

Многофазные контрастные структуры в неоднородной активной среде с адвекцией

А.А.Быков¹, Ли Сяту²

^{1,2} МГУ им М.В.Ломоносова. Физический факультет, кафедра математики. Москва. .
E-mails: ¹abykovmsu@mail.ru, ²be2312701251@gmail.com

Keywords: нелинейные дифференциальные уравнения, асимптотические методы, контрастная структура, дифференциальные неравенства.

Исследована эволюция многофазных контрастных структур в неоднородной среде с адвекцией. Разработана комбинированная 1D–2D сингулярно возмущенная модель реакции–адвекции–диффузии, где 1D компонента описывает зоны интенсивных источников (лидеры), а 2D компонента — окружающую среду. Методами асимптотического анализа получены ключевые результаты:(1). Установлен закон движения фронта: нормальная скорость есть сумма трех компонент — дрейфа дисбаланса реакции, нормальной составляющей адвекции и дрейфа, вызванного кривизной фронта.(2). Выявлена роль кривизны: дрейф кривизны действует как эффективное поверхностное натяжение, устраняя изломы фронта и обеспечивая его гладкость.(3). Смоделированы характерные формы фронта: предсказаны и численно подтверждены V-образные структуры, стационарные периодические волны, а также параболически-линейные паттерны для сред с периодическими лидерами конечной ширины. Результаты применимы для моделирования распространения загрязнений, анализа динамики пожаров и решения астрофизических задач.

1. Введение.

Сокращения: **ФПИ** функция плотности источников, **КС** контрастная структура, **РАД** реакции–адвекции–диффузии (модель, уравнение), **ВПС** внутренний переходный слой.



Рис.1. Схематическое изображение фронта реакции.

1.1. Актуальность исследования и постановка задачи

В природных системах и технических приложениях широко распространён класс пространственно-временных явлений, ключевой особенностью которых является

формирование резких, «ступенчатых» или паттерновых пространственных распределений некоторых физических величин, таких как концентрация, температура, плотность популяции, напряжённость магнитного поля и др. Типичная морфология таких структур характеризуется наличием обширных областей, где величина стабильно поддерживается на одном из двух чётко различающихся уровней, разделённых узкими интерфейсами – переходными слоями или фронтами. В пределах этих слоев величина претерпевает резкое, но непрерывное изменение, переходя от одного устойчивого состояния к другому через промежуточное неустойчивое состояние. Из-за сильного пространственного контраста «светлого» и «тёмного» такие образования получили название контрастных структур.

Возникновение и эволюция контрастных структур являются следствием сложного нелинейного взаимодействия нескольких фундаментальных физических процессов. Математически эти явления обычно моделируются уравнением реакции-адвекции-диффузии (РАД) и его обобщениями. Данное уравнение описывает эволюцию во времени неизвестного поля $u(\mathbf{x}, t)$ под действием трёх ключевых механизмов: (1) Диффузия – перенос, обусловленный случайным движением микрочастиц или турбулентным перемешиванием из областей с высокой концентрацией в области с низкой, который в неоднородной среде может характеризоваться пространственно-переменным коэффициентом диффузии; (2) Адвекция – направленный перенос поля макроскопическим движением среды с заданным полем скоростей $\mathbf{V}(\mathbf{x})$, определяемым внешними условиями или динамикой более крупных масштабов; (3) Реакция – локальное возникновение источников или стоков поля вследствие внутренних взаимодействий (например, химических реакций, размножения и конкуренции биологических популяций, генерации и диссипации энергии), описываемое нелинейной функцией $f(u, \mathbf{x})$, называемой функцией плотности источников (ФПИ) или реакционным членом.

Уравнение РАД формирует мощный универсальный аппарат для моделирования ряда критически важных процессов в различных научных дисциплинах. В физической химии оно описывает распространение пламени и горение в неоднородных средах, таких как пористые катализаторы или турбулентные камеры сгорания. В науках об окружающей среде оно применяется для моделирования распространения и трансформации загрязняющих веществ в атмосфере или водных объектах под действием ветра или течений. В экологии с его помощью можно описывать пространственное распределение популяций в гетерогенных ландшафтах под влиянием климатических потоков или речной адвекции. В астрофизике оно используется для исследования влияния турбулентного движения межзвёздной среды на генерацию и эволюцию магнитных полей. Таким образом, глубокое понимание уравнения РАД и, в частности, порождаемых им контрастных структур, обладает фундаментальной научной значимостью и широкой практической ценностью.

1.2. Конкретная постановка задачи и ключевые проблемы. Настоящее исследование фокусируется на классе систем РАД с характерной нелинейностью. Мы предполагаем, что локальная реакционная кинетика обладает свойством трёх точек равновесия. Конкретно, функция источников $f(u, \mathbf{x})$ имеет три нуля по переменной u – три равновесных значения концентрации $\phi_1(\mathbf{x}) < \phi_2(\mathbf{x}) < \phi_3(\mathbf{x})$. При этом наименьшее ϕ_1 и наибольшее ϕ_3 значения являются асимптотически устойчивыми (соответствуют двум состояниям, в которых система может длительно находиться

локально), а промежуточное ϕ_2 – неустойчивым (играет роль «водораздела»). Такая бистабильная реакционная нелинейность служит внутренним драйвером формирования контрастных структур, позволяя системе «фиксироваться» на двух различных устойчивых состояниях в разных областях пространства.

Когда такая бистабильная система помещается в пространственно-неоднородную среду с присутствием макроскопической адвекции в двумерной геометрии, формирование и эволюция контрастных структур становятся чрезвычайно сложными и интересными. Неоднородность проявляется в явной зависимости ФПИ f и/или коэффициента диффузии κ от пространственных координат \mathbf{x} , что означает, что интенсивность реакции, положение и даже устойчивость равновесий могут изменяться в пространстве. Член адвекции $\mathbf{V}(\mathbf{x}) \cdot \nabla u$ вносит внешний механизм направленного переноса. В условиях такой множественной связи «реакция-диффузия-адвекция-неоднородность» интерфейс контрастной структуры (внутренний переходный слой, ВПС) перестаёт быть стационарным, его форма и положение подвергаются сложной пространственно-временной эволюции.

Движение этого интерфейса (фронта) определяется совместным действием трёх конкурирующих или сотрудничающих физических эффектов:

- (1). Дрейф дисбаланса: Из-за пространственной неоднородности ФПИ f «энергетический барьер» или «действие», связывающее два устойчивых равновесия, различно в разных точках пространства. Это создаёт эффективную силу, стремящуюся сместить интерфейс в определённые области.
- (2). Дрейф кривизны: Геометрическая кривизна самого интерфейса влияет на распределение диффузионных потоков. Как правило, выпуклые участки фронта движутся медленнее, а вогнутые – быстрее. Этот эффект стремится сгладить интерфейс и уменьшить его кривизну, аналогично поверхностному натяжению.
- (3). Адвективный перенос: Макроскопическое течение среды непосредственно увлекает интерфейс. Эффект сильно зависит от компоненты поля скоростей $\mathbf{V}(\mathbf{x})$, нормальной к фронту.

Ключевая проблема, решаемая в данном исследовании, заключается в следующем: как, исходя из базового двумерного сингулярно возмущённого уравнения РАД, аналитически вывести и количественно охарактеризовать совместное влияние указанных трёх эффектов на мгновенную скорость движения фронта двумерной контрастной структуры, В частности, в случае сильной адвекции, когда её эффект сравним по порядку величины с эффектами дисбаланса и кривизны, какое уравнение будет описывать эволюцию фронта? Какую геометрическую форму может принимать фронт при стремлении к стационарному состоянию (например, допускаются ли «изломы» и как они сглаживаются)? Ответы на эти вопросы являются ключом к применению теории для предсказания конкретных физических явлений.

1.3. Методология и обзор подхода. Для решения поставленных задач мы применяем систематический подход, основанный на теории сингулярных возмущений и асимптотических методах. Наше модельное уравнение содержит малый параметр $\varepsilon \ll 1$ перед старшими производными (диффузионными членами), что отражает условие, когда ширина переходного слоя много меньше других характерных мас-

штабов задачи. Эта формулировка позволяет использовать хорошо разработанную технику пограничных и внутренних слоев.

Конкретный план исследования включает следующие этапы:

(1). Асимптотическое разложение и преобразование координат: В окрестности движущегося фронта вводится локальная криволинейная система координат – одна вдоль касательной к фронту, другая вдоль нормали. В этой системе двумерная задача в направлении нормали сводится к одномерной задаче с малыми поправочными членами.

(2). Построение решения нулевого порядка: В нулевом приближении мы ищем решение в форме «бегущей квазиволны», профиль которой определяется одномерным стационарным уравнением РАД (теперь зависящим от параметра вдоль фронта). Решение этой задачи позволяет вывести выражение для нормальной скорости движения фронта, которая представляет собой векторную сумму локальной скорости дрейфа дисбаланса $\hat{U}(\mathbf{x})$ и нормальной компоненты скорости адвекции: $\hat{U}(\mathbf{x}) + \mathbf{V}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}$. Это приводит к модифицированному уравнению Гамильтона-Якоби для эволюции фронта, скорость распространения которого является анизотропной.

(3). Анализ поправок первого порядка: В первом порядке асимптотического разложения мы систематически учитываем поправки, обусловленные эффектом кривизны и неоднородностью ФПИ вдоль фронта. Эти эффекты вносят дополнительный вклад в скорость «дрейфа кривизны». Мы покажем, что возможные «изломы» или разрывы фронта в нулевом приближении сглаживаются в первом порядке именно за счёт эффекта кривизны.

(4). Строгое математическое обоснование и численная верификация: Мы применяем метод дифференциальных неравенств для строгого доказательства существования построенных асимптотических приближений и оценки их погрешности, обеспечивая математическую корректность теоретических результатов. Параллельно, с помощью специально разработанных численных экспериментов, проводится проверка и визуализация предсказанной теорией динамики фронта (например, формирования V-образных структур, деформации «шапочных» фронтов).

(5). Сопряжение упрощённых моделей: Мы демонстрируем, что задача об эволюции двумерного фронта может быть эквивалентным образом сведена к семейству параметризованных одномерных задач РАД, решаемых вдоль нормалей к фронту. Эта идея «редукции размерности» предоставляет мощный инструмент для анализа и расчёта сложных двумерных структур.

1.4. Цели и структура работы. Цель настоящей работы – построение полного теоретического аппарата, от вывода из первых принципов до строгого математического обоснования, для описания динамики эволюции многофазных контрастных структур в неоднородной активной среде под влиянием адвекции. Наша задача не только качественно объяснить наблюдаемые явления, но и количественно вывести формулы для скорости движения фронта, раскрыть точный механизм связи дрейфа дисбаланса, дрейфа кривизны и адвективного переноса, а также исследовать богатство порождаемых ими геометрических форм.

Структура статьи организована следующим образом: В Разделе 2 формально представлена математическая модель – двумерное уравнение РАД с малым параметром,

с детальным описанием предположений о функции источников, неоднородностях и начальных условиях. Раздел 3 составляет теоретическое ядро работы, где детально излагается процедура асимптотического анализа эволюции фронта, выводятся законы движения в нулевом и первом порядке, обсуждается их связь с уравнением Гамильтона-Якоби и рассматриваются частные случаи. Раздел 4 посвящён строгому обоснованию результатов с использованием метода дифференциальных неравенств. В Разделе 5 приводятся и анализируются ключевые численные примеры (такие как преломление фронта, эволюция V-образной структуры, развитие «шапочного» фронта), наглядно иллюстрирующие и подтверждающие эффективность теории. Наконец, в Разделе 6 подводятся итоги работы и обсуждаются потенциальные приложения полученных результатов в таких областях, как оптимизация доставки лекарств, контроль за распространением загрязнений, проектирование противопожарных барьеров и анализ структур магнитных полей в астрофизике.

Проводимое исследование позволит углубить понимание динамики формирования пространственно-временных паттернов в неравновесных системах и обеспечит прочную математическую основу для количественного прогнозирования и инженерного управления в ряде смежных дисциплин.

2. Уравнение РАД 1D (в одномерном случае)

2.1. Уравнение РАД с малым параметром при старших производных

В соответствии с методикой А.Н.Тихонова [?], мы рассматриваем одномерную по пространственным координатам сингулярно возмущённую краевую задачу в области $D \subset \mathbb{R}$ для уравнения РАД с малым параметром при старших производных:

$$\varepsilon u_{1t} + \varepsilon V_{1z} u_{1z} = \varepsilon^2 (\kappa_1 u_{1z})'_z - f_1(u_1, z), \quad (1)$$

$z \in [z_1, z_2]$, $t > t_0 = 0$, с граничными условиями второго рода на $z = z_1$ и $z = z_2$: $\frac{\partial u_1}{\partial \vec{n}} = \psi_1(z)$, с начальным условием $u_1(z, t_0) = \psi_{10}(z)$. Начальная функция $\psi_{10}(z)$ будет задана впоследствии так, чтобы обеспечить формирование решения типа КС. Задача РАД со слабой адвекцией (адвекционным слагаемым $\varepsilon^2 V_{1z} u'_{1z}$) была рассмотрена ранее в работе [?]. Результаты настоящей работы будут существенно отличаться от представленных в [?].

