

# Основы математического моделирования: разностные схемы для квазилинейного уравнения переноса

Для численного решения нелинейных задач в различных ситуациях используют как линейные, так и нелинейные схемы. Одним из способов исследования устойчивости нелинейных схем является их линеаризация и дальнейшее применение «замораживания» коэффициентов. Однако такие рассуждения не являются строгими. Но, тем не менее, они позволяют выявлять заведомо негодные схемы. Также при построении разностных схем для нелинейных задач большую роль играют тестовые задачи — частные случаи задач рассматриваемого класса, имеющие аналитические решения.

## 1 Линейные схемы для нелинейных задач

Пусть, например, нам необходимо построить разностную схему, аппроксимирующую на сетке начально-краевую задачу для квазилинейного уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = L(u)[u] + f, \quad (1.1)$$

где  $L(u)[\cdot]$  — дифференциальный оператор, содержащий производные по пространственным переменным, причем коэффициенты при этих производных зависят от искомой функции  $u$ . Сами производные функции  $u$  входят в выражение  $L(u)[u]$  линейным образом. Пусть  $\Lambda(u^j)[\cdot]$  — разностная аппроксимация оператора  $L(u)[\cdot]$ , такая что коэффициенты при производных аппроксимируются с использованием значений функции  $u$  на  $j$ -м временном слое сетки, где они уже известны. Тогда в соответствии с дифференциальным уравнением (1.1) можно поставить *линейное* разностное уравнение

$$\frac{y^{j+1} - y^j}{\tau} = \Lambda(y^j)[y^{j+1}] + \varphi, \quad (1.2)$$

где все коэффициенты оператора  $\Lambda$  берутся на слое  $j$ , на котором решение  $y^j$  уже известно. Функция  $\varphi$  в уравнении (1.2) представляет собой сеточную аппроксимацию правой части  $f$  уравнения (1.1).

Коэффициенты в разностном уравнении (1.2) в общем случае являются переменными. Для исследования устойчивости полученной схемы можно использовать метод «замороженных» коэффициентов. Его основная идея заключается в том, что переменные коэффициенты в уравнении заменяются постоянными (равными значениям в каком-то одном узле), и на устойчивость исследуется соответствующая схема с постоянными коэффициентами. Если для нее получается некоторое условие устойчивости, то шаги сетки нужно выбирать так, чтобы это условие выполнялось для всех возможных значений коэффициентов в уравнении независимо от того, в каком именно узле их «заморозили».

На практике для уравнения с гладкими коэффициентами и гладкими решениями критерии устойчивости, полученные этим способом, хорошо согласуются с результатами численных расчетов. Однако для ряда задач с разрывными, недифференцируемыми и даже кусочно-гладкими коэффициентами построены примеры, когда «замораживание» коэффициентов приводит к ошибочным заключениям. Поэтому данный подход хорош для выявления заведомо негодных схем.

Кроме того, линейные схемы для нелинейных уравнений можно применять далеко не всегда. Как будет показано на примере, при некоторых начальных и граничных условиях линейная схема для нелинейного уравнения дает заведомо неверный результат.

## 2 Нелинейные схемы для нелинейных задач

Для аппроксимации оператора  $L(u)[\cdot]$  в уравнении (1.1) можно использовать не только значения функции  $u$  на слое  $j$ , но и на слое  $j+1$ . Например, пусть  $\Lambda(u^{j+1})[\cdot]$  — разностная аппроксимация оператора  $L(u)[\cdot]$ . При этом в соответствие дифференциальному уравнению (1.1) ставится *нелинейное* разностное уравнение, например:

$$\frac{y^{j+1} - y^j}{\tau} = \Lambda(y^{j+1})[y^{j+1}] + \varphi. \quad (2.1)$$

Нелинейные разностные схемы представляют собой системы нелинейных алгебраических уравнений относительно значений сеточной функции в узлах сетки. При их использовании возникает два основных вопроса. Первый — есть ли у этой системы вещественное решение. Если у исходной дифференциальной начально-краевой задачи решение существует, то при достаточно малых шагах сетки сеточное решение также должно существовать. На грубой сетке численного решения может не быть. Второй вопрос — если сетка достаточно подробна и решение существует, то как его найти. Для этого обычно исполь-

зуются различные итерационные методы. Мы рассмотрим пример использования метода Ньютона.

### 3 Примеры реализации линейных и нелинейных схем для квазилинейного уравнения переноса

Построим линейную и нелинейную разностные схемы для простейшего квазилинейного уравнения переноса. Рассмотрим следующую начально-краевую задачу:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0, & x \in (0, 1], t \in (0, 1], \\ u(x, 0) = 2x - x^2 + 1, \\ u(0, t) = 1. \end{cases} \quad (3.1)$$

Задача (3.1) допускает аналитическое решение, которое можно найти методом характеристик:

$$u(x, t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t \geq x, \\ 2x_0(x, t) - x_0^2(x, t) + 1, & \text{если } t < x, \end{cases}$$

где

$$x_0(x, t) = 1 + \frac{1}{2t} - \sqrt{\left(1 + \frac{1}{2t}\right)^2 - \frac{x}{t} + 1}.$$

График аналитического решения задачи (3.1) и профили функции  $u(x, t)$  для нескольких фиксированных моментов времени представлены на рис. 1.

