

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДОВ  
АСИМПТОТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА ДЛЯ  
РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ПО  
ОПРЕДЕЛЕНИЮ ДОЛИ СГОРЕВШЕЙ  
БИОМАССЫ В ЛАНДШАФТНЫХ ЛЕСНЫХ  
ПОЖАРАХ С ДАННЫМИ О ПОЛОЖЕНИИ  
ФРОНТА ГОРЕНИЯ В ЛОКАЛЬНОЙ  
ДВУМЕРНОЙ ОБЛАСТИ НАБЛЮДЕНИЯ

Р.Л. Аргун, Н.Т. Левашова

Кафедра математики, Физический факультет,  
МГУ имени М.В. Ломоносова

Москва

2026 год

# 1. Объект и цели исследования

В работе рассматривается модель ландшафтного лесного пожара, состоящая из двух уравнений: уравнения, описывающего движение фронта температуры и фронта сгоревшей биомассы в двумерном случае.

На основе исходной модели была поставлена и решена обратная задача по определению доли сгоревшей биомассы в ландшафтных лесных пожарах по данным наблюдений динамики распространения фронта пожара в двумерной локальной области наблюдения.

## 2. Модель распространения лесного пожара

Рассмотрим систему уравнений для распределения температуры и биомассы при распространении ландшафтного лесного пожара:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon^2 D_\theta \Delta \theta - \varepsilon \frac{\partial \theta}{\partial t} - \varepsilon (\mathbf{V}(x, y), \nabla) \theta = g(\theta, u), \\ \quad \quad \quad x \in (-0.5, 0.5), y \in (-0.5, 0.5), t \in (0, T], \\ \varepsilon^2 D_u \Delta u - \varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} = f(u, q, x, y, t), \\ \quad \quad \quad x \in (-0.5, 0.5), y \in (-0.5, 0.5), t \in (0, T], \\ \theta_x(-0.5, y, t) = 0, \theta_x(0.5, y, t) = 0, \quad y \in (-0.5, 0.5), t \in (0, T], \\ \theta_y(x, -0.5, t) = 0, \theta_y(x, 0.5, t) = 0, \quad x \in (-0.5, 0.5), t \in (0, T], \\ u_x(-0.5, y, t) = 0, u_x(0.5, y, t) = 0, \quad y \in (-0.5, 0.5), t \in (0, T], \\ u_y(x, -0.5, t) = 0, u_y(x, 0.5, t) = 0, \quad x \in (-0.5, 0.5), t \in (0, T], \\ \theta(x, y, 0) = \theta_{init}(x, y), \quad x \in [-0.5, 0.5], \\ u(x, y, 0) = u_{init}(x, y), \quad x \in [-0.5, 0.5]. \end{array} \right.$$

## 2. Модель распространения лесного пожара

Здесь:

- ▶  $\varepsilon = \frac{1}{L}$ ,  $L$  — фактический размер наблюдаемой области (в километрах),
- ▶  $\theta(x, y, t)$  — распределение температуры,
- ▶  $u(x, y, t)$  — концентрация активного вещества, участвующего в горении,
- ▶  $L$  — размер наблюдаемой области в километрах,
- ▶  $T$  — время наблюдения,
- ▶  $D_\theta$  — коэффициент диффузии температуры,
- ▶  $D_u$  — коэффициент диффузии активного вещества,
- ▶  $\mathbf{V}(x, y)$  — известное распределение поля скорости ветра,
- ▶  $\theta_{init}(x, y)$  — начальное распределение температуры,
- ▶  $u_{init}(x, y)$  — начальное распределение активного вещества.

## 2. Модель распространения лесного пожара

Правая часть уравнения для температуры:

$$g(\theta, u) = \begin{cases} \theta - \theta_n, & \theta < \theta_{tr}, \\ \theta - (\theta_{tr} + Ru), & \theta \geq \theta_{tr}, \end{cases}$$

где  $\theta_n$  — температура окружающей среды в нормальных условиях,  
 $\theta_{tr}$  — температура, при которой происходит возгорание древесины,  
 $R > 0$  — коэффициент пропорциональности в реакции горения;

## 2. Модель распространения лесного пожара

Обозначим

$$\bar{Q} := \{(x, y) : x \in [-0.5, 0.5], y \in [-0.5, 0.5]\}.$$

Область  $\bar{Q}$  — это вся рассматриваемая область наблюдения. Пусть  $\Omega_{front}(t)$  — область  $(x, y)$ , которую прошел фронт горения от начального момента времени  $t = 0$  к моменту времени  $t$ ,  $\Omega_{front}(t) \subset \bar{Q}_L$  при  $t \in [0, T]$ .

