Асимметричные пограничные слои в сингулярно возмущенной задаче реакция-диффузия-адвекция в двумерной области

Орлов А.О., Сюн Чжусюань, Ли Чжицян, Волков В.Т.

Москва, МГУ, физический факультет

Международная конференция
"Асимптотические методы в математической физике"

26-27 февраля 2026 г.

Постановка задачи.

Рассматривается сингулярно возмущенная краевая задача для уравнения реакции-диффузии-адвекции в бесконечной полосе:

$$\begin{cases} \varepsilon^4 \Delta u = \varepsilon \left(\mathbf{A}(u,x,y,\varepsilon), \nabla\right) u + B(u,x,y,\varepsilon), \; x \in \mathbb{R}, \; y \in (0,a), \\ u(x,0,\varepsilon) = u^0(x), \;\; u(x,a,\varepsilon) = u^a(x), \; x \in \mathbb{R}, \\ u(x,y,\varepsilon) = u(x+L,y,\varepsilon), \;\; x \in \mathbb{R}, \; y \in [0,a]. \end{cases} \tag{1}$$

где $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ – малый параметр.

Здесь $\varepsilon \in (0; \varepsilon_0]$ – малый параметр, L – некоторое положительное число, $\mathbf{A}(u,x,y,\varepsilon) = \{A_1(u,x,y,\varepsilon), \, A_2(u,x,y,\varepsilon)\}$. Функции $A_i(u,x,y,\varepsilon), i = 1,2$ и $B(u,x,y,\varepsilon)$ являются L-периодическими по переменной x, достаточно гладкими в области $I \times \overline{D} \times [0; \varepsilon_0]$, где I – возможный интервал изменения величины u, $\overline{D} = \{(x,y) : \mathbb{R} \times [0,a]\}$; функции $u^0(x)$, $u^a(x)$ являются L-периодическими, гладкими при $x \in \mathbb{R}$.

Условие С1. Уравнение $B(u,x,y,0) = 0$ имеет в области $\overline{D}$ корень $u = \varphi(x,y)$, где $\varphi(x,y) = \varphi(x+L,y)$ — L-периодическая по переменной x функция. Кроме того, выполнены неравенства

$$B_u(\varphi(x,y),x,y,0) > 0, \quad A_2(\varphi(x,y),x,y,0) < 0 \qquad (x,y) \in \overline{D}.$$

Асимптотическое приближение решения.

Построим асимптотическое приближение $U(x,y,\varepsilon)$ решения задачи (1) в виде суммы 3 слагаемых:

$$U(x,y,\varepsilon) = \bar{u}(x,y,\varepsilon) + L(\xi,x,\varepsilon) + R(\eta,x,\varepsilon). \tag{2}$$

Здесь $\bar{u}(x,y,\varepsilon)$ – регулярная часть асимптотического приближения, $L(\xi,x,\varepsilon)$ – погранслойная функция, описывающая решение в окрестности прямой $y=0$, переменная ξ определена выражением $\xi = \dfrac{y}{\varepsilon^3}$, $R(\eta,x,\varepsilon)$ – погранслойная функция, описывающая решение в окрестности прямой $y=a$, переменная η определена выражением $\eta = \dfrac{a-y}{\varepsilon}$, Каждое слагаемое в (2) представим в виде разложения по малому параметру ε:

$$\begin{aligned} \bar{u}(x,y,\varepsilon) &= \bar{u}_0(x,y) + \varepsilon\bar{u}_1(x,y) + \dots\ , \\ L(\xi,x,\varepsilon) &= L_0(\xi,x) + \varepsilon L_1(\xi,x) + \dots\ , \\ R(\eta,x,\varepsilon) &= R_0(\eta,x) + \varepsilon R_1(\eta,x) + \dots . \end{aligned} \tag{3}$$

Регулярная часть.

Подставляя сумму для регулярной части асимптотического приближения (3) в равенство

$$\varepsilon^4\left(\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial y^2}\right)=\varepsilon A_1(\bar{u},x,y,\varepsilon)\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}+\varepsilon A_2(\bar{u},x,y,\varepsilon)\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}+B(\bar{u},x,y,\varepsilon), \quad (4)$$

раскладывая функции в правой части в ряд Тейлора по малому параметру и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим алгебраические уравнения для функций $\bar{u}_k(x,y)$, $k\in\mathrm{N}_0$.

Далее для краткости используется обозначение

$$\overline{E}(x,y):=E(\varphi(x,y),x,y,0), \quad (5)$$

где в качестве функции $\overline{E}(x,y)$ могут выступать функции A_i, B, а также их частные производные, вычисленные в точке $(\varphi(x,y),x,y,0)$.

Учитывая условие C1, определим $\overline{u}_0(x,y)=\varphi(x,y)$, $(x,y)\in\overline{D}$. Для членов $\overline{u}_k(x,y)$, $k\geq 1$ получаем линейные уравнения $\overline{B_u}(x,y)\bar{u}_k(x,y)=h_k(x,y)$, $(x,y)\in\overline{D}$, где $h_k(x,y)$ – известные функции. Разрешимость задач для $\overline{u}_k(x,y)$ при всех $k\geq 1$ гарантируется условием C1.

Таким образом, члены регулярной части асимптотического приближения определены.

Пограничные функции.

