почти каждой отдельной реализации. Это различие связано с перемежаемостью [6]: на больших временах основной вклад в ансамблевое среднее вносят редкие события с аномально высокой энергией. Поэтому положительный темп роста среднего сам по себе не свидетельствует об устойчивом усилении магнитного поля в типичной реализации. Разграничение этих характеристик существенно как для физической интерпретации стохастического динамо, так и для оценки устойчивости систем со случайными коэффициентами.

Аналитические результаты сопоставляются с численным усреднением по большому числу реализаций. Обсуждается влияние редких событий на точность такого усреднения и расхождение между теоретическим математическим ожиданием и средним по конечной выборке при увеличении времени наблюдения. Рассмотренный пример показывает, почему при построении стохастических моделей необходимо учитывать временные корреляции флуктуаций и отдельно анализировать динамику ансамблевых средних и отдельных реализаций.

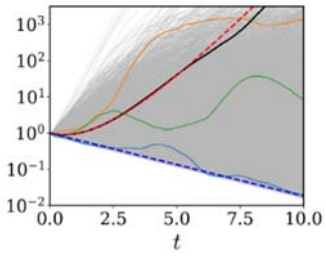


Рисунок 1. Эволюция магнитной энергии для отдельных реализаций и её среднего значения. Серые и цветные сплошные линии — отдельные реализации; черная сплошная линия — среднее по конечной выборке; красная пунктирная линия — теоретическое ансамблевое среднее; синяя пунктирная линия — асимптотика, определяемая показателем Ляпунова.

Литература

1. *Brandenburg A., Sokoloff D., Subramanian K.* Current status of turbulent dynamo theory: from large-scale to small-scale dynamos // Space Science Reviews. 2012. Vol. 169. P. 123.
2. *Kraichnan R. H.* Diffusion of passive-scalar and magnetic fields by helical turbulence // Journal of Fluid Mechanics. 1976. Vol. 77. P. 753.
3. *Silant'ev N.* Magnetic dynamo due to turbulent helicity fluctuations // Astronomy and Astrophysics. 2000. Vol. 364. P. 339–347.

4. *Steenbeck M., Krause F., Rädler K.-H.* Berechnung der mittleren Lorentz-Feldstärke für ein elektrisch leitendes Medium in turbulenter, durch Coriolis-Kräfte beeinflußter Bewegung // Zeitschrift für Naturforschung A. 1966. Vol. 21. P. 369.
5. *Fedotov S., Ivanov A., Zubarev A.* Memory effects in a turbulent dynamo: Generation and propagation of a large-scale magnetic field // Physical Review E. 2002. Vol. 65. 036313.
6. *Zeldovich Y. B., Molchanov S. A., Ruzmaikin A. A., Sokolov D. D.* Intermittency in random media // Soviet Physics Uspekhi. 1987. Vol. 30. P. 353.

Численное моделирование генерации магнитных полей в декреционных дисках Be-звёзд

Numerical Simulation of Magnetic Field Generation in Decretion Disks of Be Stars

***Жихарева Е.Н.*[1], Михайлов Е.А.[1,2], Рыспаева Е.Б.[3]**

1) Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, Москва, РФ, 2) Физический институт им. П.Н. Лебедева Российской академии наук, Москва, РФ, 3) Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, РФ

zhikhareva@physics.msu.ru

Аннотация. В работе исследуется эволюция крупномасштабного магнитного поля в декреционных дисках вокруг Be-звёзд. В отличие от аккреционных дисков, где вещество падает на центральный объект, декреционные диски формируются за счёт оттока материи от звезды. Несмотря на обратное направление потока массы, динамика таких дисков аналогична аккреционным, что позволяет применить единый динамо-подход с учётом противоположной закрученности потоков. Для перехода к декреционному диску исходная численная схема была модернизирована с учётом обратного направления радиального потока, а также введены стохастические вбросы магнитного поля во внутреннюю область диска. Расчёты проводились для выборки из 80 реальных астрофизических объектов. Показано, что поле формируется исключительно вблизи центрального объекта, где максимальны плотность и скорость вращения; на периферии поле пренебрежимо мало. Статистически обоснованные вбросы, основанные на данных реальных вспышек, дают более реалистичную картину по сравнению с произвольными.

Введение

Магнитные поля играют важную роль в эволюции аккреционных и декреционных дисков, обеспечивая перенос углового момента[1]. В отличие от аккреционных дисков, где вещество падает на центральный объект, декреционный диск образуется за счёт оттока вещества от быстро вращающейся звезды (например, Be-звезды). Из-за быстрого вращения даже слабые возмущения приводят к выбросам в экваториальную плоскость, где вещество остаётся в гравитационном поле и вытягивается в тонкий диск. Внутреннее трение вызывает потерю углового момента, и часть вещества возвращается на звезду[2]. Несмотря на обратный радиальный поток, динамика декреционного диска во многом схожа с аккреционным, что позволяет предположить схожую эволюцию магнитных полей с поправкой на противоположную закрученность потоков.

Основная часть

Крупномасштабное магнитное поле описывается уравнением Штеенбека – Краузе – Рэдлера:

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = rot(\alpha \boldsymbol{B}) + rot\left[\vec{V}, \vec{B}\right] + \eta \Delta \boldsymbol{B}$$

В планарном приближении для тонких дисков система уравнений принимает вид:

$$\frac{\partial B_r}{\partial t} = -\frac{\alpha}{h}B_\varphi + V\frac{\partial (B_r)}{\partial r} - \eta\frac{\pi^2 B_r}{4h^2} + \eta\left[\frac{\partial^2 B_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial B_r}{\partial r} - \frac{B_r}{r^2}\right],$$

$$\frac{\partial B_\varphi}{\partial t} = r\frac{\partial \Omega}{\partial r}B_r + V\frac{\partial (B_\varphi)}{\partial r} - \eta\frac{\pi^2 B_\varphi}{4h^2} + \eta\left[\frac{\partial^2 B_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial B_\varphi}{\partial r} - \frac{B_\varphi}{r^2}\right].$$

Здесь $\alpha = \alpha_0\left(1 - \frac{(B_r)_j^{i\,2} + (B_\varphi)_j^{i\,2}}{(B^*)_j^{i\,2}}\right)$ — приближенный закон для альфа-эффекта, учитывающий насыщение роста поля.

Граничные условия:

$B_r|_{r=r_{max}} = B_r|_{r=r_{min}} = B_\varphi|_{r=r_{max}} = B_\varphi|_{r=r_{min}} = 0.$

Задача решалась численно – методом переменных направлений. На нечётных шагах по времени используется схема, явная по радиальной координате и неявная по азимутальной, на чётных — наоборот. Для обеспечения периодических граничных условий по азимутальной координате применялась циклическая прогонка.

Для моделирования декреционного диска исходное поле полагалось нулевым[3]. Диск разбивался на 10 радиальных секторов во внутренней области, где каждые 10 секунд в случайно выбранный сектор вносилось локальное магнитное поле случайной величины и направления. Для повышения достоверности вместо чисто случайной генерации были проанализированы реальные данные о вспышках пяти Be-звёзд. По интервалам между последовательными вспышками строилась эмпирическая функция распределения, а затем обратная функция, аппроксимированная полиномом третьей степени.

Результаты расчётов

Расчёт эволюции магнитного выполнен для полной выборки из 80 объектов[4]. Установлено, что формирование магнитного поля в декреционных дисках происходит исключительно в непосредственной близости от центрального объекта, где плотность и скорость вращения вещества максимальны. По мере удаления от центра значения поля монотонно убывают, приближаясь к нулю на периферии[5]. Такое распределение объясняется отсутствием эффективных механизмов генерации поля в периферийных областях и слабым переносом поля из внутренней зоны[6].

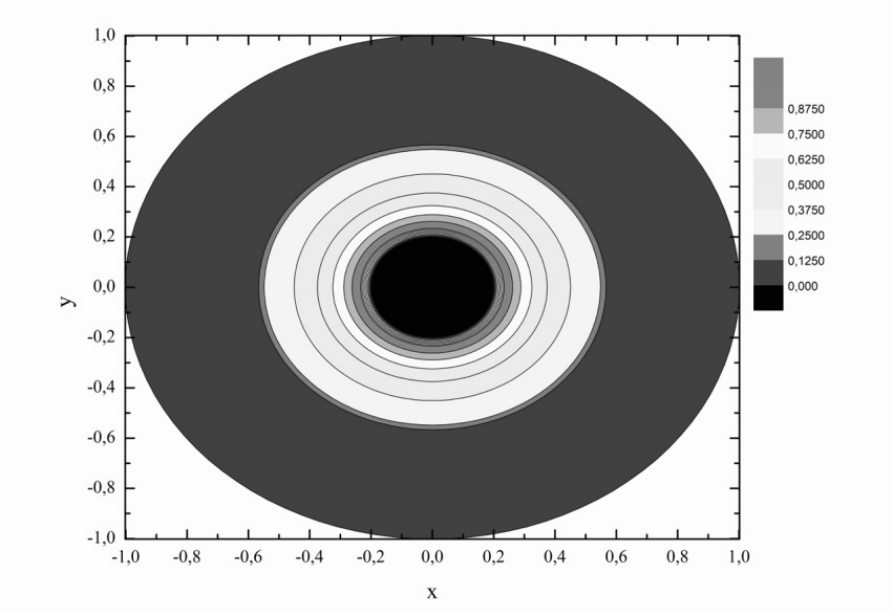


Рисунок.1. Эволюция магнитного поля для объекта HD44458

Полученные максимальные значения поля в прицентральной области согласуются с наблюдательными оценками для Be-звёзд. Например, для объекта

HD44458 максимальное поле составило 0.163722 Гс, для объекта HD33328 — 0.246704 Гс. Результаты для объектов HD44458 и HD33328, рассчитанные с использованием модернизированной схемы, согласуются с данными, полученными на более простой модели.

Заключение

В работе выполнено моделирование эволюции крупномасштабного магнитного поля в декреционных дисках вокруг Be-звёзд. Установлено, что формирование магнитного поля происходит исключительно вблизи центрального объекта, где достигаются максимальные значения плотности и скорости вращения вещества. Показано, что использование статистически обоснованных вбросов, опирающихся на данные реальных вспышек, даёт более реалистичную картину эволюции поля по сравнению с произвольными вбросами. Полученные максимальные значения магнитного поля для объектов, согласуются с наблюдательными оценками.

Литература

1. *Shakura N.I., Sunyaev R.A.* // Astronomy and Astrophysics. — 1973. — Vol. 24. — P. 337–355.
2. *Moss D., Sokoloff D., Suleimanov V.* // A&A. — 2016. — Vol. 588. — A18.
3. *Grachev D.A., Mikhailov E.A., Zhikhareva E.N.* // Open Astronomy. 2023. — Vol. 32, No. 1. — 20220216.
4. *Vieira R.G. et al.* // MNRAS. — 2016. — Vol. 000. — P. 1–20.
5. *Mikhailov E.A., Pashentseva M.V. et al.* // A&A. — 2021. — Vol. 652. — A38.
6. *Михайлов Е.А., Хасаева Т.Т., Тепляков И.О.* // Труды Института системного программирования РАН. — 2021. — Т. 33, № 6. — С. 253–264.

Уравнения корреляционной магнитодинамики

Equations of Correlational Magnetodynamics

***Иванов А.В.*[1], *Лукьянов А.В.*[2]**

1) Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, РФ;
2) Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, физический факультет, Москва, РФ

aiv.racs@gmail.com, andrey.luk10@gmail.com

Аннотация. Работа посвящена новой системе уравнений корреляционной магнитодинамики (CMD) описывающей магнетик в приближении сплошной среды. CMD выводится из атомистической модели классического магнетика Гейзенберга при помощи цепочки Боголюбова, при этом для замыкания цепочки вместо приближения среднего поля применяется новая аппроксимация двухчастичной функции распределения, учитывающая корреляции между ближайшими соседями обусловленные сильным локальным обменным взаимодействием.

Описание работы

Одной из общепринятых моделей магнетика является модель классического магнетика Гейзенберга, она же модель атомистической спиновой динамики (Atomistic Spin Dynamic — ASD, [1]). В рамках этого подхода магнитные моменты отдельных атомов рассматриваются как классические вектора. Атомы связаны обменным взаимодействием, обменные связи определяются типом кристаллической решетки. Кроме обмена могут учитываться внешнее поле, кристаллическая анизотропия, диполь-дипольное взаимодействие, различные взаимодействия на интерфейсах различных кристаллических решетках, дефекты и т. д. Эволюция каждого магнитного момента описывается своим уравнением Ландау-Лифшица с феноменологической диссипацией и случайным источником Ланжевена, что позволяет учитывать температуру системы. Диссипативные члены в модели ASD описывают релаксацию к равновесному распределению Гиббса за счет магнон-фононного взаимодействия. Прецессионный член

описывает магноны и релаксацию за счет взаимодействия магнонов с учетом строения кристаллической решетки, включая дефекты. Модель ASD применяется например для описания процессов образования атомных магнитных цепочек на поверхности [2] и для описания MTJ устройств [3].

Для решения прикладных задач, например создания устройств спинтроники, необходимы модели сплошной среды, учитывающие изменения модуля намагниченности за счет быстрого изменения температуры и внешних магнитных полей. Такой общепринятой моделью является уравнение Ландау-Лифшица-Блоха (LLB) [4, 5]. Уравнение LLB выводится из ASD модели при помощи цепочки Боголюбова, для замыкания цепочки используется приближение среднего поля. В ферромагнетиках за счет сильного локального обменного взаимодействия возникают корреляции между ближайшими соседями, которые не могут быть учтены в рамках приближения среднего поля, что приводит к ряду артефактов. Для решения этой проблемы в работе рассматривается новая аппроксимация двухчастичной функции распределения, учитывающая корреляции между ближайшими соседями. Такой подход приводит в итоге к системе уравнений корреляционной магнитодинамики (CMD) [6].

CMD состоит из модифицированного уравнения типа LLB, описывающего эволюцию пространственного распределения намагниченности, и уравнения на эволюцию пространственного распределения уровня парных корреляций (обменной энергии). В отличие от LLB, CMD оперирует расширенным фазовым пространством состоящим из параметра дальнего порядка (намагниченность описывает упорядочение на масштабах размера физически бесконечно малого объема) и параметра ближнего порядка (обменная энергия зависит от упорядочения на масштабах межатомного расстояния).