2.2. Модель ФПИ 1D. Рассматриваем одномерную задачу, где пространственной координатой является $z \in D \subset \mathbb{R}$. Предполагаем, что множество точек, для которых $f_1(u_1, z) = 0$, в пространстве (u_1, z) образует несколько линий. Определим линию равновесия L_j как гладкую линию в пространстве (u_1, z) , на которой $f_1(u_1, z) = 0$. Предположим, что выполнены следующие условия на функцию $f_1(u_1, z)$:

У1 (три линии равновесия). В области $(u_1, z) \in (-\infty, +\infty) \times D$ имеется ровно три линии равновесия, которые можно задать в явном виде: $u_1(z) = \varphi_j^{(1)}(z)$, $j = 1, 2, 3$. Предполагаем, что выполнено условие разделения корней ФПИ: $\varphi_1^{(1)}(z) < \varphi_2^{(1)}(z) < \varphi_3^{(1)}(z)$ для всех $z \in D$, причём все три функции $\varphi_j^{(1)}(z)$ являются гладкими в D .

У2 (ФПИ в окрестности точки равновесия). В окрестности каждого корня $\varphi_j^{(1)}(z)$ функция источников представима в виде $f_1(u_1, z) = \tilde{f}_j(u_1 - \varphi_j^{(1)}(z), z)$, $j \in$

$\{1, 2, 3\}$, $(u_1, z) \in \Omega(L_j)$, где $\Omega(L_j)$ обозначает окрестность линии L_j . При этом выполнены условия устойчивости:

$$\left. \frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial u_1} \right|_{u_1=\varphi_1^{(1)}} > 0, \quad \left. \frac{\partial \tilde{f}_2}{\partial u_1} \right|_{u_1=\varphi_2^{(1)}} < 0, \quad \left. \frac{\partial \tilde{f}_3}{\partial u_1} \right|_{u_1=\varphi_3^{(1)}} > 0. \quad (2)$$

Это означает, что $\varphi_1^{(1)}(z)$ и $\varphi_3^{(1)}(z)$ соответствуют устойчивым состояниям, а $\varphi_2^{(1)}(z)$ — неустойчивому состоянию.

УЗ (Знакоопределённость баланса в одномерном случае). Определим функционал дисбаланса:

$$J_1(z) = \int_{\varphi_1^{(1)}(z)}^{\varphi_3^{(1)}(z)} f_1(u_1, z) du_1. \quad (3)$$

Предположим, что существует точка $z_0 \in D$ такая, что: $J_1(z_0) = 0$, $J_1'(z_0) > 0$, $J_1(z) < 0$ при $z < z_0$, $J_1(z) > 0$ при $z > z_0$. Такое условие обеспечивает существование стационарного положения внутреннего переходного слоя (ВПС) в точке z_0 в нулевом приближении. Известно [?], что ВПС, расположенный вдоль $\tilde{\Upsilon}_0$, имеет нулевую скорость дрейфа дисбаланса, но вообще говоря, ненулевую скорость дрейфа кривизны.

2.3. Начальные условия ID. Пусть $I_{\text{start}} = [a, b]$ — отрезок на оси z , принадлежащий области определения D , причём расстояние от его концов до границы ∂D положительно. В одномерной постановке роль «фронта» в начальный момент играет отдельная точка $z_0 \in I_{\text{start}}$ (или, более физично, малая окрестность этой точки), в которой решение будет быстро изменяться от одного устойчивого состояния к другому.

Определим вспомогательную кусочно-постоянную функцию $\tilde{u}_1 0(z)$ следующим образом:

$$\tilde{u}_1 0(z) = \begin{cases} \varphi_3^{(1)}(z), & z \in I_{\text{start}}, \\ \varphi_1^{(1)}(z), & z \notin I_{\text{start}}, \end{cases}$$

где значение в граничной точке $z = a$ (или $z = b$) не играет роли.

Начальную функцию $u_{\text{start}}(z)$ получим из $\tilde{u}_1 0(z)$ методом сглаживания с помощью усредняющего ядра $\omega_\varepsilon(\tau)$ с радиусом ε (см., например, [Михилн77], гл. 2, §1). Параметр ε должен быть много меньше характерного масштаба изменения функций $\varphi_1^{(1)}(z)$, $\varphi_3^{(1)}(z)$ и много меньше длины отрезка $|b - a|$.

Поясним метод формирования начальных условий, отложив строгую формулировку до раздела, посвящённого асимптотическому построению. Пусть $\Omega_\nu(z_0)$ — некоторая окрестность точки z_0 радиуса ν , причём $\varepsilon \ll \nu \ll |b - a|$. Тогда после сглаживания:

- $u_{\text{start}}(z) \approx \varphi_3^{(1)}(z)$ внутри I_{start} , но вне $\Omega_\nu(z_0)$;
- $u_{\text{start}}(z) \approx \varphi_1^{(1)}(z)$ вне I_{start} и вне $\Omega_\nu(z_0)$;
- внутри $\Omega_\nu(z_0)$ возникает быстро изменяющийся переходный слой (ВПС), в котором значение u меняется от величин, близких к $\varphi_1^{(1)}(z)$, до величин, близких к $\varphi_3^{(1)}(z)$.

После завершения быстрого процесса релаксации (в масштабе времени $t \sim \varepsilon$) сформируется стационарная или медленно эволюционирующая контрастная структура, у которой внутренний переходный слой (фронт) будет локализован в окрестности точки z_0 (точнее, в области ширины $O(\varepsilon)$ вокруг неё). Более точное описание начальных условий будет дано в разделе 5 после построения асимптотического решения первого порядка.

3. Эволюция одномерного ВПС

3.1. Асимптотический ряд ID. Частичную сумму асимптотического ряда для решения задачи РАД будем искать в виде [?] суммы разрывного решения вырожденного уравнения $\bar{u}_1(z, t, \varepsilon)$, функций внутреннего переходного слоя $Q_1^{(\pm)}(z, t, \varepsilon)$ и функций пограничного слоя $\Pi_1(z, \varepsilon)$:

$$u_1(z, t, \varepsilon) = \begin{cases} U_1^{(+)}(z, t, \varepsilon) & \text{при } z \in \mathcal{G}^{(1)}(t), \\ U_1^{(-)}(z, t, \varepsilon) & \text{при } z \notin \mathcal{G}^{(1)}(t), \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} U_1^{(+)}(z, t, \varepsilon) &= \bar{u}_1^{(+)}(z, t, \varepsilon) + Q_1^{(+)}(z, t, \varepsilon), \quad z \in \mathcal{G}^{(1)}(t), \\ U_1^{(-)}(z, t, \varepsilon) &= \bar{u}_1^{(-)}(z, t, \varepsilon) + Q_1^{(-)}(z, t, \varepsilon) + \Pi_1(z, \varepsilon), \quad z \notin \mathcal{G}^{(1)}(t). \end{aligned} \quad (5)$$

Разрывное решение вырожденного уравнения $\bar{u}_1(z, t, \varepsilon)$ зависит от параметров задачи (точнее, от $\varphi_{1,2,3}^{(1)}(z)$) и от текущего положения линии ВПС:

$$\bar{u}_1(z, t, \varepsilon) = \begin{cases} \bar{u}_1^{(+)}(z, \varepsilon) & \text{при } z \in \mathcal{G}^{(1)}(t), \\ \bar{u}_1^{(-)}(z, \varepsilon) & \text{при } z \notin \mathcal{G}^{(1)}(t), \end{cases} \quad (6)$$

$$\bar{u}_1^{(+)}(z, \varepsilon) = \varphi_3^{(1)}(z), \quad \bar{u}_1^{(-)}(z, \varepsilon) = \varphi_1^{(1)}(z). \quad (7)$$

Функции переходного слоя и линию ВПС представим в виде рядов по степеням малого параметра ε :

$$Q_1^{(\pm)} = \sum_{k=0}^N \varepsilon^k Q_{1k}^{(\pm)}, \quad \Pi_1 = \sum_{k=0}^N \varepsilon^k \Pi_{1k}, \quad Z = \sum_{k=0}^N \varepsilon^k Z_k(t).$$

Последнее равенство задаёт положение внутреннего переходного слоя $z = Z(t, \varepsilon)$ в виде асимптотического разложения по степеням малого параметра. Здесь $Z_0(t)$ описывает движение фронта в нулевом приближении, а поправки $Z_k(t) (k \geq 1)$ учитывают эффекты более высокого порядка, такие как дрейф кривизны в соответствующем приближении. В одномерном случае фронт представляет собой отдельную точку на оси z , разделяющую область, где решение близко к $\varphi_3^{(1)}(z) (z > Z(t, \varepsilon))$, и область, где решение близко к $\varphi_1^{(1)}(z) (z < Z(t, \varepsilon))$.

3.2. Разделение медленной и быстрой координат ID. Для построения частичной суммы асимптотического ряда решения уравнения (??) в неоднородной среде мы используем решение этого уравнения в однородной среде. Пусть \tilde{z} есть некоторая точка на D . Выполним замену $z = \tilde{z} + \varepsilon\xi$, $t = \varepsilon\tau$, $\varepsilon u'_t = u'_\tau$, $\varepsilon u'_z = u'_\xi$, получим уравнение

$$u'_{1\tau} + V_{1z} u'_{1\xi} = \kappa_1 u''_{1\xi\xi} - f_1(u_1, \tilde{z} + \varepsilon\xi). \quad (8)$$

Оставим в (17) (??) члены порядка $O(1)$, получим краевую задачу для нулевого приближения

$$\begin{cases} u'_{1\tau} + V_{1z}(\tilde{z}) u'_{1\xi} = \kappa_1 u''_{1\xi\xi} - f_1(u_1, \tilde{z}), \\ u_1(-\infty, t) = \varphi_1^{(1)}(\tilde{z}), \quad u_1(+\infty, t) = \varphi_3^{(1)}(\tilde{z}). \end{cases} \quad (9)$$

В уравнении (9) переменная \tilde{z} (зафиксированная точка на фронте) входит только как параметр, определяющий локальные свойства среды. Одномерное уравнение реакции-диффузии-адвекции вида (9) было подробно изучено в работе [Nefedov1992][34]. Граничные условия для (9), также как в [Nefedov1992][34], обеспечивают примыкание решения к равновесным значениям $\varphi_3^{(1)}(\tilde{z})$ при $\xi \rightarrow +\infty$, $\varphi_1^{(1)}(\tilde{z})$ при $\xi \rightarrow -\infty$. Последующие члены разложения решения по степеням малого параметра ε получим из (8), собирая слагаемые порядка $\varepsilon, \varepsilon^2$ и т.д.

При заданном \tilde{z} уравнение (9) представляет собой краевую задачу, решение которой определяет профиль переходного слоя в окрестности точки \tilde{z} . В случае пространственно-неоднородной среды это семейство задач, параметризованное положением \tilde{z} вдоль оси z .

Вместе с задачей (??) рассмотрим "сопутствующую" задачу в точке $M_0 = \tilde{z} \in D$. Начиная с этого места будем обозначать $v_1(\xi, \tau) = u_1(\tilde{z} + \varepsilon\xi, \varepsilon\tau)$. Запишем семейство сопутствующих задач нулевого приближения с параметром η в виде:

$$\begin{cases} v_{1\tau} + V_{1z}(\tilde{z})v_{1\xi} = \kappa v_{1\xi\xi}'' - f_1(v_1, \tilde{z}), \\ v_1(-\infty) = \varphi_1^{(1)}(\tilde{z}), \quad v_1(+\infty) = \varphi_3^{(1)}(\tilde{z}). \end{cases} \quad (10)$$

Заметим, что сопутствующая задача составляется для однородной среды, параметры которой вычисляются в точке с "замороженными" координатами $z = \tilde{z}$, ФПИ в сопутствующей задаче не зависит явно от ξ . Поэтому, вместо $f_1(v, \tilde{z})$ будем писать просто $f_1(v)$.

3.3. Решение в виде бегущей квазиволны ID. Решение краевой задачи (??) будем искать в виде бегущей квазиволны: $v_1(\xi, \tau) = w_1(\chi)$, где $\chi = \xi - W_1\tau$. Скорость квазиволны W_1 найдем далее из условия существования решения краевой задачи:

$$\begin{cases} -\hat{U}_1 w_{1\chi} = \kappa_1 w_{1\xi\xi}'' - f_1(w_1), \\ w_1(-\infty) = \varphi_1^{(1)} + 0, \quad w_1(+\infty) = \varphi_3^{(1)} - 0, \end{cases} \quad (11)$$

где

$$\hat{U}_1 = W_1 - V_{1z}, \quad (12)$$

здесь и далее в этом параграфе $\varphi_{1,3} = \varphi_{1,3}^{(1)}(\tilde{z})$. Из (??) следует, что

$$-\hat{U}_1 \int_{-\infty}^{+\infty} (w_{1\chi})^2 d\chi = \kappa_1 \int_{-\infty}^{+\infty} w_{1\chi} w_{1\chi\xi\xi}'' d\chi - \int_{-\infty}^{+\infty} w_{1\chi} f_1(w_1) d\chi, \quad (13)$$

Применяя интегрирование по частям, значение \hat{U}_1 найдем в явной форме, если известен профиль квазиволны:

$$\hat{U}_1 = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} (w'_{1\chi})^2 d\chi \right]^{-1} \int_{\varphi_1^{(1)}}^{\varphi_3^{(1)}} f_1(w_1) dw_1. \quad (14)$$

Операция понижения порядка $w'_{1\chi} = p(w_1)$, $w''_{1\chi\xi\xi} = pp'_{w_1}$, приводит к уравнению

$$-\hat{U}_1 p = \kappa_1 pp'_w - f_1(w_1), \quad (15)$$

с условиями для $p_1(w)$, обеспечивающими решение типа КС с одним ВПС, соединяющим уровни $\varphi_1^{(1)}$ и $\varphi_3^{(1)}$:

$$p_1(\varphi_1^{(1)} + 0) = +0, \quad p_1(\varphi_3^{(1)} - 0) = +0. \quad (16)$$

К тому же $p_1(w) > 0$ при $w \in (\varphi_1^{(1)}, \varphi_3^{(1)})$. Задача (15) с дополнительными условиями (16) является переопределённой: это одно обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка с двумя граничными условиями. Из условия существования решения такой задачи скорость \hat{U}_1 определяется однозначно [Nefedov2010][35].

