К ТЕОРИИ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ КОШИ-РИМАНА С ПОЛЯРНОЙ ОСОБЕННОСТЬЮ В МЛАДШИХ КОЭФФИЦИЕНТАХ

Расулов А.Б.
Национальный исследовательский университет «Московский энергетический институт»
Кафедра высшей математики
E-mails: rasulzoda55@gmail.com

Постановка задачи

Хорошо известно, насколько важную роль в приложениях играет теория обобщенных аналитических функций, созданная И.Н. Векуа [1]. Она имеет глубокие связи со многими разделами анализа, геометрии и механики, включая квазиконформные отображения, теорию поверхностей, теорию оболочек и газовую динамику.

Многие результаты исследований обобщенных аналитических функций, полученные в скалярном случае, были обобщены на системы с несколькими неизвестными функциями в случае регулярных коэффициентов (см., например, [2], [4]).

Системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка со многими неизвестными функциями, младшие коэффициенты которых имеют полярные сингулярности, изучены мало [3].

Настоящая работа посвящена представлению общего решения систем эллиптических уравнений в области D на плоскости с особенностями в младших коэффициентах. Главной частью этих систем уравнений является оператор Коши–Римана. Носителями особенностей служит множество $l = \{z:\ \rho(z) = 0\}$, состоящее как из изолированных особых точек, так и из некоторых линий. Это представление используется для исследования краевых задач.

Пусть D — область, содержащая начало координат и ограниченная границей $\Gamma \in C^{1,\mu},\ 0 < \mu < 1$, ориентированной против часовой стрелки, и пусть $D_0 = D \setminus \{l\}$.

В стандартной записи $2\partial_{\bar z} = \partial_x + i\partial_y, \quad u_k(z) = u_{1k}(x, y) + iu_{2k}(x, y), \quad k = 1, 2, ..., n$, в области D_0 рассмотрим систему эллиптических уравнений в частных производных первого порядка с сингулярными коэффициентами вида

$$\left(\frac{\partial}{\partial \bar z} - \frac{a}{\rho} - a_0\right) u + Au + \frac{1}{\rho_1} B\bar u = F, \tag{1}$$

где a — комплексное число и функция $a_0 \in L^p(D),\ p > 2$–скалярные величины, и для краткости через $\rho(z)$ обозначено одно из ее значений :

$$\rho(z) = \{\bar z|z|^{\alpha-1};\ |z - \bar z|^{\alpha};\ |R - |z||^{\alpha}\}, \quad \text{где } \alpha \geq 1. \tag{2}$$

Также в (1) $u = \{u_1,\ u_2, \quad u_n\}$ -искомый, $F = \{f_1,\ f_2, \quad f_n\}$ -известный вектор функции, а ρ_1 также может принимать одно из значений ρ.

Относительно обратимых матриц $A \equiv A_{n\times n}$ и $B \equiv B_{n\times n}$ система (1) изучается в двух случаях: 1)когда все элементы этих заданных матриц комплексные числа, 2) когда все элементы этих заданных матриц аналитические функции комплексного переменного z.

Для уточнения класса решений систем уравнений (1) напомним некоторые известные факты из теории эллиптических систем, изложенные в монографии И.Н. Векуа [1] и в книге Л. Берса, Ф. Джона, М. Шехтера [5].

Заметим, что функция f принадлежит соболевскому пространству $W^{1,p}(D_0)$, если в любой подобласти $G_0 \in D_0$ функция $f(z)$ вместе с ее обобщенными производными $f_z,\ f_{\bar z} \in L^p_{loc}(G_0)$, $p > 2$.

Пусть в некотором открытом множестве G на плоскости задана линейная эллиптическая система первого порядка с постоянными старшими коэффициентами, младшие коэффициенты и правая часть которой принадлежат $L^p_{loc}(G)$, т.е. принадлежат $W^{1,p}(G_0)$ в любой ограниченной области G_0, лежащей в G вместе со своей границей. Тогда на основании внутренней регулярности (см. монографию И.Н. Векуа [1]) любое слабое решение u этого уравнения регулярно в том смысле, что оно принадлежит классу $W^{1,p}_{loc}(G)$ и удовлетворяет рассматриваемой системе. В силу теоремы вложения функция u в действительности принадлежит классу $C^\mu\big(\overline{G_0}\big)$ с показателем $\mu \le (p-2)/p$. Этот факт был доказан И.Н. Векуа в [1]. В соответствии с внутренней регулярностью решений в дальнейшем решение линейной эллиптической системы первого порядка предполагается регулярным в открытом множестве D_0.

