

Разностная аппроксимация начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности. Понятие явной и неявной схемы.

1 Разностная аппроксимация уравнения теплопроводности

Рассмотрим различные варианты разностной аппроксимации линейного одномерного по пространству уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad x \in (0, l), \quad t \in (0, T], \quad (1.1)$$

где $T > 0$ — некоторая константа.

Введем в области $\bar{D} = \{0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$ равномерную сетку с шагом h по координате и шагом τ по времени:

$$x_i = ih, \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad hN = l; \quad t_j = j\tau, \quad j = 0, 1, \dots, M, \quad \tau M = T.$$

Уравнение (1.1) содержит как производные по пространственной переменной x , так и по времени t , поэтому для построения его разностной аппроксимации придется использовать узлы сетки, соответствующие различным j . Все узлы сетки, отвечающие фиксированному j , называют j -м *временным слоем*. Свойства разностных схем для уравнения (1.1) зависят от того, на каком слое j по времени аппроксимируется выражение $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. Рассмотрим возможные варианты.

Вариант 1: явная схема.

Для аппроксимации оператора $L = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ в уравнении (1.1) используем шаблон, приведенный на рис. 1.

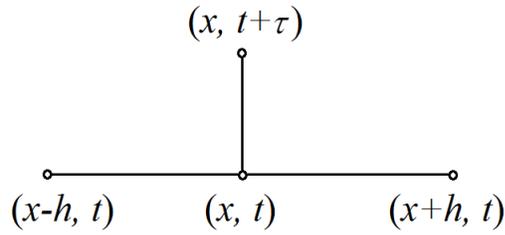


Рис. 1: Шаблон явной схемы для уравнения теплопроводности.

Соответствующий разностный оператор $L_{h\tau}^{(0)}u$ имеет вид:

$$L_{h\tau}^{(0)}u = \frac{u(x, t + \tau) - u(x, t)}{\tau} - \frac{u(x + h, t) - 2u(x, t) + u(x - h, t)}{h^2}.$$

Далее для краткости будем использовать следующие стандартные обозначения:

$$u = u(x, t); \quad \hat{u} = u(x, t + \tau).$$

Тогда:

$$u_t = \frac{\hat{u} - u}{\tau}, \quad L_{h\tau}^{(0)}u = u_t - u_{\bar{x}x}.$$

Найдем погрешность аппроксимации разностным оператором $L_{h\tau}^{(0)}$ исходного дифференциального оператора L в точке (x, t) . В случае достаточно гладкой функции $u(x, t)$ при достаточно малых шагах h и τ имеем:

$$u_t = \frac{u(x, t + \tau) - u(x, t)}{\tau} = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + O(\tau), \quad (1.2)$$

$$u_{\bar{x}x} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + O(h^2). \quad (1.3)$$

Следовательно, разностный оператор $L_{h\tau}^{(0)}$ аппроксимирует дифференциальный оператор L с погрешностью $O(\tau + h^2)$ в точке (x, t) :

$$L_{h\tau}^{(0)}u = \underbrace{\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}}_{L[u(x, t)]} + O(\tau + h^2).$$

Введем сеточную функцию $\varphi = \varphi(x_i, t_j)$, аппроксимирующую правую часть $f(x, t)$ уравнения (1.1) на всех внутренних узлах (x_i, t_j) сетки с погрешностью $O(\tau + h^2)$. В качестве φ можно взять, например $\varphi(x_i, t_j) = f(x_i, t_j)$. Тогда разностное уравнение

$$L_{h\tau}^{(0)}y = \varphi$$

будет аппроксимировать исходное дифференциальное уравнение теплопроводности (1.1) с первым порядком погрешности по τ и вторым по h .

Вариант 2. Чисто неявная схема.

Используем для аппроксимации оператора $L = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ в уравнении (1.1) шаблон, приведенный на рис. 2.

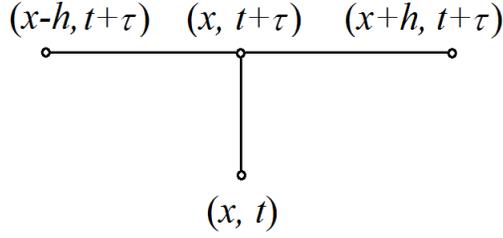


Рис. 2: Шаблон неявной схемы для уравнения теплопроводности.