Таким образом, для каждого фиксированного \tilde{z} существует единственное значение $\hat{U}_1(\tilde{z})$, при котором краевая задача (11) разрешима. Соответствующее решение $w_1(\chi)$ определяет профиль переходного слоя, а производная $p_1(w) = w_{1\chi}$ удовлетворяет уравнению (15) с условиями (16). Значение $\hat{U}_1(\tilde{z})$ может быть найдено либо из условия разрешимости, что приводит к формуле (14), либо непосредственно из уравнения (15) с граничными условиями (16).

Мы нашли скорость перемещения внутреннего переходного слоя в локальной системе координат. В одномерном случае это скорость движения фронта относительно неподвижной системы координат:

$$W_1(\tilde{z}) = \hat{U}_1(\tilde{z}) + V_1(\tilde{z}), \quad (17)$$

где: $\hat{U}_1(\tilde{z})$ — собственная (внутренняя) скорость дрейфа, обусловленная дисбалансом реакции, определяемая формулой (14); $V_1(\tilde{z})$ — скорость адвективного переноса в точке \tilde{z} . Формула (17) показывает, что полная скорость фронта складывается из двух компонент: адвективной (V_1) и реакционно-диффузионной (\hat{U}_1)

4. Уравнение РАД в двумерном случае (2D)

4.1. Уравнение РАД 2D с малым параметром при старших производных. В соответствии с методикой А.Н.Тихонова [?], мы рассматриваем двумерную по пространственным координатам сингулярно возмущённую краевую задачу в области \mathcal{D} для уравнения РАД с малым параметром при старших производных:

$$\varepsilon u'_{2t} + \varepsilon V_{2x} u'_{2x} + \varepsilon V_{2y} u'_{2y} = \varepsilon^2 (\kappa_2 u'_{2x})'_x + (\kappa_2 u'_{2y})'_y - f_2(u_2, x, y), \quad (18)$$

$(x, y) \in \mathcal{D}$, $t > t_0 = 0$, с граничными условия второго рода на границе $\partial\mathcal{D}$ области \mathcal{D} : $\frac{\partial u_2}{\partial \vec{n}} = \psi_1^{(2)}(x, y)$, с начальным условием $u_2(x, y, t_0) = \psi_{20}(x, y)$. Начальная функция $\psi_{20}(x, y)$ будет задана впоследствии так, чтобы обеспечить формирование решения типа КС. Задача РАД со слабой адвекцией (адвекционным слагаемым $\varepsilon^2 V_{2x} u'_{2x} + \varepsilon^2 V_{2y} u'_{2y}$) была рассмотрена ранее в работе [?]. Результаты настоящей работы будут существенно отличаться от представленных в [?].

4.2. Модель ФПИ 2D. Мы предполагаем, что множество точек, для которых $f_2(u, x, y) = 0$, в пространстве с координатами (u_2, x, y) можно представить как объединение нескольких поверхностей. Определим поверхность равновесия \mathcal{S}_j как гладкую поверхность в пространстве (u_2, x, y) , на которой $f_2(u_2, x, y) = 0$. Предположим, что выполнены следующие условия, накладываемые на функцию f_2 :

У1 (три поверхности равновесия). В области $(u_2, x, y) \in (-\infty, +\infty) \times \mathcal{D}$ имеется ровно три поверхности равновесия, которые можно задать в явном виде: $u_2(x, y) = \varphi_{1,2,3}^{(2)}(x, y)$. Предполагаем, что выполнено условие разделения корней ФПИ: $\varphi_1^{(2)}(x, y) < \varphi_2^{(2)}(x, y) < \varphi_3^{(2)}(x, y)$ в \mathcal{D} , все три функции — гладкие в \mathcal{D} .

У2 (ФПИ в окрестности точки равновесия). В окрестности корня ФПИ представляется в виде $f_2(u_2, x, y) = \tilde{f}_{2j}(u_2 - \varphi_j(x, y), x, y)$, $j \in \{1, 2, 3\}$, $(u_2, x, y) \in \Omega(\mathcal{S}_j)$, причем $F_{1,2,3}(\omega, x, y)|_{\omega=0} = 0$ и $(F_{1,3}(\omega, x, y))'_{\omega=0} > 0$, $(F_2(\omega, x, y))'_{\omega=0} < 0$. Здесь и дальше $\Omega(\dots)$ есть окрестность указанной поверхности.

У3 (Знакоопределенность баланса). Пусть

$$J_2(x, y) = \int_{\varphi_1^{(2)}(x, y)}^{\varphi_3^{(2)}(x, y)} f_2(u_2, x, y) du_2. \quad (19)$$

Мы рассмотрим ФПИ такую, что внутри \mathcal{D} есть замкнута гладкая кривая $\tilde{\Upsilon}_0$, ограничивающая связную односвязную область $\tilde{\mathcal{G}}_0$ с границей $\tilde{\Upsilon}_0 = \partial\tilde{\mathcal{G}}_0$ такая, что $J_2(x, y)|_{\tilde{\Upsilon}_0} = 0$, $J_2(x, y) > 0$ внутри $\tilde{\mathcal{G}}_0$ и $J_2(x, y) < 0$ вне $\tilde{\mathcal{G}}_0$, $\left. \frac{\partial J_2(x, y)}{\partial \vec{n}} \right|_{\tilde{\Upsilon}_0} > 0$, \vec{n} есть внешняя нормаль к $\tilde{\Upsilon}_0$.

Известно [?], что ВПС, расположенный вдоль $\tilde{\Upsilon}_0$, имеет нулевую скорость дрейфа дисбаланса, но вообще говоря, ненулевую скорость дрейфа кривизны.

4.3. Начальные условия 2D. Пусть $\mathcal{G}_{\text{start}}$ – связная область с гладкой границей Υ_{start} , $\mathcal{G}_{\text{start}} \subset \mathcal{D}$, расстояние от Υ_{start} до $\partial\mathcal{D}$ больше нуля. Определим вспомогательную функцию $\tilde{u}_0(x, y)$ следующим образом: $\tilde{u}_0(x, y) = \varphi_1^{(2)}(x, y)$ вне $\mathcal{G}_{\text{start}}$, $\tilde{u}_0(x, y) = \varphi_3^{(2)}(x, y)$ внутри $\mathcal{G}_{\text{start}}$, значение $\tilde{u}_0(x, y)$ на Υ_{start} несущественно. Начальную функцию $u_{\text{start}}(x, y)$ получим из $\tilde{u}_0(x, y)$ методом сглаживания с помощью усредняющего ядра $\omega_\varepsilon(r)$ [?], гл.2, параграф 1. Значение ε должно быть много меньше R_{min} – наименьшего радиуса кривизны кривой Υ_{start} . Поясним метод формирования начальных условий, отложив строгую формулировку до раздела ???. Пусть $\Omega_\nu(\Upsilon_{\text{start}})$ есть некоторая окрестность Υ_{start} (т.е. множество точек, расстояние от которых до Υ_{start} меньше ν , $\varepsilon \ll \nu \ll R_{\text{min}}$). Тогда $u_{\text{start}} \approx \varphi_3^{(2)}$ внутри $\mathcal{G}_{\text{start}}$ (но вне $\Omega_\nu(\Upsilon_{\text{start}})$), $u_{\text{start}} \approx \varphi_1^{(2)}$ вне $\mathcal{G}_{\text{start}}$ и вне $\Omega_\nu(\Upsilon_{\text{start}})$. Внутри $\Omega_\nu(\Upsilon_{\text{start}})$ расположена линия ВПС, в окрестности которой концентрация изменяется значения, несколько большего $\varphi_1^{(2)}$ до несколько меньшего $\varphi_3^{(2)}$. После завершения быстрого процесса релаксации сформируется КС, для которой ВПС расположен в окрестности Υ_{start} . При достаточно малом ε линия ВПС будет расположена в $\Omega_\varepsilon(\Upsilon_{\text{start}})$. Более точно начальные условия мы опишем в разделе ??? после того, как найдем решение уравнения РАД в первом порядке в первом порядке асимптотического ряда.

5. Эволюция двумерного (2D) ВПС

5.1. Асимптотический ряд 2D. Частичную сумму асимптотического ряда для решения задачи РАД будем искать в виде [?] суммы разрывного решения вырожденного уравнения $\bar{u}_2(x, y, t, \varepsilon)$, функций внутреннего переходного слоя $Q_2^{(\pm)}(x, y, t, \varepsilon)$ и функций пограничного слоя $\Pi_2(x, y, \varepsilon)$:

$$u_2(x, y, t, \varepsilon) = \begin{cases} U_2^{(+)}(x, y, t, \varepsilon) & \text{при } (x, y) \in \mathcal{G}^{(2)}(t), \\ U_2^{(-)}(x, y, t, \varepsilon) & \text{при } (x, y) \notin \mathcal{G}^{(2)}(t), \end{cases} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} U_2^{(+)}(x, y, t, \varepsilon) &= \bar{u}_2^{(+)}(x, y, t, \varepsilon) + Q_2^{(+)}(x, y, t, \varepsilon), \quad (x, y) \in \mathcal{G}^{(2)}(t), \\ U_2^{(-)}(x, y, t, \varepsilon) &= \bar{u}_2^{(-)}(x, y, t, \varepsilon) + Q_2^{(-)}(x, y, t, \varepsilon) + \Pi_2(x, y, \varepsilon), \quad (x, y) \notin \mathcal{G}^{(2)}(t). \end{aligned} \quad (21)$$

Разрывное решение вырожденного уравнения $\bar{u}_2(x, y, t, \varepsilon)$ зависит от параметров задачи (точнее, от $\varphi_{1,2,3}^{(2)}(x, y)$) и от текущего положения линии ВПС:

$$\bar{u}_2(x, y, t, \varepsilon) = \begin{cases} \bar{u}_2^{(+)}(x, y, \varepsilon) & \text{при } (x, y) \in \mathcal{G}^{(2)}(t), \\ \bar{u}_2^{(-)}(x, y, \varepsilon) & \text{при } (x, y) \notin \mathcal{G}^{(2)}(t), \end{cases} \quad (22)$$

$$\bar{u}_2^{(+)}(x, y, \varepsilon) = \varphi_3^{(2)}(x, y), \quad \bar{u}_2^{(-)}(x, y, \varepsilon) = \varphi_1^{(2)}(x, y). \quad (23)$$

Функции переходного слоя и линию ВПС $\Upsilon(t)$ представим в виде рядов по степеням малого параметра ε :

$$Q_2^{(\pm)} = \sum_{k=0}^N \varepsilon^k Q_{2k}^{(\pm)}, \quad \Pi_2 = \sum_{k=0}^N \varepsilon^k \Pi_{2k}, \quad \Upsilon^{(2)}(t) = \Upsilon_0^{(2)}(t) + \sum_{k=1}^N \varepsilon^k \Upsilon_k^{(2)}(t). \quad (24)$$

Последнее равенство следует рассматривать как параметрическое представление линии ВПС, причем функции $x(\theta, t) = \phi(\theta, t)$, $y(\theta, t) = \psi(\theta, t)$, представляющие координаты, есть ряды по степеням параметра ε того же вида, что и (??). Параметр θ определяет точку на кривой $\Upsilon(t)$. Если Υ_{start} есть замкнутая линия, то θ есть периодическая координата, θ и $\theta + T$ соответствуют одной и той же точке. Тогда функции $\phi(\theta, t)$, $\psi(\theta, t)$ – периодические по координате θ , для всех t кривая $\Upsilon(t)$ – замкнутая. Иначе $\phi(\theta, t)$, $\psi(\theta, t)$ определены на $(-\infty, +\infty)$. Обозначим $\mathcal{D}(t)$ – область, ограниченная кривой $\Upsilon(t)$ для периодической θ , иначе часть плоскости по одну сторону от $\Upsilon(t)$.

5.2. Локальные координаты для уравнения РАД 2D. Пусть замкнутая гладкая кривая $\Upsilon(t)$ есть линия фронта ВПС, т.е. заданное в неявной форме решение уравнения $u_2(x, y, t) = \varphi_2^{(2)}(x, y)$. Одновременно $\Upsilon(t)$ есть граница области $\mathcal{D}(t)$, которую называем пятном контрастной структуры. Зададим $\Upsilon(t)$ в параметрической форме: $x = x(\theta, t)$, $y = y(\theta, t)$, θ – параметр, $\theta \in (\theta_a, \theta_b)$. Возможно $\theta_a = -\infty$, $\theta_b = +\infty$, возможно также θ_a и θ_b определяют одну и ту же точку на Υ , если кривая замкнута. В этом случае предполагаем гладкость $\Upsilon(t)$ в окрестности этой точки. Предполагаем, что отображение $\Upsilon(t) \leftrightarrow (\theta_a, \theta_b)$ взаимно – однозначное при всех t , это означает, что линия фронта КС не имеет самопересечений и самоналожений. Зададим на $\Upsilon(t)$ непрерывное поле нормали $\vec{n}(\theta, t)$ (это возможно ввиду гладкости Υ , отсутствию пересечений и самоналожений). Если кривая $\Upsilon(t)$ замкнута, выберем $\vec{n}(t)$ – внутренняя нормаль к $\Upsilon(t)$.