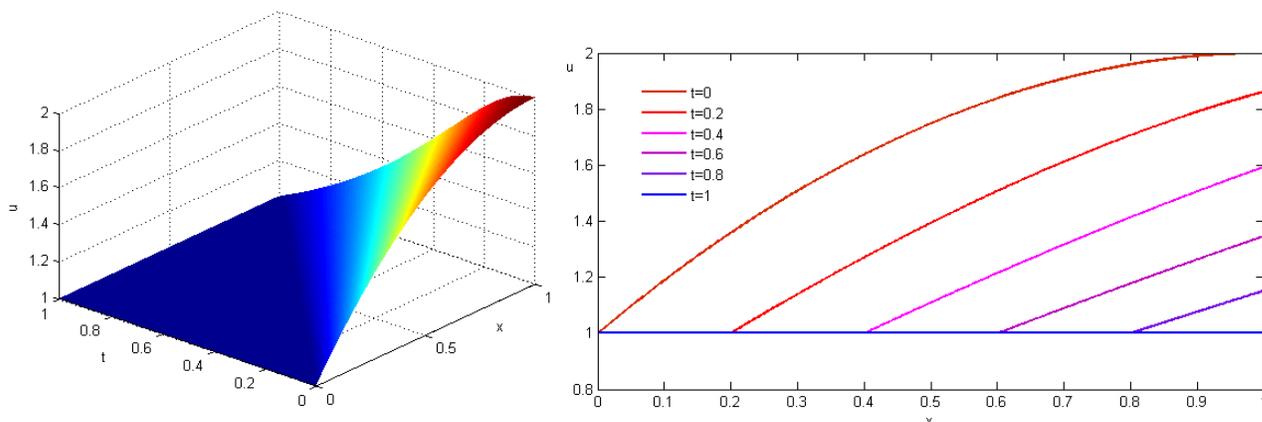


Рис. 1: Аналитическое решение задачи (3.1)

Решение задачи является непрерывной, но не гладкой функцией. На прямой  $t = x$  график функции имеет излом. Поэтому в окрестности этой прямой следует ожидать максимальной погрешности численного решения, так как все теоретические оценки порядков погрешности аппроксимации строятся в предположении о достаточной гладкости аналитического решения задачи.

Реализуем для рассматриваемой задачи несколько возможных разностных схем. Введем в расчетной области равномерную сетку:

$$x_n = nh, \quad n = 0, 1, \dots, N, \quad Nh = 1, \quad t_j = j\tau, \quad j = 0, 1, \dots, J, \quad J\tau = 1.$$

Рассмотрим, например, явную линейную схему:

$$\begin{cases} \frac{y_n^{j+1} - y_n^j}{\tau} + y_n^j \frac{y_n^j - y_{n-1}^j}{h} = 0, & n = 1, 2, \dots, N, \quad j = 0, 1, \dots, J-1, \\ y_n^0 = 2x_n - x_n^2 + 1, & n = 0, 1, \dots, N, \\ y_0^j = 1, & j = 0, 1, \dots, J, \end{cases} \quad (3.2)$$

шаблон для которой представлен на рисунке 2.

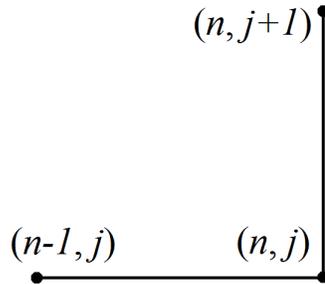


Рис. 2: Шаблон линейной явной схемы (3.2)

Напомним, что аналогичная схема для *линейного* уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad c > 0,$$

устойчива только при выполнении условия Куранта  $c\tau \leq h$ . Следовательно, используя метод замороженных коэффициентов, получаем условие устойчивости схемы (3.2):

$$\tau \cdot \max y_n^j \leq h.$$

Так как в любой точке расчетной области решение уравнения переноса с нулевой правой частью равно либо начальному, либо граничному значению в соответствующей точке,

то решение не может достигать значений, больших максимального и меньших минимального из начальных и граничных значений. Поскольку

$$\max_{0 \leq x_n \leq 1} (2x_n - x_n^2 + 1) = 2 \quad \text{и} \quad \min_{0 \leq x_n \leq 1} (2x_n - x_n^2 + 1) = 1,$$

то  $\max y_n^j = 2$ . Следовательно, условие устойчивости схемы (3.2) принимает вид  $2\tau \leq h$ .

Результаты численного решения задачи (3.1) по схеме (3.2) приведены на рис. 3 - 4.