Правая часть уравнения для биомассы:

$$f(u, q, x, y, t) = \begin{cases} u - u_{max}(x, y), & (x, y) \in \bar{Q} \setminus \Omega_{front}(t), \\ u - q(x, y), & (x, y) \in \Omega_{front}(t), \end{cases}$$

где  $u_{max}(x, y)$  — изначальное количество биомассы,  $q(x, y) \equiv u_{min}(x, y)$  — количество биомассы, оставшейся после прохождения фронта горения.

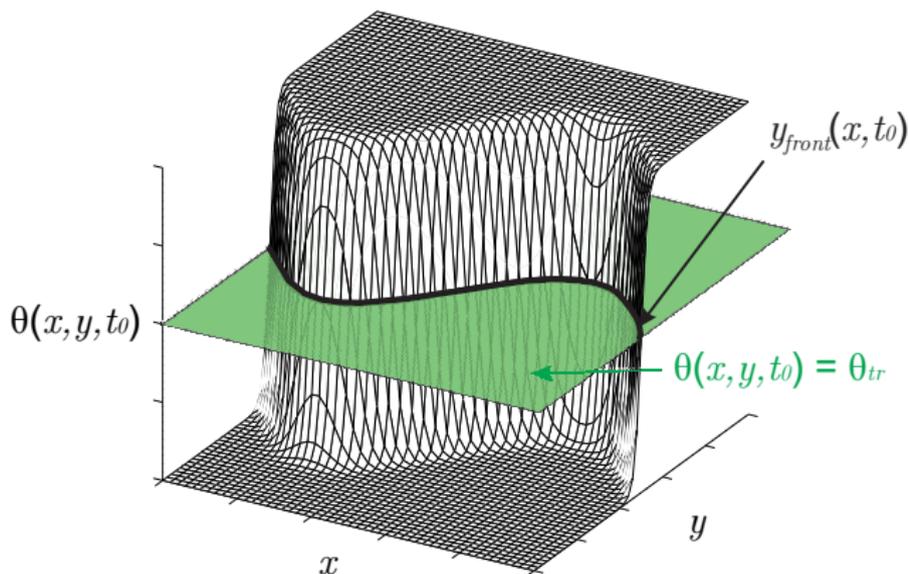
### 3. Постановка обратной задачи в локальной области наблюдения

Рассмотрим случай наблюдения распространения лесного пожара в «локальной» квадратной области размера  $[-L, L] \times [-L, L]$  такой, что фронт распространения лесного пожара представляет собой незамкнутую кривую, задающуюся в явном виде, например, функцией

$$y_{front} = h(x, t).$$

Если известна температура  $\theta(x, y, t)$ , то положение фронта горения  $y_{front}(x, t)$  в данном случае определяются из равенства  $\theta(x, y_{front}(x, t), t) = \theta_{tr}$ ,  $t \in [0, T]$ .

### 3. Постановка обратной задачи в локальной области наблюдения



**Figure:** Определение положения кривой локализации фронта лесного пожара  $y_{front}(x, t)$  в фиксированный момент времени  $t = t_0$  в случае локальной постановки обратной задачи.

### 3. Постановка обратной задачи в локальной области наблюдения

**Обратная задача** состоит в определении функции  $q(x, y)$  в области  $\bar{Q} := \{(x, y) : x \in [-0.5, 0.5], y \in [-0.5, 0.5]\}$ , по известной дополнительной информации о положении фронта горения

$$y_{front} = h(x, t).$$

В рассматриваемой постановке  $q(x, y) \in W_1^2(\bar{Q})$ ,  
 $h(x, t) \in L_2([-0.5, 0.5]) \times L_2([0, T])$ .

### 3. Постановка обратной задачи в локальной области наблюдения

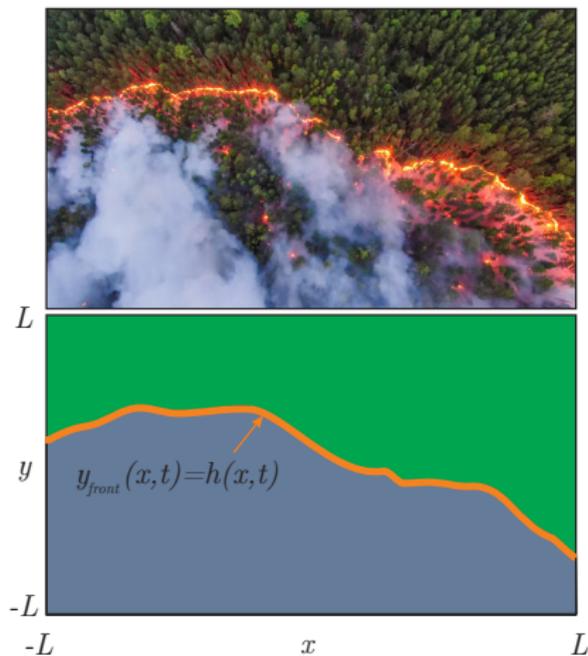


Figure: Фронт горения леса в «локальной» области. Наблюдаемый фронт горения является незамкнутой кривой.