Для определенности рассматриваем пятно КС положительной полярности, т.е. $u_2(x, y, t) > \varphi_2^{(2)}(x, y)$ внутри $\mathcal{G}^{(2)}(t)$. Пусть \hat{t} есть некоторый момент времени, для которого ВПС уже сформирован, и $\hat{\Upsilon} = \Upsilon(\hat{t})$. Понятие сформированного ВПС введем позднее, когда запишем явные выражения разложения нулевого порядка. Рассмотрим уравнение (??) в некоторой окрестности $\hat{\Upsilon}$, которую обозначим $\Omega(\hat{\Upsilon})$. На нормали введем координату s так, что $ds^2 = dx^2 + dy^2$, и на $\hat{\Upsilon}$ было верно $s = \hat{s}$. В некоторой окрестности $\Omega(\hat{\Upsilon})$ якобиан $D(x, y)/D(s, \theta)$ отличен от нуля, так как он отличен от нуля на $\hat{\Upsilon}$ и является непрерывной функцией от (x, y) . Поэтому найдется окрестность $\Omega(\hat{\Upsilon})$, внутри которой отображение $(x, y) \leftrightarrow (\theta, s)$ является диффеоморфизмом (с учетом возможной периодичности по θ). Можно также без ограничения общности взять в некоторой $\Omega(\hat{\Upsilon})$ ортогональные координаты (θ, s) , использовать для построения отображения конформное отображение деформированной кольцевой области с гладкими границами на круговое кольцо. Ось s направлена вдоль градиента

(u'_{2x}, u'_{2y}) функции $u_2(x, y, \hat{t})$ наружу по отношению к $\mathcal{D}(\hat{t})$, ось θ направлена вдоль $\hat{\Upsilon}$ в положительном направлении (при движении в положительном направлении пятно ВПС остаётся по левую руку). Пусть верно

У4 (монотонность баланса). Функция $J_2(s, \theta)$ (определена условием (??)) для любого θ есть монотонная вдоль переменной s функция в некоторой окрестности точки (\hat{s}, θ) для всех θ .

Уравнение (??) запишем в в системе координат (s, θ) в виде

$$\varepsilon u'_{2t} + \varepsilon (A_1 V_{2s} u'_{2s} + A_2 V_{2\theta} u'_{2\theta}) = \kappa_2 \varepsilon^2 (A_{11} u''_{2ss} + 2A_{12} u''_{2s\theta} + A_{22} u''_{2\theta\theta} + B_1 u'_{2s} + B_2 u'_{2\theta}) - f_2(u_2, s, \theta), \quad (25)$$

$(s, \theta) \in \Omega(\Upsilon)$. Здесь

$$A_{11} = (s'_x)^2 + (s'_y)^2, \quad A_{12} = s'_x \theta'_x + s'_y \theta'_y, \quad A_{22} = (\theta'_x)^2 + (\theta'_y)^2, \quad (26)$$

$$B_1 = s''_{xx} + s''_{yy}, \quad B_2 = \theta''_{xx} + \theta''_{yy}, \quad (27)$$

$V_\theta(s, \theta) = V \sin \alpha$, $V_s(s, \theta) = V \cos \alpha$, где $v = V_2(x(s, \theta), y(s, \theta))$, α есть угол между осями Ox и Os в точке (s, θ) .

5.3. Разделение медленной и быстрой координат 2D. Для построения частичной суммы асимптотического ряда решения уравнения (??) в неоднородной среде мы используем решение этого уравнения в однородной среде. Пусть $(\tilde{s}, \tilde{\theta})$ есть некоторая точка на $\hat{\Upsilon}$. Выполним замену $s = \tilde{s} + \varepsilon \xi$, $\theta = \tilde{\theta} + \eta$, $t = \varepsilon \tau$, $\varepsilon u'_{2t} = u'_{2\tau}$, $\varepsilon u'_{2s} = u'_{2\xi}$, получим уравнение

$$u'_{2\tau} + V_{2s} u'_{2\xi} + \varepsilon V_{2\theta} u'_{2\eta} = \kappa_2 (A_{11} u''_{2\xi\xi} + 2\varepsilon A_{12} u''_{2\xi\eta} + \varepsilon^2 A_{22} u''_{2\eta\eta}) + \varepsilon \kappa_2 B_1 u'_{2\xi} + \varepsilon^2 \kappa_2 B_2 u'_{2\eta} - f_2(u_2, \tilde{s} + \varepsilon \xi, \tilde{\theta} + \eta). \quad (28)$$

Оставим в (??) члены порядка $O(1)$, получим краевую задачу для нулевого приближения:

$$\begin{cases} u'_{2\tau} + V_{2s}(\tilde{s}, \tilde{\theta} + \eta) A_1 u'_{2\xi} = \kappa_2 A_{11} u''_{2\xi\xi} - f_2(u_2, \tilde{s}, \tilde{\theta} + \eta), \\ u_2(-\infty, \eta) = \varphi_1^{(2)}(\tilde{s}, \tilde{\theta}), \quad u_2(+\infty, \eta) = \varphi_3^{(2)}(\tilde{s}, \tilde{\theta}). \end{cases} \quad (29)$$

В (??) переменная η входит только как параметр, но для единообразия подхода к координатам (ξ, η) . Одномерное уравнением РАД (??) изучено в работе [?]. Граничные условия для (??), также, как в [?], обеспечивают примыкание решения к равновесным значениям $\varphi_3^{(2)}$ при $\xi \rightarrow +\infty$ и $\varphi_1^{(2)}$ при $\xi \rightarrow -\infty$. Последующие члены разложения решения по степеням малого параметра получим из (??), собирая слагаемые порядка ε , ε^2 и т.д. При заданном \tilde{s} (??) есть семейство краевых задач, зависящих от параметра $\tilde{\theta}$.

Вместе с задачей (??) рассмотрим "сопутствующую" задачу в точке $M_0 = (\tilde{s}, \tilde{\theta}) \in \tilde{\Upsilon}_0$. Начиная с этого места будем обозначать $v_2(\xi, \tau) = u_2(\tilde{s} + \varepsilon \xi, \tilde{\theta} + \eta, \varepsilon \tau)$. Запишем семейство сопутствующих задач нулевого приближения с параметром η в виде

$$\begin{cases} v'_{2\tau} + V_{2s}(\tilde{s}, \tilde{\theta} + \eta) A_1 v'_{2\xi} = \kappa_2 A_{11} v''_{2\xi\xi} - f_2(v, \tilde{s}, \tilde{\theta} + \eta), \\ v_2(-\infty) = \varphi_1^{(2)}(\tilde{s}, \tilde{\theta} + \eta), \quad v_2(+\infty) = \varphi_3^{(2)}(\tilde{s}, \tilde{\theta} + \eta). \end{cases} \quad (30)$$

Заметим, что сопутствующая задача составляется для однородной среды, параметры которой вычисляются в точке с "замороженными" координатами $s = \tilde{s}$, $\theta = \tilde{\theta} + \eta$, ФПИ в сопутствующей задаче не зависит явно от ξ . Поэтому, вместо $f_2(v, \tilde{s}, \tilde{\theta} + \eta)$ будем писать просто $f_2(v)$.

5.4. Решение в виде бегущей квазиволны 2D. Решение краевой задачи (??) будем искать в виде бегущей квазиволны: $v_2(\xi, \tau) = w_2(\chi)$, где $\chi = \xi - W_2\tau$. Скорость квазиволны W_2 найдем далее из условия существования решения краевой задачи:

$$\begin{cases} -\hat{U}_2 w'_{2\chi} = \kappa_2 A_{11} w''_{2\chi\chi} - f_2(w_2), \\ w_2(-\infty) = \varphi_1^{(2)} + 0, \quad w_2(+\infty) = \varphi_3^{(2)} - 0, \end{cases} \quad (31)$$

где

$$\hat{U}_2 = W_2 - A_1 V_{2s}, \quad (32)$$

здесь и далее в этом параграфе $\varphi_{1,3}^{(2)} = \varphi_{1,3}^{(2)}(\tilde{s}, \tilde{\theta} + \eta)$. Из (??) следует, что

$$-\hat{U}_2 \int_{-\infty}^{+\infty} (w'_{2\chi})^2 d\chi = \kappa_2 \int_{-\infty}^{+\infty} A_{11} w'_{2\chi} w''_{2\chi\chi} d\chi - \int_{-\infty}^{+\infty} w'_{2\chi} f_2(w_2) d\chi, \quad (33)$$

Применяя интегрирование по частям, значение \hat{U}_2 найдем в явной форме, если известен профиль квазиволны:

$$\hat{U}_2 = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} (w'_{2\chi})^2 d\chi \right]^{-1} \int_{\varphi_1^{(2)}}^{\varphi_3^{(2)}} f_2(w_2) dw_2. \quad (34)$$

Операция понижения порядка $w'_{2\chi} = p(w_2)$, $w''_{2\chi\chi} = pp'_{w_2}$, приводит к уравнению

$$-\hat{U}_2 p = \kappa_2 A_{11} pp'_{w_2} - f_2(w_2), \quad (35)$$

с условиями для $p_2(w)$, обеспечивающими решение типа КС с одним ВПС, соединяющим уровни $\varphi_1^{(2)}$ и $\varphi_3^{(2)}$:

$$p_2(\varphi_1^{(2)} + 0) = +0, \quad p_2(\varphi_3^{(2)} - 0) = +0. \quad (36)$$

К тому же $p_2(w) > 0$ при $w \in (\varphi_1^{(2)}, \varphi_3^{(2)})$. Из условия существования решения этой переопределенной задачи с двумя условиями для уравнения первого порядка значение \hat{U}_2 однозначно находится [?]. Таким образом, значение \hat{U}_2 существует и единственно [?], для этого \hat{U}_2 задача (??) разрешима, и после её решения и вычисления $w_2(\chi)$ само значение \hat{U}_2 находится из (??). Поэтому существует функция $\hat{U}_2(\tilde{s}, \tilde{\theta})$ такая, что при подстановке $\hat{U}_2(\tilde{s}, \tilde{\theta})$ в (??) существует единственная гладкая функция $p_2(w)$, для которой верно (??) и верны также условия (??). Мы нашли скорость перемещения ВПС вдоль направления нормали:

$$W_2(\tilde{s}, \tilde{\theta}, \vec{n}) = \hat{U}_2(\tilde{s}, \tilde{\theta}) + A_1 V_{2s}. \quad (37)$$

В отличие от $\hat{U}_2(\tilde{s}, \tilde{\theta})$, эта скорость зависит от направления нормали.

5.5. Задача Коши для семейства траекторий, ортогональных семейству линий фронта КС. ♣ Теперь мы сформулируем задачу Коши для нахождения линии фронта нулевого порядка Υ_0 в заданный момент времени t , если задана линия фронта Υ_{start} в момент времени t_{start} .

У5 (гладкость линии ВПС в начальный момент времени). Пусть гладкая кривая Υ_{start} без самопересечений и самоналожений задана в параметрической форме: $\vec{r} = \vec{r}_{\text{start}}(\theta)$, $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$ – гладкая функция без особых точек: $\left| \frac{d\vec{r}_{\text{start}}}{d\theta} \right| > 0$ на $[\theta_1, \theta_2]$.

Пусть Υ_{start} есть кривая без точек перегиба, радиус кривизны $R(\theta)$ в каждой точке которой конечен и отделен от нуля положительной константой. Пусть векторная функция $\vec{r}(\theta, t) = (x(\theta, t), y(\theta, t))$ есть решение задачи Коши

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} = -\vec{n}(x, y) [\hat{U}(x, y) + (\vec{V}, \vec{n}(x, y))], \\ \vec{r}|_{t=t_{\text{start}}} = \vec{r}_{\text{start}}(\theta), \end{cases} \quad (38)$$

где

$$\vec{n}(x, y) = \left(-\frac{\partial y}{\partial \theta}, \frac{\partial x}{\partial \theta} \right) \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta} \right)^2 \right]^{-1/2} = \vec{N}[\vec{r}(s, \theta)], \quad (39)$$

эта формула является одновременно определением преобразования векторной функции $\vec{r}(s, \theta)$ в векторную функцию $\vec{n}(\vec{r})$. Семейство кривых $\mathcal{L}_{\text{ort}}(\theta)$, $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$, определенных (??), назовем семейством траекторий, ортогональных линии фронта нулевого порядка. Уравнение (??) равносильно системе дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial y}{\partial \theta} \cdot E, \quad \frac{\partial y}{\partial t} = -\frac{\partial x}{\partial \theta} \cdot E, \quad (40)$$

$$E = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta} \right)^2 \right]^{-1/2} \left(\hat{U}(x, y) + \left(-V_x \frac{\partial y}{\partial \theta} + V_y \frac{\partial x}{\partial \theta} \right) \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta} \right)^2 \right]^{-1/2} \right). \quad (41)$$

В [?] показано, что при сформулированных условиях на ФПИ и на Υ_{start} задача (??) разрешима на некотором промежутке $[t_{\text{start}}, t_{\text{start}} + \Delta t]$. Глобальная разрешимость по времени заведомо имеет место при условии прямолинейной линии Υ_{start} и однородного поля скоростей. Можно также специальным образом задать поле скоростей, чтобы обеспечить глобальную разрешимость. В случае общего положения эта система разрешима до момента, когда на $\Upsilon(t)$ образуется точка сборки (или особенность более высокого порядка, [?]).