Тогда разностная аппроксимация оператора L уравнения теплопроводности будет выглядеть следующим образом:

$$L_{h\tau}^{(1)}u = \frac{u(x, t + \tau) - u(x, t)}{\tau} - \frac{u(x + h, t + \tau) - 2u(x, t + \tau) + u(x - h, t + \tau)}{h^2} = u_t - \hat{u}_{\bar{x}x}.$$

Рассмотрим погрешность аппроксимации разностным оператором $L_{h\tau}^{(1)}$ исходного дифференциального оператора L в точках (x, t) , $(x, t + \tau)$. Так как для достаточно гладкой функции $u(x, t)$ справедливы равенства

$$\hat{u}_{\bar{x}x} = \frac{\partial^2 u(x, t + \tau)}{\partial x^2} + O(h^2) = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + O(\tau + h^2), \quad (1.4)$$

то с учетом (1.2) получаем, что оператор $L_{h\tau}^{(1)}$ аппроксимирует дифференциальный оператор L в уравнении (1.1) с погрешностью $O(\tau + h^2)$ в точках (x, t) и $(x, t + \tau)$:

$$L_{h\tau}^{(1)}u = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + O(\tau) - \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + O(\tau + h^2) = \underbrace{\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}}_{L[u(x, t)]} + O(\tau + h^2),$$

$$L_{h\tau}^{(1)}u = \frac{\partial u(x, t + \tau)}{\partial t} + O(\tau) - \frac{\partial^2 u(x, t + \tau)}{\partial x^2} + O(h^2) = \underbrace{\frac{\partial u(x, t + \tau)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(x, t + \tau)}{\partial x^2}}_{L[u(x, t + \tau)]} + O(\tau + h^2).$$

Беря в качестве сеточной аппроксимации правой части уравнения (1.1), например, функцию $\varphi(x_i, t_j) = f(x_i, t_{j+1})$, получим разностное уравнение

$$L_{h\tau}^{(1)}y = \varphi,$$

аппроксимирующее (1.1) с погрешностью $O(\tau + h^2)$.

Вариант 3. Неявная схема с весами.

Используем шаблон, приведенный на рис. 3, и линейную комбинацию операторов $L_{h\tau}^{(0)}$ и $L_{h\tau}^{(1)}$ для аппроксимации дифференциального оператора L :

$$L_{h\tau}^{(\sigma)}u = \sigma L_{h\tau}^{(1)}u + (1-\sigma)L_{h\tau}^{(0)}u = \sigma u_t - \sigma \hat{u}_{\bar{x}x} + (1-\sigma)u_t - (1-\sigma)u_{\bar{x}x} = u_t - (\sigma \hat{u}_{\bar{x}x} + (1-\sigma)u_{\bar{x}x}),$$

где $\sigma \in (0, 1)$.

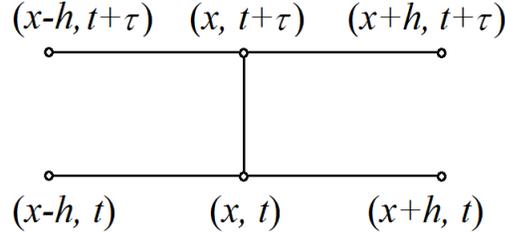


Рис. 3: Шаблон неявной схемы с весами для уравнения теплопроводности.

Пользуясь равенствами (1.2), (1.3) и (1.4), получаем, что оператор $L_{h\tau}^{(\sigma)}$ аппроксимирует исходный дифференциальный оператор L с погрешностью $O(\tau+h^2)$ в точках (x, t) , $(x, t+\tau)$ при любом σ .

