Исследование устойчивости по Хайерсу-Уламу системы стохастических дифференциальных уравнений с одним независимым стохастическим параметром

Георгиевская Екатерина

Международная конференция
"Асимптотические методы в математической физике"

27 февраля 2026 г.

Постановка задачи

Следующая математическая модель была получена в статье Sidorova et.al., BioSystems, 2020

$$
\begin{cases}
\frac{du}{dt} = -D_u\left(u^2 - (f-\gamma v)^2\right), \\
\frac{dv}{dt} = D_v\left(-v+f\right), \\
u(0) = u^0, \\
v(0) = v^0,
\end{cases}
\qquad t \in (0, T) \qquad (1)
$$

где $0 := 1098$ млн. лет назад, $T :=$ настоящее время.

u – функция изменчивости в ходе закрепления мутаций, способствующих видообразованию;

v – функция ингибитора процесса видообразования;

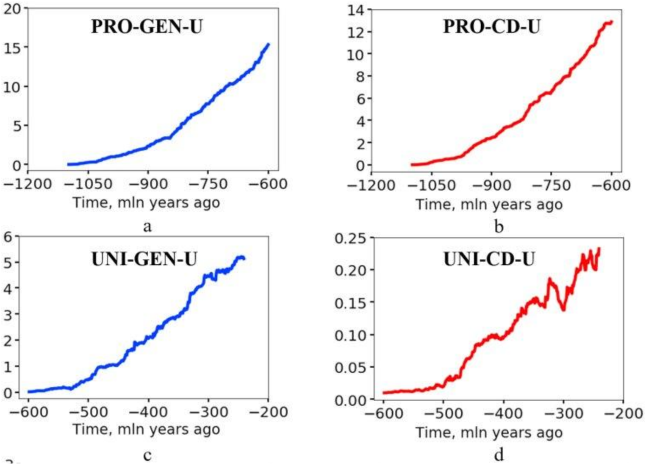
γ – кинетический коэффициент активатора, определяемый отношением вероятностей негативных мутаций к полезным мутациям – способствующим видообразованию;

D_u – коэффициент скорости активатора – средняя скорость замены пар оснований на геном за поколение;

D_v – коэффициент скорости ингибитора;

f – стохастическая величина, определяемая скачками размеров генома и его кодирующей части для рассмотренных выборок прокариотов, одноклеточных и многоклеточных от среднего значения $\overline{f}$.

$$df = b_f \varepsilon_f \sqrt{dt} \tag{2}$$



Численное решение для выборок прокариотов (a,b) и эукариотов (c,d) (Sidorova et.al., BioSystems, 2020)

Стохастическая модель

1. Решение линеаризованной системы:

$$\begin{cases} v = \left(v^0 - f\right) e^{-D_v t} + f, \\ u = \left(u^0 - \alpha\right) e^{-2\alpha^2 D_u t} + \alpha, \end{cases}$$

   где $\alpha = f - \gamma v$.

2. Преобразование к системе уравнений типа Ито:

$$\begin{cases} dv = (a \cdot v + \varphi)\, dt + h_t df, \\ du = (b \cdot u + c \cdot v + r_t)\, dt + k_t df, \end{cases} \tag{3}$$

   где $a = -D_v,\ b = D_v \gamma \frac{v^{(0)}}{u^{(0)}},\ c = D_v \gamma$.

Устойчивость по Хайерсу-Уламу

Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение

$$dX_t = (a_t X_t + f_t)\, dt + h_t dB_t. \tag{4}$$

Пусть для любого $\varepsilon > 0$ и для любого случайного процесса

$$Y_t \in \mathcal{L}_2\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P\right)$$

верно неравенство

$$E\left(Y_t - \int\limits_0^t (a_s Y_s + f_s)\, ds - \int\limits_0^t h_s dB_s\right)^2 < \varepsilon, \quad t \in (0, T)\,. \tag{5}$$

Тогда существует решение X_t уравнения (4), такое, что

$$|Y_t - X_t| \leqslant K\varepsilon, \qquad t \in (0, T)\,,$$

где K – положительное вещественное число.

Тогда говорят, что уравнение (4) ***устойчиво по Хайерсу-Уламу в среднем квадратичном на*** $(0, T)$ (Zhao Advances in Difference Equations (2016)).

