



Стационарирование фронта в задаче реакция-диффузия в случае кусочно-линейного разрывного источника модульного типа

Чжао Вэньсинь, Левашова Н. Т.

Асимптотические методы в математической физике

27 - 02 - 2026



$$\varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} = f(u, x), \quad x \in (-1, 1), \quad t \in (0, T],$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(-1, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(1, t) = 0, \quad t \in (0, T], \quad u(x, 0) = u_{init}(x), \quad x \in [-1, 1],$$

где $\varepsilon \in (0; \varepsilon_0]$ – малый параметр $f(u, x)$ – кусочно-линейная функция модульного типа:

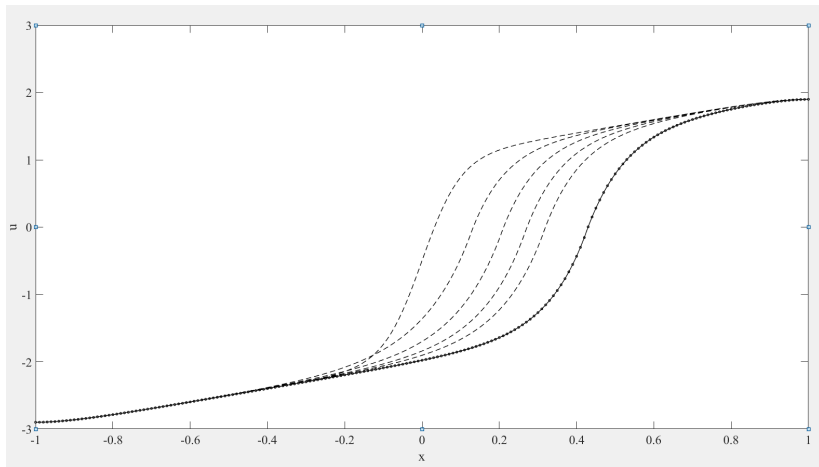
$$f(u, x, \varepsilon) = \begin{cases} u - \varphi^{(-)}(x), & u < 0, \\ u - \varphi^{(+)}(x), & u \geq 0. \end{cases} \quad \varphi^{(-)}(x) < 0 < \varphi^{(+)}(x), \quad x \in [-1, 1],$$

$u_{init}(x)$ непрерывна на отрезке $[-1, 1]$, а $T > 0$.

$$u_\varepsilon(x, t) \in C_{x,t}^{1,0}(\bar{D}) \cap C_{x,t}^{2,0}(D^{(-)} \cup D^{(+)}).$$



Цель – доказать устойчивость стационарного решения и выделить область притяжения.





Стационарная задача

$$\begin{aligned}\varepsilon^2 \frac{\partial^2 u_s}{\partial x^2} &= f(u_s(x), \hat{x}_s, \varepsilon), \quad x \in (-1, 1), \\ \frac{\partial u_s}{\partial x}(-1, \varepsilon) &= 0, \quad \frac{\partial u_s}{\partial x}(1, \varepsilon) = 0.\end{aligned}\tag{1}$$

$$u_s(x, \varepsilon) \in C^1([-1, 1]) \cap C^2((-1, \hat{x}) \cup (\hat{x}, 1))$$

Левая задача:

$$\varepsilon^2 \frac{\partial^2 u_s^{(-)}}{\partial x^2} = u_s^{(-)} - \varphi^{(-)}, \quad -1 < x < x_s, \quad \frac{du_s^{(-)}}{dx}(-1) = 0, u_s(x_s) = 0.$$

Правая задача:

$$\varepsilon^2 \frac{\partial^2 u_s^{(+)}}{\partial x^2} = u_s^{(+)} - \varphi^{(+)}, \quad x_s < x < 1, u_s(x_s) = 0, \quad \frac{du_s^{(+)}}{dx}(1) = 0.$$



Точное решение левой задачи

$$u_{s,\varepsilon}^{(-)} = \frac{-\varepsilon}{\operatorname{ch} \frac{1+x_s}{\varepsilon}} \left[\operatorname{sh} \frac{x-x_s}{\varepsilon} \int_{-1}^x \operatorname{ch} \frac{s+1}{\varepsilon} \varphi^{(-)}(s) ds + \right. \\ \left. + \operatorname{ch} \frac{x+1}{\varepsilon} \int_x^{x_s} \operatorname{sh} \frac{s-x_s}{\varepsilon} \varphi^{(-)}(s) ds \right]$$