По определению погрешность

$$\psi(x, t) = L_{h\tau}^{(\sigma)}u - Lu \quad (1.5)$$

аппроксимации выражения Lu разностным выражением $L_{h\tau}^{(\sigma)}u$ может вычисляться в любой точке (x, t) , а не обязательно в каком-либо узле сетки, так как в соотношении (1.5) функция $u(x, t)$ — это произвольная достаточно гладкая функция непрерывных аргументов x и t . Поэтому рассмотрим погрешность аппроксимации оператором $L_{h\tau}^{(\sigma)}$ дифференциального оператора L в центральной точке $(x, t+0.5\tau)$ шаблона, приведенного на рис. 3. Пользуясь для достаточно гладкой функции $u(x, t)$ разложением в ряд Тейлора в окрестности точки $(x, t+0.5\tau)$, при малых τ и h получаем:

$$u_t = \frac{u(x, t+\tau) - u(x, t)}{\tau} = \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{(x, t+0.5\tau)} + O(\tau^2),$$

$$\hat{u}_{\bar{x}x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{(x, t+\tau)} + O(h^2) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{(x, t+0.5\tau)} + \frac{\tau}{2} \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} \Big|_{(x, t+0.5\tau)} + O(\tau^2 + h^2),$$

$$u_{\bar{x}x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{(x, t)} + O(h^2) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{(x, t+0.5\tau)} - \frac{\tau}{2} \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} \Big|_{(x, t+0.5\tau)} + O(\tau^2 + h^2).$$

Следовательно, при $\sigma = 0.5$ в точке $(x, t + 0.5\tau)$ оператор $L_{h\tau}^{(0.5)}$ в силу своей симметрии аппроксимирует L со вторым порядком погрешности аппроксимации по τ и h :

$$L_{h\tau}^{(\sigma)} u = \underbrace{\frac{\partial u(x, t + \frac{\tau}{2})}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(x, t + \frac{\tau}{2})}{\partial x^2}}_{L[u(x, t + \frac{\tau}{2})]} - \frac{\tau}{2} \underbrace{(2\sigma - 1)}_{0 \text{ при } \sigma=0.5} \frac{\partial^3 u(x, t + \frac{\tau}{2})}{\partial x^2 \partial t} + O(\tau^2 + h^2).$$

Для того, чтобы получить разностное уравнение, аппроксимирующее дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t)$$

с погрешностью $O(\tau^2 + h^2)$ в точке $(x, t + \frac{\tau}{2})$, достаточно взять в качестве сеточной аппроксимации правой части $f(x, t)$ этого уравнения функцию $\varphi(x_i, t_j) = f(x_i, t_j + 0.5\tau)$.

Итак, разностное уравнение

$$L_{h\tau}^{(0.5)} y = \varphi,$$

где $\varphi(x_i, t_j) = f(x_i, t_j + 0.5\tau)$, аппроксимирует уравнение (1.1) со вторым порядком погрешности аппроксимации по τ и h .

2 Реализация явной, неявной и симметричной разностных схем для начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности на отрезке.

Пример 2.1. Постройте явную разностную схему для следующей начально-краевой задачи на отрезке $x \in [0, 1]$:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x, & 0 < x < 1, 0 < t \leq 1, \\ u(x, 0) = \sin\left(\frac{3\pi x}{2}\right), \\ u(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=1} = t. \end{cases} \quad (2.1)$$

Сравните численное решение с аналитическим и исследуйте зависимость погрешности от шагов сетки. При численном решении соблюдайте условие устойчивости явной схемы: $\tau \leq h^2/2$.

РЕШЕНИЕ. Прежде всего, найдем аналитическое решение задачи (2.1). В силу ее линейности решение можно искать в виде $u(x, t) = v(x, t) + xt$, где функция $v(x, t)$ удовлетворяет

задаче с однородными граничными условиями:

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, & 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq 1, \\ v(x, 0) = \sin\left(\frac{3\pi x}{2}\right), \\ v(0, t) = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x}\Big|_{x=1} = 0. \end{cases}$$

Используя метод разделения переменных, получаем: $v = e^{-(3\pi/2)^2 t} \sin(3\pi x/2)$. Следовательно, аналитическое решение задачи (2.1) имеет вид:

$$u(x, t) = xt + e^{-(\frac{3\pi}{2})^2 t} \cdot \sin\left(\frac{3\pi x}{2}\right).$$

Для того, чтобы получить численное решение, введем в расчетной области равномерную сетку:

$$x_i = ih, \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad hN = 1, \quad t_j = j\tau, \quad j = 0, 1, \dots, M, \quad \tau M = 1,$$

и будем для краткости использовать обозначения $u_i^j = u(x_i, t_j)$, $y_i^j = y(x_i, t_j)$.

