РАЗВИТИЕ АСИМПТОТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ В НАУЧНОЙ ШКОЛЕ ВАСИЛЬЕВОЙ–БУТУЗОВА–НЕФЕДОВА

Орлов А. О., Волков В. Т.

МГУ, Москва

26 февраля, 2026

«Малый параметр неисчерпаем.

Асимптотические методы развивались, развиваются и будут развиваться!»

— В. Ф. Бутузов

Основополагающие работы А. Н. Тихонова

А. Н. Тихонов (1906–1993)

1. Тихонов А. Н. *О зависимости решений дифференциальных уравнений от малого параметра* // Матем. сб. 1948. 22(64). №2. С. 193–204.
2. Тихонов А. Н. *О системах дифференциальных уравнений, содержащих параметры* // Матем. сб. 1950. 27(69). №1. С. 147–156.
3. Тихонов А. Н. *Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных* // Матем. сб. 1952. 31(73). №3. С. 575–586.

Тихоновская система

$$\begin{aligned} &\mu\frac{dz}{dt} = F(z,y,t), \frac{dy}{dt} = f(z,y,t), \quad 0 < t \le T. \\ &z(0,\mu) = z^0, \qquad y(0,\mu) = y^0. \end{aligned} \tag{1}$$

Вырожденная система

$$0 = F(z,y,t), \ \frac{dy}{dt} = f(z,y,t). \tag{2}$$

$$z = \varphi(y,t). \tag{2'}$$

$$\frac{dy}{dt} = f(\varphi(y,t),y,t), \qquad 0 < t \le T; \qquad y(0) = y^0. \tag{3}$$

$$y = \bar{y}(t), \qquad z = \bar{z}(t) := \varphi(\bar{y}(t),t).$$

Теорема Тихонова о предельном переходе

$$\lim_{\mu\to 0} z(t,\mu) = \bar{z}(t), \quad 0 < t \le T; \ \lim_{\mu\to 0} y(t,\mu) = \bar{y}(t), \quad 0 \le t \le T. \tag{4}$$

Основополагающие работы А. Б. Васильевой

А. Б. Васильева (1926–2018)

1. Васильева А.Б. *О дифференцировании решений дифференциальных уравнений, содержащих малый параметр* // Докл. АН СССР. 1948. 61. №4. С. 597–599.
2. Васильева А.Б. *О дифференциальных уравнениях, содержащих малые параметры* // Мат. сб. 1952. 31(73). №3. С. 587–644.
3. Васильева А.Б. *Асимптотика решений некоторых задач для обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной* // Усп. матем. наук. 1963. 18. №3. С. 15–86.
4. Васильева А.Б. *Асимптотические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений с малыми параметрами при старших производных* // ЖВМ 1963. 3. №4. С. 611–642.

Метод А. Б. Васильевой

$$\mu\frac{dz}{dt} = F(z, y, t), \qquad \frac{dy}{dt} = f(z, y, t), \qquad 0 \le t \le T. \tag{1}$$

$$z(0, \mu) = z^0, \qquad y(0, \mu) = y^0. \tag{2}$$

$$z(t, \mu) = \bar{z}(t, \mu) + \Pi z(\tau, \mu), \qquad y(t, \mu) = \bar{y}(t, \mu) + \Pi y(\tau, \mu), \qquad \tau = \frac{t}{\mu}.$$

$$F(\bar{z} + \Pi z, \bar{y} + \Pi y, t) = \bar{F} + \Pi F, \qquad f(\bar{z} + \Pi z, \bar{y} + \Pi y, t) = \bar{f} + \Pi f.$$

$$\bar{F} := F(\bar{z}(t, \mu), \bar{y}(t, \mu), t).$$

$$\Pi F := F\Big(\bar{z}(\mu\tau, \mu) + \Pi z(\tau, \mu),\ \bar{y}(\mu\tau, \mu) + \Pi y(\tau, \mu),\ \mu\tau\Big) - F\Big(\bar{z}(\mu\tau, \mu),\ \bar{y}(\mu\tau, \mu),\ \mu\tau\Big).$$

