

# Движение фронта в задаче реакция-диффузия с нелинейной диффузией.

Махмудов А. Р., Орлов А. О., Никулин Е. И., Аргун Р. Л.

Физический факультет, МГУ, Москва

## Постановка задачи

$$\begin{aligned}\varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial x} \left( D(u, x, \varepsilon) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \varepsilon^2 \frac{\partial u}{\partial t} - f(u, x, \varepsilon) &= 0, \quad x \in (-1, 1), \quad t \in (0, T], \\ \frac{\partial u}{\partial x}(-1, t, \varepsilon) &= 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(1, t, \varepsilon) = 0, \quad t \in [0, T], \\ u(x, 0, \varepsilon) &= u_{init}(x, \varepsilon), \quad x \in [-1, 1],\end{aligned}\tag{1}$$

где  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$  - малый параметр.

Пусть выполнены условия:

### Условие (A1)

Функции  $f(u, x, \varepsilon)$ ,  $D(u, x, \varepsilon) \geq D_0 > 0$  являются достаточно гладкими в своих областях определения.

### Условие (A2)

Пусть вырожденное уравнение  $f(u, x, 0) = 0$  имеет ровно три решения  $u = \varphi^{(\pm, 0)}(x)$ , причем  $\varphi^{(-)}(x) < \varphi^{(0)}(x) < \varphi^{(+)}(x)$ ,  $x \in [-1, 1]$ , а также выполнены неравенства

$$f_u(\varphi^{(\pm)}(x), x, 0) > 0, \quad f_u(\varphi^{(0)}(x), x, 0) < 0, \quad x \in [-1, 1].$$

### Условие (A3)

Пусть начальная функция  $u_{init}(x, \varepsilon)$  представляет собой сформировавшуюся контрастную структуру типа ступеньки с устойчивыми положениями равновесия  $\varphi^{(\pm)}(x)$ . Начальное положение фронта известно и задается координатой  $x_{00} \in (-1, 1)$ .

## Построение асимптотики

Используя алгоритм Васильевой А.Б., строим формальную асимптотику для нашей задачи. Для нулевой задачи имеем:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( D(\tilde{u}^{(\pm)}, \hat{x}, 0) \frac{\partial \tilde{u}^{(\pm)}}{\partial \xi} \right) + S\hat{x} \frac{\partial \tilde{u}^{(\pm)}}{\partial \xi} = f(\tilde{u}^{(\pm)}, \hat{x}, 0), & \xi \geq 0, \\ \tilde{u}^{(\pm)}(0, t, \varepsilon) = \varphi^{(0)}(\hat{x}), & \tilde{u}^{(\pm)}(\pm\infty, t, \varepsilon) = \varphi^{(\pm)}(\hat{x}). \end{cases} \quad (2)$$

Наряду с этой задачей рассмотрим следующую:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( D(\hat{u}, x, 0) \frac{\partial \hat{u}}{\partial \xi} \right) + W(x) \frac{\partial \hat{u}}{\partial \xi} = f(\hat{u}, x, 0), & \xi \in \mathbb{R}, \\ \hat{u}(0, x) = \varphi^{(0)}(x), & \hat{u}(\pm\infty, x) = \varphi^{(\pm)}(x). \end{cases} \quad (3)$$

Результат исследования задачи (3) сформулируем в виде леммы.

# Решение присоединённой задачи

## Лемма

Для каждого  $x \in (-1, 1)$  существует единственная величина  $W$  такая, что задача (3) имеет единственное гладкое монотонное решение  $\hat{u}(\xi, x)$ , удовлетворяющее оценке

$$|\hat{u}(\xi, x) - \varphi^{(\pm)}(x)| < C \exp(-\kappa|\xi|), \quad \xi \in \mathbb{R},$$

где  $C$  и  $\kappa$  – некоторые положительные постоянные. При этом зависимость  $W(x)$  определяется следующим выражением:

$$W(x) = \frac{\int_{\varphi^{(-)}(x)}^{\varphi^{(+)}(x)} f(u, x, 0) D(u, x, 0) du}{\int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{\partial \hat{u}}{\partial \xi}(\xi, x) \right)^2 D(\hat{u}(\xi, x), x, 0) d\xi}.$$

