

# **План лекций первого потока по курсу «Методы математической физики»**

## **Введение**

### **Часть I. Специальные функции математической физики**

#### **Глава 1. Задача на собственные значения для оператора Лапласа в основных областях**

##### **§ 1. Отрезок**

##### **§ 2. Прямоугольник**

##### **§ 3. Прямой прямоугольный параллелепипед**

##### **§ 4. Круг**

##### **§ 5. Шар**

#### **Глава 2. Уравнение специальных функций и свойства его решений**

#### **Глава 3. Цилиндрические функции**

##### **§ 1. Уравнение цилиндрических функций (уравнение Бесселя)**

##### **§ 2. Свойства гамма-функции**

##### **§ 3. Построение функций Бесселя $H_{-\nu}(x)$ в виде обобщенного степенного ряда (метод Фробениуса)**

##### **§ 4. Рекуррентные формулы**

##### **§ 5. Цилиндрические функции полуцелого порядка**

##### **§ 6. Интегральное представление функции Бесселя**

##### **§ 7. Функции Ханкеля. Интегральные представления**

##### **1°. Определение функций Ханкеля**

##### **2°. Свойства функций Ханкеля**

**1) Связь функций  $H_{-\nu}(x)$  и  $H_{\nu}(x)$**

**2) Рекуррентные формулы**

**§ 8. Связь функций Ханкеля и Бесселя**

**§ 9. Линейная зависимость и независимость цилиндрических функций. Определитель Вронского**

**§ 10. Асимптотика цилиндрических функций**

**§ 11. Краевая задача для уравнения Бесселя. Собственные функции круга.**

**§ 12. Цилиндрические функции чисто мнимого аргумента. Функции Инфельда и Макдональда**

**Глава 4. Классические ортогональные полиномы (КОП)**

**§ 1. Определение КОП**

**§ 1. Свойства КОП**

**1°. Ортогональность, Нормальная ортогональная система**

**2°. Теорема о нулях**

**3°. Системы производных КОП**

**4°. Кураева задача для КОП**

**5°. Обобщенная формула Родрига**

**6°. Норма КОП**

**7°. Производящая функция КОП**

**§ 3 Важные частные случаи КОП**

**1°. Полиномы Якоби**

**2°. Полиномы Чебышева**

**3°. Полиномы Лежандра**

**4°. Полиномы Лагерра**

**5°. Полиномы Эрмита**

**Глава 5. Присоединенные функции Лежандра**

**§ 1. Определение присоединенных функций Лежандра**

**§ 2. Уравнение для присоединенных функций Лежандра**

**§ 3. Свойства присоединенных функций Лежандра**

**1°. Ортогональность присоединенных функций Лежандра**

**2°. Нули присоединенных функций Лежандра**

**3°. Норма присоединенных функций Лежандра**

**Глава 6. Сферические функции**

**Глава 7. Шаровые функции**

**Глава 8. Собственные функции Шара**

**Глава 9. Замкнутые и полные системы функций**

**§ 1. Пространство Лебега  $L_2(D)$  . Интеграл Лебега**

**§ 2. Замкнутые и полные системы функций пространстве  $L_2(D)$**

**§ 3. Пространства Соболева  $W_2^1(D)$  и  $\hat{W}_2^1(D)$**

**§ 4. Примеры замкнутых в пространстве  $L_2$  систем функций**

**1°. Система полиномов Лежандра**

**2°. Система присоединенных функций Лежандра**

**3°. Система сферических функций**

**4°. Системы полиномов Лагерра и Эрмита**

**5°. Заключительные замечания к главе 9**

## **Часть II. Методы математической физики**

### **Глава 1. Классификация дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка**

**§ 1. Классификация дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка в случае двух независимых переменных**

**§ 2. Преобразование дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка к каноническому виду в случае двух независимых переменных**