Метод А. Б. Васильевой - расщепление системы

$$\begin{cases} \mu\dfrac{d\bar{z}}{dt} = \bar{F}, \dfrac{d\bar{y}}{dt} = \bar{f}, 0 \le t \le T, \qquad \dfrac{d\,\Pi z}{d\tau} = \Pi F, \dfrac{d\,\Pi y}{d\tau} = \mu\,\Pi f, \tau > 0, \\ \bar{z}(0,\mu) + \Pi z(0,\mu) = z^0, \Pi z(\infty,\mu) = 0, \\ \bar{y}(0,\mu) + \Pi y(0,\mu) = y^0, \Pi y(\infty,\mu) = 0. \end{cases} \tag{5}$$

$$\bar{z}(t,\mu) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu^i\, \bar{z}_i(t), \Pi z(\tau,\mu) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu^i\ \Pi z_i(\tau). \tag{6}$$

Связь коэффициентов с пограничными функциями.

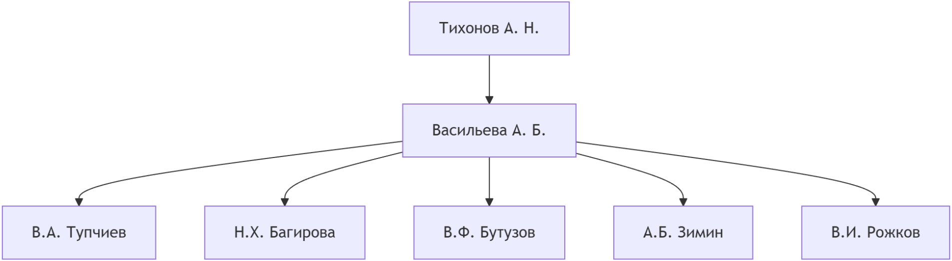
$$\bar{y}_1(0) = \int_0^{\infty} \Pi_0 f(\tau)\, d\tau = \int_0^{\infty} f\big(\bar{z}_0(0) + \Pi_0 z(\tau),\ y^0,\ 0\big)\, d\tau. \tag{7}$$

Итог. Справедливы равенства

$$z(t,\mu) = Z_n(t,\mu) + O\left(\mu^{n+1}\right), \quad y(t,\mu) = Y_n(t,\mu) + O\left(\mu^{n+1}\right), \quad 0 \le t \le T,$$

где $Z_n(t,\mu)$, $Y_n(t,\mu)$ — частичные суммы рядов (6).

Первые ученики



Уравнения с малым запаздыванием

$$y'(t) = F(y(t), y'(t-\mu), y(t-\mu), t), \quad 0 < t \leq T, \tag{8}$$

$$y|_{-\mu \leq t \leq 0} = \varphi(t).$$

Вырожденная задача ($\mu = 0$):

$$y'(t) = F(y(t), y'(t), y(t), t), \quad 0 < t \leq T,$$

$$y(0) = \varphi(0).$$

При $\mu = 0$ происходит потеря заданного начального условия, в результате чего появляется пограничный слой.

В 1960 году начал работу семинар им. А. Б. Васильевой.

Семинар им. А.Б.Васильевой: Асимптотические методы в сингулярно возмущенных задачах

Руководители научного семинара:


с.н.с. Е.И. Никулин доц. Н.Т. Левашова

Семинар проводится по вторникам, начало в 17-15, на физическом факультете МГУ в ауд. 4-46.

on-line подключение по постоянной ссылке

https://video-conf.math.phys.msu.ru/AsymptoticMethods

Всем желающим выступить с докладами на семинаре просьба обращаться к ***Левашовой Н.Т.*** *levashovant@physics.msu.ru, (495)939-10-33*

Направления исследований в 70-е годы

- Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Сингулярно возмущенные уравнения в критических случаях Москва : Издательство Московского университета, 1978
- Сингулярно возмущенные задачи для уравнений с частными производными
- Сингулярные возмущения в задачах оптимального управления.

Всесоюзные конференции и школы по методам малого параметра
1975 г. — г. Фрунзе, 1977 г. — Ноорус, 1979 г. — г. Алма-Ата
1982 г. — г. Минск, 1987 г. — г. Нальчик.