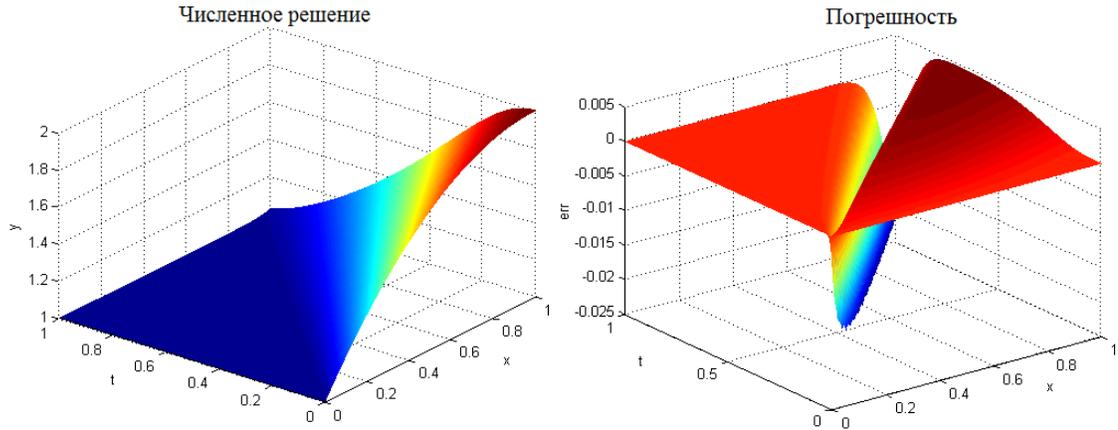


Рис. 3: Численное решение задачи (3.1) по схеме (3.2) при  $N = 100$ ,  $J = 200$ .

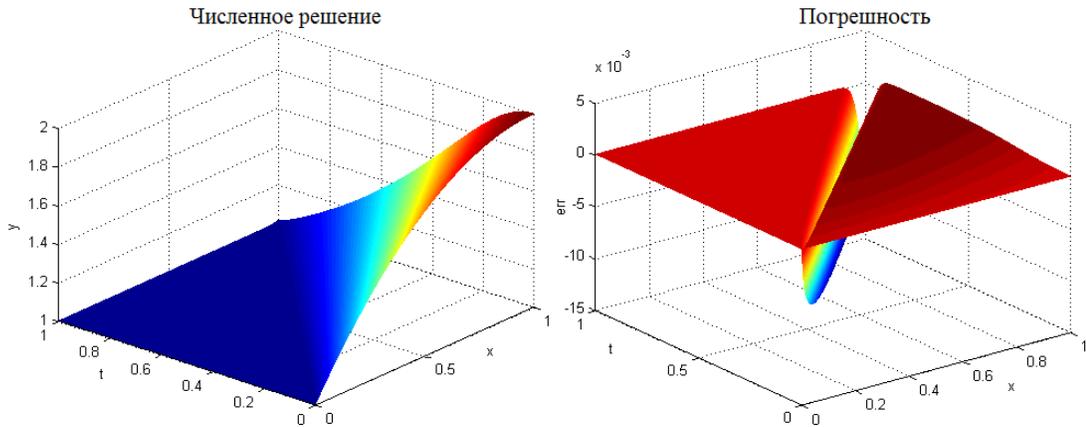


Рис. 4: Численное решение задачи (3.1) по схеме (3.2) при  $N = 500$ ,  $J = 1000$ .

Максимальную погрешность численное решение имеет в окрестности линии  $t = x$ , так как на этой линии аналитическое решение, оставаясь непрерывным, не является непрерывно-дифференцируемым.

Заметим, что если бы в задаче было *однородное* начальное условие, то рассмотренная схема была бы неприменима, так как при  $n > 1$  и всех  $j$  по формуле

$$y_n^{j+1} = y_n^j - \tau y_n^j \frac{y_n^j - y_{n-1}^j}{h}$$

все время получалось бы  $y_n^{j+1} = 0$ .

Рассмотрим теперь пример нелинейной неявной схемы для задачи (3.1):

$$\begin{cases} \frac{y_n^{j+1} - y_n^j}{\tau} + y_n^{j+1} \frac{y_n^{j+1} - y_{n-1}^{j+1}}{h} = 0, & n = 1, 2, \dots, N, \quad j = 0, 1, \dots, J-1, \\ y_n^0 = 2x_n - x_n^2 + 1, & n = 0, 1, \dots, N, \\ y_0^j = 1, & j = 0, 1, \dots, J. \end{cases} \quad (3.3)$$

Ее шаблон представлен на рисунке 5.

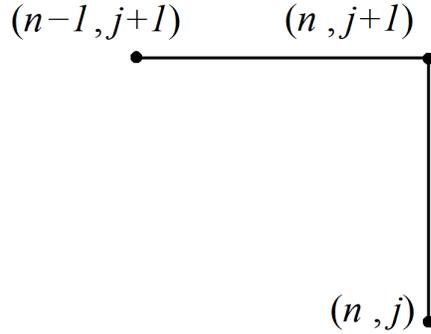


Рис. 5: Шаблон нелинейной неявной схемы (3.3)

Аналогичная схема для линейного уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad c > 0,$$

является безусловно устойчивой.

Исследуем на устойчивость схему (3.3), проводя ее линеаризацию. Пусть  $\bar{y}_n^j$  — точное решение разностной схемы,  $\delta y_n^j$  — его погрешность, то есть  $y_n^j = \bar{y}_n^j + \delta y_n^j$ . Подставляем это выражение в уравнение в схеме (3.3):

$$\underbrace{\left\{ \frac{\bar{y}_n^{j+1} - \bar{y}_n^j}{\tau} + \bar{y}_n^{j+1} \frac{\bar{y}_n^{j+1} - \bar{y}_{n-1}^{j+1}}{h} \right\}}_{\text{это равно нулю}} + \frac{\delta y_n^{j+1} - \delta y_n^j}{\tau} + \delta y_n^{j+1} \frac{\bar{y}_n^{j+1} - \bar{y}_{n-1}^{j+1}}{h} + \bar{y}_n^{j+1} \frac{\delta y_n^{j+1} - \delta y_{n-1}^{j+1}}{h} + \{\text{квадратичные по } \delta y \text{ слагаемые}\} = 0.$$