5.6. Уравнение эйконала и траектории фронта. ♣ Существует другой способ решения системы (??), основанный на уравнениях Гамильтона–Якоби. Введём теперь для двумерной фазы гамильтониан $H(x, y, p_1, p_2) = p_1^2 + p_2^2 - W(x, y)^{-2}$, Пусть S есть эйконал, т.е. решение уравнения

$$(\nabla S)^2 = W^{-2}(x, y) \quad (42)$$

с начальным условием

$$S|_{\Upsilon_{\text{start}}} = S_{\text{start}} = \text{const} \quad (43)$$

на линии фронта ВПС в начальный момент времени. Пусть параметризованное параметром θ семейство функций $(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t), \tilde{p}_1(t), \tilde{p}_2(t))$ есть результат решения задачи Коши для уравнений Гамильтона

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{x}}{dt} = 2p_1, & \frac{d\tilde{y}}{dt} = 2p_2, & \frac{d\tilde{p}_1}{dt} = \frac{\partial W^{-2}}{\partial \tilde{x}}, & \frac{d\tilde{p}_2}{dt} = \frac{\partial W^{-2}}{\partial \tilde{y}}, \\ (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{p}_1, \tilde{p}_2)|_{t_{\text{start}}} = (x_{\text{start}}(\theta), y_{\text{start}}(\theta), \tilde{p}_{1\text{start}}(\theta), \tilde{p}_{2\text{start}}(\theta)), \end{cases} \quad (44)$$

$(\tilde{p}_{1\text{start}}(\theta), \tilde{p}_{2\text{start}}(\theta))$ найдены из условия равенства нулю Гамильтониана на Υ_{start} [?]. В данном случае это будет квадратное уравнение, мы выбираем для каждого $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$ решение, для которого вектор $(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2)$ образует острый угол с нормалью (??). В отличие от коротковолновой асимптотики решения уравнения колебаний в неоднородной

среде, здесь нет произвола в выборе решения, так как направление дрейфа квазиволны определено однозначно. Из **Уxxx**(с)ледует, что существует определённое таким образом гладкое векторное поле $(\tilde{p}_{1\text{start}}(\theta), \tilde{p}_{2\text{start}}(\theta))$. Мы приняли параметризацию стартовой кривой Υ_{start} одинаковой для семейства ортотраекторий $\mathcal{L}_{*\text{ort}}(\theta)$ и семейства Гамильтоновых лучей $\mathcal{C}_{*\text{ham}}(\theta)$. Пусть $\mathcal{C}_{*\text{ham}}(\theta) = (\tilde{x}(\theta, t), \tilde{y}(\theta, t))$, $t \in [t_{\text{start}}, t_1]$ есть лучи [?] (проекции кривых $(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t), \tilde{p}_1(t), \tilde{p}_2(t))$ на плоскость \tilde{x}, \tilde{y}). Тогда решение уравнения (??) имеет вид

$$S(\tilde{x}, \tilde{y}) = S_{\text{start}} + \int_{\mathcal{C}_{*\text{ham}}(\tilde{x}, \tilde{y})} \langle p, dx \rangle = S_{\text{start}} + \int_{\mathcal{C}_{*\text{ham}}(\tilde{x}, \tilde{y})} W^{-1}(x, y) dl. \quad (45)$$

Здесь $\mathcal{C}_{*\text{ham}}(\tilde{x}, \tilde{y})$ есть луч, исходящий из некоторой точки на Υ_{start} и приходящий в точку (\tilde{x}, \tilde{y}) . При сформулированных условиях (гладкая Υ_{start} и гладкая ФПИ) найдется открытое множество Ω , являющееся окрестностью Υ_{start} , в котором $\mathcal{C}_{*\text{ham}}(\tilde{x}, \tilde{y})$ единствен [?]. Границей этого множества является бифуркационное множество \mathcal{B} экстремальной задачи для оптической длины пути, который начинается на Υ_{start} и приходит в точку (\tilde{x}, \tilde{y}) . Расстояние между \mathcal{B} и Υ_{start} положительно [?]. Вне Ω экстремальная задача, вообще говоря, имеет несколько решений, поэтому $\mathcal{C}_{*\text{ham}}(\tilde{x}, \tilde{y})$ уже не единствен. В отличие от задачи о линейных волнах в неоднородной среде, для уравнения РАД этот случай, вообще говоря, неактуален. Фронт ВПС, начиная с первой по времени точки самоналожения или самопересечения, невозможно описать, используя только главный (нулевой) порядок разложения по степеням малого параметра. Решение этой важнейшей проблемы выходит за рамки настоящей статьи. Пусть l есть геометрическая длина пути вдоль траектории квазилуча. Тогда на $\mathcal{C}_{*\text{ham}}$ верно $\frac{d}{dl} = \frac{d}{dt} \frac{dt}{dl} = \frac{1}{W} \frac{d}{dt}$, $\frac{dl}{dt} = W$, $\frac{d\vec{r}}{dl} = W(x, y) \nabla S$, $\frac{d\vec{r}}{dt} = W^2(x, y) \nabla S$. Отсюда следует, что семейство линий равного уровня S совпадают с семейством линий фронта квазиволны РАД, найденных из (??).

6. Сумма первого порядка асимптотического ряда

Для построения асимптотического ряда выберем момент времени $\hat{t} \in (t_0, t_1)$. Найдем частичную сумму асимптотического ряда первого порядка:

$$u(\xi, \eta, t) = u_0(\xi, \eta, t) + \varepsilon u_1(\xi, \eta, t), \quad (46)$$

$$\hat{W} = \hat{W}_0 + \varepsilon \hat{W}_1. \quad (47)$$

Соберем в (??) слагаемые первого порядка относительно ε :

$$\begin{aligned} u'_\tau + \varepsilon V_s u'_\xi + \varepsilon^2 V_\theta u'_\eta &= \\ &= \kappa (A_{11} u''_{\xi\xi} + 2\varepsilon A_{12} u''_{\xi\eta} + \varepsilon^2 A_{22} u''_{\eta\eta}) + \varepsilon \kappa B_1 u'_\xi + \varepsilon^2 \kappa B_2 u'_\eta - f(u, \hat{s} + \varepsilon \xi, \tilde{\theta} + \eta). \end{aligned} \quad (48)$$

Подставим сумму асимптотического ряда:

$$\begin{aligned} (u_0)'_\tau + \varepsilon (u_1)'_\tau + \varepsilon V_s (u_0)'_\xi + \varepsilon^2 V_s (u_1)'_\xi + \varepsilon^2 V_\theta (u_0)'_\eta + \varepsilon^3 V_\theta (u_1)'_\eta &= \\ &= \kappa (A_{11} (u_0)''_{\xi\xi} + \varepsilon A_{11} (u_1)''_{\xi\xi} + 2\varepsilon A_{12} (u_0)''_{\xi\eta} + 2\varepsilon^2 A_{12} u''_{1\xi\eta} + \varepsilon^2 A_{22} u''_{\eta\eta} + \dots) + \\ &+ \varepsilon \kappa B_1 (u_0)'_\xi + \varepsilon^2 \kappa B_2 u'_\eta - f(u_0(\xi, \hat{s}, \tilde{\theta}) + \varepsilon u_1, \hat{s} + \varepsilon \xi, \tilde{\theta} + \eta) \end{aligned} \quad (49)$$

Оставим слагаемые нулевого и первого порядков:

$$(u_0)'_{\tau} + \varepsilon(u_1)'_{\tau} + \varepsilon V_s(u_0)'_{\xi} = \kappa(A_{11}(u_0)''_{\xi\xi} + \varepsilon A_{11}(u_1)''_{\xi\xi} + 2\varepsilon A_{12}(u_0)''_{\xi\eta}) + \varepsilon \kappa B_1(u_0)'_{\xi} - f(u_0(\xi, \hat{s}, \tilde{\theta}) + \varepsilon u_1, \hat{s} + \varepsilon \xi, \tilde{\theta} + \eta). \quad (50)$$

Найдём функцию источников:

$$\begin{aligned} f(u_0(\xi, \hat{s}, \tilde{\theta}) + \varepsilon u_1, \hat{s} + \varepsilon \xi, \tilde{\theta} + \eta) &= \\ &= f(u_0(\xi, \hat{s}, \tilde{\theta}) + \varepsilon u_1, \hat{s} + \varepsilon \xi, \tilde{\theta} + \eta) - f(u_0(\xi, \hat{s}, \tilde{\theta}) + \varepsilon u_1, \hat{s} + \varepsilon \xi, \tilde{\theta}) + \\ &+ f(u_0(\xi, \hat{s}, \tilde{\theta}) + \varepsilon u_1, \hat{s} + \varepsilon \xi, \tilde{\theta}) - f(u_0(\xi, \hat{s}, \tilde{\theta}), \hat{s}, \tilde{\theta}) + f(u_0(\xi, \hat{s}, \tilde{\theta}), \hat{s}, \tilde{\theta}) = \\ &= f'_{\theta}(u_0(\xi, \hat{s}, \tilde{\theta}) + \varepsilon u_1, \hat{s} + \varepsilon \xi, \tilde{\theta} + \nu\eta) \cdot \eta + \\ &+ \varepsilon f'_u(u_0(\xi, \hat{s}, \tilde{\theta}), \hat{s}, \tilde{\theta}) \cdot u_1 + \varepsilon f'_s(u_0(\xi, \hat{s}, \tilde{\theta}), \hat{s}, \tilde{\theta}) \cdot \xi + f(u_0(\xi, \hat{s}, \tilde{\theta}), \hat{s}, \tilde{\theta}) \end{aligned} \quad (51)$$

Выражение ФПИ с точки, сдвинутой относительно некоторой точки на линии $\hat{\Upsilon}$, требует внимания:

$$\begin{aligned} f(u_0(\xi, \hat{s}, \tilde{\theta}) + \varepsilon u_1, \hat{s} + \varepsilon \xi, \tilde{\theta} + \eta) &= f'_{\theta}(u_0(\xi, \hat{s}, \tilde{\theta}), \hat{s}, \tilde{\theta}) \cdot \eta + \\ &+ f''_{\theta u}(u_0(\xi, \hat{s}, \tilde{\theta}), \hat{s}, \tilde{\theta} + \nu\eta) \cdot \eta \cdot \varepsilon \cdot u_1 + f''_{\theta s}(u_0(\xi, \hat{s}, \tilde{\theta}), \hat{s}, \tilde{\theta} + \nu\eta) \cdot \eta \cdot \varepsilon \cdot \xi + \\ &+ \varepsilon f'_u(u_0(\xi, \hat{s}, \tilde{\theta}), \hat{s}, \tilde{\theta}) \cdot u_1 + \varepsilon f'_s(u_0(\xi, \hat{s}, \tilde{\theta}), \hat{s}, \tilde{\theta}) \cdot \xi + f(u_0(\xi, \hat{s}, \tilde{\theta}), \hat{s}, \tilde{\theta}), \end{aligned} \quad (52)$$

где $\nu \in (0; 1)$. Из определения кривой $\hat{\Upsilon}$ следует, что $f'_{\theta}(u_0(\xi, \hat{s}, \tilde{\theta}), \hat{s}, \tilde{\theta}) = 0$. Теперь для бегущей квазиволны в первом порядке получим

$$\begin{aligned} -\hat{W}_1(u_0)'_{\xi} - \hat{W}_0(u_1)'_{\xi} + V_s(u_0)'_{\xi} &= \kappa A_{11}(u_1)''_{\xi\xi} + 2\kappa A_{12}(u_0)''_{\xi\eta} + \kappa B_1(u_0)'_{\xi} - \\ &- f''_{\theta u}(u_0(\xi, \hat{s}, \tilde{\theta}), \hat{s}, \tilde{\theta} + \nu\eta) \cdot \eta \cdot u_1 - f''_{\theta s}(u_0(\xi, \hat{s}, \tilde{\theta}), \hat{s}, \tilde{\theta} + \nu\eta) \cdot \eta \cdot \xi - \\ &- f'_u(u_0(\xi, \hat{s}, \tilde{\theta}), \hat{s}, \tilde{\theta}) \cdot u_1 - f'_s(u_0(\xi, \hat{s}, \tilde{\theta}), \hat{s}, \tilde{\theta}) \cdot \xi. \end{aligned} \quad (53)$$

Семейство задач Коши, параметризованное параметром η , (??) описывает квазиволну в первом порядке асимптотического ряда в некоторой окрестности точки $\tilde{\theta}$. Вычисление ν потребует ещё одного разложения в ряд уже по степеням η . В центральной точке семейства: $\eta = 0$, профиль и скорость квазиволны найдём, положив $\eta = 0$ в (??):

$$\begin{cases} -\hat{W}_0(u_1)'_{\xi} - \kappa A_{11}(u_1)''_{\xi\xi} + f'_u(u_0(\xi, \hat{s}, \tilde{\theta})) \cdot u_1 = \tilde{W}_1(u_0)'_{\xi} + 2\kappa A_{12}(u_0)''_{\xi\eta}, \\ u_1(-\infty) = 0, \quad u_1(+\infty) = 0, \end{cases} \quad (54)$$

где

$$\tilde{W}_1 = \hat{W}_1 - V_s + \kappa B_1, \quad (55)$$

$B_1 = s''_{xx} + s''_{yy}$. Задача (??) есть линейная краевая задача для неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с однородными граничными условиями, причем соответствующая однородная краевая задача

$$-\hat{W}_0 v'_{\xi} - \kappa A_{11} v''_{\xi\xi} + f'_u(u_0(\xi)) \cdot v = 0, \quad v(\pm\infty) = 0, \quad (56)$$

имеет нетривиальное решение $v = (u_0)'_{\xi}$. Поэтому задача (??) разрешима при условии ортогональности правой части всем частным решениям однородной задачи (в данном случае пространство решений однородной задачи – одномерное):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (u_0)'_{\xi} \cdot (\tilde{W}_1(u_0)'_{\xi} + 2\kappa A_{12}(u_0)''_{\xi\eta}) d\xi = 0, \quad (57)$$

найдем отсюда

$$\tilde{W}_1 = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} [(u_0)'_{\xi}]^2 d\xi \right]^{-1} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} (u_0)'_{\xi} \cdot 2\kappa A_{12}(u_0)''_{\xi\eta} d\xi. \quad (58)$$

В работе [?] (и в указанных там публикациях) детально описан другой алгоритм вычисления W_1 , основанный на построении решения уравнения (??) на двух полу-прямых: $D_1 = (-\infty, \xi_0]$ и $D_2 = [\xi_0, +\infty)$, где ξ_0 есть единственное решение уравнения $u_0(\xi) = \varphi_2$, и последующего гладкого сшивания в точке ξ_0 . Найденное из условия сшивания значение \tilde{W}_1 в точности совпадает с (?). Теперь найдем из (?) скорость дрейфа первого порядка:

$$\hat{W}_1 = \tilde{W}_1 + V_s - \kappa B_1, \quad (59)$$

складывается из (1) компоненты скорости адвекции V_s , направленной перпендикулярно линии ВПС, (2) скорости дрейфа кривизны κB_1 , (3) скорости градиентного дрейфа \tilde{W}_1 , найденной из (?). Укажем случай, когда скорость первого порядка вычисляется в явном виде: если в некоторой окрестности точки (s, θ) среда однородна, то в этой окрестности $(u_0)''_{\xi\eta} = 0$, и тогда $\tilde{W}_1 = 0$, $\hat{W}_1 = V_s - \kappa B_1$.