Основополагающие работы В. Ф. Бутузова

В. Ф. Бутузов (1939–2021)

1. Бутузов В. Ф. *Угловой погранслой в сингулярно возмущенных задачах с частными производными* // Диф. ур., 15:10 (1979).
2. Бутузов В. Ф. *Об особенностях пограничного слоя в сингулярно возмущенных задачах с кратным корнем вырожденного уравнения* // Матем. заметки, 94:1 (2013).
3. Бутузов В. Ф., Неделько И. В. *О глобальной области влияния устойчивых решений с внутренними слоями* // Матем. сб., 192:5 (2001), 13–52.
4. Бутузов В. Ф. *О сингулярно возмущенных частично диссипативных системах уравнений* // ТМФ, 207:2 (2021).

Угловые пограничные функции

Задача в прямоугольнике $\Omega = (0,1)^2$:

$$\varepsilon^2 \Delta u - u = 0, \qquad u = \begin{cases} 1, & x = 0 \text{ или } y = 0, \\ 0, & x = 1 \text{ или } y = 1, \end{cases}$$

Регулярная часть: $\bar{u}_0 \equiv 0$.

Слои вдоль сторон:

$$\Pi x_0 = e^{-x/\varepsilon}, \qquad \Pi y_0 = e^{-y/\varepsilon}.$$

Проблема (угол $(0,0)$**):**

$$(\bar{u}_0 + \Pi x_0 + \Pi y_0)\big|_{x=0} = 1 + e^{-y/\varepsilon} \neq 1,$$

$$(\bar{u}_0 + \Pi x_0 + \Pi y_0\big|_{y=0} = 1 + e^{-x/\varepsilon} \neq 1.$$

Вывод: погранслои *вносят невязку* порядка $O(1)$ вблизи вершины.

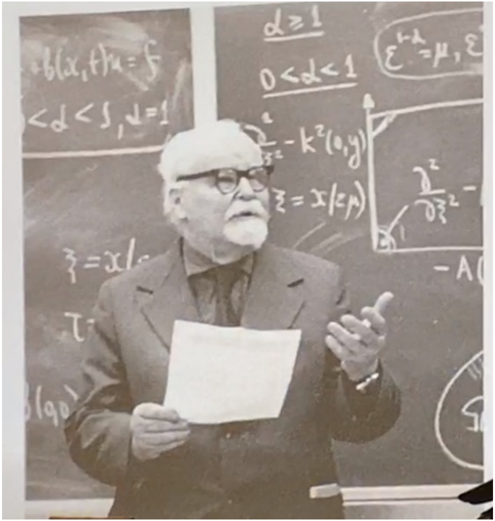
Нужен угловой слой $P(\xi, \eta)$,
$\xi = x/\varepsilon,\ \eta = y/\varepsilon$:
Угловая задача в четверти плоскости:

$$P_{\xi\xi} + P_{\eta\eta} - P = 0, \quad \xi, \eta > 0,$$

$$P(0,\eta) = -e^{-\eta},\ P(\xi, 0) = -e^{-\xi},$$

$$P \to 0 \text{ при } \xi + \eta \to \infty.$$

Бутузов В. Ф. *Сингулярно возмущенные краевые задачи с угловым пограничным слоем.* дис. доктора физ.-мат. наук. 1979.


$\alpha \geq 1$
$0 < \alpha < 1$

Направления исследований в 80-е годы

Новое поколение учеников: Л.В. Калачёв, А.Г. Никитин, В.Т. Волков, Т.А. Уразгильдина, М.А. Петрова, Е.В. Полежаева, В.А. Есипова, А.А. Хасанов,
М.П. Белянин, В.М. Мамонов, В.Ю. Бучнев, С.Т. Есимова,
С.В. Дворянинов.

- Периодические решения параболических и эллиптических уравнений.
- Контрастные структуры.
- Развитие метода угловых пограничных функций для эллиптических и параболических систем уравнений.
- Процедура сглаживания в погранслойных задачах с негладкими членами асимптотики.
- Прикладные задачи: химическая кинетика, теория полупроводников, теплопроводность.

Основополагающие работы Н. Н. Нефедова

Н. Н. Нефедов (1951–2024)

1. Н. Н. Нефедов, "Метод дифференциальных неравенств для некоторых классов нелинейных сингулярно возмущенных задач с внутренними слоями", *Дифференц. уравнения*, 31:7 (1995), 1142–1149.
2. Н. Н. Нефедов, "Метод дифференциальных неравенств для некоторых сингулярно возмущенных задач в частных производных", *Дифференц. уравнения*, 31:4 (1995), 719–726.
3. А. Б. Васильева, В. Ф. Бутузов, Н. Н. Нефедов, "Сингулярно возмущенные задачи с пограничными и внутренними слоями", *Труды МИАН*, 268 (2010), 258–273.