Точное решение правой задачи

$$u_{s,\varepsilon}^{(+)} = \frac{\varepsilon}{\operatorname{ch} \frac{x_s-1}{\varepsilon}} \left[\operatorname{ch} \frac{x-1}{\varepsilon} \int_{x_s}^x \operatorname{sh} \frac{s-x_s}{\varepsilon} \varphi^{(+)}(s) ds + \right. \\ \left. + \operatorname{sh} \frac{x-x_s}{\varepsilon} \int_x^1 \operatorname{ch} \frac{s-1}{\varepsilon} \varphi^{(+)}(s) ds \right].$$



Введем функцию

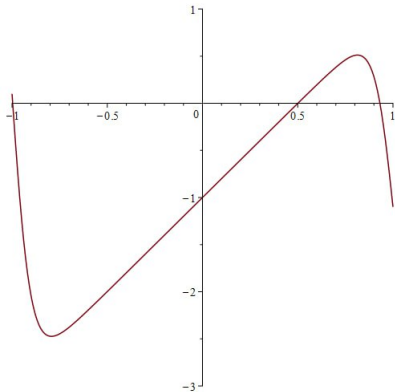
$$\begin{aligned}
 F(x_s) &:= \frac{du_{s,\varepsilon}^{(-)}}{dx}(x_s) - \frac{du_{s,\varepsilon}^{(+)}}{dx}(x_s) = \\
 &= -\frac{1}{\operatorname{ch} \frac{x_s+1}{\varepsilon}} \int_{-1}^{x_s} \operatorname{ch} \frac{s+1}{\varepsilon} \varphi^{(-)}(s) ds = \\
 &= \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{x_s-1}{\varepsilon}} \int_{x_s}^1 \operatorname{ch} \frac{s-1}{\varepsilon} \varphi^{(+)}(s) ds.
 \end{aligned}$$

Поскольку $\varphi^{(-)} < 0$, $\varphi^{(+)} > 0$

$F(-1) < 0$, и $F(1) > 0$ значит существует такая точка $x = x_s$, что производные равны и функция

$$u_{s,\varepsilon}(x) = \begin{cases} u_{s,\varepsilon}^{(-)}, & -1 \leq x \leq x_s, \\ u_{s,\varepsilon}^{(+)}, & x_s \leq x \leq 1 \end{cases}$$

гладкая.



$$\begin{cases} \varphi^{(-)}(x) = x - 2, & u < 0, \\ \varphi^{(+)}(x) = x + 1, & u \geq 0. \end{cases}$$

Задача на собственные значения (согласно J. Norbury, A. M. Stuart, 1987)



$$\varepsilon^2 G'' - (\omega + 1)G = 0, \quad G'(\mp 1) = 0,$$

Условие сшивания

$$\varepsilon^2 G'(x^* + 0) - \varepsilon^2 G'(x^* - 0) = -(\varphi_2(x^*) - \varphi_1(x^*)) \frac{G_x(x^*)}{u_x(x^*)}.$$

Результат: $\omega < -1$.

Отсюда следует, что решение стационарной задачи устойчиво и согласно работе Amann, 2004, это единственное решение между верхним и нижним решениями стационарной задачи.



1. Построим асимптотическое приближение нулевого порядка стационарной задачи
2. Построим верхнее решение стационарной задачи как модификацию асимптотического приближения нулевого порядка.
3. Построим асимптотическое приближение первого порядка решения параболической задачи.
4. Построим верхнее решение параболической задачи как модификацию асимптотического приближения первого порядка.
5. Нижним решением как параболической, так и стационарной задачи является само стационарное решение.
6. Покажем, что верхнее решение параболической задачи попадает в интервал между верхним и нижним решениями стационарной задачи.