Уравнения для погранслойных функций $L_k(\xi, x)$, $k \in \mathbb{N}_0$, $\xi \geq 0$ можно получить из равенств

$$\varepsilon^4 \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} + \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2 L}{\partial \xi^2} =$$

$$= \varepsilon A_1(\bar{u}(x, \varepsilon^3\xi) + L(\xi, x, \varepsilon), x, \varepsilon^3\xi, \varepsilon) \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{1}{\varepsilon^2} A_2(\bar{u}(x, \varepsilon^3\xi) + L(\xi, x, \varepsilon), x, \varepsilon^3\xi, \varepsilon) \frac{\partial L}{\partial \xi} +$$

$$+ \varepsilon(A_1(\bar{u}(x, \varepsilon^3\xi) + L(\xi, x, \varepsilon), x, \varepsilon^3\xi, \varepsilon) - A_1(\bar{u}(x, \varepsilon^3\xi), x, \varepsilon^3\xi, \varepsilon)) \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}(x, \varepsilon^3\xi) +$$

$$+ \varepsilon(A_2(\bar{u}(x, \varepsilon^3\xi) + L(\xi, x, \varepsilon), x, \varepsilon^3\xi, \varepsilon) - A_2(\bar{u}(x, \varepsilon^3\xi), x, \varepsilon^3\xi, \varepsilon)) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}(x, \varepsilon^3\xi) +$$

$$+ B(\bar{u}(x, \varepsilon^3\xi) + L(\xi, x, \varepsilon), x, \varepsilon^3\xi, \varepsilon) - B(\bar{u}(x, \varepsilon^3\xi), x, \varepsilon^3\xi, \varepsilon). \qquad (6)$$

Подставляя суммы (3) в уравнение (6), раскладывая функции в правой части (6) в ряд Тейлора по степеням малого параметра и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим уравнения для функций $L_k(\xi, x)$, $\quad k \in \mathbb{N}_0, \quad \xi \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}$.

Условия при $\xi = 0$ для функций $L_k(\xi, x)$ получим из граничного условия при $y = 0$ задачи (1):

$$\bar{u}_0(x,0) + \varepsilon \bar{u}_1(x,0) + \ldots + L_0(0,x) + \varepsilon L_1(0,x) + \ldots = u^0(x). \qquad (7)$$

Потребуем также убывания пограничных функций на бесконечности

$$L_k(\infty, x) = 0, \quad k \in \mathbb{N}_0. \qquad (8)$$

Приравнивая коэффициенты при ε^{-2} в равенствах (6) и (7), с учетом условия (8) получим задачу для функции $L_0(\xi, x)$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 L_0}{\partial \xi^2} = A_2\left(\varphi(x,0) + L_0(\xi,x), x, 0, 0\right) \dfrac{\partial L_0}{\partial \xi}, & \xi > 0, \\ \varphi(x,0) + L_0(0,x) = u^0(x), \qquad L_0(\infty, x) = 0. \end{cases} \qquad (9)$$

Далее, введем функцию $\Phi^l(\xi, x) = \dfrac{\partial L_0}{\partial \xi}(\xi, x)$ и обозначения

$$\overline{E}^l(x) = \overline{E}(x,0), \qquad \tilde{E}^l(\xi,x) = E(\varphi(x,0) + L_0(\xi,x), x, 0, 0).$$

Задача (9) может быть эффективно проанализирована с помощью метода фазовой плоскости [1]. Для существования единственного монотонного решения потребуем.

Условие C2. Пусть для каждого $x \in \mathbb{R}$ функция

$T(\tilde{u}, x) := \int\limits_{\varphi(x,0)}^{\tilde{u}} A_2(t, x, 0, 0)dt$ не имеет нулей на интервале между $\varphi(x, 0)$ и $u^0(x)$ включительно, или выполняется равенство $\varphi(x, 0) = u^0(x)$.

Для функции $L_0(\xi, x)$ при всех для $x \in \mathbb{R}$ имеет место стандартная экспоненциальная оценка

$$|L_0(\xi, x)| < Ce^{-\kappa\xi}, \tag{10}$$

где κ, C – положительные константы, не зависящие от ε.

Приравнивая коэффициенты при ε^{-1} в уравнении (6), учитывая граничные условия (7) и условие убывания на бесконечности, получим следующие задачи для функций $L_1(\xi, x)$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 L_1}{\partial \xi^2} - \tilde{A}_2^l(\xi, x)\dfrac{\partial L_1}{\partial \xi} - \dfrac{\partial \tilde{A}_2^l}{\partial u}(\xi, x)\Phi^l(\xi, x)L_1 = f_1(\xi, x), \qquad \xi > 0, \\ L_1(0, x) + \bar{u}_1(x, 0) = 0, \qquad L_1(\infty, x) = 0. \end{cases} \tag{11}$$

где $f_1(\xi, x)$ – известная функция.

Решение задачи (11) выписывается точно

$$L_1(\xi, x) = -\bar{u}_1(x, 0)\frac{\Phi^l(\xi, x)}{\Phi^l(0, x)} + \Phi^l(\xi, 0)\int_0^\xi \frac{ds}{\Phi^l(s, x)}\int_\infty^s f_1(\eta, x)d\eta,$$

и для функций $L_1(\xi, x)$ справедлива экспоненциальная оценка, аналогичная (10).

Пограничные функции порядка $k = 2, 3, \ldots$ определяются как решения задач

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 L_k}{\partial \xi^2} - \tilde{A}_2^l(\xi, x)\dfrac{\partial L_k}{\partial \xi} - \dfrac{\partial \tilde{A}_2^l}{\partial u}(\xi, x)\Phi^l(\xi, x)L_k = f_k(\xi, x), \qquad \xi > 0, \\ L_k(0, x) + \bar{u}_k(x, 0) = 0, \qquad L_k(\infty, x) = 0. \end{cases}$$

где функции $f_k(\xi, x)$ известны. Для этих функций также справедливы экспоненциальные оценки, аналогичные (10).