Вектор функцию $u(z) \in W^{1,p}_{loc}\big(D_0\big)$, где $p > 2$, удовлетворяющую уравнению (1), почти всюду, называем его *регулярным* решением.

Введем оператор Помпейю–Векуа ([1] с.29)

$$(T\varphi)(z) = -\frac{1}{\pi}\int_D \frac{\varphi(\zeta)d_2\zeta}{\zeta - z}, \tag{3}$$

где $d_2\zeta$ означает элемент площади. Хорошо известно, что при $p > 2$ этот оператор действует $L^p(D) \to W^{1,p}(D) \subseteq H(\overline{D})$ и удовлетворяет уравнению

$$(T\varphi)_{\bar z} = \varphi;$$

В настоящей работе найдено *регулярное* решение для уравнения (1) с изолированной полярной особенностью $\rho(z) = \bar z$ в младшем коэффициенте, которое получается из первой компоненты $\rho(z)$ в обозначении (2), при $\alpha = 1$ и когда матрица B-нулевая матрица. Эти результаты могут быть использованы для решения краевых задач Римана-Гильберта и других задач.

2. Скалярный случай.

Приведем некоторые известные факты, доказанные автором (например, в работах [4],[5]), которые используются в изложений полученных результатов.

В предположении, что u -искомая функция и является скалярной величиной, в области $D_\varepsilon = \{z : |z| \ge \varepsilon,\ z \in D\}$ рассмотрим главную часть уравнения

$$\begin{cases} \partial_{\bar z} u = A_0, \\ A_0(z) = \frac{a}{\bar z} + a_0(z), \end{cases}$$

где $n > 1$, $\quad a_0 \in L^p(D),\ p > 2$, при любом $\varepsilon > 0$.

Введем сингулярный интеграл

$$\Omega(z) = \lim_{\varepsilon\to 0}(T_\varepsilon A_0)(z) \equiv -\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\pi}\int_{D_\varepsilon}\frac{A_0(\zeta)d_2\zeta}{\zeta - z},$$

где интегральный оператор T_ε определяется аналогично (3) по отношению к области D_ε.

В следующих обозначениях:

$$\mathrm{Re}a = a_1,\ \ \omega = 2a\ln|z|, \quad h(z) = (Ta_0)(z) + \frac{a}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\ln|\zeta| d\zeta}{\zeta - z}, \tag{4}$$

справедлива:

Лемма. *Пусть $a \in \mathbb{C}$ и функция*

$$a_0 = A_0 - \frac{a}{\bar{z}} \in L^p(G), \quad p > 2.$$

Тогда функция

$$\Omega(z) = 2a \ln|z| + h(z), z \neq 0,$$

где $h(z) \in H(\overline{G})$ и определяется равенством (4), является решением уравнения

$$\Omega_{\bar{z}} = A_0,$$

причем функция Ω вблизи особой точки $z = 0$ имеет поведение

$$\Omega = O(\ln|z|), \quad \textit{при} \quad z \to 0.$$

Также, в скалярном случае решение неоднородного уравнения

$$\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} - \frac{a}{\rho} - a_0\right) u = f$$

при условии $|z|^{-2a} f \in L^p(D)$, $p > 2$ дается формулой

$$u = |z|^{2a}\, e^h [\phi + T(|z|^{-2a}\, e^{-h} f)]$$

с произвольной аналитической в D функцией $\phi \in C(\overline{D})$ и $h(z)$- определяется согласно формуле (4) (см. [1],[5,6]).

