Верхнее и нижнее решения в задаче о распространении фронта в среде с разрывными характеристиками

Чунжук Е.А., Левашова Н.Т.

МГУ, Физический факультет, Кафедра математики

26 октября 2022 г.

Постановка задачи

Рассмотрим начально-краевую задачу:

$$\begin{cases} \varepsilon^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \varepsilon \dfrac{\partial u}{\partial t} = (u - \varphi^{(-)}(x))(u - q(x))(u - \varphi^{(+)}(x)), & x \in (-1, 1), \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(-1, t, \varepsilon) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(1, t, \varepsilon) = 0, \quad u(x, 0) = u_{init}, & t \in (0, T], \end{cases}$$

$$q(x) = \begin{cases} q_l(x), & -1 \le x \le x_0; \quad 0 < t < T; \\ q_r(x), & x_0 \le x \le 1; \quad 0 < t < T. \end{cases} \qquad q_l(x_0) \neq q_r(x_0).$$

Начальная функция имеет вид:

$$u_{init} = \frac{1}{2}\Big(\varphi^{(-)}(\hat{x}(0)) + \varphi^{(+)}(\hat{x}(0))\Big) +$$

$$+ \frac{1}{2}\Big(\varphi^{(+)}(\hat{x}(0)) - \varphi^{(-)}(\hat{x}(0))\Big) \tanh \frac{x - \hat{x}(0))}{\varepsilon}$$

ε - малый параметр, x_0 - положение разрыва, $\hat{x}(t)$ - положение фронта

Условия задачи

(У1) Движение возрастающего фронта слева направо:

$$\frac{\varphi^{(-)}(x) + \varphi^{(+)}(x)}{2} < q(x) < \varphi^{(+)}(x), \quad x \in [-1, 1]$$

(У2) Фронт проходит через точку x_0:

$$\varphi^{(-)}(x_0) < q_l(x_0) < q_r(x_0)$$

Эти условия обеспечивают прохождение автоволного фронта через границу раздела сред и исключают возможность существования стационарного решения вида фронта.

Вводятся растянутые переменные:

$$\xi = \frac{x - \hat{x}(t)}{\varepsilon}, \quad \xi_0 = \frac{x - x_0}{\varepsilon}.$$

Расстояние от точки положения фронта до точки разрыва сред:

$$\Delta(t) = \hat{x}(t) - x_0,$$

и будем считать, что $\Delta(t) = \Delta_0(t) + \varepsilon^2 \Delta_1(t) + \varepsilon^3 \Delta_2(t) + \ldots$

Скорость движения фронта:

$$V(t, \varepsilon) = V_0(t) + \varepsilon V_1(t) + \varepsilon^2 V_2(t) + \ldots, \text{ где } V_i(t) = \frac{d\Delta_i}{dt}$$

Асимптотическое приближение решения

Если $\hat{x} < x_0$, фронт слева от разрыва:

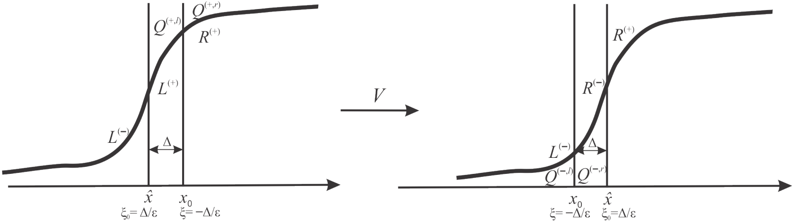
$$U^l = \begin{cases} \varphi^{(-)}(x) + L_0^{(-)}(\xi,t) + \sum\limits_{i=1}^{3} \varepsilon^i \left(\bar{u}_i^{l,(-)}(x) + L_i^{(-)}(\xi,t) + Q_i^{l,(+)}(\xi_0) \right), -1 \le x \le \hat{x}; \\ \varphi^{(+)}(x) + L_0^{(+)}(\xi,t) + \sum\limits_{i=1}^{3} \varepsilon^i \left(\bar{u}_i^{l,(+)}(x) + L_i^{(+)}(\xi,t) + Q_i^{l,(+)}(\xi_0) \right), \ \hat{x} \le x \le x_0; \end{cases}$$