Уравнения для пограничных функций $R_k(\eta, x)$, $k \in \mathbb{N}_0$, $\eta > 0$ можно получить из равенств

$$\varepsilon^4 \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 R}{\partial \eta^2} =$$

$$= \varepsilon A_1(\bar{u}(x, a-\varepsilon\eta) + R, x, a-\varepsilon\eta, \varepsilon)\frac{\partial R}{\partial x} - A_2(\bar{u}(x, a-\varepsilon\eta) + R, x, a-\varepsilon\eta, \varepsilon)\frac{\partial R}{\partial \eta} +$$

$$+ \varepsilon(A_1(\bar{u}(x, a-\varepsilon\eta) + R, x, a-\varepsilon\eta, \varepsilon) - A_1(\bar{u}(x, a-\varepsilon\eta), x, a-\varepsilon\eta, \varepsilon))\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}(x, a-\varepsilon\eta) +$$

$$+ \varepsilon(A_2(\bar{u}(x, a-\varepsilon\eta) + R, x, a-\varepsilon\eta, \varepsilon) - A_2(\bar{u}(x, a-\varepsilon\eta), x, a-\varepsilon\eta, \varepsilon))\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}(x, a-\varepsilon\eta) +$$

$$+ B(\bar{u}(x, a-\varepsilon\eta) + R, x, a-\varepsilon\eta, \varepsilon) - B(\bar{u}(x, a-\varepsilon\eta), x, a-\varepsilon\eta, \varepsilon). \quad (12)$$

Подставляя суммы (3) в уравнение (12), раскладывая функции в правой части (12) в ряд Тейлора по степеням малого параметра и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим уравнения для функций $R_k(\eta, x)$, $k \in \mathbb{N}_0$ $\eta \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$.

Условие при $\eta = 0$ для функций $R_k(\eta, x)$ следует из граничного условия при $y = a$ задачи (1):

$$\bar{u}_0(x, a) + \varepsilon \bar{u}_1(x, a) + \ldots + R_0(0, x) + \varepsilon R_1(0, x) + \ldots = u^a(x). \tag{13}$$

Потребуем также убывания пограничных функций на бесконечности

$$R_k(\infty, x) = 0, \quad k \in \mathbb{N}_0. \tag{14}$$

Приравнивая коэффициенты при ε^0 в равенствах (12) и (13) с учетом условия (14), получим следующую задачу для функции $R_0(\eta, x)$:

$$\begin{cases} A_2(\varphi(x, a) + R_0(\eta, x), x, a, 0)\dfrac{\partial R_0}{\partial \eta} = B\left(\varphi(x, a) + R_0(\eta, x), x, a, 0\right), & \eta > 0, \\ \varphi(x, a) + R_0(0, x) = u^a(x), \qquad R_0(\infty, x) = 0. \end{cases} \tag{15}$$

Далее, введем функцию $\Phi^r(\eta, x) = \dfrac{\partial R_0}{\partial \eta}(\eta, x)$ и обозначения

$$\overline{E}^r(x) = \overline{E}(x, a), \qquad \tilde{E}^r(\eta, x) = E(\varphi(x, a) + R_0(\eta, x), x, a, 0). \tag{16}$$

Задача (15) является переопределенной, поэтому для существования единственного монотонного решения, убывающего на бесконечности потребуем выполнения следующего условия.

Условие С3. Пусть для всех $x \in \mathbb{R}$ функция $D(\tilde{u}, x) := A_2(\tilde{u}, x, a, 0)B(\tilde{u}, x, a, 0)$ не имеет нулей в интервале $\varphi(x, a)$ и $u^a(x)$ включительно, или выполняется равенство $\varphi(x, a) = u^a(x)$.

Для решения задачи (15) справедлива оценка

$$|R_0(\eta, x)| < Ce^{-\kappa\eta}, \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{17}$$

где κ, C – положительные константы, не зависящие от ε.

Теорема

Пусть выполнены условия ***C1-C3****. Тогда при достаточно малых* ε *существует решение* $u_\varepsilon(x, y)$ *задачи (1), для которого функция* $U_n(x, y, \varepsilon)$ *является равномерным в* $\overline{D}$ *асимптотическим приближением с точностью* $O\left(\varepsilon^{n+1}\right)$*, то есть всюду в* $\overline{D}$ *выполняется неравенство*

$$|u_\varepsilon(x, y, \varepsilon) - U_n(x, y, \varepsilon)| < C\varepsilon^{n+1}, \tag{18}$$

где $C > 0$*.*

Доказательство теоремы проведем методом дифференциальных неравенств [2], построив верхнее и нижнее решения путем модификации полученного выше асимптотического приближения.