Асимптотический метод дифференциальных неравенств

Класс задач. Нелинейные сингулярно возмущённые задачи, для которых работает **принцип сравнения** (эллиптические, параболические, интегро-диференциальные).

Операторная запись. $L_\varepsilon u = 0$ в Ω, $\quad u|_{\partial\Omega} = g$.
(Например, $L_\varepsilon u = \varepsilon^2 \Delta u - f(u, x, \varepsilon)$.)

Нижнее/верхнее решения. Если найдены функции $\alpha(x,\varepsilon), \beta(x,\varepsilon)$ такие, что

$$\alpha(x,\varepsilon) \le \beta(x,\varepsilon) \text{ в } \overline{\Omega}, \qquad L_\varepsilon \alpha \ge 0, \quad L_\varepsilon \beta \le 0 \text{ в } \Omega, \qquad \alpha \le g \le \beta \text{ на } \partial\Omega,$$

то (по теоремам сравнения) существует решение $u(x,\varepsilon)$ и выполняется
$\alpha(x,\varepsilon) \le u(x,\varepsilon) \le \beta(x,\varepsilon)$ в $\overline{\Omega}$.

Нефедов Н. Н.
Контрастные структуры в нелинейных сингулярно возмущенных задачах.
Диссертация доктора физ.-мат. наук. 1993.

Схема метода: от формального асимптотического приближения к строгому результату

Шаг 1. Формальное асимптотическое приближение.

Строится приближение $U_n(x,\varepsilon)$ (регулярная часть + пограничные/внутренние слои, сшивание, положение слоя) так, что невязка мала:
$L_\varepsilon U_n = O(\varepsilon^{n+1})$ в Ω, $U_n|_{\partial\Omega} = g + O(\varepsilon^{n+1})$.

Шаг 2. Модификация. Дифференциальные неравенства.

Асимптотическое приближение *модифицируется* так, чтобы получить барьеры $\alpha_{n+1}(x,\varepsilon), \beta_{n+1}(x,\varepsilon)$: $L_\varepsilon \alpha_{n+1} \geq c\,\varepsilon^{n+1}$, $L_\varepsilon \beta_{n+1} \leq -c\,\varepsilon^{n+1}$, $c > 0$, и при этом $\beta_{n+1}(x,\varepsilon) - \alpha_{n+1}(x,\varepsilon) = O(\varepsilon^{n+1})$.

Шаг 3. Оценка точности

Из $\alpha_{n+1}(x,\varepsilon) \leq u(x,\varepsilon) \leq \beta_{n+1}(x,\varepsilon)$ следует оценка точности:
$|u(x,\varepsilon) - U_n(x,\varepsilon)| = O(\varepsilon^{n+1})$ в $\overline{\Omega}$ (и часто: локальная единственность на $[\alpha_{n+1}(x,\varepsilon), \beta_{n+1}(x,\varepsilon)]$).

Ключевое условие: положительная обратимость операторов

При построении коэффициентов приближения возникают линейные операторы:

L_R (регулярная часть), $L_{BL,IL}$ (погранслой, внутр. слой), A^Γ (положение слоя).

Важно: для формального построения достаточно обратимости. Для построения барьеров требуется более сильное свойство **положительная обратимость / монотонность**.

Операторная формулировка

Существуют **положительные** функции $\delta\bar{u} > 0$, $\delta\Pi > 0$, $\delta R > 0$ – решения неравенств $L_R(\delta\bar{u}) < 0$, $L_{BL,IL}(\delta\Pi, \delta Q) < 0$, $A^\Gamma(\delta R) < 0$.

Тогда добавками $\pm\delta\bar{u}$, $\pm\delta\Pi$, $\pm\delta Q$ к членам асимптотического приближения в нужном порядке (обычно в ε^{n+1}) и сдвигом положения слоя на подходящую величину $\pm\delta R$ получаются упорядоченные $\alpha_{n+1}(x,\varepsilon), \beta_{n+1}(x,\varepsilon)$ нужного порядка точности.

