Применение асимптотических методов для восстановления граничного условия краевой задачи с периодическими условиями во времени

Вэй Юйсюань
Чэн Хань
Физический Факультет МГУ
Кафедра Математики

Асимптотические методы в математической физике

27 февраля 2026

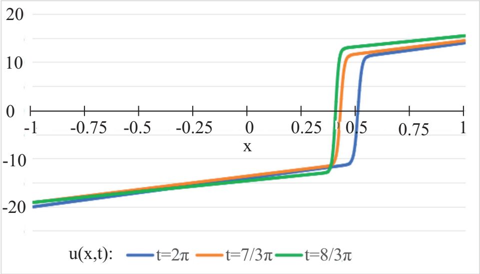
Содержание

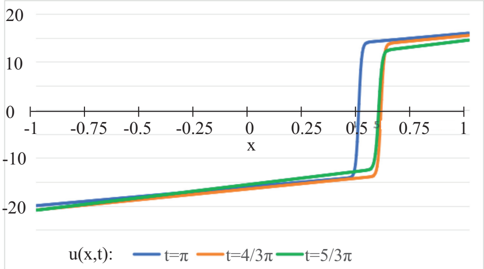
Постановка прямой задачи

$$
\begin{cases}
\varepsilon\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial u}{\partial t}\right) = -u\dfrac{\partial u}{\partial x} + q(t)u \\
(x,t) \in D := \{x \in (-1,1); t \in \mathbb{R}\} \\
u(-1,t) = u_{\text{left}}(t),\ u(1,t) = u_{\text{right}}(t), t \in \mathbb{R} \\
u(x,t) = u(x,t+T),\ x \in [-1,1], t \in \mathbb{R}
\end{cases}
\tag{1}
$$

где ε – малый параметр $(0 < \varepsilon \ll 1)$, функции $u_{\mathrm{left}}(t)$, $u_{\mathrm{right}}(t)$ и $q(t)$ – достаточно гладкие T-периодические по переменной t, $q(t) > 0$.

Численное решение





Постановка обратной задачи

Задача граничного управления для (1) и (2): Определить функцию $u_{\text{right}}(t) = h_0(t)$, чтобы за время $t = T$ получить заданное распределение функции

$$f(x) = \int_0^T u(x,t)dt, \; x \in [-1, 1].$$

Для каждой из задач мы построили асимптотическое приближение и установили как оно зависит от краевого условия.
Пусть $U_0(x, t, h_0(t))$ - это асимптотическое приближение нулевого порядка. Обратная задача решается путем минимизации функционала

$$J[h_0(t)] = \int_{-1}^1 (\int_0^T U_0(x,t,h_0(t))dt - \int_0^T u_{num} dt)^2 dx \tag{2}$$

Асимптотическое приближение нулевого порядка решения задачи с гладкими коэффициентами

$$U_0(x,t,\varepsilon)=\begin{cases}U_0^{(-)}(x,t,\varepsilon)=\overline{u}_0^{(-)}(x)+Q_0^{(-)}(\xi), & (x,t)\in\bar{D}^{(-)},\\ U_0^{(+)}(x,t,\varepsilon)=\overline{u}_0^{(+)}(x)+Q_0^{(+)}(\xi), & (x,t)\in\bar{D}^{(+)},\end{cases}$$

где $\xi=\frac{x-X_1(t,\varepsilon)}{\varepsilon}$, $\bar{D}^{(-)}:=\{-1\le x\le X_1(t,\varepsilon),\ t\in\mathbb{R}\}$, $\bar{D}^{(+)}:=\{X_1(t,\varepsilon)\le x\le 1,\ t\in\mathbb{R}\}$.