Определение

L-периодические по переменной x функции $\beta(x,y,\varepsilon) \in C(\overline{D}) \cap C^2(D)$ и $\alpha(x,y,\varepsilon) \in C(\overline{D}) \cap C^2(D)$ называются, соответственно, верхним и нижним решениями задачи (1), если при достаточно малых ε выполняются следующие условия:

1) функции $\beta(x,y,\varepsilon)$ и $\alpha(x,y,\varepsilon)$ образуют упорядоченную пару, т.е.
$$\alpha(x,y,\varepsilon) \le \beta(x,y,\varepsilon), \qquad (x,y) \in \overline{D};$$

2) при действии дифференциального оператора из уравнения (1) на эти функции выполняются неравенства:
$$L_\varepsilon[\beta] := \varepsilon^4 \Delta\beta - \varepsilon\left(\vec{A}(\beta,x,y,\varepsilon),\vec{\nabla}\right)\beta - B(\beta,x,y,\varepsilon) \le 0, \qquad (x,y) \in \overline{D}$$
$$L_\varepsilon[\alpha] := \varepsilon^4 \Delta\alpha - \varepsilon\left(\vec{A}(\alpha,x,y,\varepsilon),\vec{\nabla}\right)\alpha - B(\alpha,x,y,\varepsilon) \ge 0, \qquad (x,y) \in \overline{D};$$

3) выполнены условия на границах:
$$\alpha(x,0,\varepsilon) \le u^0(x) \le \beta(x,0,\varepsilon), \quad \alpha(x,a,\varepsilon) \le u^a(x) \le \beta(x,a,\varepsilon), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Согласно доказанному в [3, 4], если существуют верхнее и нижнее решения задачи (1), то существует решение $u_\varepsilon(x,y)$ задачи (1), заключенное между верхним и нижним решениями:
$$\alpha(x,y,\varepsilon) \le u_\varepsilon(x,y,\varepsilon) \le \beta(x,y,\varepsilon), \qquad (x,y) \in \overline{D}. \tag{19}$$

Докажем теорему для случая $n = 0$, т.е. построим функции $\beta_1(x, y, \varepsilon)$ – верхнее решение и $\alpha_1(x, y, \varepsilon)$ – нижнее решение, обеспечивающие выполнение оценки $|u_\varepsilon(x, y, \varepsilon) - U_0(x, y, \varepsilon)| < C\varepsilon$. Построение верхнего и нижнего решений произвольного порядка точности будет достаточно очевидным обобщением.

Будем строить верхнее и нижнее решения $\beta_1(x, y, \varepsilon)$ и $\alpha_1(x, y, \varepsilon)$ задачи (1) путем модификации полученного ранее асимптотического приближения, а именно:

$$\beta_1(x, y, \varepsilon) = U_3(x, y, \varepsilon) + \varepsilon\gamma + \varepsilon L_{q,1}(\xi, x) + \varepsilon^2 L_{q,2}(\xi, x) + \varepsilon^3 L_{q,3}(\xi, x) + \varepsilon R_{q,1}(\eta, x),$$
$$(x, y) \in \overline{D}, \qquad \xi,\ \eta \geq 0, \qquad (20)$$

$$\alpha_1(x, y, \varepsilon) = U_3(x, y, \varepsilon) - \varepsilon\gamma - \varepsilon L_{q,1}(\xi, x) - \varepsilon^2 L_{q,2}(\xi, x) - \varepsilon^3 L_{q,3}(\xi, x) - \varepsilon R_{q,1}(\eta, x),$$
$$(x, y) \in \overline{D}, \qquad \xi,\ \eta \geq 0, \qquad (21)$$

где постоянные $\gamma > 0$ и функции $L_{\beta,k}(\xi, x)$, $\ k = 1, 2, 3$ и $R_{\beta,1}(\eta, x)$ выбираются таким образом, чтобы были выполнены неравенства 1) – 3) из определения 2.

Заметим, что в стандартной схеме метода дифференциальных неравенств [2] для получения функций $\beta_1(x,y,\varepsilon)$ и $\alpha_1(x,y,\varepsilon)$ требуется модификация только членов формальной асимптотики первого порядка. Особенностью рассматриваемой в данной работе задачи является наличие сильно разномасштабных процессов – сверхслабой диффузия порядка ε^4 и слабой адвекции порядка ε, – что приводит к появлению асимметричных погранслоев, и для выполнения дифференциальных неравенств требуется модификация членов формальной асимптотики до третьего порядка.

Определим функции пограничного слоя $L_{q,k}(\xi,x)$ $(k=1,2,3)$ и $R_{q,1}(\eta,x)$ как решения следующих задач.

Для левого пограничного слоя:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 L_{q,1}}{\partial \xi^2} - \tilde{A}_2^l(\xi,x)\dfrac{\partial L_{q,1}}{\partial \xi} - \dfrac{\partial \tilde{A}_2^l}{\partial u}(\xi,x)\Phi^l(\xi,x)L_{q,1} = f_{q,1}(\xi,x) - d_l\, \mathrm{e}^{-\mu_l \xi}, \quad \xi > 0, \\ L_{q,1}(0,x) = 0, \qquad L_{q,1}(\infty,x) = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 L_{q,k}}{\partial \xi^2} - \tilde{A}_2^l(\xi,x)\dfrac{\partial L_{q,k}}{\partial \xi} - \dfrac{\partial \tilde{A}_2^l}{\partial u}(\xi,x)\Phi^l(\xi,x)L_{q,k} = f_{q,k}(\xi,x), \quad \xi > 0, \quad i = 2,3, \\ L_{q,k}(0,x) = 0, \qquad L_{q,k}(\infty,x) = 0. \end{cases}$$

Правые части $f_{q,k}(\xi,x)$ формируются из коэффициентов разложения по степеням ε невязки при проверке операторного дифференциального неравенства 2): $f_{q,1}(\xi,x)$ соответствует слагаемым порядка ε^{-1}, $f_{q,2}(\xi,x)$ — порядка ε^{0}, а $f_{q,3}(\xi,x)$ — порядка ε^{1}. В частности, на первом шаге $f_{q,1}(\xi,x) = \dfrac{\partial \tilde{A}_2^l}{\partial u}(\xi,x)\Phi^l(\xi,x)\gamma$, а функции $f_{q,k}$ при $k=2,3$ имеют более сложную структуру, зависящую как от регулярной поправки γ, так и от ранее найденных функций $L_{q,1}(\xi,x),\ldots,L_{q,k-1}(\xi,x)$. Положительные константы d_l,μ_l выбираются так, чтобы $L_{q,1}(\xi,x)\geq 0$ при $\xi\geq 0, x\in\mathbb{R}$.