Пренебрегая квадратичными по  $\delta y$  слагаемыми, для  $\delta y_n^j$  получаем следующее *линеаризованное* уравнение:

$$\frac{\delta y_n^{j+1} - \delta y_n^j}{\tau} + \delta y_n^{j+1} \frac{\bar{y}_n^{j+1} - \bar{y}_{n-1}^{j+1}}{h} + \bar{y}_n^{j+1} \frac{\delta y_n^{j+1} - \delta y_{n-1}^{j+1}}{h} = 0.$$

Если  $\bar{y}_n^{j+1} - \bar{y}_{n-1}^{j+1} \geq 0$  для всех  $n$  и  $j$  (что имеет место в рассматриваемой задаче), то схема безусловно устойчива. В самом деле, «замораживая» коэффициенты, получаем:

$$\frac{\delta y_n^{j+1} - \delta y_n^j}{\tau} + C_1 \delta y_n^{j+1} + C_2 \frac{\delta y_n^{j+1} - \delta y_{n-1}^{j+1}}{h} = 0,$$

где  $C_1 = (\bar{y}_n^{j+1} - \bar{y}_{n-1}^{j+1})/h$  и  $C_2 = \bar{y}_n^{j+1}$  при некоторых фиксированных значениях  $n$  и  $j$ . Применяя метод гармоник, находим множители роста:

$$\lambda = \frac{1}{1 + C_1\tau + C_2\tau/h - (C_2\tau/h)e^{-i\alpha}}.$$

В рассматриваемом случае в силу монотонности схемы и выбора начальных и граничных условий выполняются неравенства  $C_1 \geq 0$  и  $C_2 > 0$  при всех  $n = 1, 2, \dots, N$  и  $j = 0, 1, \dots, J - 1$ , обеспечивающие выполнение условия  $|\lambda| \leq 1$  для любого вещественного  $\alpha$  во всех узлах сетки. Следовательно, можно ожидать безусловной устойчивости схемы.

Перейдем теперь к решению системы (3.3). Сначала в цикле задаем начальные и граничные условия. Затем в цикле для каждого  $n = 1, 2, \dots, N$  и  $j = 0, 1, \dots, J - 1$  нужно найти решение уравнения

$$\frac{y_n^{j+1} - y_n^j}{\tau} + y_n^{j+1} \frac{y_n^{j+1} - y_{n-1}^{j+1}}{h} = 0,$$

в котором неизвестным является только  $y_n^{j+1}$ . Уравнение для  $y_n^{j+1}$  можно переписать в виде:

$$f(y_n^{j+1}) = 0, \quad \text{где} \quad f(y_n^{j+1}) = y_n^{j+1} + \frac{\tau}{h} (y_n^{j+1})^2 - \frac{\tau}{h} y_n^{j+1} y_{n-1}^{j+1} - y_n^j. \quad (3.4)$$

В данной задаче уравнение (3.4) квадратное, и его можно решить аналитически (но возникнет вопрос, какой из корней выбирать). В общем случае при использовании нелинейных схем получаются системы нелинейных алгебраических уравнений, которые аналитически не решаются. Если соответствующая нелинейная система решение имеет, то его можно найти приближенно, используя итерационные методы.

В качестве примера рассмотрим итерационный метод Ньютона (метод касательных). Нужно найти корень уравнения  $f(v) = 0$ , где  $f$  — гладкая функция. Пусть  $v_0$  — начальное приближение к корню, и  $v_{s+1} = v_s + \delta v_s$  — итерационный процесс. По смыслу, с ростом  $s$  значения  $v_s$  должны приближаться к искомому корню, а приращения  $\delta v_s$  должны уменьшаться. Тогда

$$f(v_{s+1}) = f(v_s + \delta v_s) = f(v_s) + f'(v_s)\delta v_s + \{\text{нелинейные слагаемые}\} = 0.$$

Пренебрегая нелинейными по  $\delta v_s$  слагаемыми, получаем:

$$f(v_s) + f'(v_s)\delta v_s = 0 \Rightarrow \delta v_s = -\frac{f(v_s)}{f'(v_s)},$$

где  $f'$  — производная в обычном смысле. В качестве начального приближения можно взять значение сеточной функции  $y$  со слоя  $j$ :  $v^0 = y_n^j$ . В нашем случае итерационный процесс нахождения  $y_n^{j+1}$  имеет вид:

$$v_{s+1} = v_s - \frac{f(v_s)}{f'(v_s)},$$

где

$$f(v_s) = v_s + \frac{\tau}{h}v_s^2 - \frac{\tau}{h}v_s y_{n-1}^{j+1} - y_n^j, \quad f'(v_s) = 1 + \frac{2\tau}{h}v_s - \frac{\tau}{h}y_{n-1}^{j+1}.$$

Когда мы подошли к искомому корню достаточно близко, итерационный процесс обрывается, и мы берем  $y_n^{j+1}$  равным последнему найденному  $v_{s+1}$ .

Пусть  $\varepsilon$  — точность, с которой нужно найти приближенное значение  $y_n^{j+1}$ . Итерационный процесс завершается при выполнении условия:

$$\left| \frac{v^{s+1} - v^s}{1 - q} \right| < \varepsilon, \quad q = \frac{v^{s+1} - v^s}{v^s - v^{s-1}}.$$

На рис. 6 - 7 приведены результаты расчета по схеме (3.3) для  $\varepsilon = 10^{-11}$ .

