

*Вариант зачетной контрольной работы по
методам математической физики*

1. Уравнение Лапласа вне круга:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & r > a, \varphi \in [0, 2\pi) \\ u|_{r=a} = \cos 2\varphi, & |u| < \infty \text{ при } r \rightarrow \infty \end{cases}$$

2. Задача Штурма-Лиувилля в цилиндре:

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0, & z \in (0, 2), r \in (0, 3), \varphi \in (0, \pi) \\ \|u\|_{r=0} < \infty, & u|_{r=3} = 0, u|_{\varphi=0} = u|_{\varphi=\pi} = 0, u|_{z=0} = \partial u / \partial z|_{z=2} = 0. \end{cases}$$

3. Уравнение Гельмгольца в шаре:

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda_1^{(5/2)} u = 0, & r \in (0, 2), \theta \in (0, \pi), \varphi \in [0, 2\pi) \\ u|_{r=2} = \sin \theta \sin \varphi, & \|u\|_{r=0, \theta=0, \theta=\pi} < \infty, \\ u(r, \theta, \varphi) = u(r, \theta, \varphi + 2\pi), & \text{где } J_{5/2}(\sqrt{\lambda_k^{(5/2)}}) = 0, k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

4. Уравнение теплопроводности в цилиндре:

$$\begin{cases} u_t = a^2 \Delta u, & r \in (0, 2), \varphi \in [0, 2\pi), z \in (0, 1), t > 0 \\ u|_{r=2} = u|_{z=0} = u|_{z=1} = 0, & \|u\|_{r=0} < \infty, u(t, r, \varphi, z) = u(t, r, \varphi + 2\pi, z), \\ u|_{t=0} = 2J_2(\mu_3^{(2)} r/2) \cos 2\varphi \sin 3\pi z, & \text{где } J_2(\mu_k^{(2)}) = 0, k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

5. Уравнение Лапласа в прямоугольнике:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & x \in (0, 2), y \in (0, 4) \\ u|_{x=0} = u|_{y=0} = u|_{y=4} = 0, & u|_{x=2} = 3 \sin \frac{\pi y}{2} \end{cases}$$

6. Уравнение колебаний в шаре:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 \Delta u, & r \in (0, 3), \theta \in (0, \pi), \varphi \in [0, 2\pi), t > 0 \\ u|_{r=3} = P_3^{(1)}(\cos \theta) \sin \varphi, & |u| < \infty, u(t, r, \theta, \varphi) = u(t, r, \theta, \varphi + 2\pi), \\ u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0 \end{cases}$$