Для правого пограничного слоя:

$$\begin{cases} \tilde{A}_2^r(\eta,x)\dfrac{\partial R_{q,1}}{\partial \eta} + \dfrac{\partial \tilde{A}_2^r}{\partial u}(\eta,x)\Phi^r(\eta,x)R_{q,1} = \dfrac{\partial \tilde{B}^r}{\partial u}(\eta,x)R_{q,1} + g_{q,1}(\eta,x) - d_r\,\mathrm{e}^{-\mu_r\eta}, \\ R_{q,1}(0,x)=0, \qquad R_{q,1}(\infty,x)=0. \end{cases}$$

Здесь $g_{q,1}(\eta,x)$ определяется аналогично функциям $f_{q,k}(\xi,x)$, а константы $d_r,\mu_r>0$ выбираются из условия неотрицательности $R_{q,1}(\eta,x)$.

Лемма

Для функций $\beta_1(x,y,\varepsilon)$, $\alpha_1(x,y,\varepsilon)$ выполняются неравенства 1)–3).

1) Для доказательства упорядоченности функций $\beta_1(x,y,\varepsilon)$ и $\alpha_1(x,y,\varepsilon)$ рассмотрим разность этих функций:

$$\beta_1(x,y,\varepsilon)-\alpha_1(x,y,\varepsilon)=2\varepsilon(\gamma+L_{q,1}(\xi,x)+R_{q,1}(\eta,x))+O\left(\varepsilon^2\right). \qquad (22)$$

Постоянная γ принимает положительные значения для всех $(x,y)\in\overline{D}$, а функция $L_{q,1}(\xi,x)$ неотрицательна для всех $\xi\geq 0,\ x\in\mathbb{R}$, функция $R_{q,1}(\eta,x)$ – для всех $\eta\geq 0,\ x\in\mathbb{R}$, поэтому правая часть последнего выражения положительна.

2) В силу построения функций пограничного слоя $L_{q,k}(\xi,x),\ k=1,2,3$ и $R_{q,1}(\eta,x)$ результат действия оператора на верхнее и нижнее решения L_ε имеет вид

$$\begin{aligned}
L_\varepsilon[\beta_1]&=-\varepsilon^{-1}d_l\cdot e^{-\mu_l\xi}-\varepsilon\gamma\overline{B_u}(x,y)-\varepsilon d_r\cdot e^{-\mu_r\eta}+O(\varepsilon^2),\\
L_\varepsilon[\alpha_1]&=\varepsilon^{-1}d_l\cdot e^{-\mu_l\xi}+\varepsilon\gamma\overline{B_u}(x,y)+\varepsilon d_r\cdot e^{-\mu_r\eta}+O(\varepsilon^2).
\end{aligned} \qquad (23)$$

Дифференциальные неравенства 2) выполняются при достаточно малых ε.

Неравенство 3) выполняется в силу положительности γ.

Лемма доказана.Следовательно, доказана и теорема 1.

Локальная единственность и асимптотическая устойчивость стационарного решения.

Рассмотрим следующую начально-краевую задачу в области $(x, y, t) \in \mathbb{R} \times [0, a] \times \mathbb{R}^+$ с периодическими условиями по переменной x:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} = \varepsilon^4 \Delta v - \varepsilon\big(\vec{A}(v, x, y, \varepsilon), \vec{\nabla}\big) v - B(v, x, y, \varepsilon), & (x, y) \in \mathbb{R} \times (0, a), \quad t > 0, \\ v(x, 0, t, \varepsilon) = u^0(x), \quad v(x, a, t, \varepsilon) = u^a(x), & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ v(x + L, y, t, \varepsilon) = v(x, y, t, \varepsilon), & x \in \mathbb{R}, \quad y \in [0, a], \quad t > 0, \\ v(x, y, 0, \varepsilon) = v_{\mathrm{init}}(x, y, \varepsilon), & (x, y) \in \overline{D}. \end{cases} \tag{24}$$

Доказательство локальной единственности и асимптотической устойчивости стационарного решения задачи (24), существование которого доказано в предыдущем разделе, основано на использовании метода верхних и нижних решений. Напомним определение.

Определение

L-периодические по переменной x функции $\hat{\beta}(x,y,t,\varepsilon)$, $\hat{\alpha}(x,y,t,\varepsilon)$ $\in C(\overline{D}\times[0;T])\cap C^{2,1}(D\times(0;T])$ называются верхним и нижним решениями задачи (24), если выполняются следующие условия:

1^0. $\hat{\alpha}(x,y,t,\varepsilon)\le\hat{\beta}(x,t,y,\varepsilon), \qquad (x,y)\in\overline{D}, \quad t>0.$

2^0. $L_t[\hat{\beta}]:=\varepsilon^4\Delta\hat{\beta}-\dfrac{\partial\hat{\beta}}{\partial t}-\varepsilon\left(\vec{A}(\hat{\beta},x,y,\varepsilon),\vec{\nabla}\right)\hat{\beta}-B(\hat{\beta},x,y,\varepsilon)\le 0, \quad (x,y)\in D, \ \ t>0$