3. Векторный случай. Так как собственные значения различны, матрица $A(z)$ диагонализируема с помощью аналитической $P(z)$-матрицы перехода

$$\Lambda(z) = P(z) A(z) P^{-1}(z), \quad \Lambda(z) = \mathrm{diag}(\lambda_1(z), \ldots, \lambda_n(z))$$

Поскольку элементы $A(z)$ аналитичны, компоненты матрицы $P(z)$ и собственные значения $\lambda_k(z)$ также будут аналитическими функциями в области D.

Имеет место

Теорема. *Пусть в системе уравнений (1) $a = a_1 + i a_2$ — комплексное число и функция $a_0 \in L^p(D)$, $p > 2$–скалярные величины, и*

$$\rho(z) = \bar{z}.$$

Элементы обратимой матрицы $A(z)$ аналитичны, и данная матрица имеет различные собственные значения $\lambda_k(z)$, $k = \overline{1, n}$ и B-нулевая матрица.

1. Структура общего решения

Тогда, при $-1 < 2a_1 < 1$ и функция $a_0(z) \in L^p(D)$ и $|z|^{-2a} F \in L^p(D), p > 2$ любое регулярное решение уравнения (1) из класса $W^{1,p}_{loc}(D_0)$, $p > 2$ в области D_0 с разрезом, соединяющим точку $z = 0$ с бесконечно удаленной точкой $z = \infty$ дается формулой

$$u(z) = |z|^{2a} e^h \left\{ \sum_{j=1}^{n} p_{kj}(z) e^{-\lambda_j(z)\bar{z}} \left(\phi_j(z) + T_D \left(\tilde{f}_j e^{\lambda_j \bar{\zeta} - h(\zeta)} \right)(z) \right) \right\},$$

где $\phi_j(z),\ j-\overline{1,n}$ — *произвольные аналитические функции,* $p_{kj}(z)$ — *элементы матрицы собственных векторов,* $h(z)$*- определяется согласно формуле (4), а* $\tilde{f}_j$ — *компоненты вектора* $P|z|^{-2a}F$*.*

2. Существование непрерывного решения.

Если $0 < 2a_1 < 1$ *, то единственное решение, непрерывное в точке* $z = 0$ *и обращающееся там в нуль (при* $F(0) = 0$*), определяется выбором аналитического вектора* $\phi(z)$ *а области* D*,* $\phi(z) \in C(\overline{D})$*. В случае* $-1 < 2a_1 < 0$ *решение имеет в точке* $z = 0$ *интегрируемую особенность, характер которой определяется множителем* $|z|^{2a}$*.*

4. Случай постоянной матрицы, т.е. когда $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$-заданная матрица все элементы которой комплексные числа, а $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$-нулевая матрица.

В этом случае, мы ограничимся (при $n = 2$) примером конкретной матрицы $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$:

$$A(z) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Пусть в системе уравнений (1) коэффициент $a = a_1 + ia_2$ — комплексное число ($-1 < 2a_1 < 1$) и функция $a_0 \in L^p(D),\ p > 2$–скалярные величины, и

$$\rho(z) = \bar{z}.$$

Тогда имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} - \frac{a}{\rho} - a_0\right) u_1 + 3u_1 + u_2 = f_1(z), \\ \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} - \frac{a}{\rho} - a_0\right) u_2 + 2u_1 + 2u_2 = f_2(z). \end{cases}$$

Общее решение этой системы уравнений из класса $W^{1,p}_{loc}(D_0),\ p > 2$ в области D_0 с разрезом, соединяющим точку $z = 0$ с бесконечно удаленной точкой $z = \infty$ имеет вид

$$u_1(z) = |z|^{2a} e^h \Big\{ \phi_1 e^{-\bar{z}} + \phi_2 e^{-4\bar{z}} - \frac{e^{-\bar{z}}}{3\pi} \int_D \frac{|\zeta|^{-2a}(f_1 - f_2)(\zeta) e^{\bar{\zeta} - h(\zeta)} d_2\zeta}{\zeta - z} + \frac{e^{-4\bar{z}}}{3\pi} \int_D \frac{|\zeta|^{-2a}(2f_1 + f_2)(\zeta) e^{4\bar{\zeta} - h(\zeta)} d_2\zeta}{\zeta - z} \Big\};$$