Основной сложностью является вычисления интегральных коэффициентов уравнений CMD, являющихся старшими моментами двух- и трех частичных функций распределения [7]. Задание этих коэффициентов эквивалентно заданию уравнений состояния. Для вычисления интегральных коэффициентов CMD можно предложить по крайней мере два подхода.

Первый подход основан на априорных предположениях о виде многочастичных функций распределения [6], что позволяет построить полностью самосогласованную теорию не содержащую подгоночных параметров. К недостаткам такого подхода относится высокая сложность, связанная с необходимостью вычисления многократных интегралов на сфере, и плохое количественное согласие с результатами исходной ASD модели.

Второй подход основан на анализе результатов массовых расчетов в рамках исходной ASD модели [8]. В результате для интегральных коэффициентов CMD получаются компактные аналитические зависимости, пригодные для решения прикладных задач.

В итоге интегральные коэффициенты CMD явно зависят от типа кристаллической решетки. CMD значительно лучше описывает неравновесные процессы магнетике (процессы релаксации и перемагничивание образца) чем LLB.

Еще одним результатом является новое выражение для энтропии классического магнетика Гейзенберга, основанное на линейной комбинации энтропий одно- и двухчастичных функций распределения. Этот результат был обнаружен при анализе большого объема расчетов в рамках исходной ASD модели и является прямым следствием классического характера ASD модели. Выражение для энтропии согласуется с выражением для неравновесной температуры магнетика, при этом производство параметра дальнего порядка в первом уравнении CMD на намагниченность может трактоваться как значение неравновесной температуры системы.

CMD является новой теорией находящейся в начале своего становления. Несмотря на достигнутые CMD успехи, остаются открытыми множество прикладных и

фундаментальных вопросов — построение эффективных моделей учитывающих квантовую природу магнетизма при низких температурах, обобщение CMD на случай ферри- и антиферромагнетизма, методика замыкания CMD (получение интегральных коэффициентов CMD) для сложных кристаллических решеток, расширение CMD для описания магнитоэлектрического эффекта и магнитострикции, описание сильно неравновесных процессов перемагничивания с бимодальной функцией распределения, описание спин-спиновой релаксации в сильно неравновесных состояниях и т.д. Особый интерес представляет возможность применения двухчастичной функции распределения учитывающих парные корреляции для описания других физических систем, например жидкостей.

Литература

1. *Olle Eriksson, Anders Bergman, Lars Bergqvist, and Johan Hellsvik.* Atomistic Spin Dynamics: Foundations and Applications. Oxford University Press, 2017.
2. Формирование и свойства металлических атомных цепочек и проводов / *А.Г. Сыромятников, С.В. Колесников, А.М. Салецкий, А.Л. Клавсюк* // УФН. — 2021. — Т. 191. — С. 705–737. — https://ufn.ru/ru/articles/2021/7/b/
3. Magnetization dynamics at finite temperature in CoFeB–MgO based MTJs / *Sutee Sampan-A-Pai, Rattaphon Phoomatna, Worawut Boonruesi et al.* // Scientific reports. — 2023. — Vol. 13, no. 1. — P. 2637.
4. *Garanin D.A.* Fokker–Planck and Landau–Lifshitz–Bloch equations for classical ferromagnets // Phys. Rev. B. — 1997. — Vol. 55. — P. 3050. — https://arxiv.org/abs/cond-mat/9805054v2
5. *Atxitia U., Hinzke D., Nowak U.* Fundamentals and applications of the Landau–Lifshitz–Bloch equation // Journal of Physics D: Applied Physics. — 2017. — Vol. 50, no. 3. — P. 033003. — https://doi.org/10.1088/1361-6463/50/3/033003.
6. *Иванов А.В., Зипунова Е.В., Хилков С.А.* Уравнения корреляционной магнитодинамики для ферромагнетиков // Письма в ЖЭТФ. — 2022. — Т. 115, № 3. — С. 176–183. — https://doi.org/10.31857/S1234567822030077.
7. *Лукьянов А.В., Иванов А.В.* Вычисление интегральных коэффициентов уравнений корреляционной магнитодинамики для ферромагнетика // Математическое моделирование. — 2025. — Т. 37, № 4. — С. 68–88.
8. *Ivanov A.V., Lukianov A.V., Zamiatin S.V.* Massive Calculations of Statistical Properties of the Classical Heisenberg Magnet Using the StatASD Code // Lobachevskii J. Math. — 2025. — Vol. 46, No. 8. — P. 3687–3697. — https:rdcu.be/eYllz.

Особенности обратного рассеяния от полостей с покрытиями на относительно низких частотах

Special Features of Dackscattering from Coated Cavities at Rather Low Frequencies

Кисель В.Н [1]***, Маслов А.С.*** [1,2]

1) Институт теоретической и прикладной электродинамики РАН, Москва, РФ;

2) Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Москва, РФ

kis_v@mail.ru

Аннотация. В работе рассматривается актуальная задача электродинамики, связанная с оптимизацией радиофизических и массогабаритных параметров покрытий, наносимых на стенки полостей для изменения характеристик обратного рассеяния. Предложена модель, объясняющая повышение эффективности таких покрытий на относительно низких частотах. Полученные результаты позволяют целенаправленно проектировать перспективные покрытия с улучшенными свойствами с учетом специфики их взаимодействия с электромагнитной волной, распространяющейся вдоль полости вытянутой формы.

Введение

Проблема уменьшения толщины и удельного веса радиопоглощающих покрытий (РПП) продолжает оставаться актуальной, особенно когда речь идет о низкочастотной части СВЧ диапазона, когда частота поля составляет от сотен МГц до единиц ГГц. На этих частотах работает большое количество связных и навигационных бортовых систем, а также целое семейство радиолокационных средств. Применение в составе элементов конструкции технических объектов эффективных легких РПП с целью уменьшения полей рассеяния позволило бы значительно улучшить электромагнитную совместимость антенно-фидерного оборудования, повысить его помехозащищенность, улучшить иные радиотехнические характеристики. Снижение веса покрытий и улучшение их эффективности можно получить в результате усложнения их внутренней структуры. Такие покрытия разрабатываются в ИТПЭ РАН, однако остается не до конца решенным вопрос об оптимальном выборе их геометрических и электродинамических параметров для конкретных условий работы.

Традиционно РПП характеризуются своим коэффициентом отражения (отношением амплитуд падающей и отраженной плоских волн, когда РПП нанесено на бесконечную проводящую плоскость). Однако зачастую РПП располагается не на внешней плоской, а на внутренней искривленной поверхности, например, на стенках полости. Важной особенностью переноса энергии падающей электромагнитной волны в полости является возникновение сложной картины распределения внутреннего поля ввиду сильного электромагнитного взаимодействия между стенками и торцом полости. При углах падения волны на стенки полости, близкие к скользящим, РПП обычно малоэффективны, и поэтому вопросы уменьшения обратного рассеяния от слабоискривленных полостей цилиндрической формы при падении волны вдоль оси цилиндра следует рассматривать особо. Исследования [1, 2] показали, что в этих случаях рационально оптимизировать не коэффициент отражения, а поверхностный импеданс покрытия. Поверхностный импеданс вычисляется как отношение касательных компонент электрического и магнитного полей на поверхности РПП и определяет условия согласования, т.е. эффективность передачи и последующего поглощения энергии электромагнитной волны в объеме радиопоглощающего материала покрытия.

Описание работы

Для объяснения некоторых особенностей формирования поля обратного рассеяния от полости вводится понятие зоны поглощения энергии по аналогии с эффективной площадью антенны (рисунок 1), которая характеризует способность перехватывать падающий поток мощности электромагнитной волны и преобразовывать его в мощность, выделяемую на нагрузке [3].

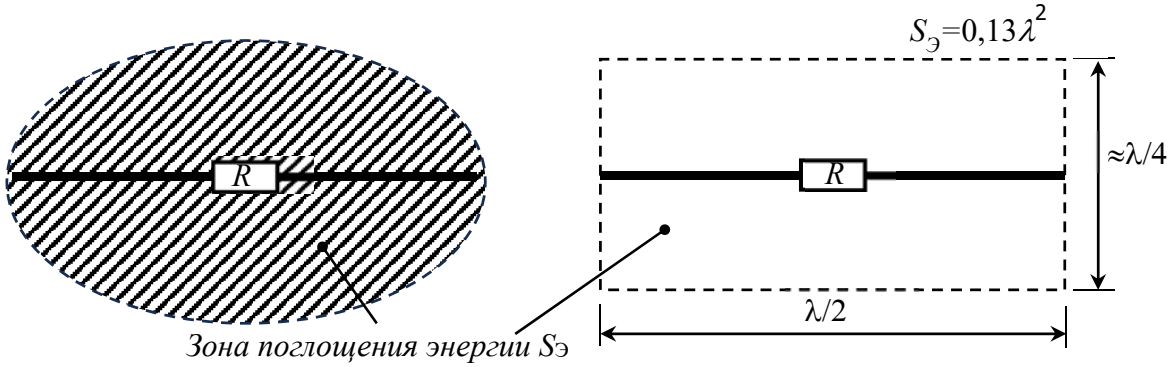


Рисунок 1. Поглощение энергии волны проволочной антенной на примере полуволнового вибратора с нагрузкой

В случае, когда поперечные размеры полости составляют единицы-десятки длин волн, ширина зоны поглощения энергии, прилегающей к стенкам полости с РПП, приблизительно пропорциональна длине волны, рисунок 2.

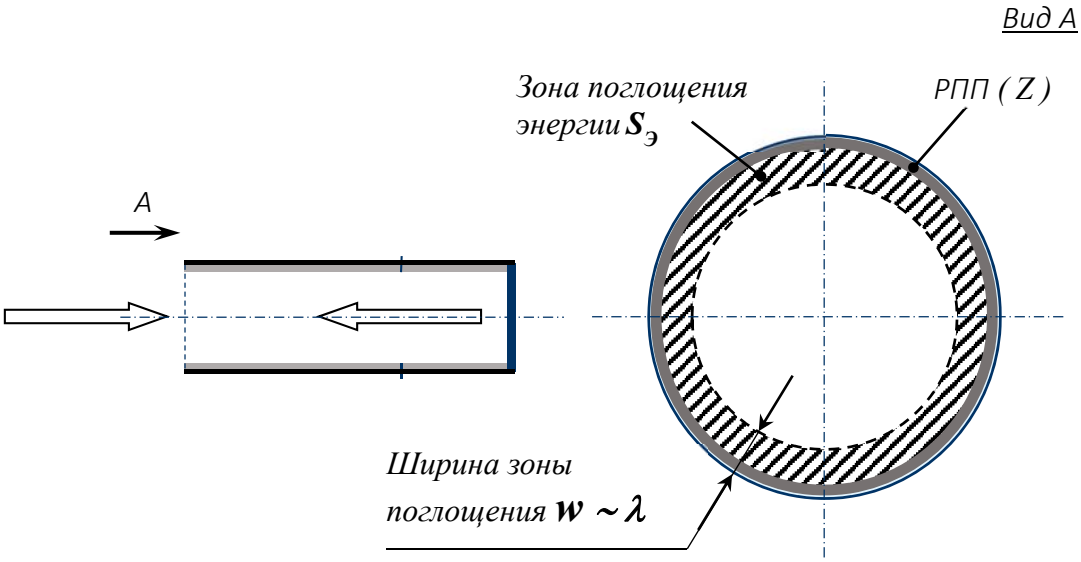


Рисунок 2. Поглощение энергии боковой поверхностью полости

Анализ показал, что следствием этого обстоятельства является повышение эффективности покрытий стенок полости при понижении частоты, что является важным для практики результатом. Уменьшение обратного рассеяния при этом возникает за счет того, что увеличение зоны поглощения энергии происходит за счет уменьшения области, в которой распространение волны происходит практически без ослабления. Учет этого эффекта позволяет снизить требования к коэффициенту отражения РПП и уменьшить его толщину и удельный вес.

В докладе рассмотрены примеры расчетов коэффициентов отражения и значений поверхностного импеданса различных покрытий, а также эффективности их применения для уменьшения обратного рассеяния от полости цилиндрической формы при размещении РПП на её внутренних стенках. Определены ориентировочные значения геометрических и электродинамических параметров перспективных материалов, достижение которых позволит ожидать высокой эффективности работы покрытий.

Литература

1. *Кисель В.Н., Кожеко А.С.* Выбор электродинамических параметров покрытия внутренней поверхности металлической полости // Современная электродинамика. – 2023. – N1(3). – С. 17-29.
2. *Кисель В.Н., Маслов А.С.* Способ оптимизации параметров покрытия внутренней поверхности металлической полости // Современная электродинамика. – 2025. – Т. 3, № 2(16). – С. 21-29.
3. *Гошин Г.Г.* Устройства СВЧ и антенны. Часть 2. Антенны: Учебное пособие. – Томск: Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, 2012. – 145 с.

Об одном методе определения распределения эритроцитов по размерам

On a Method for Determining the Size Distribution of Erythrocytes

Киямова К.С., Головина С.Г.

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, Москва, РФ.

kkiyamova@yandex.ru, sgolovina-msu@mail.ru

Аннотация. Предложен метод восстановления распределения эритроцитов по размерам на основе опорной матрицы, построенной по экспериментальным данным лазерной дифрактометрии.

Описание работы

В работе рассматривается обратная задача дифрактометрии, которая заключается в нахождении распределения радиусов эритроцитов по интенсивности света дифракционной картины, рассеянного на этом ансамбле эритроцитов. Предполагается, что длина волны λ на порядок меньше радиусов эритроцитов.

Искомое распределение радиусов эритроцитов связано с интенсивностью рассеянного света интегральным уравнением Фредгольма первого рода:

$$\int_0^{+\infty} I_0(r,\theta)\omega(r)dr = I(\theta), \qquad (1)$$

где $\omega(r)$ — распределение радиусов клеток, θ — угол рассеяния, $I(\theta)$ — интенсивность света, рассеянного ансамблем клеток, $I_0(r, \theta)$ — интенсивность света, рассеянного одной клеткой радиуса r.

Ядро уравнения (1) исследовано на основе теории Ми и приближения аномальной дифракции [1]. Дискретизированная задача решена методом регуляризации Тихонова [2]. На модельных данных получены удовлетворительные результаты, однако на экспериментальных данных приближение аномальной дифракции оказалось недостаточно точным.

Предлагается решать поставленную задачу, построив опорную матрицу по дифракционным картинам и соответствующим распределениям размеров клеток, полученными методом микроскопии. На рисунке 1 изображено восстановленное распределение эритроцитов по размерам с использованием опорной матрицы и метода регуляризации Тихонова.