$L_t[\hat{\alpha}]:=\varepsilon^4\Delta\hat{\alpha}-\dfrac{\partial\hat{\alpha}}{\partial t}-\varepsilon\left(\vec{A}(\hat{\alpha},x,y,\varepsilon),\vec{\nabla}\right)\hat{\alpha}-B(\hat{\alpha},x,y,\varepsilon)\ge 0, \quad (x,y)\in D, \ \ t>0;$

3^0. $\hat{\alpha}(x,0,t,\varepsilon)\le u^0(x)\le\hat{\beta}(x,0,t,\varepsilon), \qquad x\in\mathbb{R}, \quad t>0$

$\hat{\alpha}(x,a,t,\varepsilon)\le u^a(x)\le\hat{\beta}(x,a,t,\varepsilon), \qquad x\in\mathbb{R}, \quad t>0;$

4^0. $\hat{\alpha}(x,y,0,\varepsilon)\le v_{init}(x,y,\varepsilon)\le\hat{\beta}(x,y,0,\varepsilon), \qquad (x,y)\in\overline{D}.$

Известно (см., например, [4]), что если существуют верхнее и нижнее решения задачи (24), то существует единственное решение $v_\varepsilon(x, y, t, \varepsilon)$ задачи (24), заключенное между верхним и нижним решениями:

$$\hat{\alpha}(x, y, t, \varepsilon) \leq v_\varepsilon(x, y, t, \varepsilon) \leq \hat{\beta}(x, y, t, \varepsilon). \tag{25}$$

Верхнее и нижнее решения задачи (24) мы будем строить аналогично [2] в виде

$$\hat{\beta}(x, y, t, \varepsilon) = u_\varepsilon(x, y, \varepsilon) + (\beta_{n+1}(x, y, \varepsilon) - u_\varepsilon(x, y, \varepsilon))e^{-\lambda t}, \tag{26}$$

$$\hat{\alpha}(x, y, t, \varepsilon) = u_\varepsilon(x, y, \varepsilon) + (\alpha_{n+1}(x, y, \varepsilon) - u_\varepsilon(x, y, \varepsilon))e^{-\lambda t}, \tag{27}$$

где $u_\varepsilon(x, y, \varepsilon)$ – решение задачи (1), существование которого доказано в теореме 1. Функции $\beta_{n+1}(x, y, \varepsilon)$ и $\alpha_{n+1}(x, y, \varepsilon)$ – верхнее и нижнее решения стационарной задачи, построенные путем модификаций регулярной части в $n+1$-ом порядке, а λ – положительная константа.

Теорема

*Пусть выполнены условия **C1-C3**. Тогда при достаточно малых ε решение $u_\varepsilon(x, y, \varepsilon)$ задачи (1), для которого функция $U_n(x, y, \varepsilon)$ является асимптотическим приближением, локально единственно и асимптотически устойчиво по Ляпунову с областью устойчивости, по крайней мере $[\alpha_3; \beta_3]$.*

Заметим, что эти функции удовлетворяют условиям 1^0 и 3^0 из определения 4, поскольку для функций $\alpha_{n+1}(x, y, \varepsilon)$ и $\beta_{n+1}(x, y, \varepsilon)$ выполняются условия 1) и 3) из определения 2. Условие 4^0 выполняется, если $\hat{\alpha}(x, y, 0, \varepsilon) = \alpha_{n+1}(x, y, \varepsilon) \leq v_{init}(x, y, \varepsilon) \leq \hat{\beta}(x, y, 0, \varepsilon) = \beta_{n+1}(x, y, \varepsilon)$.

Для того, чтобы показать выполнение неравенства 2^0 из определения 4, нам понадобится следующая лемма.

Лемма

Если $\alpha_{n+1}(x,y,\varepsilon)$, $\beta_{n+1}(x,y,\varepsilon)$ *– нижнее и верхнее решения задачи* (1), *определенные выражениями* (20) *и* (21), *а* $u_\varepsilon(x,y)$ *– решение задачи* (1), *существующее согласно теореме 1, то всюду в области* $\overline{D}$ *справедливы следующие оценки:*

$$\left|\frac{\partial(\beta_{n+1}(x,y,\varepsilon)-u_\varepsilon(x,y))}{\partial x}\right| = O(\varepsilon^{n-2}),$$

$$\left|\frac{\partial(\beta_{n+1}(x,y,\varepsilon)-u_\varepsilon(x,y))}{\partial y}\right| = O(\varepsilon^{n-2}),$$

$$\left|\frac{\partial(\alpha_{n+1}(x,y,\varepsilon)-u_\varepsilon(x,y))}{\partial x}\right| = O(\varepsilon^{n-2}),$$

$$\left|\frac{\partial(\alpha_{n+1}(x,y,\varepsilon)-u_\varepsilon(x,y))}{\partial y}\right| = O(\varepsilon^{n-2}).$$

Перейдем к доказательству основного результата этого раздела. Действуя оператором L_t на функцию $\hat{\beta}$, придем к равенству

$$L_t[\hat{\beta}] = \varepsilon^4 \Delta\hat{\beta} - \varepsilon\left(\vec{A}(\hat{\beta}, x, y, \varepsilon), \vec{\nabla}\right)\hat{\beta} - B(\hat{\beta}, x, y, \varepsilon) + \lambda\left(\beta_{n+1} - u_\varepsilon\right)\mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