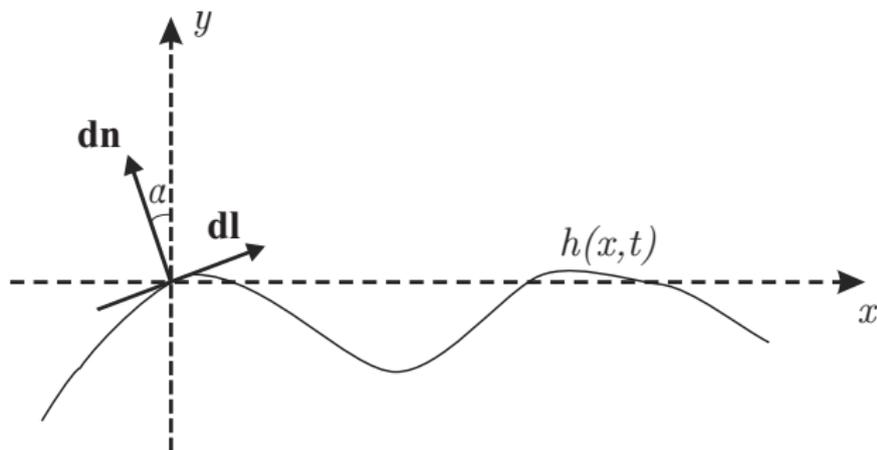
## 4. Асимптотический анализ

Исследуем движение фронта в рассматриваемой прямой задаче. Для этого перейдем к локальным координатам вблизи кривой движения фронта  $y_{front}(x, t)$ . Пусть  $\mathbf{n} = \{-\sin \alpha, \cos \alpha\}$  — координаты единичного вектора нормали, направленной к кривой  $h(x, t)$  в область  $y > h(x, t)$ . Запишем координаты нормального вектора  $d\mathbf{n}$  и вектора  $d\mathbf{l}$ , касательного к кривой  $h(x, t)$ :

$$d\mathbf{n} = \{-dy, dx\} = \{-h_x, 1\}dx,$$

$$d\mathbf{l} = \{dx, dy\} = \{1, h_x\}dx.$$

## 4. Асимптотический анализ



**Figure:** Фрагмент кривой  $h(x, t)$ , описывающей положение фронта горения леса в случае «локальной» постановки обратной задачи, а также векторы нормали и касательной к ней в некоторой точке.

## 4. Асимптотический анализ

Переход от декартовых координат  $(x, y)$  к криволинейным координатам  $(l, r)$  осуществляется с помощью следующих формул:

$$x = l - r \cdot \sin \alpha, \quad y = h(l, t) + r \cdot \cos \alpha,$$

где  $\alpha$  — угол, отложенный против часовой стрелки от оси ординат,  $l$  — абсцисса кривой  $y = h(x, t)$ , из которой проводится нормаль. Все производные функции  $y = h(x, t)$  будут братья при  $x = l$ . Выражая синус и косинус угла  $\alpha$  через  $h(x, t)$ , получим

$$x = l - r \frac{h_x}{\sqrt{1 + h_x^2}}, \quad y = h(l, t) + r \frac{1}{\sqrt{1 + h_x^2}},$$

где

$$h_x(x, t) := \frac{\partial h(x, t)}{\partial x}.$$

## 4. Асимптотический анализ

После преобразования дифференциальных операторов получим выражение для производной по времени в новых координатах:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial^{(l,r)}}{\partial t} + \frac{h_t}{\sqrt{1+h_x^2}} \frac{\partial}{\partial r} + \\ &+ \frac{1}{rh_{xx} - (1+h_x^2)^{\frac{3}{2}}} \left( \frac{rh_{xt}}{1+h_x^2} - h_t h_x \sqrt{1+h_x^2} \right) \frac{\partial}{\partial l} \end{aligned}$$