$$U^r = \varphi^{(+)}(x) + R_0^{(+)}(\xi,t) + \sum_{i=1}^{3} \varepsilon^i \left(\bar{u}_i^{r,(+)}(x) + R_i^{(+)}(\xi,t) + Q_i^{r,(+)}(\xi_0) \right), \quad x_0 \le x \le 1.$$

Если $\hat{x} > x_0$, фронт справа от разрыва:

$$U^l = \varphi^{(-)}(x) + L_0^{(-)}(\xi,t) + \sum_{i=1}^{3} \varepsilon^i \left(\bar{u}_i^{l,(-)}(x) + L_i^{(-)}(\xi,t) + Q_i^{l,(-)}(\xi_0) \right), -1 \le x \le x_0;$$

$$U^r = \begin{cases} \varphi^{(-)}(x) + R_0^{(-)}(\xi,t) + \sum\limits_{i=1}^{3} \varepsilon^i \left(\bar{u}_i^{r,(-)}(x) + R_i^{(-)}(\xi,t) + Q_i^{r,(-)}(\xi_0) \right), x_0 \le x \le \hat{x}; \\ \varphi^{(+)}(x) + R_0^{(+)}(\xi,t) + \sum\limits_{i=1}^{3} \varepsilon^i \left(\bar{u}_i^{r,(+)}(x) + R_i^{(+)}(\xi,t) + Q_i^{r,(-)}(\xi_0) \right), \ \hat{x} \le x \le 1. \end{cases}$$



Схематическое изображение областей определения компонент асимптотического приближения а) если фронт локализован слева от точки разрыва, б) если фронт локализован справа от точки разрыва.

Далее, все результаты приведены для случая $\hat{x} < x_0$.

Непрерывное сшивание

В точке положения фронта:

$$\varphi^{(-)}(\hat{x}) + L_0^{(-)}(0,t) + \sum_{i=1}^{3} \varepsilon^i \left(\bar{u}_i^{l,(-)}(\hat{x}) + L_i^{(-)}(0,t) + Q_i^{l,(+)}(\Delta/\varepsilon) \right) =$$

$$= \varphi^{(+)}(\hat{x}) + L_0^{(+)}(0,t) + \sum_{i=1}^{3} \varepsilon^i \left(\bar{u}_i^{l,(+)}(\hat{x}) + L_i^{(+)}(0,t) + Q_i^{l,(+)}(\Delta/\varepsilon) \right) = \frac{\varphi^{(-)}(\hat{x}) + \varphi^{(+)}(\hat{x})}{2}$$

В точке разрыва:

$$\varphi^{(+)}(x_0) + L_0^{(+)}(-\Delta/\varepsilon,t) + \sum_{i=1}^{3} \varepsilon^i \left(\bar{u}_i^{l,(+)}(x_0) + L_i^{(+)}(-\Delta/\varepsilon,t) + Q_i^{l,(+)}(0) \right) =$$

$$= \varphi^{(+)}(x_0) + R_0^{(+)}(-\Delta/\varepsilon,t) + \sum_{i=1}^{3} \varepsilon^i \left(\bar{u}_i^{r,(+)}(x_0) + R_i^{(+)}(-\Delta/\varepsilon,t) + Q_i^{r,(+)}(0) \right) = p(t),$$

$p(t)$ - пока неизвестная функция, $p(t) = p_0(t) + \varepsilon p_1(t) + \varepsilon^2 p_2(t) + \dots$