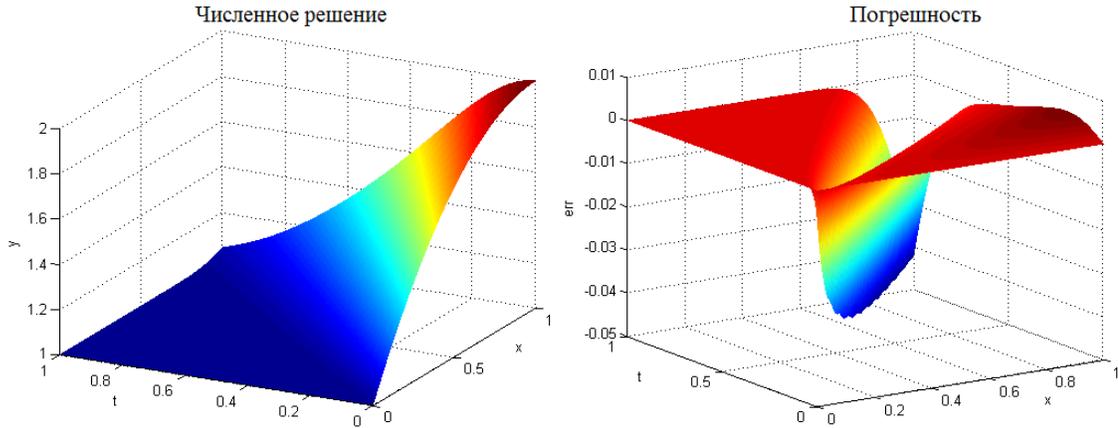


Рис. 6: Численное решение задачи (3.1) по схеме (3.3) при  $N = 100$ ,  $J = 200$ .

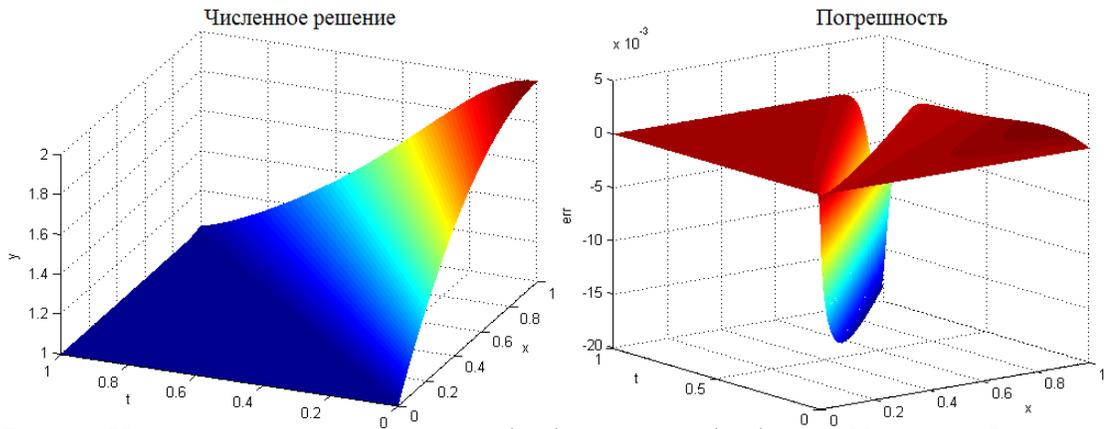


Рис. 7: Численное решение задачи (3.1) по схеме (3.3) при  $N = 500$ ,  $J = 1000$ .

## 4 Консервативность и ложная сходимость

Если при помощи разностной схемы ищется обобщенное решение начально-краевой задачи, то есть решение, которое может иметь изломы и даже разрывы, то нужно быть особенно внимательным при обосновании аппроксимации разностным уравнением исходного дифференциального. Все оценки порядков аппроксимации, получаемые разложением функций в разностных выражениях по формуле Тейлора, справедливы только для гладких функций. Формальное применение схем, обладающих той или иной аппроксимацией на гладком решении, в случае обобщенного решения может приводить к ошибочному результату.

Рассмотрим пример так называемой *ложной сходимости* схемы. Пусть мы ищем разрывное решение квазилинейного уравнений переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (4.1)$$

которое в некоторый момент времени  $t$  имеет вид:

$$u(x, t) = \begin{cases} a, & x < \xi(t) \\ b, & x > \xi(t). \end{cases}$$

В соответствии с условием Гюгонио скорость движения разрыва равна  $v = \frac{d\xi}{dt} = \frac{a+b}{2}$ .