## 4. Асимптотический анализ

Обозначив

$$W(l, t) := \frac{h_t(l, h(l, t))}{\sqrt{1 + h_x^2(l, h(l, t))}},$$

$$V(l, t) := \frac{h_t}{\sqrt{1 + h_x^2}} + V_1 \frac{h_x}{1 + h_x^2} - V_2 \frac{1}{1 + h_x^2},$$

$$p(l, t) = \frac{u_{max}(W + \sqrt{W^2 + 4}) - q(W - \sqrt{W^2 + 4})}{2\sqrt{W^2 + 4}},$$

после применения асимптотического анализа к исходной задаче можно получить уравнение связи между положением фронта  $h(x, t)$  и  $q(x, y)$ :

$$\begin{aligned} & - \frac{2R(p(l, t) - q(l, h(l, t)))}{V - W} + \\ & + \left( -Rq(l, h(l, t)) + \frac{2R(p(l, t) - q(l, h(l, t)))}{(V - W)(-W + \sqrt{W^2 + 4})} \right) (-V + \sqrt{V^2 + 4}) = \\ & = (\theta_{thr} - \theta_n)(-V - \sqrt{V^2 + 4}). \end{aligned}$$

## 4. Асимптотический анализ

Таким образом, была получена редуцированная задача для определения решения обратной задачи  $q(x, y)$  по известным данным о положении фронта пожара  $h(x, y)$ :

$$\begin{aligned} & -\frac{2R(p(l, t) - q(l, h(l, t)))}{V - W} + \\ & + \left( -Rq(l, h(l, t)) + \frac{2R(p(l, t) - q(l, h(l, t)))}{(V - W)(-W + \sqrt{W^2 + 4})} \right) (-V + \sqrt{V^2 + 4}) = \\ & = (\theta_{thr} - \theta_n)(-V - \sqrt{V^2 + 4}). \end{aligned}$$

Зная функцию  $y_{front} = h(x, t)$ , из этого уравнения можно выразить  $q(x, y)$  в явном виде в области наблюдения (области  $(x, y)$ , в которой прошел фронт пожара)

## 5. Результаты расчетов. Пример 1

Рассмотрим исходную систему дифференциальных уравнений для следующего набора модельных параметров:

$$\varepsilon = 10^{-1.5}, \quad V_x(x, y) = 0.5, \quad V_y(x, y) = \exp\left(-\frac{x^2}{2 \cdot (0.3)^2}\right),$$

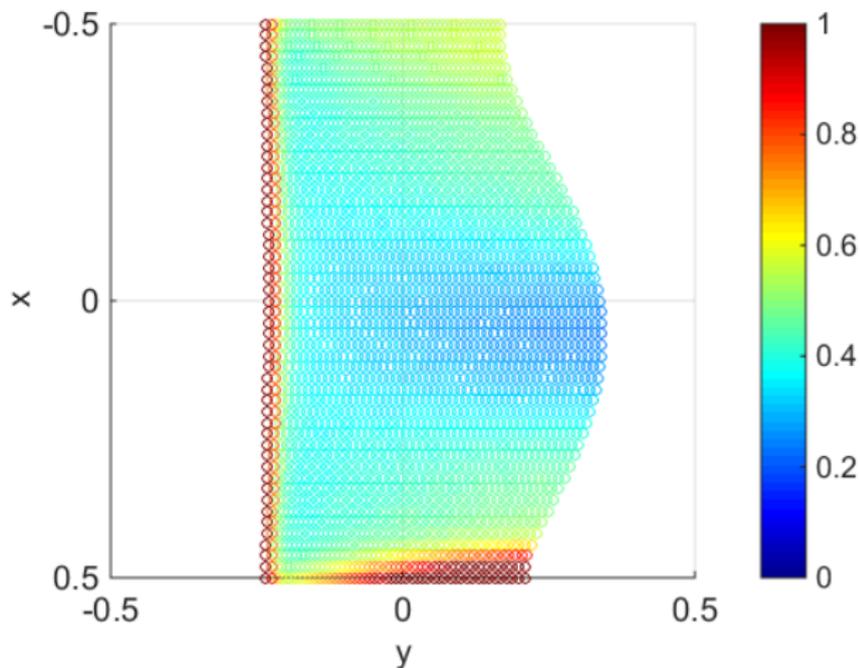
$$T = 0.25, \theta_n = 1, \quad \theta_{tr} = 15, \quad R = 60,$$

$$q(x, y) \equiv u_{min} = 0.4, \quad u_{max} = 1,$$

$$\theta_{init}(x, y, \varepsilon) = 0.5 (\theta_n - Ru_{min}) \tanh\left(\frac{y + 0.25}{2\varepsilon}\right) + 0.5 (Ru_{min} + \theta_n),$$

$$u_{init}(x, y, \varepsilon) = 0.5 (u_{max} - u_{min}) \tanh\left(\frac{y + 0.25}{2\varepsilon}\right) + 0.5 (u_{min} + u_{max}).$$

## 5. Результаты расчетов. Пример 1



Численное решение редуцированной обратной задачи при заданном наборе модельных параметров. Решение  $q(x, y)$  найдено в области прохождения фронта горения.