7. Примеры

Теоретические и прикладные примеры несбалансированных слоев и периодических фронтальных структур.

7.1. Основные механизмы эволюции фронта: взаимодействие дрейфа дисбаланса и дрейфа кривизны

В неоднородных активных средах эволюция фронта контрастных структур (КС) определяется совместным действием нескольких физических механизмов. В данном разделе сначала строится базовый теоретический каркас для описания движения фронта, с особым вниманием к двум ключевым механизмам: дрейфу дисбаланса реакции и дрейфу кривизны.

Настоящий раздел посвящён систематическому теоретическому анализу и численному моделированию механизмов эволюции фронта контрастной структуры, описываемой уравнением реакции-адвекции-диффузии в двумерной неоднородной среде. Основное внимание уделяется динамике изменения геометрической формы фронта, то есть его пространственного профиля $y = y(x, t) = \hat{y}(x) + Wt$, во времени. Цель – раскрыть синергетическое действие ключевых физических параметров, влияющих на продвижение фронта: скорости дрейфа, обусловленной дисбалансом реакции \hat{U} , и скорости дрейфа, индуцированного кривизной kB (где k – кривизна). Полученные результаты имеют не только теоретическую ценность, но и предоставляют инструменты для количественного анализа практических задач, таких как распространение пламени или продвижение фронта загрязняющих веществ.

Рассмотрим упрощённый случай уравнения (1) при отсутствии адвекции ($V = 0$) и постоянном коэффициенте диффузии k . Предполагается, что реакционный процесс удовлетворяет условиям $V_1 - V_3$, что позволяет сформировать устойчивый распространяющийся фронт. В соответствии с геометрической теорией волновых фронтов, движение фронта определяется его локальной скоростью W_n в направлении нормали, которая является функцией пространственных координат и локальных геометрических свойств.

Таким образом, нормальная скорость может быть записана как: $W_n = \tilde{U} + \kappa * B$. Однако во многих прикладных сценариях, таких как наблюдение за распространением

пламени в вертикальном направлении, непосредственный интерес представляет кажущаяся скорость продвижения фронта в вертикальном направлении \tilde{W} . Если обозначить угол между касательной к фронту и горизонтальным направлением как α , где $\tan \alpha = y'(x, t)$, то вертикальная скорость \tilde{W} связана с нормальной скоростью W_n , геометрической проекцией $\tilde{W} = W_n / \cos \alpha$. Одновременно, кривизна к плоской кривой задаётся формулой $\kappa = y'' / (1 + y'^2)^{3/2}$. Подставляя эти соотношения в (66а), получаем основное уравнение, описывающее вертикальное продвижение фронта:

$$\tilde{W} = \left(\tilde{U} + k \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}} \right) \sqrt{1 + y'^2} \quad (60)$$

Данное уравнение является ключевым дифференциальным уравнением, определяющим эволюцию формы фронта $y(x, t)$. Величина \tilde{W} в левой части может быть константой (что соответствует стабильно распространяющейся волновой форме) или функцией пространства и времени, в зависимости от граничных условий задачи и распределения \tilde{U} .

Для глубокого понимания морфологии фронта рассмотрим типичный случай, когда \tilde{W} постоянна, а \tilde{U} является константой U_0 . В этой ситуации уравнение (66b) может быть решено аналитически путём понижения порядка с использованием подстановки $p = y'$ и последующего интегрирования. После ряда выкладок, получается неявное соотношение, связывающее наклон фронта p с его высотой y :

$$p(y) = \pm \sqrt{\frac{\tilde{W} e^{\frac{\psi}{k} y + B}}{1 + W_0 e^{\frac{\psi}{k} y + B}}} - 1, \quad x(y) = \int \frac{dy}{p(y)} + C_2 \quad (61)$$

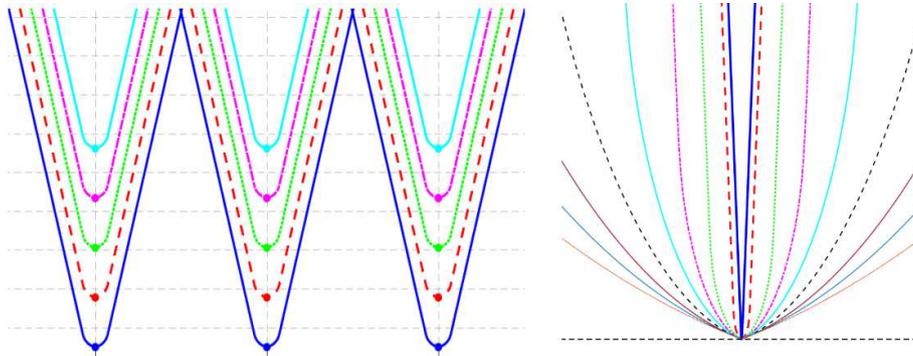


Рис.2. Эволюция фронта с учётом скорости дисбаланса и дрейфа кривизны. Слева: Семейство линий фронта в различные моменты времени (изображён только участок между соседними лидерами). Справа: Влияние скорости дисбаланса на стационарный профиль фронта..

На Рис.2 (слева) представлено семейство линий фронта, рассчитанных в соответствии с изложенной теорией для различных моментов времени t . На рисунке показан только участок между соседними параллельными направляющими линиями (вертикальные линии на чертеже). Чётко наблюдается, что фронт перемещается как единое целое вверх с постоянной скоростью, определяемой дисбалансом реакции. На Рис. 2 (справа) показаны стационарные профили фронта при различных скоростях дисбаланса реакции \tilde{U} . Ширина (или крутизна) фронта демонстрирует высокую чувствительность к \tilde{U} : чем больше \tilde{U} , тем уже и круче фронт, и наоборот. Это явление указывает на то, что интенсивность реакции является ключевым параметром,

контролирующим пространственное распределение характеристик фронта.

Рассматриваемая модель одновременно учитывает скорость дрейфа дисбаланса и эффект дрейфа кривизны. Численное моделирование наглядно демонстрирует формирование характерной морфологии в результате нелинейного взаимодействия этих двух механизмов – V-образной структуры фронта (Рис. 2 слева). Физический механизм заключается в следующем: постоянная вертикальная скорость продвижения \tilde{W} выступает в качестве глобального ограничения, вынуждая все точки фронта двигаться согласованно. Слагаемое дисбаланса реакции U_0 доминирует в общем поступательном движении фронта, в то время как слагаемое кривизны kB регулирует относительную скорость различных геометрических участков через петлю обратной связи – оно ускоряет области с высокой кривизной (выпуклые) и замедляет области с низкой кривизной (вогнутые). В условиях постоянства вертикальной скорости это регулирование приводит к непрерывному росту кривизны на флангах фронта, что спонтанно формирует острую V-образную конфигурацию. Данный результат наглядно интерпретирует, как локальное геометрическое свойство (кривизна) через процесс диффузии воздействует на общую морфологическую эволюцию фронта.

Для изоляции и выделения уникальной роли эффекта кривизны рассмотрим особый предельный случай, когда скорость дрейфа дисбаланса равна нулю ($\tilde{U} = 0$). При этом уравнение (66b) упрощается до: $\tilde{W} = k \frac{y'}{1+y'^2}$.

Данное уравнение допускает элегантное аналитическое решение:

$$y = y_0 - \frac{1}{c} \ln |\cos(c(x - C_3))|, \quad c = \frac{\tilde{W}}{\kappa} \quad (62)$$

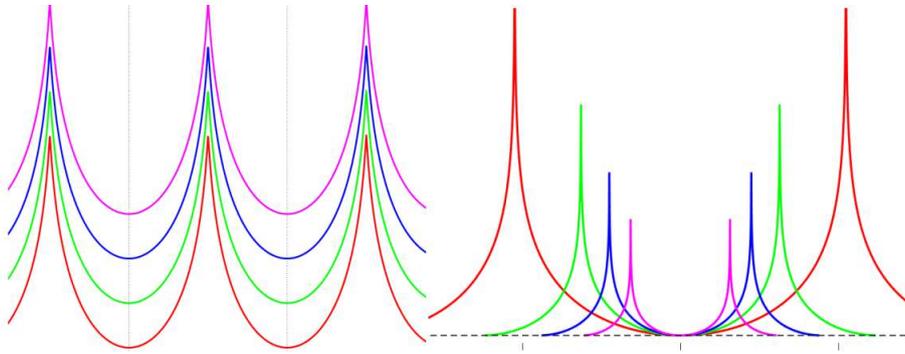


Рис.3. Эволюция фронта горения под действием только дрейфа кривизны. Слева: Семейство линий фронта в различные моменты времени. Справа: Влияние коэффициента κ на стационарную форму фронта..

Это решение описывает периодическую, обращённую вверх выпуклую волновую форму фронта. Косинусный член в функции приводит к появлению вертикальных асимптот в точках, где $c(x - x_0) = \pi/2 + n\pi$, где фронт становится бесконечно крутым, формируя периодическую последовательность «ложбин» и «гребней».

Рисунок 3 иллюстрирует эволюцию фронта, управляемую исключительно кривизной (слева), а также влияние различных значений κ на форму фронта (справа). Численное решение полного уравнения для формы фронта $y(x)$ демонстрирует идеальную симметрию. Изображения временной эволюции показывают, что волновая

форма фронта смещается вверх как целое, сохраняя свою морфологию неизменной. Анализ динамики раскрывает, что морфология фронта полностью управляется эффектом кривизны. Области с максимальной кривизной (верхушки «гребней») продвигаются быстрее всего, тогда как области с почти нулевой кривизной (низины «ложбин») продвигаются наиболее медленно. Кривизна боковых склонов резко возрастает от дна ложбины к вершине гребня, и скорость их продвижения также резко увеличивается, тем самым «догоняя» быстро движущуюся центральную часть. Такое распределение скоростей, автоматически генерируемое различиями в кривизне, точно поддерживает самоподобие волны при её распространении, формируя состояние динамического равновесия. Любое малое возмущение этой формы (например, излишнее выравнивание какого-либо участка) будет скорректировано механизмом кривизны – выровненные области будут «подталкиваться» обратно к искривлённой форме за счёт более быстрого продвижения соседних участков. Это в полной мере доказывает, что дрейф кривизны является мощным стабилизатором формы фронта.

Для углублённого понимания вклада скорости небаланса и скорости дрейфа кривизны в эволюцию волнового фронта в данном разделе рассматривается известная периодическая форма фронта, а требуемое распределение локальной скорости небаланса определяется из уравнения баланса нормальных скоростей. Предполагается, что форма фронта описывается периодической синусоидальной функцией (без потери общности, что соответствует представлению в виде ряда Фурье): $y(x) = A \cos\left(\frac{2\pi}{L}x\right)$, где A — амплитуда, L — длина периода. Данное предположение позволяет получить аналитические выражения, наглядно раскрывающие физическую роль каждого параметра.

Подставляя производные формы фронта $y' = -Ak_x \sin(k_x x)$, $y'' = -Ak_x^2 \cos(k_x x)$ (где волновое число $k_x = 2\pi/L$) в уравнение (60), можно получить явное выражение для локальной скорости небаланса:

$$\tilde{U}(x) = \frac{\tilde{W}}{\sqrt{1 + A^2 k_x^2 \sin^2(k_x x)}} + \frac{k A k_x^2 \cos(k_x x)}{[1 + A^2 k_x^2 \sin^2(k_x x)]^{3/2}}. \quad (63)$$

Если эффектом кривизны можно пренебречь (т.е. коэффициент кривизны $k = 0$), данное выражение сводится к случаю, определяемому только скоростью небаланса:

$$\tilde{U}_1(x) = \frac{\tilde{W}}{\sqrt{1 + A^2 k_x^2 \sin^2(k_x x)}}. \quad (64)$$

Таким образом, формула (61) представляет собой более общее выражение, чьи математические свойства непосредственно отражают модулирующее влияние эффекта кривизны.