Асимптотическое приближение нулевого порядка стационарной задачи

$$U_{s0} = \begin{cases} U_{s0}^{(-)} = \varphi^{(-)}(x) - \varphi^{(-)}(x_{s0}) \exp\left(\frac{x-x_{s0}}{\varepsilon}\right), & -1 \leq x \leq x_{s0}; \\ U_{s0}^{(+)} = \varphi^{(+)}(x) - \varphi^{(+)}(x_{s0}) \exp\left(-\frac{x-x_{s0}}{\varepsilon}\right), & x_{s0} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Здесь x_{s0} определяется из равенства

$$\varepsilon \left(\frac{U_{s0}^{(-)}}{dx}(x_{s0}) - \frac{U_{s0}^{(+)}}{dx}(x_{s0}) \right) = O(\varepsilon) \Rightarrow \varphi^{(-)}(x_{s0}) + \varphi^{(+)}(x_{s0}) = 0.$$

Верхнее решение

$$\beta_s =$$

$$\begin{cases} \varphi^{(-)}(x) - \varphi^{(-)}(x_{\beta,s}) \exp\left(\frac{x-x_{\beta,s}}{\varepsilon}\right) + \varepsilon(\mu + C^- \exp\left(\frac{-\kappa(x+1)}{\varepsilon}\right)), & -1 \\ \varphi^{(+)}(x) - \varphi^{(+)}(x_{\beta,s}) \exp\left(-\frac{x-x_{\beta,s}}{\varepsilon}\right) + \varepsilon(\mu + C^+ \exp\left(\frac{-\kappa(x-1)}{\varepsilon}\right)), & x_{\beta,s} \end{cases}$$

где $x_{\beta,s} = -1 + \gamma\varepsilon |\ln \varepsilon|$



Асимптотическое приближение нулевого порядка решения параболической задачи

$$U_0 = \begin{cases} U_0^{(-)} = \varphi^{(-)}(x) - \varphi^{(-)}(\hat{x}) \exp\left(\left(\frac{\sqrt{V^2+4}-V}{2}\right)\xi\right), & -1 \leq x \leq \hat{x}_t; \\ U_0^{(+)} = \varphi^{(+)}(x) - \varphi^{(+)}(\hat{x}) \exp\left(\left(\frac{-\sqrt{V^2+4}-V}{2}\right)\xi\right), & \hat{x}(t) \leq x \leq 1, \end{cases}$$

где

$$\xi = \frac{x - \hat{x}(t)}{\varepsilon}$$

,

$$\hat{x}(t) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t)$$

,

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = V = V_0 + \varepsilon V_1,$$

V_0 определяется из равенства

$$\varepsilon \frac{\partial}{\partial x} U^{(-)}(\hat{x}(t), t, \varepsilon) = \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} U^{(+)}(\hat{x}(t), t, \varepsilon).$$



Функции переходного слоя первого порядка определим как решения задач

$$\frac{\partial^2 Q_1^{(\mp)}}{\partial \xi^2} + V \frac{\partial Q_1^{(\mp)}}{\partial \xi} - \frac{\partial Q_0^{(\mp)}}{\partial t} = Q_1^{(\mp)}, \quad \xi \in \mathbb{R}^\mp,$$

$$Q_1^{(-)}(0, \hat{x}(t), V) = Q_1^{(+)}(0, \hat{x}(t), V) = 0, \quad Q_1^{(\mp)}(\mp\infty, \hat{x}(t), V) = 0.$$

Условие сшивания

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi^{(-)}}{dx} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial Q_0^{(-)}}{\partial \xi} x_1 + \frac{\partial}{\partial V} \frac{\partial Q_0^{(-)}}{\partial \xi} V_1 + \frac{\partial Q_1^{(-)}}{\partial \xi} = \\ = \frac{d\varphi^{(+)}}{dx} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial Q_0^{(+)}}{\partial \xi} x_1 + \frac{\partial}{\partial V} \frac{\partial Q_0^{(+)}}{\partial \xi} V_1 + \frac{\partial Q_1^{(+)}}{\partial \xi} \Big|_{\substack{\xi=0 \\ \hat{x}=x_0 \\ V=V_0}} \end{aligned}$$

Отсюда получим линейное ДУ для x_1 : $Ax_1 + BV_1 = C$ ($B \neq 0$).