## Решение нулевой задачи

Потребуем выполнение условия

### Условие (A4)

Пусть задача

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = W(x), & t \in (0, T], \\ x(0) = x_{00} \end{cases}$$

имеет решение  $x = x_0(t)$ :  $-1 < x_0(t) < 1$  при  $t \in [0, T]$ . Потребуем также, чтобы  $W(x) \neq 0$  для всех  $x \in [-1; 1]$ .

В таком случае можно показать, что существование решения задачи (3) влечёт существование решения задачи (2) с аналогичными свойствами. Асимптотика нулевого порядка построена.

## Функции высших порядков

В первом порядке имеем:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \tilde{D}(\xi, t, \varepsilon) \frac{\partial Q_1^{(\pm)}}{\partial \xi} + \tilde{D}_u(\xi, t, \varepsilon) \frac{\partial \tilde{u}^{(\pm)}}{\partial \xi} Q_1^{(\pm)} \right) + S \hat{x} \frac{\partial Q_1^{(\pm)}}{\partial \xi} - \\ - \tilde{f}_u(\xi, t, \varepsilon) Q_1^{(\pm)} = r_1^{(\pm)}(\xi, t, \varepsilon), \quad \xi \geq 0, \\ Q_1^{(\pm)}(0, t, \varepsilon) + \tilde{u}_1^{(\pm)}(\hat{x}) = 0, \quad Q_1^{(\pm)}(\pm\infty, t, \varepsilon) = 0, \end{cases} \quad (4)$$

где  $r_1^{(\pm)}$  - известная функция. Задача линейна и решение может быть найдено в квадратурах.

Аналогично строятся функции  $Q_n^{(\pm)}$  переходного слоя старших порядков.

## Определение положения фронта

Неизвестные коэффициенты  $x_i(t)$ ,  $i = 1, 2, \dots$  разложения определяются из условий сшивания производных асимптотик. Введем функцию

$$H(\varepsilon, t) := \varepsilon \left( \frac{dU^{(+)}}{dx}(\hat{x}, t, \varepsilon) - \frac{dU^{(-)}}{dx}(\hat{x}, t, \varepsilon) \right) = H_0(\varepsilon, t) + \varepsilon H_1(\varepsilon, t) + \dots,$$

где

$$H_0(\varepsilon, t) = \frac{\partial Q_0^{(+)}}{\partial \xi}(0, \hat{x}) - \frac{\partial Q_0^{(-)}}{\partial \xi}(0, \hat{x}),$$

$$H_1(\varepsilon, t) = \frac{d\varphi^{(+)}}{dx}(\hat{x}) - \frac{d\varphi^{(-)}}{dx}(\hat{x}) + \left( \frac{\partial Q_1^{(+)}}{\partial \xi}(0, t, \varepsilon) - \frac{\partial Q_1^{(-)}}{\partial \xi}(0, t, \varepsilon) \right),$$

и т.д.

Условие  $C^1$  сшивания выражается равенством  $H(t, \varepsilon) = 0$ . В силу Леммы и Условия (A3) это равенство выполнено в порядке  $\varepsilon^0$ .

Анализ задач (2) и (3) показывает, что функция  $H_0(t, \varepsilon)$  может быть представлена в виде:

$$H_0(t, \varepsilon) = (S\hat{x} - W(\hat{x})) \frac{1}{\tilde{D}^2(0, t, 0)\tilde{v}(0, t, 0)} \int_{-\infty}^{+\infty} p(\xi, t, 0)\tilde{D}(\xi, t, 0)\tilde{v}^2(\xi, t, 0)d\xi + O(\varepsilon^2).$$

Получаем для компонент  $x_i$ ,  $i \geq 1$  задачи

$$\begin{cases} \frac{dx_i}{dt} - W'(x_0(t))x_i(t) = G_i(t), & t \in (0, T], \\ x_i(0) = 0, \end{cases}$$

где  $G_i(t)$  — известные функции, выражающиеся через уже построенные члены асимптотики меньших порядков.