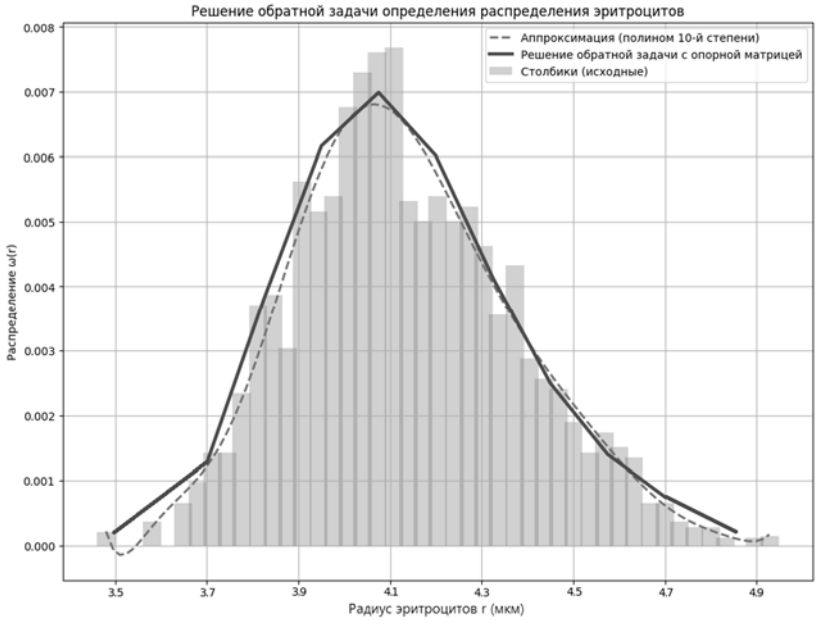


Рисунок 1. Пример восстановления распределения эритроцитов по размерам

Литература

1. *Ван де Хюлст Г.* Рассеяние света малыми частицами — М.: Издательство иностранной литературы, 1961. — 537 с.
2. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1986. — 288 с.

Решение задачи дифракции электромагнитной волны на системе диэлектрических цилиндров с помощью метода граничных интегральных уравнений

Solving the Pproblem of ElectromagneticWave Diffraction by a System of Dielectric Cylinders Using the Boundary Integral Equation Method

***Куликов М. А.*[1] *Третьякова Р.М.*[1,2]*, Ненашев А.С.*[2]**

1) Филиал Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова в городе Сарове, кафедра математики, Саров, РФ; 2) Институт вычислительной математики им. Г. И. Марчука РАН, Москва, РФ.

kulikov-m_a@mail.ru, r.tretyakova@inm.ras.ru, nenashev_as@mail.ru

Аннотация. В работе рассматривается решение задачи дифракции электромагнитной волны на системе диэлектрических цилиндров методом граничных интегральных уравнений. Полученные результаты могут быть применены для моделирования двумерных фотонных кристаллов.

Введение

Фотонные кристаллы представляют собой среды, в которых диэлектрическая проницаемость изменяется в пространстве на масштабе, сравнимом с длиной электромагнитной волны. Одним из свойств таких структур является наличие фотонных запрещённых зон — диапазонов частот, для которых распространение волн в заданных направлениях существенно подавляется [1].

В данной работе рассматривается численное моделирование двумерного фотонного кристалла методом граничных интегральных уравнений.

Описание работы

Постановка задачи. Рассматривается система из M бесконечных диэлектрических цилиндров, параллельных оси Ox_3. В плоскости поперечного сечения область, занятая i-м цилиндром, обозначается через D_i, а его граница — через ∂D_i, $i = 1, \dots, M$. Цилиндры считаются непересекающимися. Область вне цилиндров обозначим через D_0.

Во внешней области относительная диэлектрическая проницаемость равна ε_1, а внутри цилиндров — ε_2, среды считаем немагнитными. Соответствующие волновые числа равны k_1 и k_2. Рассматривается плоская монохроматическая электромагнитная волна с поляризацией, при которой вектор электрического поля направлен вдоль образующих цилиндров:

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_3 u(x_1, x_2), \qquad \mathbf{e}_3 = (0,0,1)^T \tag{1}$$

поэтому задача сводится к скалярным уравнениям Гельмгольца. Полное поле во внешней области представляется в виде $u = u^{inc} + u^{sc}$, где рассеянное поле u^{sc} удовлетворяет уравнению

$$\Delta u^{sc} + k_1^2 u^{sc} = 0, \qquad \mathbf{x} \in D_0 \tag{2}$$

а внутри каждого цилиндра

$$\Delta u_i + k_2^2 u_i = 0, \qquad \mathbf{x} \in D_i \tag{3}$$

Падающая плоская волна задаётся выражением

$$u^{inc}(\mathbf{x}) = e^{ik_1 \mathbf{d}\cdot\mathbf{x}}, \tag{4}$$

где $\mathbf{d} = (d_1, d_2)$ — единичный вектор направления распространения. Рассеянное поле удовлетворяет условию излучения Зоммерфельда

$$\lim_{r\to\infty} \sqrt{r}\left(\frac{\partial u^{sc}}{\partial r} - ik_1 u^{sc}\right) = 0 \tag{5}$$

На каждой границе ∂D_i выполняются интерфейсные условия

$$u^{inc} + u^{sc} = u_i, \qquad \frac{\partial u^{inc}}{\partial n_i} + \frac{\partial u^{sc}}{\partial n_i} = \frac{\partial u_i}{\partial n_i} \tag{6}$$

Интегральные уравнения. На границах ∂D_j вводятся плотности φ_j, ψ_j. Представляя решение в виде суммы потенциалов простого S_s^j и двойного K_s^j слоёв:

$$u^{sc}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{M} \left((S_1^j \varphi_j)(\mathbf{x}) + (K_1^j \psi_j)(\mathbf{x}) \right), \qquad \mathbf{x} \in D_0 \tag{8}$$

$$u_i(\mathbf{x}) = (S_2^i \varphi_i)(\mathbf{x}) + (K_2^i \psi_i)(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{x} \in D_i \tag{9}$$

подставляем его в интерфейсные условия на цилиндре с номером i, используя формулы скачка потенциала двойного слоя и нормальной производной потенциала простого слоя [2], получаем блоки системы. Диагональный блок имеет вид

$$A_{ii} = \begin{pmatrix} S_1^{ii} - S_2^{ii} & K_1^{ii} - K_2^{ii} + I \\ K_1^{*ii} - K_2^{*ii} - I & T_1^{ii} - T_2^{ii} \end{pmatrix} \tag{10}$$

а блок взаимодействия двух различных цилиндров равен

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} S_1^{ij} & K_1^{ij} \\ K_1^{*ij} & T_1^{ij} \end{pmatrix}, \qquad i \neq j \tag{11}$$

Здесь S_s^{ij}, K_s^{ij}, K_s^{*ij} и T_s^{ij} — операторы простого, двойного слоя, и их нормальных производных; I — единичный оператор; $s = 1,2$ — среда, j — номер окружности интегрирования, i — цилиндр, на котором записывается интерфейсное условие.

Численное решение. Каждая граница цилиндра разбивается на N дуг, точки коллокации выбираются в их серединах, а плотности аппроксимируются кусочно-постоянными функциями [3].

После дискретизации получается система линейных уравнений $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Размер системы — 2MN × 2MN. Диагональные элементы вычисляются с помощью аналитического интегрирования асимптотик ядер; недиагональные — с помощью формулы прямоугольников. Полученная матрица имеет блочно-теплицевую структуру, где блоки описывают взаимодействие двух столбцов. Система решается с помощью GMRES с использованием алгоритма быстрого умножения блочно-теплицевых матриц на основе быстрых преобразований Фурье [4].

Расчёты, представленные ниже, проводились для систем воздушных цилиндров ($\varepsilon_2 = 1$) в кремнии ($\varepsilon_1 = 12.1$) с дефектным каналом, образованным удалением одного ряда цилиндров. Длина падающей волны в вакууме равна 1,55 мкм, радиус цилиндров — 0,1 мкм, период решётки — 0,28 мкм.

Сходимость оценивалась путём сравнения с решением, полученным методом многократного рассеяния [5]. На рисунке 1 приведена L_2-норма абсолютной ошибки, вычисленная по значениям двух решений в узлах сетки визуализации поля, для системы из четырёх цилиндров. С ростом числа дуг, на которые разбиваются окружности, L_2-норма ошибки спадает.

Результат расчёта волновода, образованного дефектом в решётке воздушных цилиндров в кремнии, приведен на рисунке 2. Поле локализуется в центральной области, свободной от цилиндров, и распространяется вдоль оси x_1, тогда как в окружающей периодической структуре его амплитуда уменьшается.

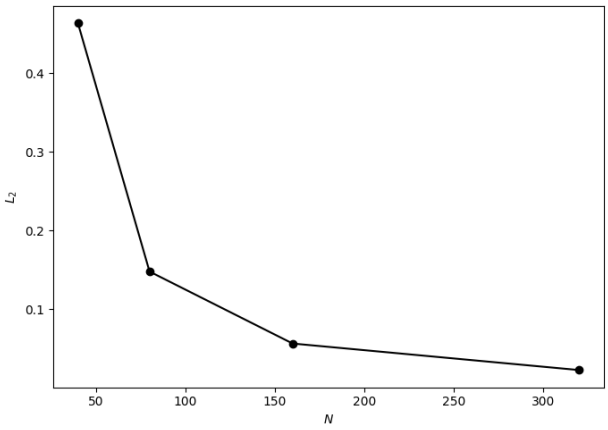


Рисунок 1 — L_2-норма абсолютной ошибки в зависимости от N

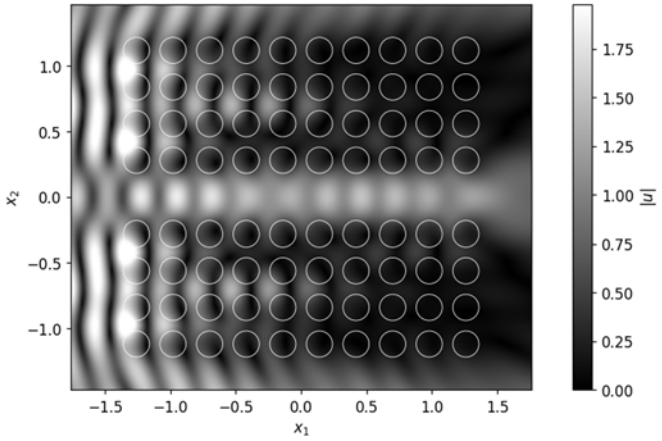


Рисунок 2 — Распределение модуля полного поля |u| в системе цилиндров

Заключение

В работе построена численная модель дифракции электромагнитной волны на конечной системе диэлектрических цилиндров методом граничных интегральных уравнений. Для решения полученной системы с блочно-теплицевой структурой применен метод GMRES и быстрое преобразование Фурье. Сравнение с результатами теории многократного рассеяния [5] показывает уменьшение L_2-нормы абсолютной ошибки. Распределение модуля полного поля демонстрирует его локализацию в дефектном канале фотонного кристалла.

Литература

1. *Joannopoulos J. D., Johnson S. G., Winn J. N., Meade R. D.* Photonic Crystals: Molding the Flow of Light. 2nd ed. Princeton: Princeton University Press, 2008. 304 p.
2. *Колтон Д., Кресс Р.* Методы интегральных уравнений в теории рассеяния / пер. с англ. М.: Мир, 1987. 311 с.
3. *Сетуха А. В.* Численные методы в интегральных уравнениях и их приложения. М.: Аргамак-Медиа, 2014. 256 с.
4. *Тыртышников Е. Е.* Методы численного анализа: учебное пособие. М.: Академия, 2007. 320 с.
5. *Felbacq D., Tayeb G., Maystre D.* Scattering by a random set of parallel cylinders // Journal of the Optical Society of America A. 1994. Vol. 11, No. 9. P. 2526–2538. DOI: 10.1364/JOSAA.11.002526.

Применение метода объемных интегральных уравнений к расчету задач рассеяния и характеристик антенн при наличии диэлектрических структур малой толщины

Application of the Volume Integral Equation Method to Scattering Problems and Antenna Characteristics Modeling with Thin Dielectric Structures.

***Масс И.А.*[1,2], *Сетуха А.В.*[1,2],**

1) Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Вычислительной математики и кибернетики, Москва, РФ; 2) Институт вычислительной математики Г.И. Марчука РАН, Москва, РФ.

massia@my.msu.ru, setuhaav@rambler.ru

Аннотация. Рассматривается расчет характеристик антенн и антенных отсеков с идеально проводящими и тонкими диэлектрическими элементами. Задача излучения сводится к системе объемных и поверхностных интегральных уравнений, решаемых методом Галёркина с функциями RWG и призматической сеткой в диэлектрике. Матрица преобразуется в мозаично-скелетонный формат, линейная система решается итеративно. Подход позволяет рассчитывать характеристики рассеяния (поля, ЭПР, диаграммы направленности) и антенн (сопротивление, КСВ); для нескольких антенн используется формула Вудбери. Приведены результаты тестирования для задачи рассеяния на металлической сфере с тонким слоем диэлектрика, антенного отсека и патч-антенны.

Введение

Рассматривается задача расчета характеристик антенн и антенных отсеков, состоящих из идеально проводящих и диэлектрических элементов. Здесь можно выделить важные классы задач, в которых диэлектрические элементы представляют собой слои малой толщины. Такими элементами могут являться печатные платы, содержащие диэлектрическую подложку, корпуса антенн из радиопрозрачных материалов.

Описание работы

Задача излучения антенн рассматривается как задача рассеяния заданного первичного поля на элементах конструкции антенны и окружения. Тогда с математической точки зрения решается задача рассеяния монохроматической волны на поверхности идеального проводника Σ, с учетом диэлектрика, занимающего область Ω в виде слоя малой толщины. Требуется найти полное электрическое поле $\boldsymbol{E}_{tot}$, которое представляется в виде суммы внешнего поля $\boldsymbol{E}_{inc}$ и вторичного поля $\boldsymbol{E}$.