$$\begin{cases}\overline{u}_0^{(-)}=xq+u_{\text{left}}+q=:\varphi^{(-)}(x,t),\\ \overline{u}_0^{(+)}=xq+h_0(t)-q=:\varphi^{(+)}(x,t),\\ Q_0^{(\mp)}=\dfrac{-2\varphi^{(\mp)}(x_0,t)}{1+e^{\xi\varphi^{(\mp)}(x_0,t)}}.\end{cases}$$

$$X_1(t,\varepsilon)=x_0(t)+\varepsilon x_1(t),$$

$$x_0(t)=-\frac{u_{\text{left}}+h_0(t)}{2q}\implies h_0(t)=-2qx_0-u_{\text{left}}.$$

Верхнее и нижнее решения

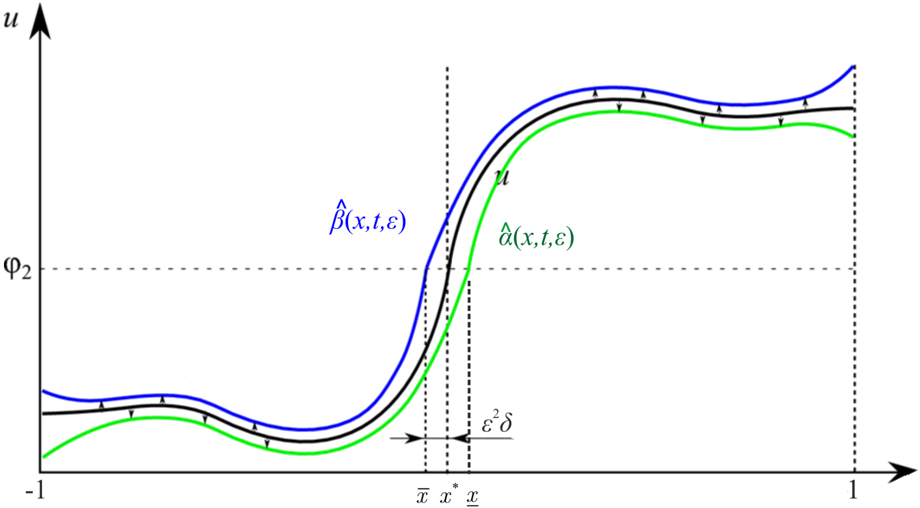
Оценить, насколько отличается асимптотическое приближение положения фронта от истинного, можно при помощи асимптотического метода дифференциальных неравенств (Н.Н. Нефедов). Этот метод заключается в построении функций $\alpha(x,t,\varepsilon)$ и $\beta(x,t,\varepsilon)$, которые называются соответственно нижним и верхним решениями задачи, как модификаций асимптотического приближения. Для точного решения задачи и его асимптотического приближения будут справедливы неравенства

$$\alpha(x,t,\varepsilon) \le U(x,t,\varepsilon),\ u_\varepsilon(x,t) \le \beta(x,t,\varepsilon), \quad (x,t) \in \overline{D}. \tag{3}$$

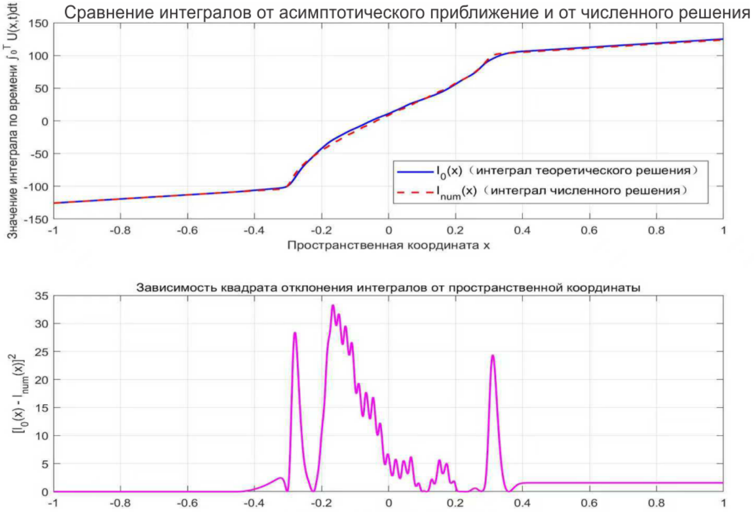
Используя эти неравенства, мы сможем установить интервал, внутри которого в любой момент времени будут находиться обе функции: истинное решение, $x_{tr}(t)$ и его асимптотическое приближение $\tilde{x}_{tr}(t,\varepsilon)$:

$$x_\beta(t) \le x_{tr}(t), \tilde{x}_{tr}(t,\varepsilon) \le x_\alpha(t). \tag{4}$$