Построим разностную аппроксимацию уравнения в соответствии с явной схемой:

$$\frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} = \frac{y_{i-1}^j - 2y_i^j + y_{i+1}^j}{h^2} + x_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad j = 0, 1, \dots, M-1. \quad (2.2)$$

Это разностное уравнение необходимо дополнить соответствующими начальными и граничными условиями на сетке. Начальное условие и граничное условие Дирихле при $x = 0$ аппроксимируются точно:

$$y_i^0 = \sin\left(\frac{3\pi x_i}{2}\right), \quad i = 0, 1, \dots, N,$$

$$y_0^j = 0, \quad j = 0, 1, \dots, M.$$

Граничное условие при $x = 1$ содержит производную $\frac{\partial u}{\partial x}$. Если ее просто заменить односторонней разностной производной, то уравнение

$$\frac{y_N^j - y_{N-1}^j}{h} = t_j, \quad j = 0, 1, \dots, M, \quad (2.3)$$

будет аппроксимировать соответствующее граничное условие с первым порядком погрешности аппроксимации. Это означает, что и для всей разностной схемы порядок погрешности аппроксимации по h будет первым. Напомним, что разностное уравнение (2.2) аппроксимировало дифференциальное уравнение в задаче (2.1) с погрешностью $O(\tau + h^2)$.

Итак, первый вариант явной разностной схемы для задачи (2.1), обладающей погрешностью аппроксимации $O(\tau + h)$, имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} = \frac{y_{i-1}^j - 2y_i^j + y_{i+1}^j}{h^2} + x_i, & i = 1, 2, \dots, N-1, \quad j = 0, 1, \dots, M-1, \\ y_i^0 = \sin\left(\frac{3\pi x_i}{2}\right), & i = 0, 1, \dots, N, \\ y_0^j = 0, \quad \frac{y_N^j - y_{N-1}^j}{h} = t_j, & j = 0, 1, \dots, M. \end{cases} \quad (2.4)$$

Рассмотрим алгоритм решения системы (2.4). При $j = 0$ значения y_i^0 известны из начального условия, а значения y_i^1 неизвестны и должны быть найдены для всех $i = 0, 1, \dots, N$. Когда найдены все значения y_i^1 , нужно найти y_i^2 и т.д. Следовательно, при каждом фиксированном $j = 0, 1, \dots, M-1$ неизвестными являются значения y_i^{j+1} . Найти их можно следующим образом:

1) при $i = 1, 2, \dots, N-1$ из первого уравнения системы (2.4) находим

$$y_i^{j+1} = y_i^j + \frac{\tau}{h^2} (y_{i+1}^j - 2y_i^j + y_{i-1}^j) + \tau x_i;$$

2) при $i = 0$ и $i = N$ пользуемся граничными условиями, учитывая, что y_1^{j+1} и y_{N-1}^{j+1} уже известны:

$$y_0^{j+1} = 0, \quad y_N^{j+1} = y_{N-1}^{j+1} + h \cdot t_{j+1};$$

3) переходим на новый слой по времени, увеличивая j на единицу и повторяем действия 1) и 2).

На рис.4-6 приведены аналитическое решение задачи 2.1, результаты ее численного решения по схеме (2.4) для $N = 50$ и $M = 10 + 2N^2$ (число M подобрано так, чтобы условие устойчивости явной схемы выполнялось) и погрешность численного решения.