Построение асимптотики закончено.

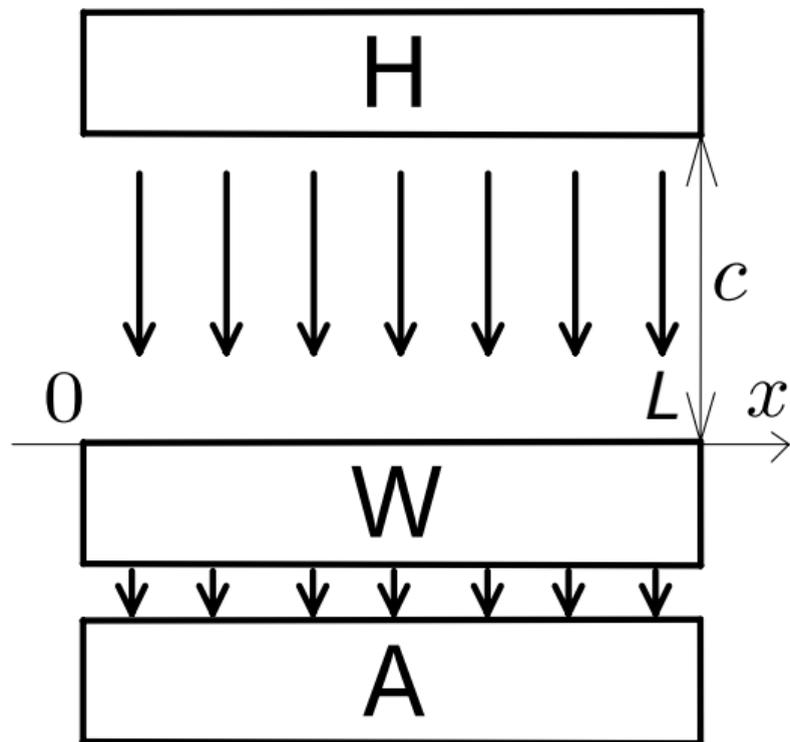
## Theorem

При выполнении **Условий А1–А4** для любой достаточно гладкой начальной функции  $u_{init}(x)$ , лежащей между верхним и нижним решениями

$$\alpha(x, 0, \varepsilon) \leq u_{init}(x, \varepsilon) \leq \beta(x, 0, \varepsilon),$$

существует единственное решение  $u(x, t, \varepsilon)$  рассматриваемой задачи, которое при любом  $t \in [0, T]$  заключено между этими верхним и нижним решениями, и для которого функция  $U_n(x, t, \varepsilon)$  является равномерным в области  $[-1, 1] \times [0, T]$  асимптотическим приближением с точностью  $O(\varepsilon^{n+1})$ .

# Пример - модель нагрева кремниевой пластины



Процесс описывается уравнением

$$-C\rho d \frac{\partial T_w}{\partial t} + d \frac{\partial}{\partial x} \left( \kappa(T_w) \frac{\partial T_w}{\partial x} \right) = -(q_{\text{in}}^r - q_{\text{out}}^r - h_{\text{eff}}(T_w - T_a)) =: -q(T_w, x)$$