**§ 3. Случай многих независимых переменных**

### **Глава 2. Основные уравнения математической физики и постановка краевых задач**

**§ 1. Физические задачи, приводящие к уравнениям гиперболического типа**

**1°. Малые поперечные колебания струны**

**2°. Малые продольные колебания стержня**

**3°. Случай многих пространственных переменных**

**1) Малые поперечные колебания мембраны**

**2) Уравнения Максвелла**

**§ 2. Постановка краевых задач**

**1°. Начальные условия**

**2°. Граничные условия**

**3°. Обобщение на случай трех переменных**

**§ 3. Уравнение теплопроводности**

**§ 4. Физические задачи, приводящие к уравнениям эллиптического типа**

**1°. Стационарное распределение тепла**

**2°. Задачи электростатики**

**3°. Установившиеся колебания**

**4°. Установившиеся электромагнитные колебания**

**5°. Постановка краевых задач**

**Глава 3. Метод разделения переменных (метод Фурье)**

**§ 1. Общая схема метода разделения переменных**

**1°. Постановка общей начально-краевой задачи. Определение классического решения**

**2°. Редукция общей задачи**

**3°. Первая и вторая формулы Грина**

**4°. Общая схема метода разделения переменных. Основные свойства собственных функций и собственных значений**

**§ 2. Неоднородные уравнения и граничные условия**

**1°. Неоднородные уравнения**

**2°. Неоднородные граничные условия**

**Глава 4. Уравнения эллиптического типа**

## **§ 1. Основные свойства гармонических функций**

### **1°. Определение гармонических функций**

#### **2°. Третья формула Грина**

### **3°. Основные свойства гармонических функций**

#### **1) Теорема Гаусса**

#### **2) Существование производных всех порядков**

#### **3) Формула среднего значения**

## **§ 2. Принцип максимума**

## **§ 3. Постановка внутренних краевых задач для уравнения Пуассона**

## **§ 4. Внешние краевые задачи**

### **1°. Внешняя задача Дирихле**

#### **1) Трехмерный случай**

#### **2) Двумерный случай**

### **2°. Понятие функции, регулярной на бесконечности**

#### **1) Трехмерный случай.**

#### **2) Двумерный случай.**

### **3°. Внешняя задача Неймана.**

#### **1) Трехмерный случай.**

#### **2) Двумерный случай.**

## **§ 5. Функция Грина**

### **1°. Фундаментальные решения**

#### **1) Вспомогательные положения анализа. Обобщенные функции. Обобщенные решения**

#### **2) Фундаментальные решения**

**2°. Задача Дирихле для уравнения Пуассона**

**3°. Свойства функции Грина задачи Дирихле**

**1) Оценки функции Грина задачи Дирихле**

**2) Физический смысл функции Грина задачи Дирихле**

**3) Симметрия функции Грина задачи Дирихле**

**4°. Функция Грина задачи Неймана для уравнения Пуассона**

**Глава 5. Уравнения параболического типа**

**§ 1. Постановка начально-краевых задач**

**§ 2. Принцип максимума**

**§ 3. Теоремы единственности и устойчивости.**

**§ 4. Формальное построение решения начально-краевой задачи.**

**Функция источника**

**§ 5. Существование решения начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности на отрезке**

**§ 6. Задача Коши для уравнения теплопроводности**

**1°. Постановка задачи Коши на бесконечной прямой**

**2°. Теорема единственности решения задачи Коши на бесконечной прямой**

**3°. Формальное построение решения задачи Коши на бесконечной прямой с помощью интегрального преобразования Фурье.**

**Фундаментальное решение**

**4°. Свойства фундаментального решения**

**5°. Теоремы устойчивости**

**1) Устойчивость по начальным данным**

## **2) Устойчивость по правой части**

### **§ 7. Существование решения задачи Коши для однородного уравнения теплопроводности**

**1°. Теорема существования**

**2°. Пример**

### **§ 8. Задача Коши для уравнения теплопроводности в пространстве. Фундаментальное решение**

### **§ 9. Решение уравнения теплопроводности на полупрямой**

**1°. Однородное граничное условие. Функция Грина**

**2°. Краевой режим. Принцип Дюамеля**

## **Глава 6. Уравнения гиперболического типа**

### **§ 1. Постановка начально-краевых задач для уравнения колебаний в ограниченной области. Классическое решение**

### **§ 2. Теорема единственности**

### **§ 3. Существование решения начально-краевой задачи для однородного уравнения колебаний на отрезке**

**1°. Формальное построение решения методом Фурье. Функция Грина**

**2°. Теорема существования классического решения**

### **§ 5. Вынужденные колебания ограниченной струны.