Сшивание производных

В точке положения фронта:

$$\frac{d\varphi^{(-)}}{dx}(\hat{x}) + \frac{1}{\varepsilon}\cdot\frac{\partial L_0^{(-)}}{\partial\xi}(0,t) + \sum_{i=1}^{3}\varepsilon^i\left(\frac{d\bar{u}_i^{l,(-)}}{dx}(\hat{x}) + \frac{1}{\varepsilon}\cdot\frac{\partial L_i^{(-)}}{\partial\xi}(0,t)\right) + O(\varepsilon^3) =$$

$$= \frac{d\varphi^{(+)}}{dx}(\hat{x}) + \frac{1}{\varepsilon}\cdot\frac{\partial L_0^{(+)}}{\partial\xi}(0,t) + \sum_{i=1}^{3}\varepsilon^i\left(\frac{d\bar{u}_i^{l,(+)}}{dx}(\hat{x}) + \frac{1}{\varepsilon}\cdot\frac{\partial L_i^{(+)}}{\partial\xi}(0,t)\right).$$

В точке разрыва:

$$\frac{1}{\varepsilon}\cdot\frac{\partial L_0^{(+)}}{\partial\xi}(-\Delta/\varepsilon,t) + \sum_{i=1}^{3}\varepsilon^i\left(\frac{d\bar{u}_i^{l,(+)}}{dx}(x_0) + \frac{1}{\varepsilon}\cdot\frac{\partial L_i^{(+)}}{\partial\xi}(-\Delta/\varepsilon,t) + \frac{1}{\varepsilon}\cdot\frac{\partial Q_i^{l,(+)}}{\partial\xi_0}(0)\right) + O(\varepsilon^3)$$

$$= \frac{1}{\varepsilon}\cdot\frac{\partial R_0^{(+)}}{\partial\xi}(-\Delta/\varepsilon,t) + \sum_{i=1}^{3}\varepsilon^i\left(\frac{d\bar{u}_i^{r,(+)}}{dx}(x_0) + \frac{1}{\varepsilon}\cdot\frac{\partial R_i^{(+)}}{\partial\xi}(-\Delta/\varepsilon,t) + \frac{1}{\varepsilon}\cdot\frac{\partial Q_i^{r,(+)}}{\partial\xi_0}(0)\right).$$

Функции $\alpha(x,t,\varepsilon), \beta(x,t,\varepsilon)$ называются нижним и верхним решениями задачи, если при достаточно малом ε выполняется следующая система неравенств.

1. Условие упорядоченности:

$$\alpha(x,t,\varepsilon) < \beta(x,t,\varepsilon), \ \ (x,t) \in [-1,1] \times (0,T].$$

2. Действие оператора в исследуемом уравнении на верхнее и нижнее решения:

$$\varepsilon^2 \frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2} - \varepsilon \frac{\partial \beta}{\partial t} - f(\beta, x) \leq 0 \leq \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} - \varepsilon \frac{\partial \alpha}{\partial t} - f(\alpha, x),$$

где

$$(x,t) \in (-1, x_0) \times (0,T], \ \ (x,t) \in (x_0, 1) \times (0,T].$$

3. Условия на границе: $\alpha(\mp 1, t, \varepsilon) \leq u \leq \beta(\mp 1, t, \varepsilon), \ \ t > 0.$

4.Условия на производные при $x = \hat{x}, x = x_0$:

$$\frac{\partial \beta}{\partial x}(x-0,t,\varepsilon) \geq \frac{\partial \beta}{\partial x}(x+0,t,\varepsilon); \frac{\partial \alpha}{\partial x}(x-0,t,\varepsilon) \leq \frac{\partial \alpha}{\partial x}(x+0,t,\varepsilon), \ \ t > 0.$$