Для решения данной задачи используется следующее известное интегральное представление для электрического поля через объемные и поверхностные интегралы:

$$\boldsymbol{E}_{tot}=\boldsymbol{E}_{inc}+\boldsymbol{K}(\Omega,(\varepsilon'-1)\boldsymbol{E}_{tot})+\frac{i}{\omega\varepsilon}\boldsymbol{K}(\Sigma,\boldsymbol{j}),$$

где

$$\boldsymbol{K}(S,\boldsymbol{j})(x)=rot_x rot_x \int_S F(|(x-y)|)\boldsymbol{j}(y)dy,\ F(r)=\frac{e^{ikr}}{4\pi r},$$

$\boldsymbol{j}(y), y\in\Sigma$ – неизвестные поверхностные токи, Ω – область, занятая диэлектриком, Σ – поверхность проводника, ε' – относительная диэлектрическая проницаемость диэлектрика, ε – диэлектрическая проницаемость внешней среды, ω – угловая частота. Введя неизвестные объемные токи в области Ω как $\boldsymbol{g}=\boldsymbol{E}_{tot}$ и используя граничное условие на идеально проводящей поверхности $\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}_{tot}=0, \boldsymbol{x}\in\Sigma$, задачу можно свести к системе интегральных уравнений:

$$\begin{cases} \boldsymbol{g}=\boldsymbol{E}_{inc}+\boldsymbol{K}(\Omega,(\varepsilon'-1)\boldsymbol{g})+\dfrac{i}{\omega\varepsilon}\boldsymbol{K}(\Sigma,\boldsymbol{j}),\boldsymbol{x}\in\Omega, \\ \boldsymbol{n}\times\left(\boldsymbol{E}_{inc}+\boldsymbol{K}(\Omega,(\varepsilon'-1)\boldsymbol{g})+\dfrac{i}{\omega\varepsilon}\boldsymbol{K}(\Sigma,\boldsymbol{j})\right)=0,\boldsymbol{x}\in\Sigma. \end{cases}$$

Для решения записанных интегральных уравнений используется метод Галёркина. Для аппроксимации поверхностных токов на поверхности Σ используются классические функции RWG [1]. В тонком объемном слое предлагается ввести сетку из призм, ориентация которых определяется формой базовой поверхности, и на каждой из них ввести локальных базис из константных векторных функций.

Полученная матрица преобразуется в мозаично-скелетонный формат с помощью библиотеки MSk [4], после чего линейная система решается итеративно.

При помощи модели сосредоточенного порта, данный подход позволяет численно получать характеристики антенн (сопротивление, КСВ, диаграмму направленности). При наличии n антенн расчет их сопротивлений и взаимного влияния сводится к решению n линейных систем, матрицы которых отличаются на матрицу малого ранга. Поэтому задачу можно свести к одной линейной системе с многими правыми частями и использованию формулы Вудбери.

Заключение

Осуществлена программная реализация описанного метода. Метод был протестирован в задаче расчете рассеяния на идеальной проводящей сфере с тонким диэлектрическим покрытием, а также в задаче моделирования работы антенного отсека, содержащего одну или две антенны под радиопрозрачным корпусом.

Литература

1. Gibson Walton C. The method of moments in electromagnetics. CRC Press. 2021.
2. Цупак А. А. Сходимость метода Галеркина в задаче дифракции электромагнитной волны на системе тел и неплоских экранов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2023. – № 4 (47). – С. 14-25.
3. Smirnov Yu. G., Tsupak A. A. Investigation Of Electromagnetic Wave Diffraction From An Inhomogeneous Partially Shielded Solid // Applicable Analysis. – 2018. – Vol. 97, № 11. – P. 1881–1895. – DOI 10.1080/00036811.2017.1343467.
4. *Valiakhmetov B. and Tyrtyshnikov E.* MSk – the package for a dense matrix approximation in the mosaic-skeleton format. Russian Supercomputing Days : Proceedings of the International Conference 2023, pp. 20–27.
5. I. A. Mass , A. V. Setukha , and R. M. Tretiakova. Combination of Methods of Volume and Surface Integral Equations in Problems of Electromagnetic Scattering by Small Thickness Structures. Lobachevskii Journal of Mathematics, 2024, Vol. 45, No. 7, pp. 3107–3120.
6. I. A. Mass , A. V. Setukha. Method of Integral Equations in Problems of Scattering by Combinations of Thin Dielectrics and Ideal Conductors. Lobachevskii Journal of Mathematics, 2025, vol 46, No 10, pp. 5023-5035.

Анализ искажающего влияния трансионосферных радиолиний при приеме OFDM сигналов

Analysis of the OFDM Signal Distortions for Propagation over Transionospheric Radiolines

Назаров Л.Е.[1], Батанов В.В.[2]

1)Фрязинский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН 2) АО «Информационные спутниковые системы имени академика М.Ф. Решетнёва»

levnaz2018@mail.ru, bvitaly@inbox.ru

Аннотация. Приведены результаты анализа помехоустойчивости передачи информации с использованием сигналов с ортогональным частотным мультиплексированием (OFDM сигналы - orthogonal frequency-division multiplexing) на основе парциальных сигналов с многофазовой манипуляцией с учетом их искажений при распространении по трансионосферным радиолиниям. Получены численные оценки энергетических потерь при приеме данных сигналов с использованием методов искажений по отношению к распространению в свободном пространстве.

Введение

Класс цифровых сигналов с ортогональным частотным мультиплексированием (OFDM сигналы - orthogonal frequency-division multiplexing) интенсивно используется в приложениях [1], включая спутниковые информационные системы [2]. Этот класс сигналов подвержен искажающему влиянию физических сред распространения радиолиний, в частности, из-за дисперсионных свойств околоземной ионосферы (трансионосферные радиолинии). Суть искажений – возникновение случайных вариаций комплексных огибающих сигналов, обусловливающих возникновение межсимвольных и межканальных интерференционных помех в дополнение к тепловым аддитивным канальным шумам [3]. Это приводит к деградации вероятностных характеристик и к энергетическим потерям ΔE при приеме сигналов по отношению к распространению в свободном пространстве.

Общие методики описаний искажений за счет влияния околоземной ионосферы приведены в работе [3]. Актуальной является задача обобщения этих результатов исследований для рассматриваемого класса OFDM сигналов.

Постановка задачи

OFDM сигналы $s(t)$ представляются суммой N парциальных гармонических сигналов на интервале длительностью T с комплексной амплитудой $\dot{\alpha}_m$ [1]

$$s(t) = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{m=0}^{N-1}\dot{\alpha}_m \cdot \exp(j2\pi(f_m + f_0)t)\right).$$

Ортогональность в усиленном смысле парциальных сигналов определяется заданием дискретных частот $f_m = m/T$; f_0 – несущая частота; значения $\dot{\alpha}_m = |\dot{\alpha}_m|\exp(j\varphi_m)$ (амплитуда $|\dot{\alpha}_m|$ и фаза φ_m) определяются сигнальным созвездием объемом $M = 2^k$, отсчеты которого задаются последовательностью k передаваемых двоичных символов [1].

Каждая спектральная компонента цифрового сигнала $s(t)$ при распространении по трансионосферным радиолиниям с свойством частотной дисперсии приобретает случайные фазовые и амплитудные вариации. Это обусловливает нарушение ортогональности парциальных сигналов и возникновение искажений комплексных огибающих сигналов на входе приемного устройства по отношению к исходной комплексной огибающей $\dot{\alpha}_m$, что порождает интерференционные помехи. Эти помехи приводят к деградации вероятностных характеристик приема и к энергетическим потерям ΔE по отношению к распространению в свободном пространстве с аддитивным белым гауссовским шумом (АБГШ).

Метод описаний сигналов с искажениями $\hat{s}(t)$ при их распространении основан на использовании комплексного коэффициента передачи трансионосферной радиолинии $\dot{H}(z,f)$, действие которой эквивалентно линейному фильтру [3]

$$\hat{s}(z,t) = \mathrm{Re}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(f)\dot{H}(z,f)\exp(j2\pi ft)df \right),$$

здесь $\dot{S}(f)$ – спектр исходного сигнала $s(t)$,

$$\dot{H}(f,z) = \exp\left(j2\pi f \int_{AB} \frac{dx}{c_{\phi}(f,x)} \right),$$

$c_{\phi}(f,x) = \frac{c}{n(f,x)}$ – фазовая скорость; $n(f,x) = \sqrt{\varepsilon(f,x)}$ – коэффициент преломления.

Околоземная ионосфера характеризуется высотным профилем электронной плотности $N_{э}(z)$ (эл/см^3) на высоте z и диэлектрической проницаемостью $\varepsilon(f,z)$ [4]. Для частот, используемых в спутниковых информационных системах (например, для $f =$ 400 МГц и более), параметр $\varepsilon(f,z)$ задается соотношением $\varepsilon(f,z) = 1 - f_p^2(z)/f^2$, $f_p(z) = \sqrt{\frac{N_{э}(z)e^2}{(2\pi)^2\varepsilon_0 m}}$ – собственная частота ионосферы (кГц); $e = 1.6 \cdot 10^{-19}$ (Кл), $m = 9.106 \cdot 10^{-31}$ (кг) – заряд и масса электрона; $\varepsilon_0 = 10^{-9}/(36\pi)$ – диэлектрическая проницаемость свободного пространства [5].

Результаты моделирования. На рисунке 1 приведены вероятности ошибки на бит $P_{б}$ приема OFDM сигналов на основе парциальных сигналов с фазовой манипуляцией ФМ-16. По оси абсцисс даны значения $E_{б}/N_0$, $E_{б}$ – энергия на бит, N_0 – спектральная плотность шума АБГШ. По оси ординат даны значения $P_{б}$ приема сигналов с искажениями $\hat{s}(t)$ за счет неортогональности парциальных сигналов в дополнение к аддитивному шуму АБГШ. Варьируемые параметры: зенитный угол θ_A, значения сигнал/шум $E_{б}/N_0$, частотная полоса OFDM сигналов (количество парциальных сигналов N).

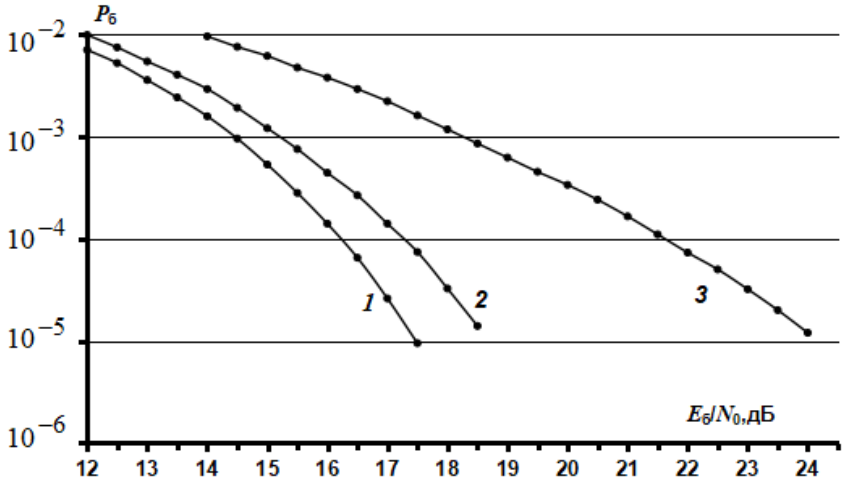


Рисунок 1. Вероятности приема OFDM сигналов: 1 – прием для АБГШ; 2 – сигналы с искажениями ($N = 16, \theta_A = 0$); 3 - сигналы с искажениями ($N = 32, \theta_A = 0$).

Кривая *1* соответствует теоретической зависимости вероятности $P_{б}$ от $E_{б}/N_0$ [1]. Кривые *2, 3* получены путем моделирования алгоритма приема сигналов и соответствуют вероятностям $P_{б}$ для OFDM сигналов с искажениями при распространении, параметры $N = 16, \theta_A = 0$ (частотная полоса 5 МГц) и $N = 32, \theta_A = 0$ (частотная полоса 10 МГц) – энергетические потери ΔE достигают 1.0 дБ и 6.5 дБ соответственно для вероятности $P_{б} = 10^{-5}$. Следует отметить, что для параметров $N = 32, \theta_A = 60^0$ (частотная полоса $\Delta F = 21$ МГц) наблюдается выравнивание

вероятностной характеристики из-за преобладающего искажающего влияния радиолинии $P_б = 0.011$, т.е. увеличение значений $E_б/N_0$ не приводит к уменьшению вероятности ошибки $P_б$. Дискретные частоты OFDM сигналов f_m кратны $1/T$, при моделировании $T = 3$ мкс (частотный дискрет 333333.3(3) Гц, частотная полоса $\Delta F = N/T$).

Заключение

Приведены результаты анализа вероятностей ошибки и энергетических потерь при приеме OFDM сигналов с учетом искажений при распространении по трансионосферным радиолиниям за счет возникновения мультипликативных помех в дополнение к аддитивному канальному шуму и неортогональности парциальных сигналов. Путем моделирования алгоритма приема показано уменьшение помехоустойчивости передачи информации при увеличении частотной эффективности OFDM сигналов, а также при увеличении частотного диапазона. Полученные результаты являются важными при расчете энергетических бюджетов спутниковых информационных систем.

Работа выполнена за счет бюджетного финансирования в рамках государственного задания ФИРЭ им. В.А. Котельникова РАН.

Литература

1. *Бакулин М.Г., Крейнделин В.Б., Шлома А.М., Шумов А.П.* Технология OFDM. М.: Горячая линия - Телеком, 2016. 352 с.
2. *Shulze Y., Luders C.* Theory and Applications of OFDM and CDMA. USA, Boston, Artech Hause, 2004. 272 p.
3. *Назаров Л. Е., Батанов В. В., Кутуза Б. Г.* Влияние трансионосферных линий передачи на вероятностные характеристики при приеме сигналов с фазовой манипуляцией. // Радиотехника и электроника. 2023. Т. 68. № 1 Стр. 60–68.
4. *Гинзбург В.Л.* Распространение электромагнитных волн в плазме. М.: Наука. 1967.
5. *Яковлев О.И., Якубов В.П., Урядов В.П., Павельев А.Г.* Распространение радиоволн. М.: ЛЕНАНД, 2009. 496 с.

Энергетические характеристики электромагнитного поля в диэлектрических телах

Energy Characteristics of the Electromagnetic Field in Dielectric Bodies

Моряков С. Н., Плещинский Н. Б., Щипцов Р. А.

Казанский федеральный университет, Институт вычислительной математики и информационных технологий, Казань, РФ.

rebbit123456@gmail.com, pnb@kpfu.ru, shchiptsovra@gmail.com

Аннотация. Исследованы энергетические характеристики электромагнитного поля, возникающего при дифракции волны от внешнего источника в плоскопараллельном слое и в цилиндрическом диэлектрическом теле. Использован метод объемных интегральных уравнений.