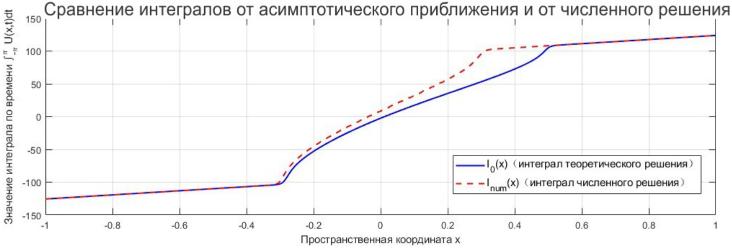
Верхнее и нижнее решения как модификации асимптотического приближения

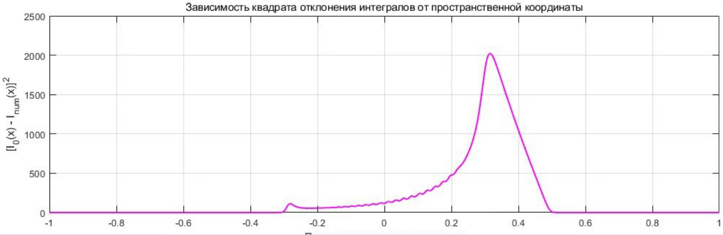


Верхнее и нижнее решения как модификации асимптотического приближения



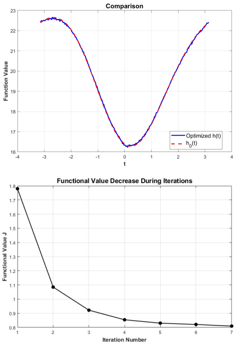
Верхнее и нижнее решения как модификации асимптотического приближения



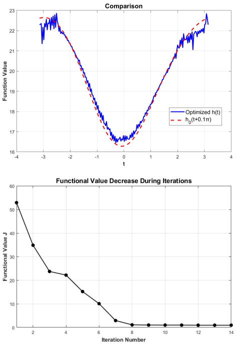


Восстановленная $h_0(t)$ для различных начальных функций без зашумления

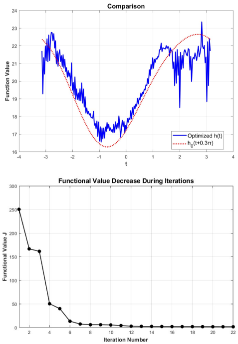
Наша функция $h_0(t)$, найденная по методу асимптотического анализа - это лучше начальное приближение для оптимизации функционала.



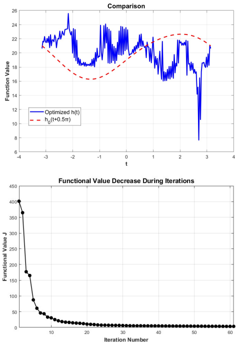
$h_0(t)$



$h_0(t+0.1\pi)$

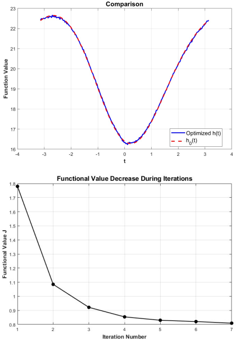


$h_0(t+0.3\pi)$

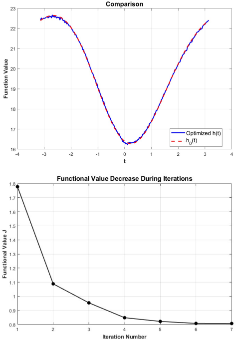


$h_0(t+0.5\pi)$

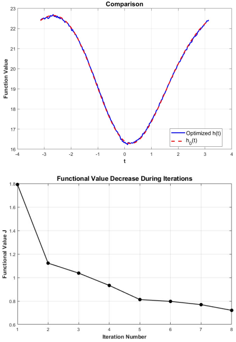
Восстановленная $h_0(t)$ для различных начальных функций с добавлением шума