Введём обозначения для верхнего решения:

$$\bar{x}(t) = x_0 + \bar{\Delta}(t), \bar{\Delta}(t) = \Delta_0(t) + \varepsilon^2\Delta_1(t) - \varepsilon^2\delta(t), \bar{\xi} = \frac{x - \bar{x}(t)}{\varepsilon},$$

$$\bar{p}(t) = p_0(t) + \varepsilon p_1(t) + \varepsilon^2(p_2(t) + \tau_p),$$

$$\bar{V} = V_0 + \varepsilon V_1 + \varepsilon^2(V_2 - V_\delta).$$

Введём обозначения для нижнего решения:

$$\underline{x} = x_0 + \underline{\Delta}(t), \underline{\Delta}(t) = \Delta_0(t) + \varepsilon^2\Delta_1(t) + \varepsilon^2\delta(t), \underline{\xi} = \frac{x - \underline{x}(t)}{\varepsilon},$$

$$\underline{p}(t) = p_0(t) + \varepsilon p_1(t) + \varepsilon^2(p_2(t) - \tau_p),$$

$$\underline{V} = V_0 + \varepsilon V_1 + \varepsilon^2(V_2 + V_\delta).$$

Верхнее и нижнее решения ищутся в виде:

$$\beta = \hat{\beta}^l + \hat{\beta}^r, \quad \alpha = \hat{\alpha}^l + \hat{\alpha}^r,$$

и строятся как модификация асимптотического приближения решения:

$$\hat{\beta}^{l,(\mp)} = \begin{cases} U_2^l(x,\bar{\xi},\xi_0,t,\varepsilon) + \varepsilon^2(\mu + l^{(-)}(\bar{\xi},t) + q^{l,(+)}(\xi_0)) + \varepsilon^2 e^{-\gamma\rho^{(-)}}, -1 \le x \le \bar{x}, \\ U_2^l(x,\bar{\xi},\xi_0,t,\varepsilon) + \varepsilon^2(\mu + l^{(+)}(\bar{\xi},t) + q^{l,(+)}(\xi_0)) + \varepsilon^2 e^{+\gamma\rho^{(+)}}, \quad \bar{x} \le x \le x_0, \end{cases}$$

$$\hat{\beta}^{r,(+)} = U_2^r(x,\bar{\xi},\xi_0,t,\varepsilon) + \varepsilon^2(\mu + r^{(+)}(\bar{\xi},t) + q^{r,(+)}(\xi_0)) + \varepsilon^2 e^{+\gamma\rho^{(+)}}, \quad x_0 \le x \le 1.$$

$$\hat{\alpha}^{l,(\mp)} = \begin{cases} U_2^l(x,\underline{\xi},\xi_0,t,\varepsilon) - \varepsilon^2(\mu + l^{(-)}(\underline{\xi},t) + q^{l,(+)}(\xi_0)) - \varepsilon^2 e^{-\gamma\rho^{(-)}}, -1 \le x \le \underline{x}, \\ U_2^l(x,\underline{\xi},\xi_0,t,\varepsilon) - \varepsilon^2(\mu + l^{(+)}(\underline{\xi},t) + q^{l,(+)}(\xi_0)) - \varepsilon^2 e^{+\gamma\rho^{(+)}}, \quad \underline{x} \le x \le x_0, \end{cases}$$

$$\hat{\alpha}^{r,(+)} = U_2^r(x,\underline{\xi},\xi_0,t,\varepsilon) - \varepsilon^2(\mu + r^{(+)}(\underline{\xi},t) + q^{r,(+)}(\xi_0)) - \varepsilon^2 e^{+\gamma\rho^{(+)}}, \quad x_0 \le x \le 1.$$

Где $\mu > 0$ - константа, функции r, l, q строятся так, чтобы выполнялись определения верхнего и нижнего решений.

Выпишем задачи для функций верхнего решения, для нижнего решения получим аналогичные выражения.