$$u_2(z) = |z|^{2a} e^h \Big\{ -2\phi_1 e^{-\bar{z}} + \phi_2 e^{-4\bar{z}} + \frac{2e^{-\bar{z}}}{3\pi} \int_D \frac{|\zeta|^{-2a}(f_1 - f_2)(\zeta) e^{\bar{\zeta} - h(\zeta)} d_2\zeta}{\zeta - z} - \frac{e^{-4\bar{z}}}{3\pi} \int_D \frac{|\zeta|^{-2a}(2f_1 + f_2)(\zeta) e^{4\bar{\zeta} - h(\zeta)} d_2\zeta}{\zeta - z} \Big\}.$$

где $\phi_j(z),\ j-\overline{1,2}$ — произвольные аналитические функции, непрерывные в замкнутой области $\overline{D}$ и $h(z)$- определяется согласно формуле (4), а также вектор функция $F = \{f_1,\ f_2\}$ удовлетворяет условию $|z|^{-2a}F \in L^p(D)$, $p > 2$.

Замечание 1. Аналогичные результаты получены и для других значений ρ и ρ_1 указанных в (2) и когда матрица B- ненулевая матрица, а также когда A и B- жордановы матрицы.

Замечание 2. Полученное явное представление используется для исследования различного рода краевых задач.

Полученные выше результаты также удобно использовать в исследовании сингулярно-возмущенных задач.

5. Сингулярно-возмущенная система уравнений.

Например, система уравнений

$$\begin{cases} \varepsilon\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} - \frac{a}{\rho} - a_0\right) u_1 + a_{11}u_1 + a_{12}u_2 = 0, \\ \varepsilon\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} - \frac{a}{\rho} - a_0\right) u_2 + a_{21}u_1 + a_{22}u_2 = 0; \end{cases}$$

с малым параметром и с постоянной матрицей A с различными собственными значениями λ_1, λ_2 , а также граничными условиями типа Римана-Гильберта сводится к исследованию двух сингулярно-возмущенных скалярных уравнений(см. напр.[1],[4],[7]):

$$\varepsilon \tilde{u}_{\bar{z}k} - \lambda_k \tilde{u}_k = 0, \ \ k = 1, 2;$$

с аналогичными условиями типа Римана-Гильберта, которые исследованы ранее(см. например [8]). Заметим, что функции u_k и $\tilde{u}_k$, $k = 1, 2$ связаны некоторыми функциональными соотношениями.

ЛИТЕРАТУРА

1. Векуа И.Н. Обобщенные аналитические функции / И.Н. Векуа М.: Наука, Главное издательство физико-математической литературы, 1988. —510 с.

2. Солдатов А.П. Сингулярные интегральные операторы и эллиптические краевые задачи. И. А.П. Солдатов // Совр. Проблемы математики. — 2017. — Т. 63, № 1. — С. 1–189.

3. Раджабов Н.Р. Введение в теорию дифференциальных уравнений в частных производных со сверхсингулярными коэффициентами. — Душанбе: Изд-во ТГУ, 1992. — 236 с.

4. Виноградов В.С., Краевая задача для эллиптической системы первого порядка на плоскости, Дифференциальные уравнения, 1971, Т. 7, Вып. 8, 1440–1448

5. Берс Л., Джон Ф., Шехтер М. Уравнения с частными производными. — М.: Мир, 1966. — 352 с.

6. Расулов А.Б. Интегральные представления решений линейной эллиптической системы второго порядка с внутренней сверхсингулярной точкой /А.Б.Расулов //Докл. РАН. 2009. Т.429, №6, С.735-737.

7. Rasulov A.B. Representation of the General Solution of an Equation of the Cauchy–Riemann Type with a Supersingular Circle and a Singular Point // Differential Equations, 2017, Vol. 53, No. 6, pp. 1–9.

8. Расулов А.Б., Федоров Ю.С. Сингулярно возмущенное уравнение Коши–Римана с особенностью в младшем коэффициенте, Журнал вычислительной математики и математической физики, 2020, том 60, № 10, с. 105–111