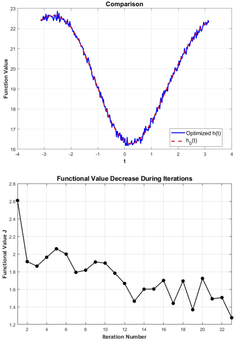
без шума



с 0,01 шумом

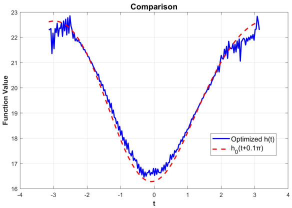


с 0,1 шумом

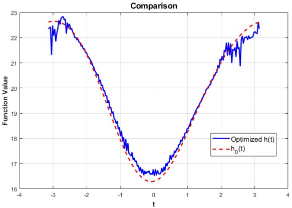


с 1 шумом

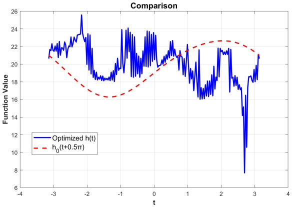
Результаты для различных ε



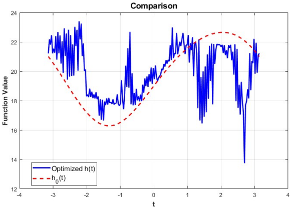
$\varepsilon = 0.1$ и $h_0(t + 01\pi)$



$\varepsilon = 0.03$ и $h_0(t + 01\pi)$



$\varepsilon = 0.1$ и $h_0(t + 05\pi)$



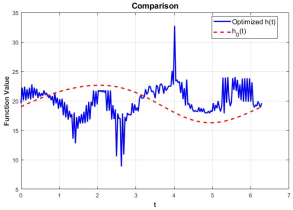
$\varepsilon = 0.03$ и $h_0(t + 05\pi)$

Сглаживание функционала

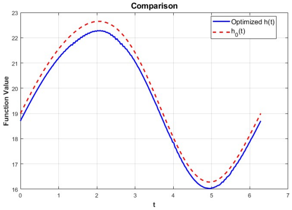
Чтобы сглаживать функцию, введём регуляризирующий параметр α:

$$J[h_0(t)] = \int_{-1}^{1} \Big(\int_0^T U_0(x,t,h_0(t))dt - \int_0^T u_{num} dt \Big)^2 dx + \alpha \int_0^T h_0^2(t) dt \tag{5}$$

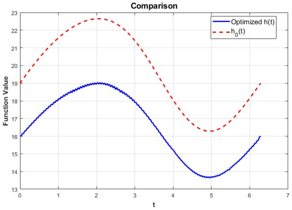
и возьмём в качестве примера случай $\varepsilon = 003$ и $h_0(t + 05\pi)$.



$\alpha = 0$



$\alpha = 1$



$\alpha = 10$

Подбор регуляризирующего параметра

α выбирается из обобщенного принципа невязка:

$$\rho_\eta(\alpha) = ||A_h z_\eta^\alpha - u_\delta||^2 - (\Delta + \delta||z_\eta^\alpha||)^2 - (\mu_\eta(u_\delta, A_h))^2,$$

где

- $A_h z_\eta^\alpha$ – это максимальное значение разницы между верхним и нижним решениями $\max\{\beta(x,t,\varepsilon) - \alpha(x,t,\varepsilon)\}$,
- Δ – это сеточная ошибка численного решения $\Delta t + (\Delta x)^2$,
- δ – это соответствующая функции $h(t)$ погрешность
- $\int_0^T \delta(t)dt$, z_η^α – это решение функционала с регуляризирующем параметром α
- μ - мера несовместности. В расчётах для упрощения вычислений это слагаемое обычно принимают равным нулю.