Задачи для функций $q^{l,(+)}, q^{r,(+)}$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 q^{l,(+)}(\xi_0)}{\partial \xi_0^2} = \bar{f}_u^{l,(+)}(x_0) q^{l,(+)}(\xi_0), \quad \xi_0 < 0, \\ q^{l,(+)}(0) = \gamma^{l,(+)}, q^{l,(+)}(-\infty) = 0, \end{cases}$$

$$q^{l,(+)}(\xi_0) = \gamma^{l,(+)} e^{\sqrt{\bar{f}_u^{l,(+)}(x_0)}\xi_0}, \quad \xi_0 < 0, \gamma^{l,(+)} = const.$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 q^{r,(+)}(\xi_0)}{\partial \xi_0^2} = \bar{f}_u^{r,(+)}(x_0) q^{r,(+)}(\xi_0), \quad \xi_0 > 0, \\ q^{r,(+)}(0) = \gamma^{r,(+)}, q^{r,(+)}(+\infty) = 0, \end{cases}$$

$$q^{r,(+)}(\xi_0) = \gamma^{r,(+)} e^{-\sqrt{\bar{f}_u^{r,(+)}(x_0)}\xi_0}, \quad \xi_0 > 0, \gamma^{r,(+)} = const.$$

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 l^{(-)}(\bar\xi,t)}{\partial\bar\xi^2}+\bar V\dfrac{\partial l^{(-)}(\bar\xi,t)}{\partial\bar\xi}-\tilde f_u^l(\bar\xi,t)l^{(-)}(\bar\xi,t)=\tilde f_u^l(\bar\xi,t)\left(\mu+q^{l,(+)}(\xi_0)\right)-\\
-\bar f_u^{l,(+)}(x)q^{l,(+)}(\xi_0)-\bar f_u^{l,(-)}(x)\mu\\
l^{(-)}(-\infty,t)=0, l^{(-)}(0,t)+\mu+q^{l,(+)}(\bar\Delta/\varepsilon)=\tau_z
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 l^{(+)}(\bar\xi,t)}{\partial\bar\xi^2}+\bar V\dfrac{\partial l^{(+)}(\bar\xi,t)}{\partial\bar\xi}-\tilde f_u^l(\bar\xi,t)l^{(+)}(\bar\xi,t)=\left(\tilde f_u^l(\bar\xi,t)-\bar f_u^{l,(+)}(x)\right)\cdot\\
\cdot\left(\mu+q^{l,(+)}(\bar\xi+\bar\Delta/\varepsilon)\right)\\
l^{(+)}(0,t)+\mu+q^{l,(+)}(\bar\Delta/\varepsilon)=\tau_z, l^{(+)}(-\bar\Delta/\varepsilon,t)\to 0, \bar\Delta/\varepsilon\to-\infty
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 r^{(+)}(\bar\xi,t)}{\partial\bar\xi^2}+\bar V\dfrac{\partial r^{(+)}(\bar\xi,t)}{\partial\bar\xi}-\tilde f_u^r(\bar\xi,t)r^{(+)}(\bar\xi,t)=\left(\tilde f_u^r(\bar\xi,t)-\bar f_u^{r,(+)}(x)\right)\cdot\\
\cdot\left(\mu+q^{r,(+)}(\bar\xi+\bar\Delta/\varepsilon)\right)\\
r^{(+)}(-\bar\Delta/\varepsilon,t)+\mu+q^{r,(+)}(0)=0, r^{(+)}(+\infty,t)=0
\end{cases}
$$

При решении этих задач находятся неизвестные коэффициенты $\gamma^{l,(+)}, \gamma^{r,(+)}$

Из выполнения условий 1.– 4. следует существование верхнего и нижнего решений поставленной задачи. Тогда существует решение $u(x,t,\varepsilon)$ заключённое между этими верхним и нижним решениями.

Таким образом, имеет место следующая теорема:

Теорема

При выполнении условий (У1), (У2) и при достаточно малых ε существует $u(x,t,\varepsilon)$ - решение задачи, для любого T > 0 и для любой гладкой начальной функции $u_{init} \in [\alpha(x,t,\varepsilon), \beta(x,t,\varepsilon)]$, для которого функция $U_2(x,t,\varepsilon)$ является равномерным асимптотическим приближением с точностью $O(\varepsilon^3)$.

Спасибо за внимание!