Аппроксимируем уравнение (4.1) с помощью линейной явной схемы:

$$\frac{y_n^{j+1} - y_n^j}{\tau} + y_n^j \frac{y_n^j - y_{n-1}^j}{h} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y_n^{j+1} = y_n^j - \frac{\tau y_n^j}{h} (y_n^j - y_{n-1}^j).$$

Пусть в момент времени  $t_j$  разрыв решения находится на участке  $[x_{n_0}, x_{n_0+1}]$ :

$$y_n^j = \begin{cases} a, & n \leq n_0, \\ b, & n \geq n_0 + 1. \end{cases}$$

Тогда на следующем слое по времени решение будет иметь вид:

$$y_n^{j+1} = \underbrace{y_n^j}_a - \frac{\tau}{h} \underbrace{y_n^j}_a \left( \underbrace{y_n^j}_a - \underbrace{y_{n-1}^j}_a \right) = a, \quad n \leq n_0,$$

$$y_{n_0+1}^{j+1} = \underbrace{y_{n_0+1}^j}_b - \frac{\tau}{h} \underbrace{y_{n_0+1}^j}_b \left( \underbrace{y_{n_0+1}^j}_b - \underbrace{y_{n_0}^j}_a \right) = b - \frac{b\tau}{h} (b - a),$$

$$y_n^{j+1} = \underbrace{y_n^j}_b - \frac{\tau}{h} \underbrace{y_n^j}_b (\underbrace{y_n^j}_b - \underbrace{y_{n-1}^j}_b) = b, \quad n \geq n_0 + 2.$$

Следовательно, если  $\tau = \frac{h}{b}$ , то

$$y_n^{j+1} = \begin{cases} a, & n \leq n_0 + 1, \\ b, & n \geq n_0 + 2, \end{cases}$$

то есть форма решения сохраняется, но разрыв движется со скоростью  $\tilde{v} = b$ , так как за один шаг по времени он проходит один шаг по координате, и

$$\tilde{v} = \frac{h}{\tau} = b.$$

При этом в аналитическом решении разрыв движется со скоростью  $v = \frac{a+b}{2}$ . Если устремить шаги  $\tau$  и  $h$  к нулю так, чтобы между ними сохранялось соотношение  $\frac{h}{\tau} = b$ , то будет иметь место так называемая *ложная сходимость*, когда разностное решение сходится к некоторой функции, не совпадающей с аналитическим решением. Причина этого явления заключается в том, что рассмотренная разностная схема на разрыве решения не аппроксимирует исходное дифференциальное уравнение.

Для того чтобы избежать ложной сходимости, нужно использовать так называемые *консервативные схемы*, которые отражают на сетке те же законы сохранения, что были в исходном дифференциальном уравнении.

Используем метод баланса для получения консервативной схемы. Дифференциальное уравнение переноса получается из интегрального уравнения баланса, при отсутствии источников и стоков имеющего вид

$$\int_{x_1}^{x_2} (u(x, t_2) - u(x, t_1)) dx = \int_{t_1}^{t_2} (c \cdot u|_{x_1} - c \cdot u|_{x_2}) dt, \quad (4.2)$$

где  $c = c(x, t, u)$  — скорость переноса,  $x_1, x_2$  — произвольные значения переменной  $x$  в расчетной области, такие что  $x_1 < x_2$ ,  $t_1, t_2$  — произвольные моменты времени, такие что  $0 < t_1 < t_2$ .

Если  $u$  и  $c$  — дифференцируемые функции, то от интегрального уравнения (4.2) можно перейти к дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (c \cdot u) = 0, \quad (4.3)$$

используя теорему о среднем и устремляя  $\Delta x = x_2 - x_1$  и  $\Delta t = t_2 - t_1$  к нулю. Разрывные решения уравнения (4.3) являются обобщенными и в действительности они удовлетворяют интегральному уравнению (4.2). Поэтому при построении консервативной схемы для уравнения (4.3) за основу нужно брать уравнение (4.2).

Рассмотрим уравнение (4.2) на произвольной ячейке сетки:

$$\int_{x_{n-1}}^{x_n} (u(x, t_{j+1}) - u(x, t_j)) dx = \int_{t_j}^{t_{j+1}} (c \cdot u|_{x_{n-1}} - c \cdot u|_{x_n}) dt. \quad (4.4)$$

Построим разностную схему для уравнения (4.3), исходя из уравнения (4.4). Например, используем для этого шаблон, приведенный на рис. 8.

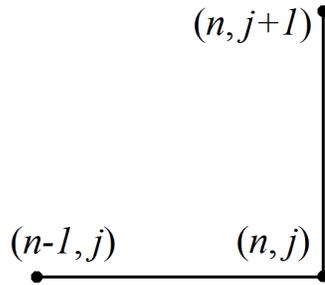


Рис. 8: Шаблон консервативной схемы для уравнения (4.3)

Аппроксимируя интегралы в уравнении (4.4) по формуле прямоугольников, получаем разностное уравнение:

$$(y_n^{j+1} - y_n^j)h = - \{ (cy)_n^j - (cy)_{n-1}^j \} \tau,$$

или, что то же самое, уравнение

$$\frac{y_n^{j+1} - y_n^j}{\tau} + \frac{(cy)_n^j - (cy)_{n-1}^j}{h} = 0,$$

которое будет отражать на сетке закон сохранения (4.2).

Заметим, что для построения консервативной схемы для уравнения переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + f(x, t, u) \frac{\partial u}{\partial x} = g(x, t, u)$$

не обязательно переходить к интегральному уравнению. Достаточно представить уравнение в *дивергентном* виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial F(x, t, u)}{\partial x} = G(x, t, u),$$

внеся  $f(x, t, u)$  под знак производной по  $x$ , и аппроксимировать его на сетке в соответствии с выбранным шаблоном.