$$x_\beta(t, \varepsilon) = X_1(t, \varepsilon) - \varepsilon \delta(t), \quad \delta(t) > 0, \quad X_1 = x_0 + \varepsilon x_1$$

$$\xi_\beta = \frac{x - x_\beta(t, \varepsilon)}{\varepsilon}.$$

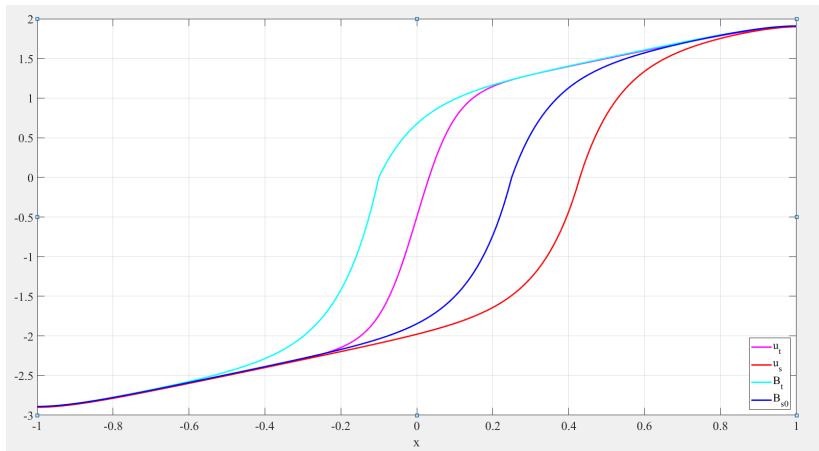
$$\bar{D}_\beta^{(-)} : (x, t) \in [-1, x_\beta(t, \varepsilon)] \times [0, T].$$

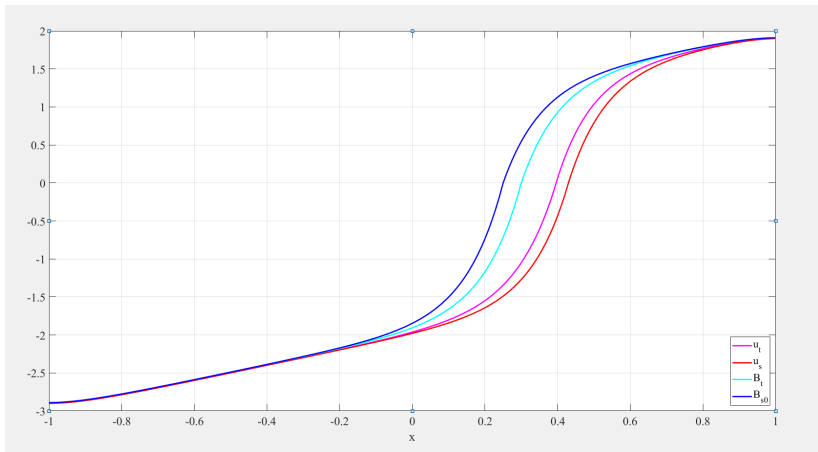
$$\bar{D}_\beta^{(+)} : (x, t) \in [x_\beta(t, \varepsilon), 1] \times [0, T].$$

$$\beta(x, t, \varepsilon) = \begin{cases} \beta^{(-)}(x, t, \varepsilon), & (x, t) \in \bar{D}_\beta^{(-)}, \\ \beta^{(+)}(x, t, \varepsilon), & (x, t) \in \bar{D}_\beta^{(+)}. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \beta^{(-)}(x, t, \varepsilon) = & U_1^{(-)}|_{\xi_\beta} + \varepsilon(\mu + q^{(-)}(\xi_\beta, t)) + \\ & + \varepsilon^2 R_\beta^{(-)}(\eta^{(-)}), \quad (x, t) \in D_\beta^{(-)}, \quad \xi_\beta \leq 0, \quad \eta^{(-)} \geq 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta^{(+)}(x, t, \varepsilon) = & U_1^{(+)}|_{\xi_\beta} + \varepsilon(\mu + q^{(+)}(\xi_\beta, t)) + \\ & + \varepsilon^2 R_\beta^{(+)}(\eta^{(+)}), \quad (x, t) \in D_\beta^{(+)}, \quad \xi_\beta \geq 0, \quad \eta^{(+)} \leq 0. \end{aligned}$$





Время, за которое решение параболической задачи окажется в ε - окрестности стационарного решения $T_0 \sim |\ln \varepsilon|$.

ВСЁ