Прежде всего, следует отметить, что $\tilde{U}(x)$ является периодической функцией с периодом, совпадающим с периодом формы фронта, то есть $2\pi/k_x = L$. Для анализа экстремальных свойств введём вспомогательную функцию $f(x) = \sqrt{1 + A^2 k_x^2 \sin^2(k_x x)}$. Тогда (61) можно записать в виде $\tilde{U}(x) = \frac{\tilde{W}}{f(x)} + \frac{k A k_x^2 \cos(k_x x)}{f^3(x)}$. В точке максимума

(гребне) фронта ($x = 0$ или $x = 2n\pi/k_x$) имеем $\cos(k_x x) = 1, \sin(k_x x) = 0$, откуда $f = 1$ и $\tilde{U}_{\text{гребень}} = \tilde{W} + kAk_x^2$. В точке минимума (ложбине) фронта ($x = \pi/k_x$ или $x = (2n + 1)\pi/k_x$) получаем $\cos(k_x x) = -1, \sin(k_x x) = 0$, также $f = 1$, и $\tilde{U}_{\text{ложбина}} = \tilde{W} - kAk_x^2$. В точках с максимальным наклоном ($x = \pi/(2k_x)$ или $x = (2n + 1)\pi/(2k_x)$) выполняется $\cos(k_x x) = 0$, член кривизны обращается в нуль, ПОЭТОМУ $\tilde{U}_{\text{макс.наклон}} = \frac{\tilde{W}}{\sqrt{1+A^2k_x^2}}$.

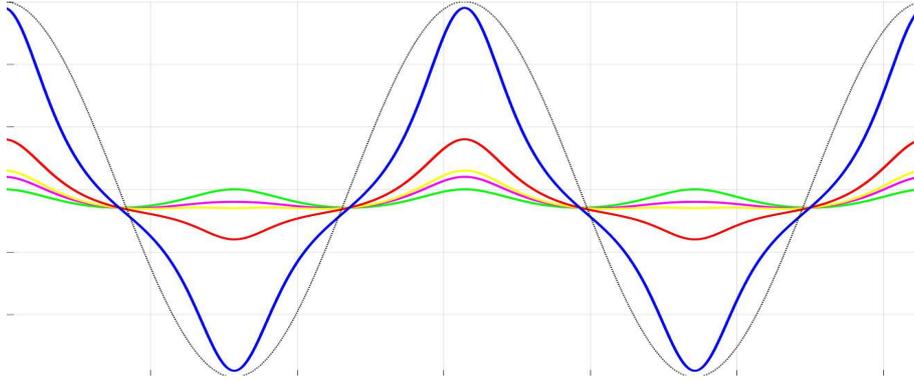


Рис.4. Сравнение профилей несбалансированной скорости $\tilde{U}(x)$ для пяти различных значений коэффициента кривизны k (цветные сплошные линии) и формы волнового фронта $y(x)$ (чёрный пунктир).

Рисунок 4. иллюстрирует влияние параметра кривизны k на пространственное распределение несбалансированной скорости $\tilde{U}(x)$. Показаны пять кривых, соответствующих значениям $k = 0.0, 0.2, 0.3, 0.8, 2.9$ (линии зелёного, пурпурного, жёлтого, красного и синего цветов соответственно). Для сравнения чёрным пунктиром приведена форма волнового фронта $y(x) = A \cos(kx)$.

Значения в этих характерных точках раскрывают ключевую роль члена кривизны: он вносит положительный вклад на гребне и отрицательный вклад в ложбине, тогда как в точках максимального наклона его вклад отсутствует. Безразмерная комбинация параметров kAk_x^2 определяет интенсивность эффекта кривизны. В частности, при $kAk_x^2 > \tilde{W}$ значение \tilde{U} в ложбине становится отрицательным. Это указывает на то, что при сильном влиянии кривизны свойства среды в области ложбины фактически препятствуют распространению фронта, а общее движение обеспечивается кривизной в области гребня. Кроме того, при $k = 0$ функция $\tilde{U}(x)$ переходит в (3.2.3), становясь симметричной относительно гребня и ложбины и сохраняя положительность во всей области определения.

Для наглядной иллюстрации проведённого анализа на рис. 3.1 представлен численный пример. Чёрной пунктирной линией показана предполагаемая форма фронта $y(x) = A \cos(2\pi x/L)$; синей сплошной линией — распределение $\tilde{U}_1(x)$, соответствующее случаю только скорости небаланса (т.е. $k = 0$); красной сплошной линией — распределение $\tilde{U}(x)$ при одновременном учёте скорости небаланса и дрейфа кривизны (т.е. $k > 0$). Параметры выбраны следующим образом: $\tilde{W} = 1.0, A = 1.0, L = 2\pi, k = 0.3$. Хорошо видно, что добавление члена кривизны увеличивает \tilde{U} на гребне, уменьшает \tilde{U} в ложбине, а распределение теряет симметрию. В то же время при учёте только скорости небаланса $\tilde{U}_1(x)$ достигает максимума на гребне и в ложбине,

минимума в точках с максимальным наклоном и остаётся положительным во всех точках. Данный график наглядно подтверждает проведённый выше математический анализ.

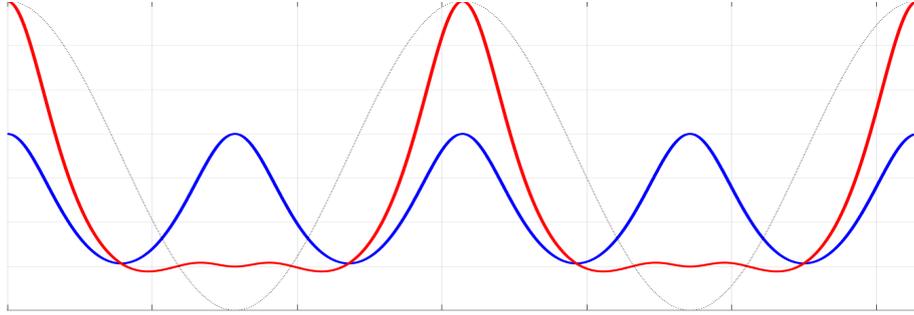


Рис.5. Распределение локальной скорости небаланса при заданной косинусоидальной форме фронта. Чёрный пунктир: форма фронта $y(x)$; синяя сплошная линия: $\tilde{U}_1(x)$ (только скорость небаланса, $k = 0$); красная сплошная линия: $\tilde{U}(x)$ (скорость небаланса и дрейф кривизны, $k > 0$). Параметры: $\tilde{W} = 1.0$, $A = 1.0$, $L = 2\pi$, $k = 0.3$.

Выбор типичной периодической формы волнового фронта позволил получить аналитическое выражение для локальной скорости небаланса и систематически проанализировать влияние коэффициента кривизны k и амплитуды A на её распределение. Этот анализ не только раскрывает пространственно-модулирующую роль эффекта кривизны, но и закладывает теоретическую основу для понимания взаимодействия двух механизмов при эволюции волнового фронта в более общем случае.

7.2. Модель лидеров конечной ширины и её гладкая периодическая структура

В реальных физических системах (например, лесных пожарах) «лидеры» обычно имеют конечную ширину. В этом разделе на основе основного уравнения (6.4) строится модель лидеров конечной ширины и анализируется формируемая ими гладкая периодическая фронтальная структура.

В данной главе на основе уравнения баланса нормальной скорости строится теоретическая модель эволюции периодического волнового фронта. Путем разделения пространства волнового фронта на две характерные области с различными соотношениями между скоростью дисбаланса и скоростью дрейфа, обусловленного кривизной, можно аналитически получить класс гладких периодических структур волнового фронта, что позволяет прояснить механизм формирования устойчивых периодических форм.

Эволюция волнового фронта управляется уравнением баланса нормальной скорости:

$$\frac{\tilde{W}}{\sqrt{1+y'^2}} = \tilde{U}(x) + k \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} \quad (65)$$

где \tilde{W} — скорость общего переноса, $\tilde{U}(x)$ характеризует локальную скорость дисбаланса, вызванную химической реакцией, а k — коэффициент диффузии, обусловленной кривизной. Мы предполагаем, что в пределах пространственного периода L существуют две чередующиеся области с принципиально различной динамикой. В

области, называемой лидирующей областью ($|x| \leq a$), химическая реакция активна, $\tilde{U} > 0$, фронт волны имеет выпуклую форму, а кривизна $y'' < 0$. В соседней промежуточной области ($a < |x| \leq L - a$) химическая реакция практически прекращается, $\tilde{U} = 0$, и распространение волнового фронта полностью зависит от эффекта дрейфа, обусловленного кривизной, что проявляется в форме впадины с кривизной $y'' > 0$. На границах раздела $x = \pm a$ выполняется условие непрерывности C^1 , обеспечивающее общую гладкость волнового фронта без изломов или разрывов.

Ограничения между параметрами определяются совместно динамическим уравнением и геометрической непрерывностью. В промежуточной области, поскольку $\tilde{U} = 0$, уравнение в точке симметрии $x = L/2$ (где $y' = 0$) упрощается до $\tilde{W} = k \cdot 2\beta$, откуда получается параметр кривизны параболы для промежуточной области $\beta = \tilde{W}/(2k)$. Это соотношение показывает, что для заданной общей скорости \tilde{W} , чем больше коэффициент диффузии k , тем меньше кривизна формируемой впадины и тем более пологой становится форма. Условие непрерывности производной в точке соединения $-2\alpha a = 2\beta(a - L/2)$ даёт параметр кривизны для лидирующей области $\alpha = \beta \cdot (L/2 - a)/a$. Физическая разрешимость требует $\alpha > 0$, что эквивалентно $L/2 > a$, т.е. ширина промежуточной области должна быть больше ширины лидирующей области, что отражает необходимость определенного пространственного масштаба для полноценного развития эффекта дрейфа, обусловленного кривизной. Условие непрерывности высоты $h - \alpha a^2 = h' + \beta(a - L/2)^2$ окончательно определяет амплитуду колебаний волнового фронта.

При численной реализации, принимая $\tilde{W} = 1.0$, $k = 0.2$ и устанавливая ширину промежуточной области в три раза больше ширины лидирующей области (т.е. $a = L/8$), можно вычислить $\beta = 2.5$, $\alpha = 2.5$ и параметр высоты $h' = -11.25$ (при высоте центра лидирующей области $h = 0$). Полученная таким образом форма волнового фронта представлена на рисунке. На рисунке четко показаны три полных периода, в каждом из которых выпуклая лидирующая область плавно соединяется с вогнутой промежуточной областью. Области с синим фоном соответствуют областям с $\tilde{U} > 0$, движимым реакцией, в то время как области со светло-голубым фоном соответствуют областям с $\tilde{U} = 0$, движимым исключительно кривизной, что наглядно демонстрирует пространственную неоднородность динамики. Сама кривая волнового фронта, изображенная более темным оттенком поверх фона, демонстрирует геометрические особенности: выпуклость представлена параболой с отрицательной кривизной, а впадина — параболой с положительной кривизной, причем на границах областей достигается строгая непрерывность первой производной.

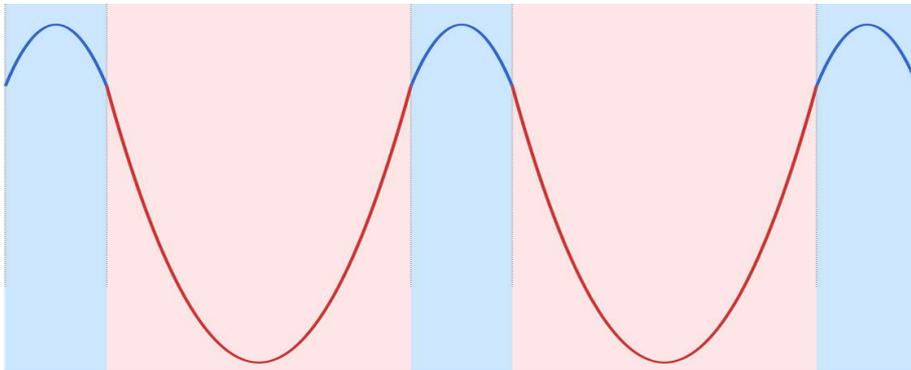


Рис.6. Синяя фоновая область: зона лидера ($\tilde{U} > 0$), движение за счёт реакции; Светло-голубая фоновая область: промежуточная зона ($\tilde{U} = 0$), движение за счёт кривизны; Чёрная кривая: форма фронта, плавно составленная из параболических отрезков..

Рис. 6 демонстрирует фронтальную структуру для трёх полных периодов. Формирование этой формы обусловлено двойственной ролью эффекта кривизны и комплементарным распределением скорости дисбаланса. В лидирующей области отрицательная кривизна создает обратный дрейф, обусловленный кривизной, что замедляет распространение волнового фронта и поэтому требует значительной положительной величины \tilde{U} для компенсации, чтобы поддерживать проекцию общей нормальной скорости; в частности, в центре лидирующей области имеем $\tilde{U}(0) = \tilde{W} + 2\alpha k > \tilde{W}$. Напротив, в промежуточной области положительная кривизна обеспечивает прямой дрейф, который в точности балансирует нормальную составляющую общей скорости \tilde{W} , позволяя этой области продолжать распространяться без зависимости от локального реакционного толчка. Такое пространственное разделение в динамике позволяет, даже при постоянной общей скорости распространения, локальной периодической модуляции интенсивности реакции связываться с эффектом кривизны, спонтанно формируя и поддерживая устойчивую периодическую структуру волнового фронта.