Введение

Если на диэлектрическое тело набегает электромагнитная волна, то вне и внутри тела возникает дифрагированное электромагнитное поле. Распределение энергии поля характеризуют три величины: плотность потока энергии, плотность энергии и плотность мощности потерь. При гармонической зависимости компонент поля от времени ($e^{-i\omega t}$) комплексные энергетические характеристики [1]

$$П = \frac{1}{2}[E, H^*], w = i\omega\varepsilon_0\varepsilon\frac{1}{2}EE^* - i\omega\mu_0\mu\frac{1}{2}HH^*, p = \frac{1}{2}J^*E, \quad (1)$$

здесь * - знак комплексного сопряжения.

Эффективным методом решения задач дифракции на диэлектрическом теле V является метод объемных интегральных уравнений [2]. Основная идея метода состоит в том, что полное поле $u(r)$ представляется в виде суммы поля $u^0(r)$, порожденного источниками вне V, и рассеянного поля $u^s(r)$. В ядре интегрального представления рассеянного поля содержится фундаментальное решение $G(r',r)$ уравнения Гельмгольца (или уравнений Максвелла). Интегральное уравнение по области V имеет вид

$$u(r) = u^0(r) + \int_V [k_0^2 - k^2(r')]G(r',r)u(r')dr', \quad (2)$$

где k_0 – волновое число однородной внешней среды, а $k(r)$ – волновое число неоднородной среды внутри V.

Две задачи дифракции

Рассмотрим две задачи: о прохождении одномерной электромагнитной волны через плоскопараллельный слой $a \le x \le b$ и о дифракции плоской электромагнитной волны на бесконечном диэлектрическом цилиндре кругового сечения.

Плоский слой. В случае Н-поляризованного поля, зависящего только от координаты x, имеем $u = E_y$ и средние значения энергетических характеристик

$$\bar{\Pi} = \frac{-1}{2\omega\mu_0\mu} Im(uu'^*), \bar{w} = \frac{1}{4}\varepsilon_0\varepsilon|u|^2 + \frac{1}{4}\frac{1}{\omega^2\mu_0\mu}|u'|^2, \bar{p} = \frac{1}{2}\sigma(x)|u|^2. \quad (3)$$

Волновой процесс протекает на прямой, «тело» V представляет собой отрезок $[a,b]$. В этом случае одномерное интегральное уравнение имеет вид

$$u(x) = u^0(x) + \frac{1}{2ik_0}\int_a^b [k_0^2 - k^2(x')]e^{ik_0|x-x'|}u(x')dx', x \in [a,b], \quad (4)$$

оно сводится к интегральному уравнению Вольтерра с вырожденным ядром.

Приближенное решение уравнения (4) находится квадратурным методом. В частном случае $k(x) = k_1 = const$ приближенное решение практически совпадает с точным решением. Плотности электрической и магнитной энергии осциллируют, но за счет сдвига по фазе их сумма постоянна.

Значения $|u(x)|$ (следовательно, плотности энергии и плотности потока энергии) в слое зависят от частоты и от диэлектрической проницаемости слоя. На рис. 1 эта зависимость представлена в виде тепловой карты в случае $k(x) = k_1$.

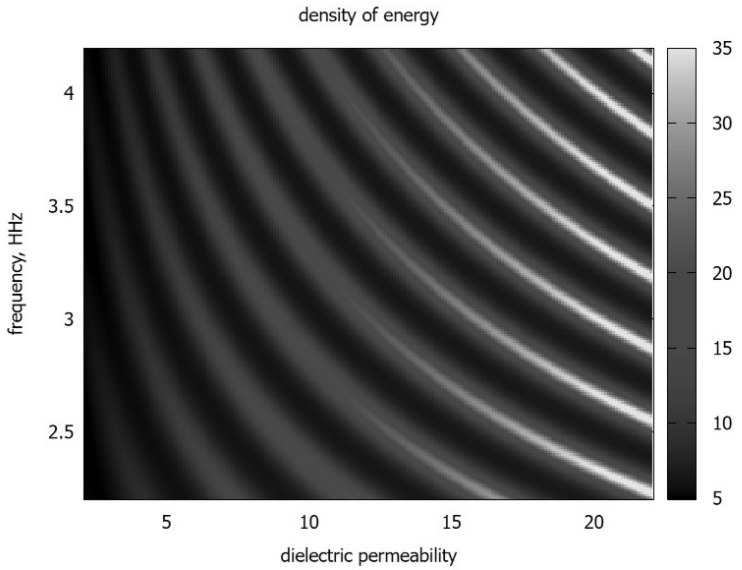


Рисунок 2. Зависимость плотности энергии от частоты и диэлектрической проницаемости

Потенциальная функция волны от внешнего источника нормирована. Толщина слоя 0.1 м, источник расположен слева на расстоянии 0.05 м от слоя, $k_0 = 50$ 1/м.

Диэлектрический цилиндр. Пусть плоская волна набегает на бесконечный диэлектрический цилиндр и поле не зависит от координаты, вдоль которой направлена ось цилиндра. В случае Н-поляризованного поля $u(x,y) = E_y(x,y)$ и двумерное «объемное» интегральное уравнение имеет вид

$$u(x,y) = u^0(x,y) - \frac{i}{4}\iint\limits_V [k_0^2 - k^2(x',y')]K(x,y,x',y')dx'dy', \tag{5}$$

$$K(x,y,x',y') = H_0^{(1)}\left(k_0\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}\right), \tag{6}$$

где $H_0^{(1)}$ – функция Ханкеля. Двумерная задача дифракция отличается от одномерной задачи тем, что даже при $k(x,y) = k_1 = const$ плотность энергии электромагнитного поля не постоянна.

При дискретизации интегрального уравнения (5) плоская область V разбивается на элементарные квадратики и интегралы по ним заменяются на средние значения подынтегральной функции в четырех угловых точках, умноженные на площадь квадратика. Система линейных алгебраических уравнений, аппроксимирующая интегральное уравнение, может быть решена итерационным методом. Средние по периоду времени энергетические характеристики поля вычисляются по формулам

$$\bar{w} = \frac{1}{4}\varepsilon_0\varepsilon|u|^2 + \frac{1}{4}\frac{1}{\omega^2\mu_0\mu}|\nabla u|^2, \bar{p} = \frac{1}{2}\sigma(r)|u|^2. \tag{7}$$

На рис. 2 показано типичное распределение значений $|u(x,y)|$ по круговому сечению однородного цилиндра. Плоская волна набегает на цилиндр сверху. При изменении частоты и диэлектрической проницаемости среды значения средней плотности энергии в каждой точке сечения ведут себя примерно так же, как в одномерном случае.

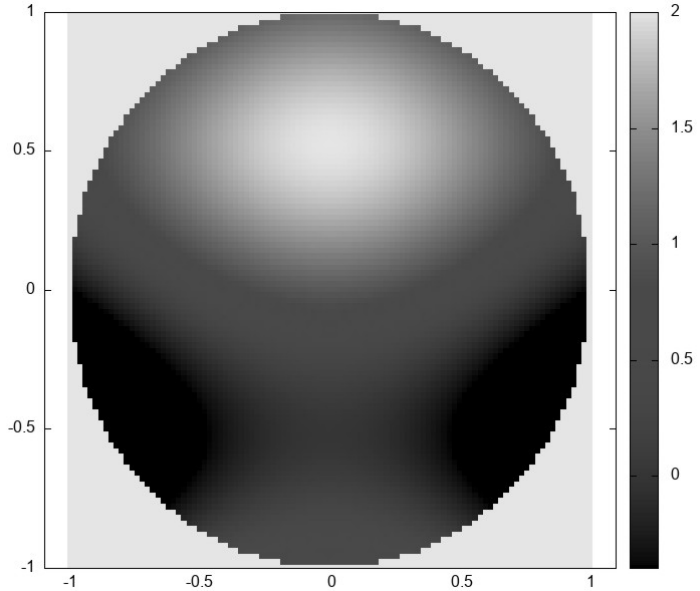


Рисунок 2. Распределение плотности энергии по сечению цилиндра

Заключение

Вычислительный эксперимент показал, что зависимости энергетических характеристик электромагнитного поля в диэлектрических телах от частоты колебаний

и от свойств среды имеют сложный нерегулярный вид, напоминающий волны, набегающие на пологий берег.

Литература

1. *Стреттон Дж. А.* Теория электромагнетизма. — М.-Л.: ОГИЗ, 1948. — 540 с.
2. *Самохин А. Б.* Объемные сингулярные интегральные уравнения электродинамики. — М.: Техносфера, 2021. — 218 с.

Решение двумерной вариационной задачи магнитостатики о форме сечения полосового магнита с фиксированной площадью, имеющего максимальную силу сцепления с прямоугольным полосовым магнитом

Solution to the Two-Dimensional Variational Problem of Magnetostatics Concerning the Cross-Sectional Shape of a Strip Magnet with a Fixed Area that has the Maximum Adhesion Ffrce with a Rectangular Strip Magnet

Поляков О.П.*, *Поляков П.А.

МГУ имени М.В. Ломоносова, физический факультет, Москва. Российская Федерация.

o_polyakov@physics.msu.ru

Аннотация. В работе найдено аналитическое решение двумерной вариационной задачи магнитостатики о форме сечения полосового магнита с фиксированной площадью, имеющего максимальную силу сцепления с прямоугольным полосовым магнитом.

Описание работы

Задача о нахождении формы поверхности полосового магнита с заданным сечением, при которой сила его магнитного взаимодействия с другим прямоугольным полосовым магнитом будет максимальна, сводится к решению вариационной двумерной задачи с заданным условием (постоянная площадь сечения). В общем случае решение таких задач приводит к численному решению двумерного интегрального уравнения с неопределенным дополнительным параметром (параметром Лагранжа), связанным с дополнительным ограничивающим условием (постоянство площади сечения) [1]. На рисунке 1 изображено сечение двух полосовых магнитов, вектор намагниченности которых $\boldsymbol{M}$ направлен вдоль оси Y. Сечение нижнего магнита имеет прямоугольную форму со сторонами $2a$ и b. Сечение верхнего полосового магнита ограничено некоторой произвольной кривой $f(x)$ и плоским основанием шириной $2a$.

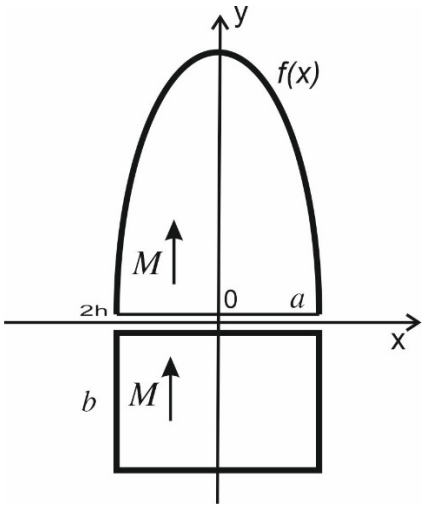


Рисунок 3. Сечение двух полосовых магнитов

Математически задача сводится к нахождению такой функции $f(x)$, при которой сила магнитного взаимодействия между магнитами будет максимальна при заданной площади сечения

$$S = \int_{-a}^{+a} f(x)dx = const \tag{1}$$

Используя основные уравнения магнитостатики [2], [3], можно получить следующее выражение для вертикальной составляющей силы магнитного взаимодействия:

$$F_y\{f(x)\} = \\ = 4\pi a M^2 - \\ - 2M^2 \int_{-a}^{+a} Mdx \int_{-a}^{+a} 2Mdx' \left(\frac{f(x') + b}{(x - x')^2 + (f(x') + b)^2} - \frac{f(x')}{(x - x')^2 + \left(f(x')\right)^2} \right). \tag{2}$$

Сила взаимодействия (2) является функционалом функции $f(x)$. Для того, чтобы найти функцию $f(x)$, при которой сила (2) при условии (1) имеет максимальное значение, требуется решить вариационную задачу на нахождение максимума функционала

$$F_y\{f(x)\} + \lambda \int_{-a}^{+a} f(x)dx = \text{max}, \tag{3}$$

где λ – множитель Лагранжа. Решение вариационной задачи (3) приводит к следующему уравнению Эйлера для функции $f(x)$

$$\frac{1-u}{\bar{f}^2 + (1-u)^2} - \frac{1-u}{\left(\bar{f} + \beta\right)^2 + (1-u)^2} + \frac{1+u}{\bar{f}^2 + (1+u)^2} - \frac{1+u}{\left(\bar{f} + \beta\right)^2 + (1+u)^2} + \\ + \alpha = 0, \tag{4}$$

где

$$\bar{f} = \frac{f}{a}, u = \frac{x}{a}, \beta = \frac{b}{a}, \alpha = \frac{\lambda a}{2M^2}. \tag{5}$$

Уравнение (4) сводится к кубическому уравнению для $\bar{f}^2$ и, следовательно, имеет аналитическое решение.

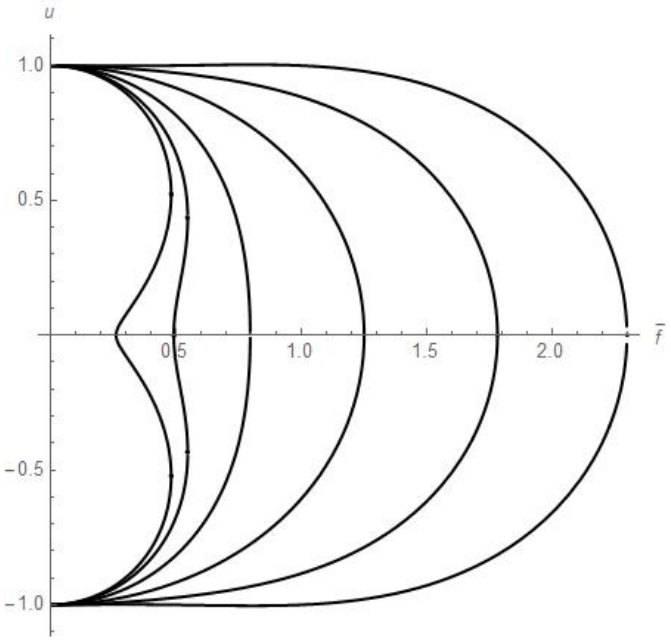


Рисунок 2. Зависимость функции $\bar{f}$ от переменной u при β=1

На рисунке 2 представлена зависимость функции $\bar{f}$ от переменной u при β=1 при следующих значениях параметра α=-1,1; -0,99; -0,75; -0,45; -0,25; -0,15, соответственно, кривые слева направо.