Метод исследования

Этапы доказательства:

1. Система уравнений (3) представляется в матричной форме:

$$dZ_t = (AZ_t + B_1)\,dt + B_2 df, \tag{6}$$

где $Z_t = \begin{pmatrix} v_t \\ u_t \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & b \end{pmatrix}$, $B_1 = \begin{pmatrix} \varphi \\ r_t \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} h_t \\ k_t \end{pmatrix}$.

2. Пусть $U_t = \begin{pmatrix} X_t \\ Y_t \end{pmatrix}$ – случайный процесс, "близкий" к процессу Z_t.
3. Введем *невязку* $G(t, Y_t, X_t)$ с дифференциалом

$$dG = dU_t - (AU_t + B_1)\,dt - B_2 df. \tag{7}$$

4. Используя преобразования, предложенные в работе *Zhao Xiangkui Mean square Hyers-Ulam stability of stochastic differential equations driven by Brownian motion*, можно показать, что разность точного и приближенного решений можно представить в виде

$$Z_t - U_t = -e^{At} \int_0^t e^{-As} dG\left(s, Y_s, X_s\right). \tag{8}$$

5. Вследствие теоремы Гамильтона-Кэли существует представление

$$e^{-At} = \beta(t)A + \delta(t)E, \tag{9}$$

   коэффициенты которого $\beta(t) = \frac{e^{at} - e^{bt}}{a-b}$, $\delta(t) = \frac{ae^{bt} - be^{at}}{a-b}$.
6. С использованием этого представления можно получить выражение для разности точного и приближенного решений, матожидание которого можно оценить сверху.

Основной результат

$$\begin{cases} dv = (a \cdot v + \varphi)\, dt + h_t df \\ du = (b \cdot u + v \cdot v + r_t)\, dt + k_t df \end{cases} \tag{10}$$

Утверждение. Пусть X_t, Y_t – некоторые процессы Ито,

$$\begin{aligned} dG_1 (t, X_t, Y_t) &= dX_t - (a \cdot X_t + \varphi)\, dt - h_t df \\ dG_2 (t, X_t, Y_t) &= dY_t - (b \cdot Y_t + c \cdot X_t + r_t)\, dt - k_t df \end{aligned} \tag{11}$$

Пусть

$$E\,(G_1(t, X_t, Y_t))^2 \leqslant \varepsilon, \quad E\,(G_2\,(t, X_t, Y_t))^2 \leqslant \varepsilon \ \text{ для } \ t \in (0, T)\,.(12)$$

Тогда существует решение $v(t), u(t)$ системы (10), причём $v(0) = X_t(0)$, $u(0) = Y_t(0)$ и

$$E\left(v - X_t\right)^2 \leqslant M_1\varepsilon, \quad E\left(u - Y_t\right)^2 \leqslant M_2\varepsilon,$$

где

$$\begin{aligned} M_1 &= 2e^{aT} - 1 - \tfrac{aT}{2}\left(1 - e^{2aT}\right), \\ M_2 &= 2e^{bT} - 1 - \tfrac{bT}{2}\left(1 - e^{2bT}\right) + \tfrac{4c}{b-a} + \tfrac{|a|bc^2T}{(b-a)^2}e^{(b-a)T} + \\ &\qquad + \tfrac{|a|c^2T}{(b-a)^2}e^{(b+a)t} + \tfrac{|a|c^2T}{(b-a)^2}e^{2(b-a)T}. \end{aligned} \tag{13}$$

Тем самым система (8) устойчива по Хайерсу-Уламу в средне-квадратичном на интервале $(0, T)$.

Выводы

1. Исследована система стохастических дифференциальных уравнений, возникающая в биофизической модели видообразования.
2. Для упрощенной версии модели доказана устойчивость по Хайерсу-Уламу.
3. Разработанный метод исследования, основанный на матричном представлении системы и применении леммы Ито, позволяет получать оценки постоянных устойчивости и анализировать поведение системы на больших временных интервалах.

Контакты

Георгиевская Екатерина

Кафедра математики, физический факультет

МГУ имени М.В. Ломоносова

Email: `ekaterinageorgiy@mail.ru`

Благодарю за внимание!