После некоторых преобразований получим:

$$\begin{gathered} L_t[\hat{\beta}] = L_\varepsilon[u_\varepsilon] + \mathrm{e}^{-\lambda t}(L_\varepsilon[\beta_{n+1}] - L_\varepsilon[u_\varepsilon]) + \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}(\beta_{n+1} - u_\varepsilon) + \\ + \varepsilon\left(\mathrm{e}^{-\lambda t} - 1\right)\left(\vec{A}(u_\varepsilon, x, y, \varepsilon) - \vec{A}(\hat{\beta}, x, y, \varepsilon), \vec{\nabla}\right)(\beta_{n+1} - u_\varepsilon) + \\ + \varepsilon \mathrm{e}^{-\lambda t}\left(\vec{A}(\beta_{n+1}, x, y, \varepsilon) - \vec{A}(u_\varepsilon, x, y, \varepsilon), \vec{\nabla}\right)\beta_{n+1} + \\ + \varepsilon\left(\vec{A}(u_\varepsilon, x, y, \varepsilon) - \vec{A}(\hat{\beta}, x, y, \varepsilon), \vec{\nabla}\right)\beta_{n+1} + \\ + \mathrm{e}^{-\lambda t}(B(\beta_{n+1}, x, y, \varepsilon) - B(u_\varepsilon, x, y, \varepsilon)) + (B(u_\varepsilon, x, y, \varepsilon) - B(\hat{\beta}, x, y, \varepsilon)), \end{gathered}$$

где оператор L_ε определен в условии 2) определения 2.

Учитывая, что согласно уравнению (1), $L_\varepsilon[u_\varepsilon] = 0$, а также первое равенство в (23) и некоторые следствия формулы Лагранжа, преобразуем последнее равенство к виду

$$L_t[\hat{\beta}] = \mathrm{e}^{-\lambda t}\Big(-\varepsilon^{n-1}d_l\cdot \mathrm{e}^{-\mu_l\xi} - \varepsilon^{n+1}\gamma\overline{B_u}(x,y) - \varepsilon^{n+1}d_r\cdot \mathrm{e}^{-\mu_r\eta} + \lambda(\beta_n - u_\varepsilon) -$$

$$-\,\varepsilon\left(\mathrm{e}^{-\lambda t}-1\right)(\beta_{n+1}-u_\varepsilon)(\vec{A}_u^*,\vec{\nabla})(\beta_{n+1}-u_\varepsilon) +$$

$$+\,\varepsilon\,(\beta_{n+1}-u_\varepsilon)^2\left(\theta_1-\theta_2\mathrm{e}^{-\lambda t}\right)(\vec{A}_{uu}^*,\vec{\nabla})\beta_{n+1}\Big) +$$

$$+\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\left((\beta_{n+1}-u_\varepsilon)^2\left(\theta_4-\theta_5\mathrm{e}^{-\lambda t}\right)B_{uu}^* + O\left(\varepsilon^{n+2}\right)\right), \quad (28)$$

где

$$\vec{A}_u^* = \vec{A}_u\left(u_\varepsilon + \theta_0(\beta_{n+1}-u_\varepsilon)\mathrm{e}^{-\lambda t}, x, y, \varepsilon\right),$$

$$\vec{A}_{uu}^* = \vec{A}_{uu}\left(u_\varepsilon + \theta_1(\beta_{n+1}-u_\varepsilon) + \theta_3(\beta_{n+1}-u_\varepsilon)\left(\theta_1-\theta_2\mathrm{e}^{-\lambda t}\right), x, y, \varepsilon\right),$$

$$B_{uu}^* = B_{uu}\left(u_\varepsilon + \theta_4(\beta_{n+1}-u_\varepsilon) + \theta_6(\beta_{n+1}-u_\varepsilon)\left(\theta_4-\theta_5\mathrm{e}^{-\lambda t}\right), x, y, \varepsilon\right),$$

$$0<\theta_i<1, \qquad i=\overline{0,6}.$$

В силу неравенств (19) и (18) для всех $(x,y)\in\overline{D}$ справедлива оценка

$$\beta_{n+1}(x,y,\varepsilon) - u_\varepsilon(x,y,\varepsilon) = O(\varepsilon^{n+1}).$$

Из (26) следует, что

$$(\vec{A}_u^*, \vec{\nabla})(\beta_{n+1}(x, y, \varepsilon) - u_\varepsilon(x, y, \varepsilon)) = O(\varepsilon^{n-2}), \qquad (x, y) \in \overline{D}.$$

При $n \geq 2$ и достаточно малых ε правая часть (28) становится отрицательной при больших положительных γ, поэтому условие 2^0 для $\hat{\beta}$ выполняется. Таким образом, $\hat{\beta}(x, y, t, \varepsilon)$ — верхнее решение задачи (24); аналогично $\hat{\alpha}(x, y, t, \varepsilon)$ — нижнее решение. Из (26) (при $n = 2$) и (25) следует, что для любой начальной функции $v_{init}(x, y, \varepsilon)$ задачи (24) с $\alpha_3(x, y, \varepsilon) \leq v_{init}(x, y, \varepsilon) \leq \beta_3(x, y, \varepsilon)$ для всех $(x, y) \in \overline{D}$ выполняется

$$\lim_{t \to +\infty} |v_\varepsilon(x, y, t, \varepsilon) - u_\varepsilon(x, y, \varepsilon)| = 0, \tag{29}$$

где v_ε — решение (24). Это означает асимптотическую устойчивость по Ляпунову стационарного решения $u_\varepsilon(x, y, \varepsilon)$ задачи (1).