Литература

1. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.:Наука, 1965. 279 с.
2. Стрэттон Дж. Теория электромагнетизма. М.–Л.:ГИТТЛ, 1948. 539 с.
3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. Теоретическая физика. Т.8. М.: Наука, 1982. 620 с.

Влияние временных и пространственных масштабов на моделирование плотной плазмы псевдо потенциаламы

Influence of Temporal and Spatial scales on Pseudopotential Dense-Plasma Modeling

***Сакан Н. М.*[1], Сречкович В.[1], Симич З.[2]**

1) Институт физики в Белграде, Национальный институт Республики Сербий, Белградский университет, Прегревица 118, 11080 Белград, Сербия 2) Астрономическая обсерватория, Волгина 7, 11060 Белград, Сербия

Аннотация. Оптический и транспортный отзив плотной плазмы определяется флуктуирующим локальным электрическим полем (микрополем), источником которого служит и эффективный потенциал тяжёлой частицы. Мы строим этот потенциал из первопринципных псевдопотенциалов: канальные потенциалы с разрешением по орбитальному моменту восстанавливаются из данных UPF/PAW, смешиваются с больцмановскими весами заселения и экранируются собственным валентным хартриевским потенциалом; равновесие Саха со снижением потенциала ионизации определяет состав плазмы, а усреднение по плотности числа частиц даёт единый эффективный рассеиватель. Построение оправдывается и ограничивается разделением временных и пространственных масштабов: в пространстве $l_B \ll a_0 \lesssim a_i < \lambda_D$ заключает зависящую от сорта частицы физику в одном атоме; во времени $\tau_{pe} \ll \tau_{pi}$ сворачивает электронный газ в статическое экранирование и замораживает ионы в решётку. Переключатель электронной статистики (Максвелла-Больцмана, Ферми-Дирака, Томаса-Ферми) существенен во всех случаях – в особенности для звёздных профилей, где $\theta \simeq 2 - 39$ исключает единственный фиксированный выбор.

Введение

Электродинамический отклик тёплой или горячей плотной плазмы - непрозрачность, проводимость, уширение спектральных линий - выражается через микрополе, флуктуирующее локальное электрическое поле мгновенной конфигурации ионов и электронов [1] – [3]. Его источником служит эффективный потенциал тяжёлой частицы, создаваемый окружающими ионами и экранирующими электронами. При высокой плотности возмущающих частиц мультипольное разложение ион-ионного взаимодействия нарушается, и требуется полный ионный потенциал. Задачу ограничивают два крайних подхода: полная квантовая молекулярная динамика самосогласована, но слишком затратна для масштабных расчетов по (T, n_e, X), тогда как обрезанный кулоновский потенциал дёшев, но лишён зависимости от сорта частицы и разрешения по l. Наша ниша - зависящий от сорта частицы, с разрешением по l и от температуры потенциал из первопринципных данных PAW/UPF при затратах, линейных по числу элементов и точек (T, n_e) [4]. В работе собраны временные и пространственные масштабы модели и показано, как их упорядочение одновременно оправдывает статическую одноатомную редукцию и очерчивает границы её применимости.

Пространственные масштабы

Характерные длины – боровский радиус a_0 (остов), дебаевская длина λ_D (экранирование) и радиус ионной сферы a_i (структура) - разбиваются на три режима. В солнечных точках они удовлетворяют

$$l_B \ll a_0 \lesssim a_i < \lambda_D, \tag{1}$$

где ландауэвская длина $l_B = e^2/k_BT$ - расстояние, на котором кулоновская энергия равна тепловой. Поскольку $l_B \ll a_0$, короткодействующая, зависящая от сорта частицы физика целиком заключена в одном атоме; поскольку λ_D и a_i превосходят a_0, окружение видит лишь дальний хвост, а многочастичная часть входит только через усреднение по сортам (Саха) и сумму по соседям (решётка).

Временные масштабы

Лестница характерных времён имеет вид

$$\underbrace{a_0/c}_{0.18\text{ас}} \ll \underbrace{t_0}_{24\text{ас}} \ll \underbrace{\tau_{pe}}_{0.01-1.6\text{ фс}} \ll \underbrace{\tau_{pi}}_{\approx 43\tau_{pe}}, \tag{2}$$

где t_0 – атомная единица времени, а τ_{pe}, τ_{pi} – периоды электронных и ионных плазменных колебаний. Выбор стационарного уравнения Шрёдингера фиксирует, какие временные масштабы мы разрешаем: процессы быстрее времени излучения/рассеяния сводятся к среднему статическому полю, процессы медленнее замораживаются в статическую конфигурацию - оба предела псевдостатичны, так что динамическим остаётся только излучение. Модель определяют два разделения: (i) $\tau_{pe} \ll \tau_{pi}$, так что электронный газ мгновенно реагирует на ионном масштабе и сворачивается в статический множитель $\exp(-r/\lambda)$, а ионы заморожены; (ii) $t_0 \lesssim \tau_{pe}$, так что потенциал несёт полную атомную физику, а окружение лишь одевает его хвост.

Построение псевдопотенциала

Потенциал строится в пять шагов [4]. Сначала канальные потенциалы восстанавливаются из локальной части V_{loc} и проекторов Клейнмана-Байландера β_i с матрицей связи D_{ij} [5],

$$V_l^{\text{ps}}(r) = V_{\text{loc}}(r) + \sum_{i,j\in l} \beta_i(r) D_{ij} \beta_j(r), \tag{3}$$

для четырёх каналов ($l = 0,1,2,3; \text{s, p, d, f}$); каналы без проекторов совпадают с V_{loc}. Затем при конечной температуре каналы смешиваются с больцмановскими весами $w_l(T) = g_l e^{-E_l/k_BT} / \sum_{l'} g_{l'} e^{-E_{l'}/k_BT} (g_l = 2(2l+1))$ В

$$V^{\alpha;\text{avg}}(r;T) = V_{\text{loc}}(r) + \sum_{l=0}^{3} w_l(T)\left[V_l^{\text{ps}}(r) - V_{\text{loc}}(r)\right]. \tag{4}$$

Далее радиальное уравнение Шрёдингера даёт связанные состояния, термически заселённая валентная плотность которых порождает собственный хартриевский потенциал V_H^α, так что экранированный потенциал есть $V_{\text{corr}}^\alpha(r;T) = V^{\alpha;\text{avg}}(r;T) + V_H^\alpha(r;T)$. Затем равновесие Саха со снижением потенциала ионизации по Стюарту-Пайатту определяет состав [6,7]. Наконец, усреднение по плотности числа частиц по всем зарядовым состояниям и элементам даёт

$$V_{\text{avg}}^{\text{heavy}}(r) = \sum_\alpha \frac{n_\alpha}{n_{\text{heavy}}} V_{\text{corr}}^\alpha(r;T_\alpha). \tag{5}$$

Масштабы как ограничения модели

То же упорядочение ограничивает модель. (i) Вырождение. Параметр

$$\theta = \frac{k_BT}{E_F}, E_F = \frac{\hbar^2}{2m_e}(3\pi^2 n_e)^{2/3}, \tag{6}$$

выбирает статистику: Максвелла-Больцмана при $\theta \gg 1$, Ферми-Дирака при $\theta \sim 1$, Томаса-Ферми при $\theta \ll 1$. Профиль солнечных недр охватывает $\theta \simeq 2 - 39$ (от ядра до $x = 0.80$). (ii) Слабая связь. $\Gamma = Z_{\text{eff}}^2/(a_i T_{\text{au}}) \ll 1$ и $\kappa_D = a_i/\lambda_D < 1$ оправдывают

усреднённый по полю потенциал вместо полной многочастичной ионной структуры [8]. (iii) Замороженный остов. Псевдопотенциал с замороженным остовом требует $T \ll T_{1\%}(n_e)$, т.е. отсутствия теплового возбуждения и ионизации остова давлением. (iv) Обрезание по орбитальному моменту. Центробежный барьер делает $l \geq 4$ несущественными для рассеяния валентных электронов, так что $l_{\max} = 3$ есть ограничение используемой модели.

Заключение

Разделение масштабов есть организующий принцип модели. Каждый последующий эффект имеет характерное время, и его место на лестнице определяет, входит ли он внутрь потенциала (быстрый, усреднённый) или как внешняя модель (медленный, замороженный). Транспортные величины, получаемые из потенциала - борновские/парциальные сечения, проводимость Зимана [9, 10, 11] - суть кинетические входные данные, не вносящие нового масштаба времени помимо времени столкновений, задаваемого потенциалом.

Литература

1. E. Stambulchik and C. A. Iglesias, Phys. Rev. E 105, 055210 (2022).
2. V. E. Fortov, Phys. Usp. 50, 333 (2007).
3. V. B. Mintsev and V. E. Fortov, J. Phys. A: Math. Gen. 39, 4319 (2006).
4. N. M. Sakan, V. Srećković, B. Stankov, and Z. Simić, Atoms 14, 73 (2026).
5. L. Kleinman and D. M. Bylander, Phys. Rev. Lett. 48, 1425 (1982).
6. J. C. Stewart and K. D. Pyatt, Astrophys. J. 144, 1203 (1966).
7. W. Ebeling, A. Förster, V. E. Fortov, V. K. Gryaznov, and A. Y. Polishchuk, Thermophysical Properties of Hot Dense Plasmas (Teubner, 1991).
8. V. E. Fortov, I. T. Iakubov, and A. G. Khrapak, Physics of Strongly Coupled Plasma (Oxford University Press, 2006).
9. V. B. Mintsev et al., Contrib. Plasma Phys. 43, 326 (2003).
10. E. M. Apfelbaum, Phys. Rev. E 84, 066403 (2011).
11. E. M. Apfelbaum, Contrib. Plasma Phys. 56, 176 (2016).

Моделирование плазмонно-резонансного рассеяния с учетом квантовых эффектов

Modeling Plasmon-Resonance Scattering with Quantum Effects

***Сетуха Е.А.*[1, 2], *Лопушенко В.В.*[1]**

1) Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, Москва, РФ; 2) НИВЦ МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, РФ

setyhaalena29@gmail.com, lopushnk@cs.msu.ru

Аннотация. Рассматривается задача электромагнитного рассеяния на металлических наночастицах, помещенных в диэлектрическую среду, с учетом мезоскопических поправок к классическому локальному описанию. Актуальность обусловлена влиянием поверхностных квантовых эффектов на оптический отклик частиц нанометрового размера. Математическая модель на основе уравнений Максвелла сводится к системе граничных интегральных уравнений для электрических и магнитных поверхностных токов через формулы Стреттона–Чу. Квантовые эффекты учитываются мезоскопическими условиями на границе металл–диэлектрик с параметрами Фейбельмана $d_\perp(\omega)$ и $d_\parallel(\omega)$. Система интегральных уравнений решается методом кусочно-постоянных аппроксимаций и коллокаций. По найденным поверхностным токам вычисляется сечение экстинкции для металлических частиц в плотной внешней среде. Результаты сравниваются с классической локальной моделью с условием

непрерывности касательных компонент электрического и магнитного поля на границе раздела сред для оценки роли мезоскопических поправок.

Введение

Плазмонный резонанс на металлических наночастицах — ключевой эффект нанооптики, востребованный в сенсорике, фотовольтаике и биомедицине. При переходе к частицам нанометрового размера классическая локальная модель, где отклик металла описан только диэлектрической проницаемостью $\varepsilon(\omega)$, теряет точность из-за поверхностных квантовых эффектов (спиллаут электронов, нелокальность отклика).

Целью данной работы является моделирование плазмонного резонанса на основе метода граничных интегральных уравнений с учетом квантовых поверхностных эффектов через мезоскопическую теорию и параметры Фейбельмана.

Описание работы

Постановка задачи и математическая модель. Рассматривается задача рассеяния электромагнитной волны на металлической наночастице в диэлектрической среде. Поля во внутренней и внешней областях удовлетворяют уравнениям Максвелла (без сторонних токов и зарядов). На границе раздела ставятся мезоскопические граничные условия, обобщающие непрерывность тангенциальных компонент [1]:

$$\begin{cases} \boldsymbol{E}_2^{\parallel} - \boldsymbol{E}_1^{\parallel} = -d_{\perp}\nabla_{\parallel}(E_2^{\perp} - E_1^{\perp}), & (1) \\ \boldsymbol{H}_2^{\parallel} - \boldsymbol{H}_1^{\parallel} = -i\omega d_{\parallel}\boldsymbol{n} \times \left(\varepsilon_2 \boldsymbol{E}_2^{\parallel} - \varepsilon_1 \boldsymbol{E}_1^{\parallel}\right), & (2) \end{cases}$$

где индексы (1, 2) соответствуют краевым значениям векторных полей с внутренней (внешней) стороны поверхности, а $d_{\perp}(\omega)$ и $d_{\parallel}(\omega)$— параметры Фейбельмана.

Электрическое и магнитное поле ищутся через интегральное представление с эквивалентными электрическими и магнитными поверхностными токами, что позволяет дискретизировать только поверхность частицы и автоматически удовлетворить условию излучения на бесконечности.

Численный метод. Система интегральных уравнений решается методом кусочно-постоянных аппроксимаций и коллокаций [2]: поверхность аппроксимируется системой ячеек с постоянным значением неизвестной функции. Уравнения записываются в точках коллокаций, и задача сводится к системе линейных алгебраических уравнений относительно магнитных и электрических поверхностных эквивалентных токов.

Результаты. По найденным поверхностным токам вычисляется сечение экстинкции:

$$\sigma_{ext} = -\frac{1}{k_1}\,\mathrm{Im}\,\sigma(\boldsymbol{k}), \qquad (3)$$

где $\boldsymbol{k}$ — волновой вектор, определяющий направление распространения волны, $\sigma(\boldsymbol{\tau})$ — эффективная площадь рассеяния в направлении вектора $\boldsymbol{\tau}$.

На рис. 1 приведены зависимости сечения экстинкции от длины волны для золотой сферы с радиусом 5 нм, расположенной в стекле SF5: метод граничных интегральных уравнений (BIEM) для локального случая и с параметром Фейбельмана $d_{\perp}(\omega) = \pm 0.5$, $d_{\parallel}(\omega) = 0$ в сравнении с методом дискретных источников (DSM) [3].