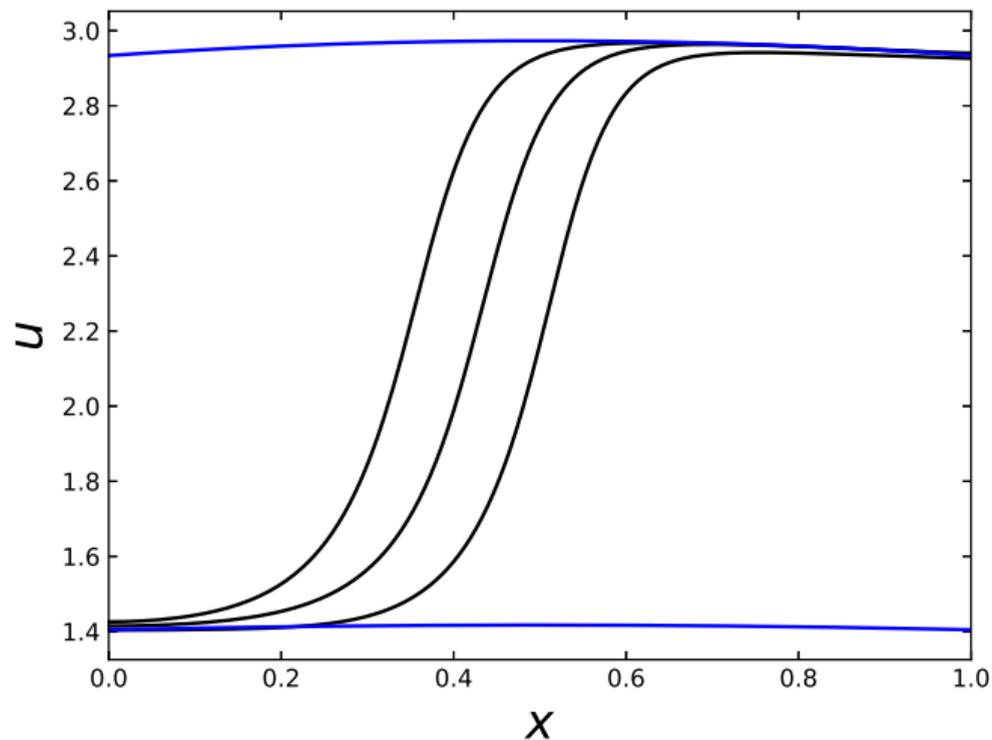
где  $\rho$  — плотность кремния,  $C$  — его удельная теплоёмкость,  $d$  — толщина пластины,  $T_w(x, t)$  — температура пластины,  $t$  — время,  $x$  — декартова координата в плоскости пластины,  $\kappa(T_w)$  — зависящий от температуры коэффициент теплопроводности кремния,  $q_{\text{in}}^r$  и  $q_{\text{out}}^r$  — плотности входящего и выходящего радиационных тепловых потоков соответственно,  $h_{\text{eff}}$  — эффективный коэффициент теплообмена с окружающей средой,  $T_a$  — температура поглотителя.

После обезразмеривания, добавляя условие теплоизолированности границы и начальное распределение тепла, получаем задачу вида (1), где

$$D(u) = \frac{\kappa(T_a u)}{\kappa_0}, \quad f(u, x) = \frac{-q(T_a u, Lx; T_h, c)}{h_{eff} T_a}.$$