Пусть условие

$$||u_\delta||^2 > \Delta^2 + (\mu_\eta(u_\delta, A_h))^2 \tag{6}$$

не выполнено: тогда в качестве приближенного решения операторного уравнения выберем $z_\eta^\alpha = 0$.

Подбор регуляризирующего параметра

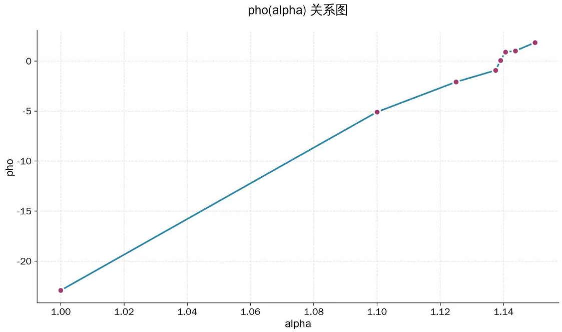
Если же неравенство (5) выполнено, то можно найти положительный корень $\alpha^* > 0$, т.е.

$$||A_h z_\eta^{\alpha^*} - u_\delta||^2 = (\Delta + \delta||z_\eta^{\alpha^*}||)^2 \tag{7}$$

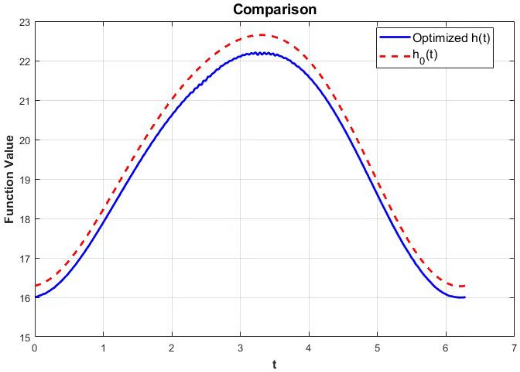
В этом случае приближенное решение операторного уравнения выбираается как $z_\eta^\alpha = z_\eta^{\alpha^*}$, причем оно определяется единственным образом.
Мы используем метод бисекции для поиска корня этого уравнения.

eps=0. 03	alpha	1	1. 1	1. 125	1. 1375	1.1390625	1. 140625	1. 14375	1. 15
t+0. 1pi	pho	-22. 930393	-5. 101131	-2. 096783	-0. 935898	0. 056813	0. 897674	1. 006299	1. 849003

Подбор регуляризирующего параметра

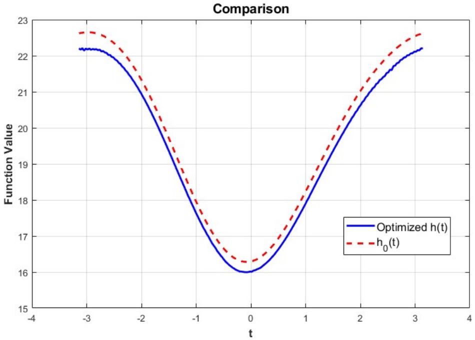


Зависимость ρ и α

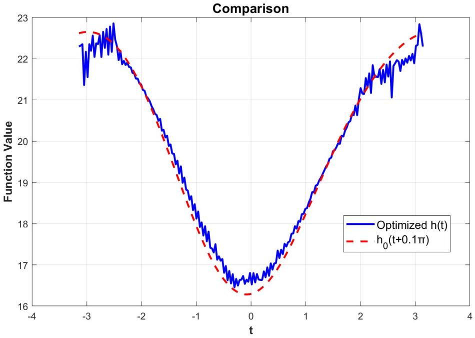


Результат с α^*

Подбор регуляризирующего параметра



Результат сглаживания с оптимальным α^*



Результат без α

Спасибо за внимание