Важность обоснования асимптотического приближения.

$$\varepsilon \frac{du}{dt} = u, \qquad t > 0, \qquad u(0;\varepsilon) = 0. \tag{N1}$$

- **Точное решение единственно:** $\quad u(t;\varepsilon) \equiv 0.$
- **Но существует «асимптотическое решение»:**

$$U(t;\varepsilon) = \exp\left(\frac{t-1}{\varepsilon}\right). \tag{N2}$$

- U **точно** удовлетворяет уравнению задачи.
- Начальное условие выполняется **с любой степенью точности** n:

$$U(0;\varepsilon) = e^{-1/\varepsilon} = O(\varepsilon^n), \qquad \forall n. \tag{N3}$$

- Но при $t \geq 1$ имеем $U(t;\varepsilon) \geq 1$, т.е. U **не близко** к точному решению $u \equiv 0$ на «дальних временах».

Вывод: малая невязка в уравнении и условиях **не** заменяет обоснование (оценку остатка, область равномерности, устойчивость).

Направления исследований в 1990–настоящее время

- Начало активного сотрудничества с немецкими коллегами (K. R. Schneider, WTAS; позднее L. Recke, Гумбольдтский ун-т).
- Совместные исследования с китайскими коллегами (проф. Ни Мин Кан, Шанхайский ун-т); участие в качестве приглашенных лекторов на школах молодых ученых в Шанхае. Н. Н. Нефедов — почётный профессор Шанхайского ун-та.

$$\varepsilon^2 y'' - f(x, y, \varepsilon) = 0, \quad 0 < x < 1, \qquad y'(0, \varepsilon) = 0, \quad y'(1, \varepsilon) = 0.$$

Вырожденное уравнение

$$f(x, y, 0) = 0$$

имеет два корня $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$, которые пересекаются при $x = x_0 \in (0; 1)$.

Сингулярно возмущенные задачи с кратными корнями

Для примера

$$\varepsilon^2 u_{xx} = u^2 + \varepsilon,$$

справедлива тривиальная оценка

$$u_{xx}(x) \geq \frac{1}{\varepsilon},$$

показывающая, что вторая производная любого решения в любой внутренней точке x не имеет предела при $\varepsilon \to +0$. Следовательно, погранслойных решений для этого уравнения не существует.
Вывод: наличие погранслойного решения зависит от структуры возмущения правой части.

Сингулярно возмущенные задачи с кратными корнями

$$\varepsilon^2 u'' = h(x)\big(u - \varphi(x)\big)^2 - \varepsilon f_1(u, x, \varepsilon), \qquad 0 < x < 1,$$
$$u(0, \varepsilon) = u^0, \qquad u(1, \varepsilon) = u^1.$$

Особенности асимптотики: $\bar{u}$, Π, $\widetilde{\Pi}$ — ряды по дробным степеням ε:

$$\frac{d^2\Pi_0}{d\xi^2} = h(0)\Big(\Pi_0^2 + \sqrt{\varepsilon}\, k\, \Pi_0\Big), \qquad \xi > 0,$$

$$\Pi_0(0, \varepsilon) = u^0 - \varphi(0), \qquad \Pi_0(\infty, \varepsilon) = 0.$$

Трёхзонное поведение П-функции отражено в оценке

$$|\Pi_n(\xi, \varepsilon)| \le c\, \Pi_*(\xi, \varepsilon), \qquad \xi \ge 0,$$

где

$$\Pi_*(\xi, \varepsilon) = \frac{\sqrt{\varepsilon}\, \exp\!\big(-\varepsilon^{1/4} k\, \xi\big)}{\Big[1 + \varepsilon^{1/4} - \exp\!\big(-\varepsilon^{1/4} k\, \xi\big)\Big]^2} \qquad \text{(эталонная функция).}$$

Современное состояние: ключевые направления

1. **Сингулярно возмущённые задачи с движущимися фронтами** (внутренние слои, законы движения фронта).
2. **Коэффициентные обратные задачи для уравнений РДА**
3. **Сингулярно возмущённые задачи с разрывными нелинейностями** (негладкие источники).
4. **Тихоновские системы при различных условиях квазимонотонности**
4. **Прикладные задачи переноса заряда и тепла** (электропроводящие материалы; атмосферный тепломассоперенос).
5. **Численно-асимптотические методы** (адаптивные сетки, использование априорной информации о положении слоя).
6. **Интегро-дифференциальные сингулярно возмущенные уравнения**

Юбилейная конференция, посвященная 90-летию А.Б. Васильевой