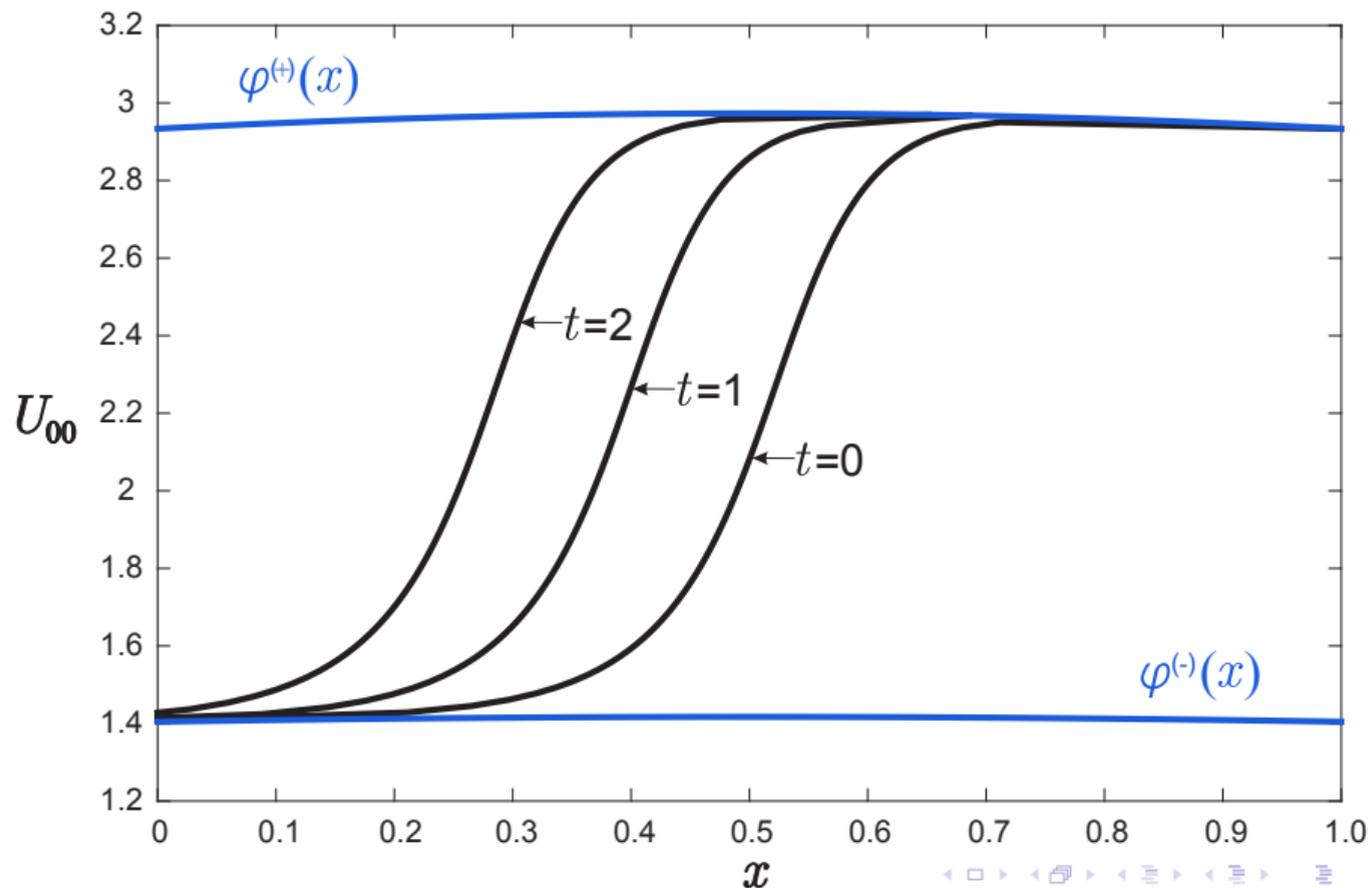
Можно показать, что данные функции удовлетворяют условиям (A1) и (A2). Значит, если начальное распределение удовлетворяет условию (A3), ожидаем, что решение имеет вид движущегося фронта. Для иллюстрации приведём численное решение по методу прямых.

## Численное решение исходной модельной задачи



Перейдём к построению асимптотики. Рассматриваемая модель - яркий пример случая, когда решение нельзя найти аналитически. Для решения применяется специальная модификация метода стрельбы (см. [1], [2]) для нахождения функции  $W$ , затем решается задача из условия (A4) для определения нулевого приближения положения фронта. Результат расчётов представлен на следующем слайде (изображённая функция является нулевым приближением с точностью до сдвига порядка  $\varepsilon$  вдоль  $x$ , так как не включает компоненту  $x_1$ ).

## Нулевое приближение для модельной задачи



## Список литературы

- 1 R. L. Argun, V. T. Volkov, D. V. Lukyanenko. “On Some Features of the Numerical Solving of Coefficient Inverse Problems for an Equation of the Reaction-Diffusion-Advection-Type with Data on the Position of a Reaction Front”, *Mathematics* 2021, 9, 2894.
- 2 R. L. Argun, A. V. Gorbachev, D. V. Lukyanenko, M. A. Shishlenin. “Numerical simulation of front dynamics in a nonlinear singularly perturbed reaction–diffusion problem”, *Journal of Computational and Applied Mathematics* 2022, 412.