## 5. Результаты расчетов. Пример 2

Рассмотрим исходную систему дифференциальных уравнений для следующего набора модельных параметров:

$$\varepsilon = 10^{-2}, \quad V_x(x, y) = 0.5, \quad V_y(x, y) = \exp\left(-\frac{x^2}{2 \cdot (0.3)^2}\right),$$

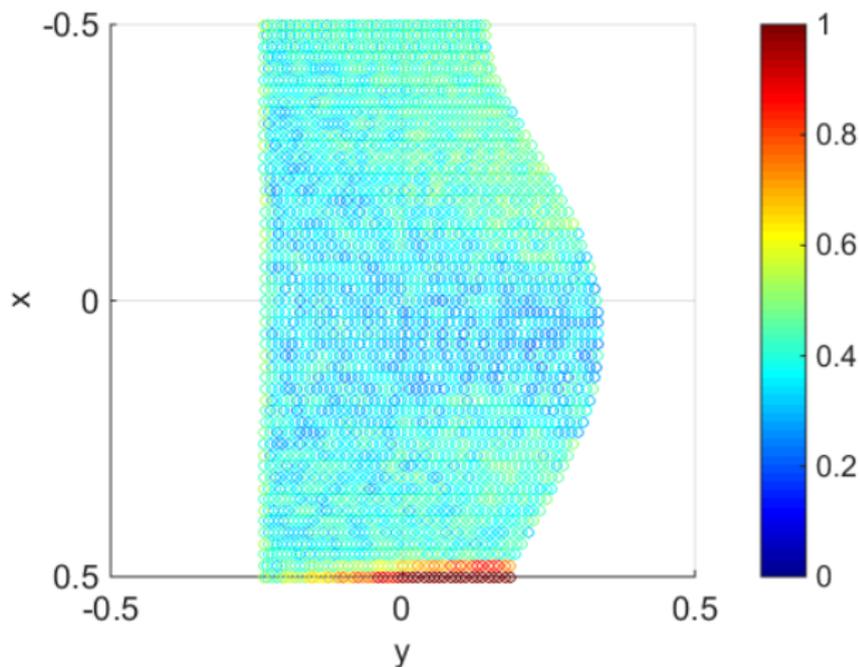
$$T = 0.25, \theta_n = 1, \quad \theta_{tr} = 15, \quad R = 60,$$

$$q(x, y) \equiv u_{min} = 0.4, \quad u_{max} = 1,$$

$$\theta_{init}(x, y, \varepsilon) = 0.5 (\theta_n - Ru_{min}) \tanh\left(\frac{y + 0.25}{2\varepsilon}\right) + 0.5 (Ru_{min} + \theta_n),$$

$$u_{init}(x, y, \varepsilon) = 0.5 (u_{max} - u_{min}) \tanh\left(\frac{y + 0.25}{2\varepsilon}\right) + 0.5 (u_{min} + u_{max}).$$

## 5. Результаты расчетов. Пример 2



Численное решение редуцированной обратной задачи при заданном наборе модельных параметров. Решение  $q(x, y)$  найдено в области прохождения фронта горения.

-  R. O. Weber, "Toward a Comprehensive Wildfire Spread Model," *International Journal of Wildland Fire*, **1**:4 (1991), 245–248.
-  А. М. Гришин, А. С. Якимовб, "Математическое моделирование процесса зажигания древесины", *Теплофизика и аэромеханика*, **20**:4 (2013), 473–486.
-  А. А. Кулешов, "Математические модели лесных пожаров", *Математическое моделирование*, **14**:11 (2002), 33–42.
-  D. Moryan, J. L. Dupuy, "Modeling the propagation of a wildfire through a Mediterranean shrub using a multiphase formulation," *Combustion and Flame*, **138** (2004), 199–210.
-  A. I. Volpert, V. A. Volpert, "Traveling-wave solutions of parabolic systems with discontinuous nonlinear terms" *Nonlinear Analysis*, **49** (2002), 113–139.