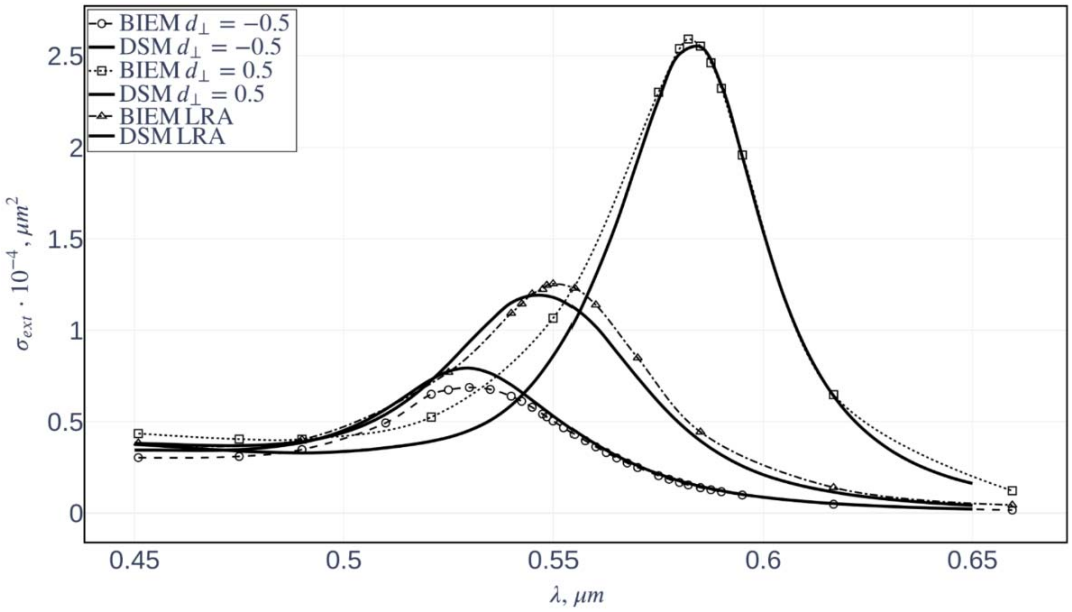


Рисунок 1. Сечение экстинкции для золотой сферы в стекле SF5

Учет параметров Фейбельмана систематически смещает резонансную частоту и меняет интенсивность сечения экстинкции по сравнению с классической моделью.

Заключение

Разработана мезоскопическая модель электромагнитного рассеяния на металлических наночастицах на основе метода граничных интегральных уравнений, учитывающая квантовые поверхностные эффекты через параметры Фейбельмана $d_\perp(\omega)$ и $d_\parallel(\omega)$. Проведено сравнение положения и характеристик плазмонного резонанса для частиц золота, серебра и натрия различной формы с эквиобъемным радиусом 5 нм, расположенных в плотных внешних средах.

Литература

1. *Yang Y., Zhu D., Yan W., Agarwal A., Zheng M., Joannopoulos J. D., Lalanne P., Christensen T., Berggren K. K., Soljačić M.* A general theoretical and experimental framework for nanoscale electromagnetism // Nature. — 2019. — Vol. 576, no. 7786. — P. 248–252.
2. *Захаров Е. В., Сетуха А. В., Безобразова Е. Н.* Метод гиперсингулярных интегральных уравнений в трехмерной задаче дифракции электромагнитных волн на кусочно-однородном диэлектрическом теле // Дифференциальные уравнения. — 2015. — Т. 51, № 9. — С. 1206.
3. *Еремин Ю. А., Лопушенко В. В.* Анализ влияния квантовых эффектов на фототермические свойства слоистых наночастиц методом дискретных источников // Оптика и спектроскопия. — 2026. — Т. 134, № 2. — С. 207–213.

МГД моделирование астрофизических и лабораторных джетов в магнитном поле

MHD Simulations of Astrophysical and Laboratory Jets in the Magnetic Field

***Торопина О. Д.*[1], Бисноватый-Коган Г. С.[1], Моисеенко С. Г.[1]**

Институт Космически Исследований РАН, Москва, РФ.

toropina@cosmos.ru

Аннотация. В работе представлены результаты численного МГД моделирования астрофизических и лабораторных сверхзвуковых джетов в магнитном поле. Магнитное имеет все три компонента: полоидальные (B_r, B_z) и тороидальный (B_ϕ). Показано, что влетающее в область моделирования вещество быстро коллимируется магнитным полем.

Образуется ударная волна вытянутой формы, которая движется к границе области, оставляя за собой устойчивое течение. Внутри основной конической расширяющейся ударной волны наблюдается периодическая ударно-волновая структура. Показано, что тороидальный компонент магнитного поля остается в области моделирования на протяжении всего расчета и играет роль в коллимации потока.

Введение

Астрофизические джеты наблюдаются в самых различных астрономических объектах: в квазарах, активных ядрах галактик, в компактных объектах в двойных системах и в молодых звездах, а также могут возникать при взрыве коллапсирующих сверхновых. На форму струйного выброса влияют многие параметры: вращение, притяжение звезд-компаньонов и магнитное поле, которое может придавать джету узконаправленную форму.

Основными направлениями изучения астрофизических джетов являются наблюдения в оптическом, рентгеновском и радиодиапазонах, а также многомерное численное моделирование. Для корректного моделирования необходимо учитывать ряд физических процессов, происходящих в струйных выбросах, в том числе магнитное поле и гравитационное поле центрального объекта и звезд-компаньонов. Некоторое время назад для исследования астрофизических джетов начали применяться методы лабораторной астрофизики, которые позволяют создавать релятивистские струи плазмы в лабораторных условиях при помощи лазеров и дают возможность исследовать структуру, эволюцию и особенности строения джетов. Сопоставить результаты лабораторных экспериментов с результатами астрофизических наблюдений и численного моделирования можно с помощью методов подобия [1, 2].

Описание работы

Постановка задачи. Основной целью исследования было численное моделирование процессов формирования и эволюции джетов, анализ результатов и сравнение их с наблюдаемыми в радио, рентгеновском и оптическом диапазонах астрофизическими джетами, а также с результатами плазменных лабораторных экспериментов, имитирующих образование астрофизических джетов. В настоящей работе представлены результаты моделирования джетов при наличии магнитного поля, содержащего все три компонента (Br, Bz, $B\phi$). В процессе моделирования считается, что процесс абляции уже завершился, протоны и электроны испарились с поверхности мишени, это учитывается при определении начальных и граничных условий. Для численного моделирования эксперимента используется стандартная система уравнений магнитной гидродинамики с учетом конечной проводимости в отсутствии гравитации [3]. Для решения системы уравнений использовалась осесимметричная разностная МГД схема с конечной проводимостью гибридного типа, основанная на методе локальных итераций [4] и методе коррекции потоков [5, 6].

Результаты численного моделирования. Мы провели большое количество расчетов с различными параметрами плотности, скорости и магнитного поля. Один из наиболее интересных случаев, показывающих эволюцию джета в умеренном магнитном поле, имеет параметры: $\beta = 10^{-2}$ и M = 3. Безразмерная магнитная вязкость равна $\tilde{\eta}_M = 10^{-5}$. Начальная плотность вещества во всей области моделирования однородна и имеет малое значение, $\rho = \rho_0$. Начальная скорость вещества во всей области моделирования, за исключением мишени, нулевая, $v_z = v_r = 0$. Вещество в области не имеет углового момента, $v\phi = 0$. В области мишени задан впрыск вещества со значением плотности $\rho \sim 300\ \rho_0$ и сверхзвуковой скоростью вылетающих из мишени частиц $v = M c_s$, где $c_s = \gamma P_0/\rho_0$ - скорость звука в невозмущенной области, M - число Маха. Скорость втекающего в область через границу мишени вещества в начальный момент времени имеет только z-компонент v_z; $v_r = 0$; $v\phi = 0$. Втекающее вещество имеет такое же магнитное поле, как и поле в области в начальный момент времени. На рис. 1 показана эволюция течения вещества. Цветная заливка соответствует логарифму плотности

вещества ρ, стрелками обозначены векторы скоростей. Можно видеть, что сразу после выброса течение немного расширяется, но затем коллимируется магнитным полем. Образуется ударная волна вытянутой формы, которая движется от мишени к границе камеры. Влияние внешнего газа на коллимацию потока в данном случае незначительно. Внутри основной ударной волны вещество неоднородно, можно различить множественные перепады плотности.

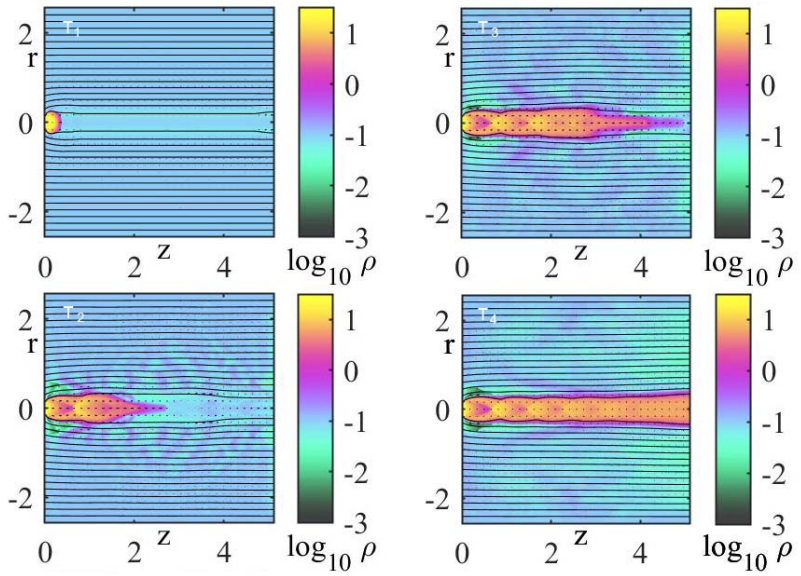


Рисунок 1. Картина течения вещества при формировании джета в магнитном поле в моменты времени (сверху вниз и слева направо): $T_1 = 0.1$, $T_2 = 0.8$, $T_3 = 1.6$, $T_4 = 2.5$ для случая с параметрами $b_0 = 1$, $\beta = 10^{-2}$ и $M = 3$.

Можно видеть, что джет имеет сложную конфигурацию. Внутри основной конической расширяющейся ударной волны имеется ударно-волновая структура, которая имеет периодичный характер, так называемые «бочки». Посредством «бочек» происходит выравнивание статических давлений. Интенсивность ударно-волновых процессов максимальна в первой «бочке» и заметно снижается в следующих. Кроме того, Рис. 1 позволяет оценить значение угла раствора конуса ударной волны как $\Theta \approx 15°$.

Изначально вращение джета Ω не задавалось. Однако благодаря наличию всех трех компонентов магнитного поля, B_r, B_ϕ и B_z, вещество закручивается вдоль оси z и приобретает угловую скорость. Тороидальный компонент магнитного поля B_ϕ сохраняется в области на протяжение всего расчета. Очевидно, что в коллимации потока магнитным полем принимают участие оба компонента B_z и B_ϕ. Но данный момент сложно сказать, какой компонент вносит больший вклад.

Заключение

В результате МГД моделирования сверхзвуковых джетов при суперпозиции полоидального (B_r, B_z) и тороидального (B_ϕ) магнитного поля показано, что влетающее вещество быстро коллимируется магнитным полем. Образуется движущаяся ударная волна вытянутой конической формы, которая оставляет за собой устойчивое истечение. Внутри основной ударной волны наблюдается ударно-волновая структура с периодичным характером. Изначально вращение джета Ω не было задано, однако благодаря наличию всех трех компонентов магнитного поля B_r, B_ϕ и B_z вещество приобретает угловую скорость. Тороидальный компонент магнитного поля сохраняется

в области на протяжении всего расчета и играет роль в коллимации потока наряду с полоидальным полем. Ширина джета и угол раствора конуса Θ зависят от величины индукции магнитного поля. По мере увеличения поля джет становится более узким, а

угол раствора конуса уменьшается. Найденное в результате моделирования значение угла раствора конуса ударной $\theta \approx 15°$ примерно соответствует значениям, полученным в лазерном эксперименте на установке НИОДИМ в ЦНИИМАШ.

Похожие результаты были получены ранее при МГД моделировании образования джетов в одном только полоидальном [7] или тороидальном магнитном поле [8]. Это указывает на то, что в коллимации джетов принимают участие оба компонента магнитного поля.

Литература

1. *Ryutov D.D., Drake R.P., Remington B.A.* ApJS, 127, 465, 2000.
2. *Bouquet, S., et al.* High Energy Density Physics, 6, 368, 2010.
3. *Ландау Л.Д., Лившиц Е.М.*, Гидродинамика. М. Наука, 1988, 736с.
4. *Zhukov, V.T., Zabrodin, A.V., & Feodoritova, O.B.* Comp. Maths. Math. Phys., 33, 1099, 1993.
5. *Оран, Э., Борис, Дж.,* Численное моделирование реагирующих потоков. М.: Мир, 1990
6. *Boris, J.P., & Book, D.L.* J. Comput. Phys., 11, 38, 1973.
7. *Belyaev V.S., Bisnovatyi-Kogan G.S., Gromov A.I., Zagreev B.V., Lobanov A.V., Matafonov A.P., Moiseenko S.G. and Toropina O.D.*, Astronomy Reports, 62, 162, 2018.
8. *Toropina O.D., Bisnovatyi-Kogan G.S., Moiseenko S.G.*, Astronomy Reports 67, 1, 3-14, 2023.

Математическое моделирование дифракции на телах с конечной проводимостью

Mathematical Modeling of the Wave Diffraction Problem by Bodies with Finite Conductivity

***Хузин И. С.*[1,2], *Коняев Д. А.*[1,2]**

1) *Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, физический факультет, Москва, РФ; 2) Институт теоретической и прикладной электродинамики РАН, Москва, РФ.*

khuzin.is20@physics.msu.ru, konyaev@physics.msu.ru

Аннотация. В работе рассматривается применение метода моментов для решения векторной задачи дифракции электромагнитных волн на телах сложной формы, обладающих конечной проводимостью. Граничное условие задается приближенным импедансным условием Щукина-Леонтовича. Задача сводится к интегро-дифференциальному уравнению электрического поля, которое решается проекционным методом с базисными и пробными функциями Рао-Уилтона-Глиссона. Разработана программа, реализующая решение на телах произвольной формы. Проведено сравнение результатов с точным решением теории Ми для сферических тел с однородным импедансным граничным условием. Исследована сходимость численных результатов при сгущении треугольной сетки, вводимой на исследуемом объекте. Показано, что для достаточно подробной сетки, численное решение хорошо согласуется с аналитическим.

Введение

В настоящее время одной из наиболее актуальных проблем электродинамики является задача дифракции электромагнитных волн на телах сложной формы. В практических приложениях рассеивающие объекты обладают конечной проводимостью и могут иметь покрытия. Прямое решение таких задач является достаточно ресурсоемким.