В заключение, настоящее исследование, вводя упрощенную модель раздельной динамики, аналитически демонстрирует, как скорость дисбаланса и дрейф, обусловленный кривизной, посредством пространственной синергии и конкуренции формируют гладкий периодический волновой фронт. Модель раскрывает двойственную регулируемую функцию диффузии, обусловленную кривизной: ингибирующую роль в активной реакционной области и движущую роль в области затухания реакции, что является ключом к стабильности формы. Одновременно, сильная связь между геометрическими и динамическими параметрами, устанавливаемая условиями гладкости, предоставляет четкую теоретическую основу для понимания различных наблюдаемых в экспериментах структур пульсирующего распространения и ячеистого пламени. Модель показывает, что периодичность волнового фронта не обязательно обусловлена внешним воздействием, а может возникать из внутреннего баланса между пространственной неоднородностью внутренней динамики системы (интенсивности реакции) и эффектом кривизны.

7.3. Негладкая периодическая фронтальная структура: составная модель «выпуклость-вогнутость-прямая». В реальных системах интенсивность реакции или чувствительность к кривизне могут испытывать пространственные скачки, приводящие к разрывам кривизны фронта. В данном разделе предлагается составная модель, включающая прямолинейные отрезки и допускающая скачки кривизны, что более гибко описывает сложные морфологии фронта.

Эволюция волнового фронта по-прежнему описывается уравнением баланса нормальной скорости:

$$\frac{\tilde{W}}{\sqrt{1+y'^2}} = \tilde{U} + k \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} \quad (66)$$

В данной модели мы разделяем один период L на три характерные области. В лидирующей области ($|x| \leq a$) волновой фронт представляет собой параболическую выпуклость, открытую вниз, с выражением $y_1(x) = h_1 - \alpha x^2$, кривизна $y_1'' = -2\alpha$

отрицательна, что соответствует сильному локальному химическому воздействию. В промежуточной области волновой фронт состоит из двух частей: сначала линейного сегмента с наклоном m ($a < |x| \leq b$), кривизна которого равна нулю; затем параболической впадины, открытой вверх ($b < |x| \leq L/2$), с выражением $y_3(x) = h_3 + \beta(x-d)^2$, кривизна $y_3'' = 2\beta$ положительна, что указывает на доминирующую роль эффекта кривизны в этой области.

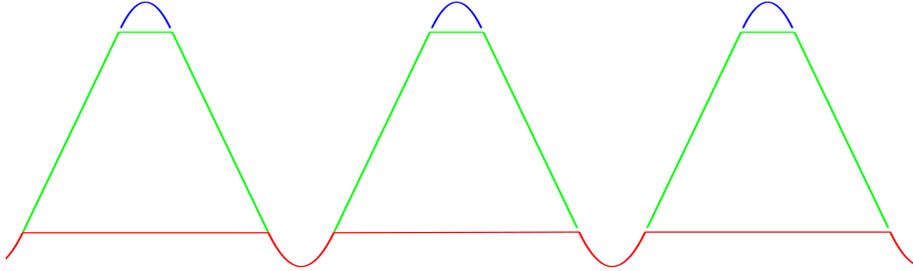


Рис.7. Составная структура: синяя выпуклая парабола, зелёная прямая, красная вогнутая парабола.

Рис.7 демонстрирует эту составную структуру и соответствующее распределение $\tilde{U}(x)$. Соединения между областями должны удовлетворять условиям непрерывности C^1 . В точке соединения выпуклости и прямой $x = a$ требуется равенство высоты и наклона: $h_1 - \alpha a^2 = ta + c - 2\alpha a = t$. В точке соединения прямой и впадины $x = b$ также должно выполняться $tb + c = h_3 + \beta(b-d)^2$ и $t = 2\beta(b-d)$. Эти условия связывают геометрические параметры $\alpha, \beta, a, b, d, h_1, h_3$ с параметрами прямой t, c , образуя систему ограничивающих уравнений. Путем соответствующего выбора параметров можно обеспечить общую гладкость волнового фронта при кусочно-постоянной кривизне.

Синие сегменты кривой соответствуют параболической выпуклости лидирующей области, зеленые линейные сегменты представляют переходную зону, а красные сегменты кривой — параболическую впадину. Продление на три полных периода показывает, что данный волновой фронт обладает явной периодичностью, общая форма приблизительно напоминает косинусоидальную функцию, но в точках соединения наблюдается резкое изменение кривизны. По сравнению с гладкой косинусоидальной формой волнового фронта в модели S2, волновой фронт модели S3 демонстрирует более резкий переход между выпуклостью и впадиной, отражающий быстрое переключение движущих механизмов.

Из распределения обратно выведенной скорости дисбаланса $\tilde{U}(x)$ видно, что различные области проявляют значительные различия. В лидирующей области, из-за замедляющего эффекта отрицательной кривизны, требуются большие значения \tilde{U} для компенсации, так что $\tilde{U} > \tilde{W}$; в линейном сегменте кривизна равна нулю, и \tilde{U} полностью определяется проекционным членом $\tilde{W}/\sqrt{1+m^2}$, его значение находится между двумя другими; во впадине положительная кривизна обеспечивает прямое продвижение, поэтому требуемое \tilde{U} минимально и может быть даже ниже общей скорости \tilde{W} . Такая характеристика распределения отражает регулируемую роль эффекта кривизны на локальные потребности в движении: области с отрицательной

кривизной требуют дополнительного химического толчка, тогда как области с положительной кривизной могут полагаться на дрейф, обусловленный кривизной, для поддержания распространения.

Модель демонстрирует периодическую структуру волнового фронта с разрывной кривизной, где введение линейных сегментов делает переход между выпуклостью и впадиной более резким. Такая форма может соответствовать пространственным скачкам в интенсивности реакции или чувствительности к кривизне в физических системах. По сравнению с моделью S2, модель S3 обеспечивает большую гибкость формы, способную описывать те фронты горения, где движущие механизмы быстро переключаются в пространстве. Модель показывает, что даже при постоянной общей скорости распространения, с помощью различных комбинаций локальной скорости дисбаланса и эффекта кривизны, всё еще могут генерироваться разнообразные формы волнового фронта, что предоставляет теоретическую основу для понимания сложных режимов распространения, наблюдаемых в экспериментах.

Список литературы

1. *Pao C.V.* Nonlinear parabolic and elliptic equations. // New York: Plenum. 1992.
2. *Fife P.C., Hsiao L.* The generation and propagation of internal layers. // Nonlin. Anal. Theory Methods Appl. 1998. **12**, №.1. С. 19–41.
3. *Нефедов Н.Н.* Развитие методов асимптотического анализа переходных слоев в уравнениях реакции–диффузии–адвекции: теория и применение. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2021. **61**, №.12. С. 2074–2094.
4. *Butuzov V.F.* On the dependence of the structure of boundary layers on the boundary conditions in a singularly perturbed boundary - value problem with multiple root of the related degenerate equation. // Mathematical Notes. 2016. **99**, №.2. С. 36–47.
5. *Бутузов В.Ф.* О периодических решениях сингулярно возмущенных параболических задач в случае кратных корней вырожденного уравнения. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2011. **51**, №.1. С. 44–55.
6. *Бутузов В.Ф.* Об устойчивости и области притяжения стационарного решения сингулярно возмущенной параболической задачи с кратным корнем вырожденного уравнения. // Дифференциальные уравнения. 2015. **51**, №.12. С. 1593–1605.
7. *Butuzov V. F.* On the stability and the attraction domain of the stationary solution of a singularly perturbed parabolic equation with a multiple root of the degenerate equation. // Differential Equations. 2015. Vol. 51, no. 12. P. 1593–1605.
8. *Бутузов В.Ф.* Об одной сингулярно возмущённой задаче с кратным корнем вырожденного уравнения. // Вестник кибернетики. 2017. **1**, №.25. С. 18–34.
9. *Бутузов В.Ф., Белошапко В.А.* Сингулярно возмущенная эллиптическая задача Дирихле с кратным корнем вырожденного уравнения. // Моделирование и анализ информационных систем. Изд-во Яросл. гос. ун-та (Ярославль). 2016. **23**, №.5. С. 515–528.

10. *Быков А.А., Ермакова К.Е.* Нестационарные контрастные структуры задачи реакции–диффузии с корнями нецелой кратности в неоднородной среде. // Математическое моделирование. 2019. **31**, №.9. С. 101–130.
11. *Альшин А.Б., Корпусов М.О., Юшков Е.В.* Бегущая волна как решение нелинейного уравнения в полупроводниках с сильной пространственной дисперсией. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2008. **48**, №.5. С. 808–812.
12. *Давыдова М.А., Захарова С.А.* О сингулярно возмущённой стационарной диффузионной модели с кубической нелинейностью. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2020. **56**, №.7. С. 849–860.
13. *Davydova M.A.* Existence and stability of solutions with boundary layers in multidimensional singularly perturbed reaction-diffusion-advection problems. // Math. Notes.. 2015. **98**, №.6. С. 45–55.
14. *Нефедов Н.Н., Никулин Е.И.* Существование и асимптотическая устойчивость периодических двумерных контрастных структур в задаче со слабой линейной адвекцией. // Матем. заметки. 2019. **106**, №.5. С. 708–722.
15. *Мельникова А.А., Дерюгина Н.Н.* Существование периодического решения в виде двумерного фронта в системе параболических уравнений. // Дифференциальные уравнения. 2020. **56**, №.4. С. 475–489.
16. *Быков А.А.* Эволюция двумерной несбалансированной контрастной структуры в неоднородной среде с адвекцией. // Вестник МГУ, сер. 3. физика. 2024. **x**, №.3. С. x–x.
17. *Быков А.А., Воеводин В.В., Козырева О.В., Попов В.Ю., Соколов Д.Д.* Поверхностное натяжение контрастных структур. // Докл. АН СССР. 1999. **364**, №.3. С. 319–322.
18. *Быков А.А., Воеводин В.В., Попов В.Ю., Соколов Д.Д. и др.* Эволюция двумерных контрастных структур сложной формы. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1999. **39**, №.5. С. 801–811.
19. *Быков А.А., Майков А.Р., Попов В.Ю.* Нестационарные трехмерные контрастные структуры. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2007. **47**, №.1. С. 64–66.
20. *Доррер Г.А.* Динамика лесных пожаров. // Новосибирск, изд-во Сиб. отд. РАН. 2008.
21. *Тихонов А.Н.* О зависимости решений дифференциальных уравнений от малого параметра. // Матем. сборник. 1948. **22(64)**, №.2. С. 193–204.
22. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф., Нефедов Н.Н.* Контрастные структуры в сингулярно возмущенных задачах. // Фунд Прикл Матем. 1998. **4**, №.3. С. 799–851.
23. *Свешников А.Г.* Неполный метод Галеркина. // Докл. АН СССР. 1977. **236**, №.5. С. 1076–1079.
24. *Ferreira J.A., Pinto L., Santos R.F.* // Numerical analysis of a porous–elastic model for convection enhanced drug delivery Journal of Computational and Applied Mathematics 2022. **399**, 113719.

25. *Dong W.B., Tang H.S., Liu Y.J.* // Convergence analysis on computation of coupled advection-diffusion-reaction problems Applied Mathematics and Computation 2022. **420**, xxxx.
26. *Xin S, Li L., Nie Y.* // The effect of advection on a predator–prey model in open advective environments Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation 2022. **113**, 106567.
27. *Liang X., Zhou T.* // Propagation of KPP equations with advection in one-dimensional almost periodic media and its symmetry Advances in Mathematics 2022. **407**, 108568.
28. *Mokhtarudin M., Wan W., Shabudin A., Payne S.J.* Multiscale modelling of brain tissue oxygen and glucose dynamics in tortuous capillary during ischaemia-reperfusion. // Applied Mathematical Modelling. 2022. **109**, №.358. С. 373–381.
29. *Troparevsky M.I., Muszkats J.P., Seminara S.A. et al.* // Modeling particulate pollutants dispersed in the atmosphere using fractional turbulent diffusion Physica A: Statistical Mechanics and its Applications 2022. **599**, 127478.
30. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. // М.: Высшая школа. 1990.
31. *Butuzov V.F., Vasilieva A.B.* Singularly Perturbed Problems with Boundary and Interior Layers: Theory and Application. // New York: John Wiley & Sons.. 2007.
32. *Михлин С.Г.* Линейные уравнения в частных производных. // М.: Высшая школа. 1977.
33. *Нефедов Н.Н.* Нестационарные контрастные структуры в системе реакция – диффузия. // Математическое моделирование. 1992. **4**, №.8. С. 58–65.
34. *Божевольнов Ю.В., Нефедов Н.Н.* Движение фронта в параболической задаче реакция – диффузия. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2010. **50**, №.2. С. 276–285.
35. Ruiwen Wu, Xiao-Qiang Zhao, The evolution dynamics of an impulsive hybrid population model with spatial heterogeneity, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, Volume 107, 2022, 106181, ISSN 1007-5704, <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2021.106181>. (<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1007570421004676>)
36. *Гюнтер Н.М.* Интегрирование уравнений первого порядка в частных производных. // Л., ОНТИ. 1934.
37. *Вайнберг Б.Р.* Асимптотические методы в уравнениях математической физики. // М., изд-во МГУ. 1982.
38. *Бабич В.М., Булдырев В.С.* Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. // М.: Наука. 1972.
39. *Арнольд В.И.* Теория катастроф. // М.: Наука. 1990.

40. *Постон Т., Стюарт И.* Теория катастроф и ее приложения. // Мир. 1979.
41. *Мишлин С.Г.* Линейные уравнения в частных производных. // М.: Высшая школа. 1977.
42. A new stationary analytical model of the heliospheric current sheet Kislov R., Khabarova O., Malova N.V. // Journal of geophysics research, 2015, V.150, N 9, PP.1–19.
43. Зельдович Я.Б., Рuzмайкин А.А., Соколов Д.Д. Магнитные поля в астрофизике. Ин-т хаотич. динам., М.-Ижевск, 2006.