В качестве примера рассмотрим начально-краевую задачу:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0, & x \in (0, 1], t \in (0, 1], \\ u(x, 0) = 0, & u(0, t) = 4t. \end{cases} \quad (4.5)$$

Она имеет разрывное решение:

$$u(x, t) = \begin{cases} 0, & \text{если } x > \frac{3t^2}{4}, \\ 2t \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{x}{t^2}} \right), & \text{если } x < \frac{3t^2}{4}. \end{cases} \quad (4.6)$$

График аналитического решения задачи (4.5) и профили функции  $u(x, t)$  для нескольких фиксированных моментов времени представлены на рис. 9.

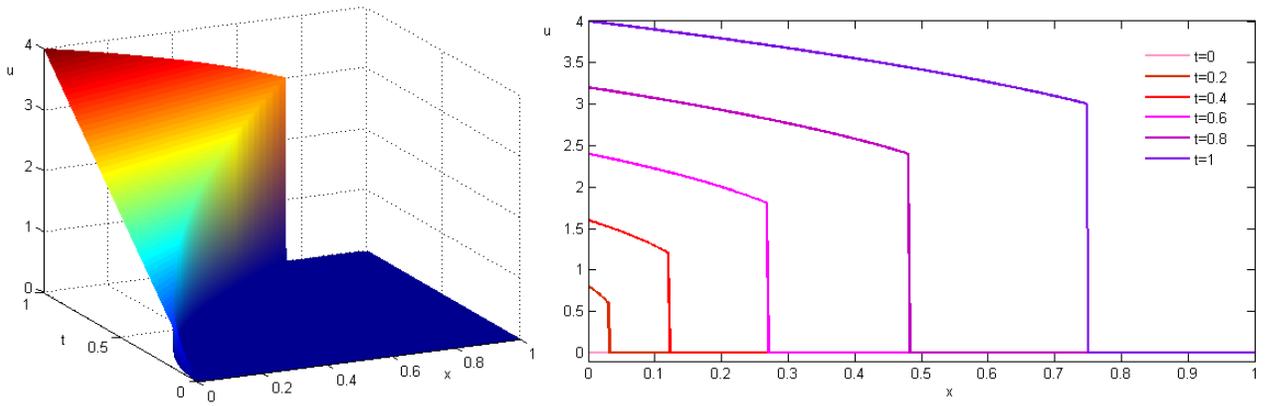


Рис. 9: Аналитическое решение задачи (4.5)

Численное решение задачи (4.5) будем строить с помощью консервативных схем. Для этого представим уравнение в дивергентном виде:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{u^2}{2} \right) = 0.$$

Так как в начальный момент времени искомая функция  $u(x, t)$  равна нулю, в данном случае нельзя пользоваться явными схемами. Построим консервативную неявную схему, пользуясь шаблоном, приведенным на рис. 10.

Соответствующая разностная схема имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{y_{n+1}^{j+1} - y_{n+1}^j}{\tau} + \frac{(y_{n+1}^{j+1})^2 - (y_{n+1}^j)^2}{2h} = 0, & n = 0, 1, \dots, N-1, \quad j = 0, 1, \dots, J-1, \\ y_n^0 = 0, & n = 0, 1, \dots, N, \\ y_0^j = 4t_j, & j = 0, 1, \dots, J. \end{cases} \quad (4.7)$$

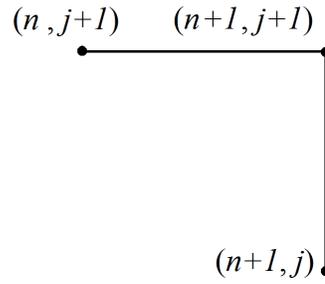


Рис. 10: Шаблон неявной консервативной схемы для задачи (4.5)

При каждом фиксированном  $n$  и  $j$  неизвестным в разностном уравнении схемы (4.7) является  $y_{n+1}^{j+1}$ . Будем искать его методом Ньютона, используя в качестве начального приближения уже найденное значение  $y_{n+1}^j$ .

Результаты расчетов по схеме (4.7) для набора параметров  $N = J = 1000$ ,  $\varepsilon = 10^{-11}$  приведены на рис. 11 - 12.