Эффективным приближенным подходом для тел с большой проводимостью является использование импедансного граничного условия Щукина-Леонтовича [1], позволяющего исключить из рассмотрения поля внутри тела, сведя задачу к определению только поверхностных электрических токов. Данное приближение хорошо работает, когда модуль показателя преломления материала рассеивателя много больше

единицы, а радиус кривизны поверхности достаточно велик по сравнению с длиной волны.

Описание работы

Рассматривается тело T произвольной формы с конечной проводимостью. Обозначим комплексную амплитуду падающего электромагнитного поля как $\{\mathbf{E}^i, \mathbf{H}^i\}$, а рассеянного как $\{\mathbf{E}^s, \mathbf{H}^s\}$. Временная зависимость задается как $e^{i\omega t}$. Тогда стационарная задача дифракции падающего электромагнитного поля на рассеивателе является внешней краевой задачей для уравнений Максвелла [2]:

$$\begin{cases} \mathrm{rot}\left(\mathbf{H}^s + \mathbf{H}^i\right) = i\omega\varepsilon\left(\mathbf{E}^s + \mathbf{E}^i\right), \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \backslash \overline{T}, \\ \mathrm{rot}\left(\mathbf{E}^s + \mathbf{E}^i\right) = -i\omega\mu\left(\mathbf{H}^s + \mathbf{H}^i\right), \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \backslash \overline{T}, \\ \left[\left(\mathbf{E}^s + \mathbf{E}^i\right),\ \mathbf{n}\right] = -\zeta\left[\mathbf{n}, \left[\mathbf{n}, \mathbf{H}^s + \mathbf{H}^i\right]\right], \mathbf{r} \in S, \\ \left[\mathbf{e}_r,\ \mathbf{E}^s\right] = \sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon}}\left[\mathbf{e}_r, \left[\mathbf{e}_r,\ \mathbf{H}^s\right]\right] + o\left(\dfrac{1}{r}\right), r \to +\infty, \end{cases} \tag{1}$$

где $\mathbf{e}_r$ — орт сферической системы координат, $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к поверхности рассеивателя — границе S, ε, μ — диэлектрическая и магнитная проницаемости внешней по отношению телу среды, ζ — импеданс.

Рассмотрим граничное условие в задаче (1), называемое стандартным импедансным граничным условием (Standard Impedance Boundary Condition, SIBC) или импедансным граничным условием Щукина-Леонтовича [1]:

$$\left[\left(\mathbf{E}^s + \mathbf{E}^i\right),\ \mathbf{n}\right] = -\zeta\left[\mathbf{n}, \left[\mathbf{n}, \mathbf{H}^s + \mathbf{H}^i\right]\right], \mathbf{r} \in S, \tag{2}$$

где импеданс ζ выражается в виде:

$$\zeta = \sqrt{\frac{\mu_{body}}{\varepsilon_{eff}}} = \sqrt{\frac{\mu_{body}}{\varepsilon_{body} - i\dfrac{\sigma_{body}}{\omega}}}, \tag{3}$$

где ε_{eff} — комплексная диэлектрическая проницаемость, $\varepsilon_{body}, \mu_{body}$ — диэлектрическая и магнитная проницаемости тела, σ_{body} — проводимость тела, ω — циклическая частота падающего излучения.

Поставленная задача (1) сводится к интегро-дифференциальному уравнению с помощью принципа поверхностной эквивалентности [3], где на внутренней стороне поверхности тела выполняется стандартное граничное условие для проводников [4]. На внешней вводятся эквивалентные плотности электрических и магнитных токов, выражаемые через поля, связь между которыми задается условием Щукина-Леонтовича. Совершая предельный переход к поверхности тела изнутри, получаем уравнение на поверхности тела относительно поверхностной плотности электрического тока $\mathbf{J}(\mathbf{r}')$:

$$\mathbf{E}^i_\tau(\mathbf{r}) = \left(i\omega\frac{\mu}{4\pi}\int\limits_S \mathbf{J}(\mathbf{r}')\frac{e^{-ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d\sigma' + \frac{i}{4\pi\omega\varepsilon}\nabla\int\limits_S \left(\nabla'_S,\ \mathbf{J}(\mathbf{r}')\right)\frac{e^{-ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d\sigma' + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\zeta\cdot\mathbf{J}(\mathbf{r}) + \frac{1}{4\pi}\text{v. p.}\int\limits_S \zeta\left[\left[\mathbf{n}',\ \mathbf{J}(\mathbf{r}')\right],\ \nabla\frac{e^{-ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right]d\sigma' \right)_\tau,\ \mathbf{r} \in S, \tag{4}$$

где v. p. означает, что интеграл понимается в смысле главного значения по Коши.

Уравнение (4) решается методом моментов [3]. Аппроксимируем поверхность тела S треугольной сеткой [5]. Будем искать решение задачи (4) в виде:

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}') = \sum_{m=1}^{N} I_m \mathbf{f}_m(\mathbf{r}'),$$

где N — количество ребер в треугольной сетке. В качестве базисных функций $\mathbf{f}_m$ рассмотрим кусочно-линейные функции Рао-Уилтона-Глиссона, RWG-функции [5]:

$$\mathbf{f}_t(\mathbf{r}) = \begin{cases} \dfrac{l_t}{2A_t^+}\boldsymbol{\rho}_t^+,\ \mathbf{r} \in T_t^+ , \\ \dfrac{l_t}{2A_t^-}\boldsymbol{\rho}_t^-,\ \mathbf{r} \in T_t^- , \\ 0, \mathbf{r} \notin T_t^+ \cup T_t^- , \end{cases}$$

где T_t^+ и T_t^- — треугольники с общим ребром, номер которого равен t, l_t — длина ребра с номером t, A_t^+ и A_t^- — площади треугольников T_t^+ и T_t^- соответственно, $\boldsymbol{\rho}_t^+$ — вектор, соединяющий вершину треугольника T_t^+, противолежащую общему ребру и точку $\mathbf{r}$, $\boldsymbol{\rho}_t^-$ — вектор, соединяющий вершину треугольника T_t^-, противолежащую общему ребру и точку $\mathbf{r}$.

Таким образом, поставленная задача сводится к системе линейных алгебраических уравнений, для решения которой используется метод Гаусса. Диагональные элементы содержат интегрируемую особенность $1/R$, которая выделяется аналитически [6], остальные интегралы считаются численно.

Результаты. Рассмотрим следующую задачу, конфигурация которой изображена на рис.1: исследуется дифракция плоской волны, распространяющейся вдоль оси Oz с частотой 1 ГГц, на сфере радиуса $a = 0.15$ м, длина волны $\lambda = 0.3$ м, $k = 20.96$ м$^{-1}$, тогда $ka = 3.14$, а нормированный импеданс $\zeta = 0.75$.

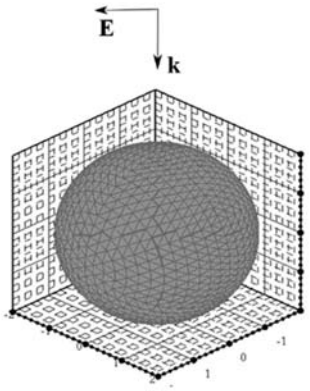


Рисунок.1. Конфигурация задачи

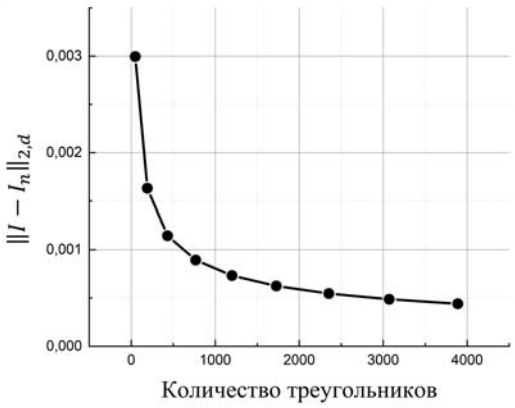


Рисунок.2. Зависимость ошибки токов от количества треугольников

Для данной задачи на рис. 2 представлена зависимость оценки ошибки в дискретной норме $L_{2,d}$, определяемой формулой (7), от числа треугольников в сетке.

$$\|I - I_n\|_{2,d} = \left(\sum_{i=1}^{N} \left(I_i - I_{n,i}\right)^2 \right)^{1/2} , \qquad (7)$$

где I_i — точное значение тока на -м ребре, $I_{n,i}$ — численное значение тока на i-м ребре.

В [4] отмечалось, что для аналогичной задачи при увеличении ka результаты заметно ухудшаются, и уже при $ka = 3$ интегральная характеристика от индуцируемых токов не соответствует точному решению из теории Ми [7]. Однако из рис. 2 видно, что с измельчением сетки ошибка монотонно убывает, что свидетельствует о сходимости используемого метода.

Заключение

В работе рассмотрена задача дифракции электромагнитных волн на телах с конечной проводимостью. Разработана программа, реализующая метод моментов с использованием RWG-элементов. Показано, что данный метод показывает хорошее согласование с точным решением Ми для достаточно подробной сетки. Расхождение результатов, отмеченное в [4], скорее всего, связано с недостаточным количеством треугольников сетки (авторы рассматривали не более 252 треугольных элементов), а также с плохим качеством используемой сетки вблизи полюсов сферы.

Литература

1. *Леонтович М.А.* О приближенных граничных условиях для электромагнитного поля на поверхности хорошо проводящих тел // Исследования по распространению радиоволн. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1948. Ч. 2. С. 5-12.
2. *Ильинский А. С., Кравцов В. В., Свешников А. Г.* Математические модели электродинамики, Учебное пособие. Высш. шк., 1991.
3. *Gibson W. C.* The method of moments in electromagnetics. – Chapman and Hall/CRC, 2021.
4. *Glisson A. W.* Electromagnetic scattering by arbitrarily shaped surfaces with impedance boundary conditions //Radio science. – 1992. – Т. 27. – №. 06. – С. 935-943.
5. *Rao S., Wilton D., Glisson A.* Electromagnetic scattering by surfaces of arbitrary shape //IEEE Transactions on antennas and propagation. – 1982. – Т. 30. – №. 3. – С. 409-418.
6. Graglia R. D. On the numerical integration of the linear shape functions times the 3-D Green's function or its gradient on a plane triangle //IEEE transactions on antennas and propagation. – 1993. – Т. 41. – №. 10. – С. 1448-1455.
7. *Wait J. R., Jackson C. M.* Calculations of the bistatic scattering cross section of a sphere with an impedance boundary condition //Radio Sci. J. Res. – 1965. – Т. 69. – С. 299-315.

Оглавление

Пленарные доклады 2

Направляемые волны периодически модулированного цилиндрического волновода

А.А.Быков 2

Физическая интерпретация решения трехмерной задачи дифракции на идеально проводящем плоском многоугольнике

Весник М.В. 4

Моделирование растрескивания таблетки из диоксида урана в тепловыделяющем элементе

Аронов П.С. [1], Галанин М.П.[1], Родин А.С.[1] 8

Спектральная задача теории резонансного рассеяния

Делицын А.Л. 11

Нейросетевое решение задачи характеризации толщин напыляемых оптических покрытий

Леонов А.С.[1,2], Тихонравов А.В. [1], Шарапов Р.Д. [1,3], ... 11

Решение задачи дифракции с мезоскопическими граничными условиями в присутствии подложки методом дискретных источников

Еремин Ю. А[1], Лопушенко В. В.[1] 14

О задаче многих тел с близкодействием

Малых М. Д.[1,2], Севастьянов Л. А.[1,2] 17

Применимость использования приближения точечных рассеивателей для описания характеристик рассеяния сложного объекта

Балабуха Н. П.[1], Гильмутдинов Р.В.[1], Меньших Н. Л.[1] 19

Задачи на собственные значения в магнитной гидродинамике галактических дисков

Михайлов Е. А.[1,2], Хасаева Т.Т.[1] 22

Маломодовые модели динамо и правила Вальдмайера

Соколов Д.Д.[1,], Юшков Е.В..[2] , Макрова И.В. 24

Математическое моделирование и численные методы – 1 25

Роль памяти случайных процессов в эволюции средних характеристик магнитного поля

Дуканов И.А. [1,2], Юшков Е.В.[1,3], Соколов Д.Д.[1,2] 25

Численное моделирование генерации магнитных полей в декреционных дисках Везвёзд

Жихарева Е.Н.[1], Михайлов Е.А.[1,2], Рыспаева Е.Б.[3] 27

Уравнения корреляционной магнитодинамики

Иванов А.В.[1], Лукьянов А.В.[2] 29

Особенности обратного рассеяния от полостей с покрытиями на относительно низких частотах

Кисель В.Н [1], Маслов А.С. [1,2] 31

Об одном методе определения распределения эритроцитов по размерам

Киямова К.С., Головина С.Г. 34

Решение задачи дифракции электромагнитной волны на системе диэлектрических цилиндров с помощью метода граничных интегральных уравнений

Куликов М. А.[1] Третьякова Р.М.[1,2], Ненашев А.С.[2] 35

Применение метода объемных интегральных уравнений к расчету задач рассеяния и характеристик антенн при наличии диэлектрических структур малой толщины

Масс И.А.[1,2], Сетуха А.В.[1,2],..... 38

Анализ искажающего влияния трансионосферных радиолиний при приеме OFDM сигналов

Назаров Л.Е[1]., Батанов В.В.[2] 40

Энергетические характеристики электромагнитного поля в диэлектрических телах

Моряков С. Н., Плещинский Н. Б., Щипцов Р. А. 42

Решение двумерной вариационной задачи магнитостатики о форме сечения полосового магнита с фиксированной площадью, имеющего максимальную силу сцепления с прямоугольным полосовым магнитом

Поляков О.П., Поляков П.А. 45

Влияние временных и пространственных масштабов на моделирование плотной плазмы псевдо потенциаламы

Сакан Н. М.[1] , Сречкович В.[1], Симич З.[2] 47

Моделирование плазмонно-резонансного рассеяния с учетом квантовых эффектов

Сетуха Е.А.[1, 2], Лопушенко В.В.[1] 49

МГД моделирование астрофизических и лабораторных джетов в магнитном поле

Торопина О. Д.[1], Бисноватый-Коган Г. С.[1], Моисеенко С. Г.[1] 51

Математическое моделирование дифракции на телах с конечной проводимостью

Хузин И. С.[1,2], Коняев Д. А.[1,2] 54

Оглавление 58