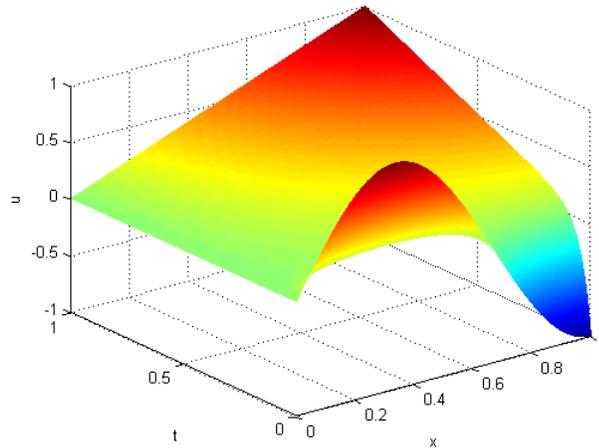


Рис. 4: Аналитическое решение задачи (2.1).

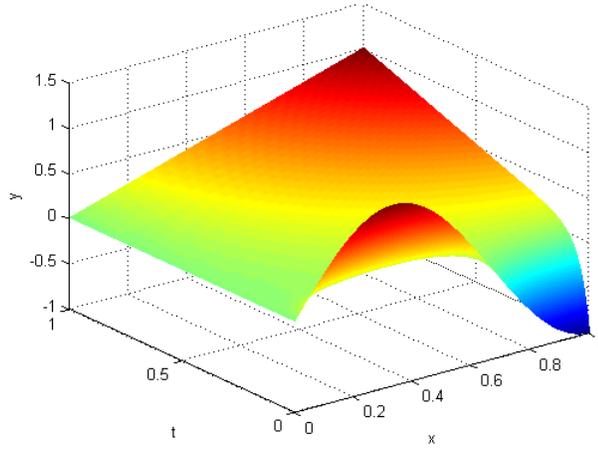


Рис. 5: Численное решение задачи (2.1) с помощью явной схемы (2.4).

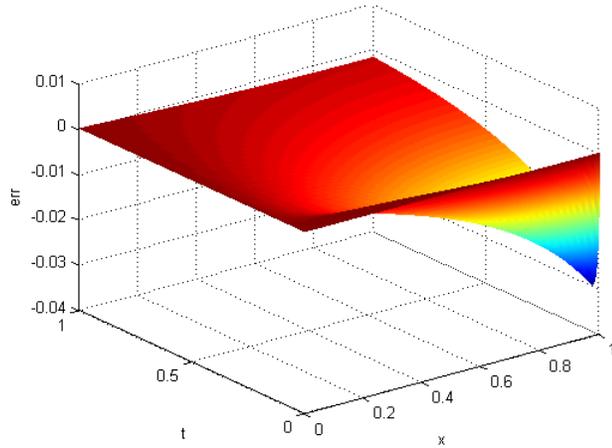


Рис. 6: Погрешность численного решения задачи (2.1) с помощью явной схемы (2.4).

Если мы хотим, чтобы явная схема аппроксимировала исходную задачу с погрешностью $O(\tau + h^2)$, то можно использовать тот же прием, который применялся ранее для аппроксимации граничного условия, содержащего производную, в краевой задаче для обыкновенного дифференциального уравнения на отрезке. Пусть $u(x, t)$ — решение задачи (2.1). Рассмотрим выражение:

$$\begin{aligned} u_{\bar{x}} &= \frac{u(x, t) - u(x - h, t)}{h} = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} - \frac{h}{2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + O(h^2) = \\ &= \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} - \frac{h}{2} \left(\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - x \right) + O(h^2). \end{aligned}$$

Заменяя в нем производную $\frac{\partial u}{\partial t}$ конечной разностью и учитывая, что

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{u(x, t) - u(x, t - \tau)}{\tau} + O(\tau),$$

получим

$$\frac{u(x, t) - u(x - h, t)}{h} = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} - \frac{h}{2} \left(\frac{u(x, t) - u(x, t - \tau)}{\tau} - x \right) + O(\tau + h^2).$$

Переходя в полученном равенстве к пределу при $x \rightarrow 1$ и учитывая, что по условию

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=1} = t,$$

находим, что при $t = t_{j+1}$ имеет место равенство:

$$\frac{u_N^{j+1} - u_{N-1}^{j+1}}{h} = t_{j+1} - \frac{h}{2} \left(\frac{u_N^{j+1} - u_N^j}{\tau} - 1 \right) + O(\tau + h^2).$$