**

**1°. Построение решения методом Фурье**

**2°. Физический смысл функции Грина - функция влияния мгновенного точечного импульса**

## **§ 6. Уравнение колебаний на неограниченной прямой. Формула Даламбера**

**1°. Постановка задачи Коши**

**2°. Вывод формулы Даламбера**

**3°. Свойства формулы Даламбера**

**1) Единственность решения**

**2) Существование решения**

**3) Устойчивость решения**

**4°. Физическая интерпретация решения.**

**1) Понятие бегущей волны. Конечная скорость распространения**

**2) Интерпретация на фазовой плоскости решения для локального начального возмущения**

## **§ 7. Вынужденные колебания бесконечной струны**

**1°. Колебания струны под действием мгновенного сосредоточенного импульса.**

**2°. Формально-математический вывод формулы для решения задачи о вынужденных колебаниях неограниченной струны.**

**3°. Теоремы существования и единственности решения**

## **§ 8. Уравнение колебаний на полупрямой**

**1°. Однородное уравнение колебаний на полупрямой. Однородные граничные условия первого и второго рода. Метод отражений.**

**2°. Распространение краевого режима**

## **§ 9. Колебания в неограниченном пространстве**

**1°. Сферически симметричный случай. Характеристический конус**

**2°. Вывод формулы Кирхгофа**

**3°. Формула Пуассона**

**4°. Метод спуска Адамара**

**5°. Физическая интерпретация. Принцип Гюйгенса.**

**6°. Функция источника**

**7°. Установившиеся колебания**

## **Глава 7. Уравнения эллиптического типа (продолжение)**

### **§ 1. Теория потенциала**

**1°. Объемный потенциал**

**2°. Понятие равномерной сходимости несобственного интеграла**

**3°. Поверхностные потенциалы**

**1) Поверхностный потенциал простого слоя**

**2) Поверхностный потенциал двойного слоя**

**4°. Логарифмические потенциалы**

**1) Логарифмический потенциал простого слоя**

**2) Логарифмический потенциал двойного слоя**

**5°. Свойства логарифмических потенциалов двойного и простого слоя на кривой класса  $A$ .**

**1) Непрерывность логарифмического потенциала простого слоя**

**2) Существование логарифмического потенциала двойного слоя**

**3) Разрыв логарифмического потенциала двойного слоя на кривой класса  $A$  в случае постоянной плотности**

4) Разрыв логарифмического потенциала двойного слоя на кривой класса  $A$  в случае переменной плотности

5) Разрыв нормальной производной простого слоя на кривой класса  $A$

6°. Обобщение на трехмерный случай. Поверхность Ляпунова

§ 2. Сведение краевых задач к интегральным уравнениям Фредгольма

1°. Внутренняя задача Дирихле и внешняя задача Неймана

2°. Внутренняя задача Неймана и внешняя задача Дирихле

§ 3. Задача Дирихле на собственные значения для оператора Лапласа

1°. Сведение задачи на собственные значения к интегральному уравнению Фредгольма с симметричным слабополярным ядром

2°. Свойства интегрального уравнения Фредгольма второго рода с вещественным симметричным слабополярным ядром

3°. Свойства собственных функций и собственных значений

§ 4. Краевые задачи для уравнения  $\Delta u + cu = -f$

1°. Физические задачи, приводящие к уравнению  $\Delta u + cu = -f$

1) Установившиеся колебания

2) Стационарный процесс диффузии

2°. Свойства решений уравнения  $\Delta u + cu = -f$

3°. Фундаментальные решения

1) Трехмерный случай

2) Двумерный случай

4°. Формулы Грина

**5°. Теорема единственности для внутренних краевых задач**

**6°. Методы решения краевых задач для уравнения  $\Delta u + cu = -f$**

**1) Метод разделения переменных**

**2) Метод разложения по собственным функциям**

**3) Метод функций Грина**

**4) Метод интегральных уравнений**

**5) Метод конформных отображений**