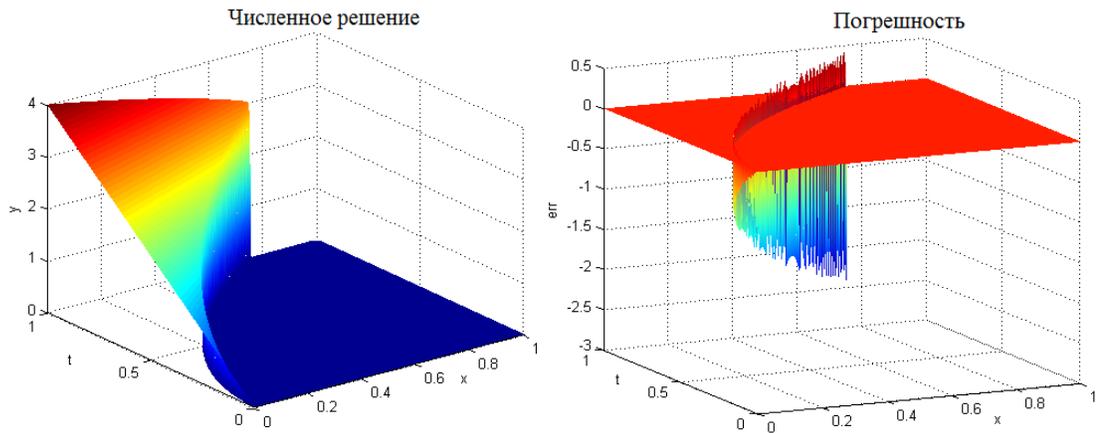


Рис. 11: Численное решение задачи (4.5) по схеме (4.7) и его погрешность

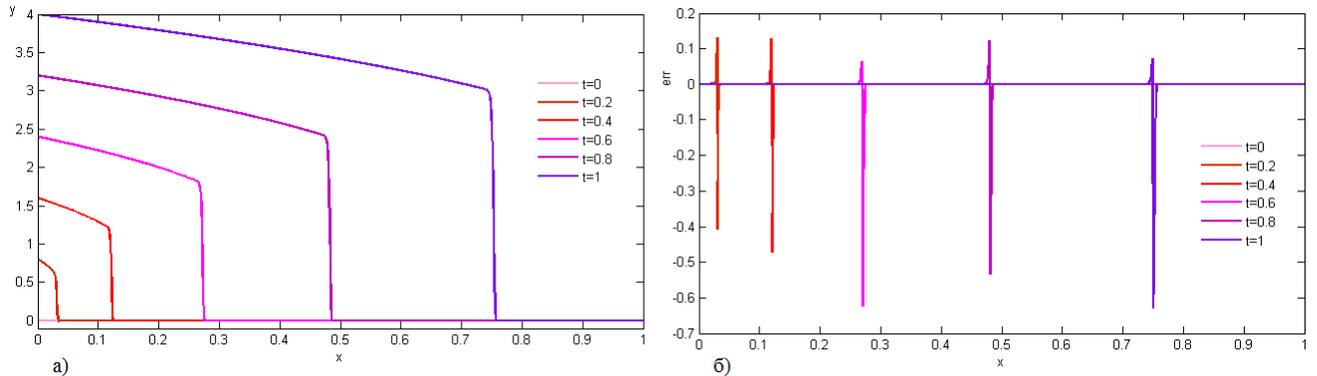


Рис. 12: Профиль численного решения задачи (4.5) по схеме (4.7) для нескольких моментов времени (а) и отношение погрешности к максимальному значению  $u(x, t)$  в эти же моменты времени (б).

Всплеск ошибки в окрестности разрыва связан с тем, что численное решение сглажи-

вает фронт волны (см. рис. 12).

Для задач с разрывными решениями или непрерывными решениями, имеющими резкие фронты, схемы, построенные с помощью четырехточечного шаблона, обладают сильной немонотонностью. Немонотонность проявляется в том, что вблизи фронтов или разрывов у численного решения появляется характерная «разболтка», которая нарастает с уменьшением шагов сетки.

В качестве примера рассмотрим консервативную схему с четырехточечным шаблоном для задачи (4.5):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{y_{n+1}^{j+1} - y_{n+1}^j + y_n^{j+1} - y_n^j}{2\tau} + \frac{(y_{n+1}^{j+1})^2 - (y_n^{j+1})^2 + (y_{n+1}^j)^2 - (y_n^j)^2}{4h} = 0, \\ y_n^0 = 0, \quad n = 0, 1, \dots, N, \\ y_0^j = 4t_j, \quad j = 0, 1, \dots, J. \end{array} \right. \quad (4.8)$$

Как и в случае схемы (4.7), при каждом фиксированном  $n$  и  $j$  неизвестным в системе (4.8) является значение  $y_{n+1}^{j+1}$ , которое может быть найдено приближенно при помощи метода Ньютона.

Результаты расчетов по схеме (4.8) для набора параметров  $N = J = 50$ ,  $\varepsilon = 10^{-9}$  приведены на рис. 13.

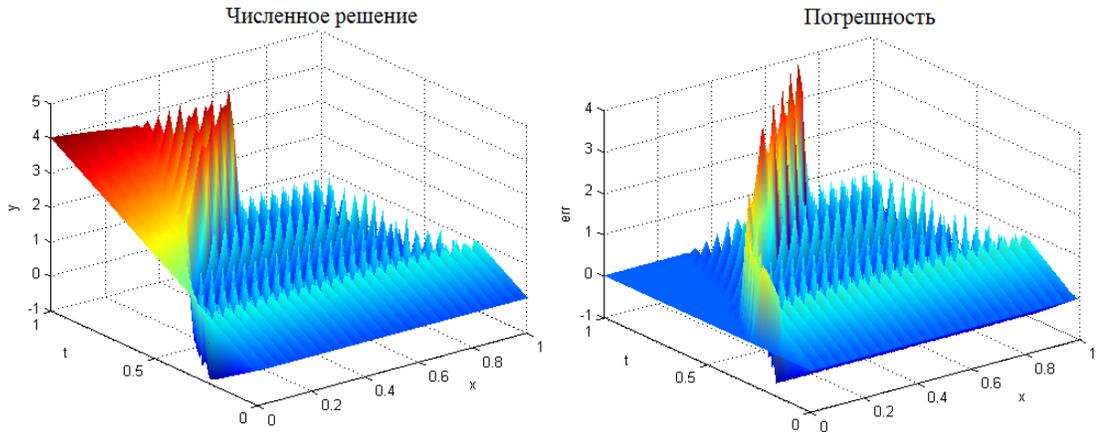


Рис. 13: Численное решение задачи (4.5) по немонотонной схеме (4.8) и его погрешность