Единственность v_ε и (29) гарантируют единственность $u_\varepsilon(x, y, \varepsilon)$ в интервале $[\alpha_3(x, y, \varepsilon); \beta_3(x, y, \varepsilon)]$ (ширина $O(\varepsilon^3)$).

Теорема 5 доказана.

Пример.

Рассмотрим следующий пример

$$\varepsilon^4 \Delta u = -\varepsilon V \frac{\partial u}{\partial y} + u - \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right), \quad (x, y) \in \mathbb{R} \times (0, a),$$

$$u(x, 0, \varepsilon) = 2\cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right), \quad u(x, a, \varepsilon) = 3\cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right), \quad u(x + L, y, \varepsilon) = u(x, y, \varepsilon), \tag{30}$$

где $V > 0$.

Используя метод разделения переменных (метод Фурье), нетрудно записать точное решение задачи:

$$u(x, y, \varepsilon) = 2\cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\left[u_p + \frac{(1 - u_p)e^{-\alpha y}\sinh[\beta(a - y)] + \left(\frac{3}{2} - u_p\right) e^{\alpha(a-y)}\sinh(\beta y)}{\sinh(\beta a)}\right], \tag{31}$$

где

$$\alpha = \frac{V}{2\varepsilon^3}, \quad \beta = \frac{\sqrt{V^2 + 4\varepsilon^2(1 + 4\pi^2\varepsilon^4/L^2)}}{2\varepsilon^3}, \quad u_p = \frac{1}{2(1 + 4\pi^2\varepsilon^4/L^2)} \tag{32}$$

Получим асимптотику решения задачи (30), используя метод Васильевой. Действительно, $u_0(x, y) = \varphi(x, y) =$ и **Условие C1** выполнено.

Задача для $L_0(\xi, x)$ имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 L_0}{\partial \xi^2} = -V\dfrac{\partial L_0}{\partial \xi}, \ \xi > 0, \\ \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right) + L_0(0, x) = 2\cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right), \quad L_0(\infty, x) = 0. \end{cases} \tag{33}$$

Точное решение

$$L_0(\xi, x) = \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right) e^{-V\xi} \tag{34}$$

Задача для $R_0(\eta, x)$ имеет вид

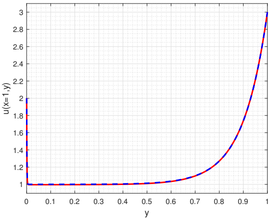
$$\begin{cases} -V\dfrac{\partial R_0}{\partial \eta} = R_0, \ \eta > 0, \\ \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right) + R_0(0, x) = 3\cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right), \quad L_0(\infty, x) = 0. \end{cases} \tag{35}$$

Точное решение

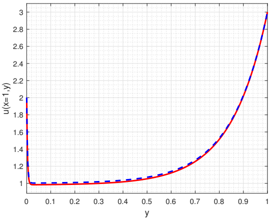
$$R_0(\eta, x) = 2\cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right) e^{-\eta/V} \tag{36}$$

График.

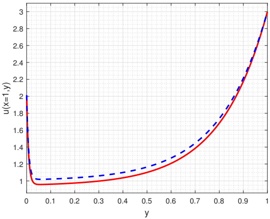
Сравнение точного решения с построенным асимптотическим приближением при различных значениях параметра ε : сплошная линия – точное решение; пунктирная – асимптотическое приближение.



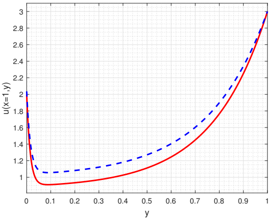
$\varepsilon = \mathbf{0.1}$



$\varepsilon = \mathbf{0.15}$



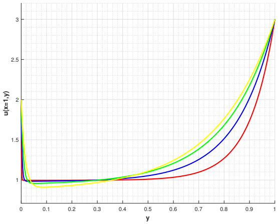
$\varepsilon = \mathbf{0.2}$



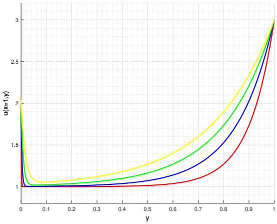
$\varepsilon = \mathbf{0.25}$

Точное решение и асимптотическое приближение при различных значениях ε :

сплошная линия – при $\varepsilon = 0.1$; сплошная линия – при $\varepsilon = 0.15$;
сплошная линия – при $\varepsilon = 0.2$; сплошная линия – при $\varepsilon = 0.25$.



Точное решение для различных ε



Асимптотическое приближение для различных ε

Список литературы.

[1] Levashova N.T., Nefedov N.N., Nikolaeva O.A., "Existence and asymptotic stability of a stationary boundary-layer solution of the two-dimensional reaction–diffusion–advection problem", *Differential Equations*, **56**:2, (2020), 199–211.

[2] Н.Н. Нефедов, "Развитие методов асимптотического анализа переходных слоев в уравнениях реакция-диффузия-адвеция: теория и применение", *ЖВМ и МФ*, **61**:12, (2021), 2074–2094.
N. N. Nefedov, "Development of Methods of Asymptotic Analysis of TransitionLayers in Reaction–Diffusion–Advection Equations: Theory and Applications", *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **61**:12, (2021), 2068–2087.

[3] C.V. Pao, "Nonlinear parabolic and elliptic equations", *Plenum Press, New York* (1992), 777 p.

[4] J. Wang, "Monotone method for diffusion equations with nonlinear diffusion coefficients", *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, **34**:1 (1998), 113-142.