Следовательно, разностное уравнение

$$\frac{y_N^{j+1} - y_{N-1}^{j+1}}{h} = t_{j+1} - \frac{h}{2} \left(\frac{y_N^{j+1} - y_N^j}{\tau} - 1 \right) \quad (2.5)$$

аппроксимирует граничное условие Неймана при $x = 1$ с погрешностью $O(\tau + h^2)$. Таким образом, меняя в схеме (2.4) уравнение (2.3) на (2.5), мы получим схему, аппроксимирующую исходную задачу на ее решении с погрешностью $O(\tau + h^2)$.

Уравнение (2.5) удобно переписать в виде:

$$y_N^{j+1} = \left(1 + \frac{h^2}{2\tau} \right)^{-1} \left(y_{N-1}^{j+1} + ht_{j+1} + \frac{h^2}{2} \left(1 + \frac{y_N^j}{\tau} \right) \right), \quad j = 0, 1, \dots, M-1,$$

и использовать при уже найденных y_{N-1}^{j+1} , y_N^j для завершения перехода на слой $j + 1$.

Результаты расчетов по соответствующей явной схеме на той же сетке, что и в предыдущем случае, приведены на рис. 7-8.

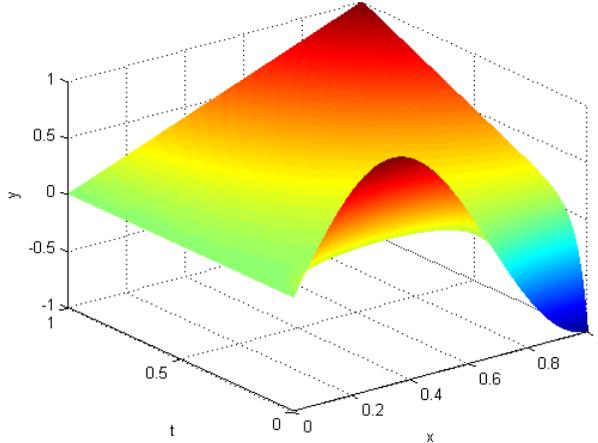


Рис. 7: Численное решение задачи с помощью явной схемы с граничным условием (2.5).

Также для получения схемы, имеющей погрешность аппроксимации $O(\tau + h^2)$, можно аппроксимировать граничное условие Неймана при $x = 1$ с помощью трехточечной первой разностной производной:

$$\frac{3y_N^{j+1} - 4y_{N-1}^{j+1} + y_{N-2}^{j+1}}{2h} = t_{j+1}, \quad j = 0, 1, \dots, M-1.$$

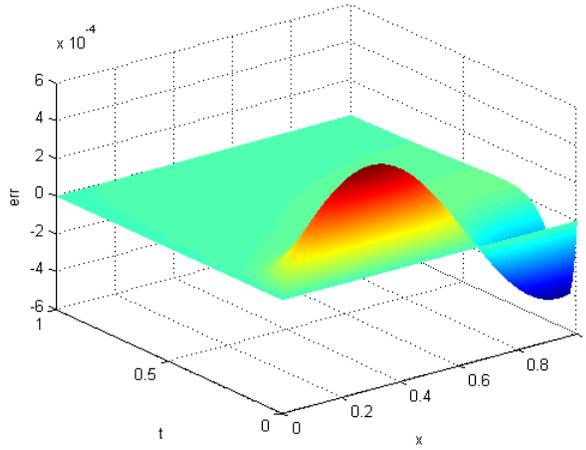


Рис. 8: Погрешность решения задачи с помощью явной схемы с граничным условием (2.5).

Перепишывая это уравнение в виде

$$y_N^{j+1} = \frac{4}{3}y_{N-1}^{j+1} - \frac{1}{3}y_{N-2}^{j+1} + \frac{2ht_{j+1}}{3}, \quad (2.6)$$

мы можем использовать его для завершения перехода на слой $j + 1$ при уже найденных y_{N-1}^{j+1} и y_{N-2}^{j+1} .

Погрешность вычислений по явной схеме с условием (2.6) приведена на рис. 9.

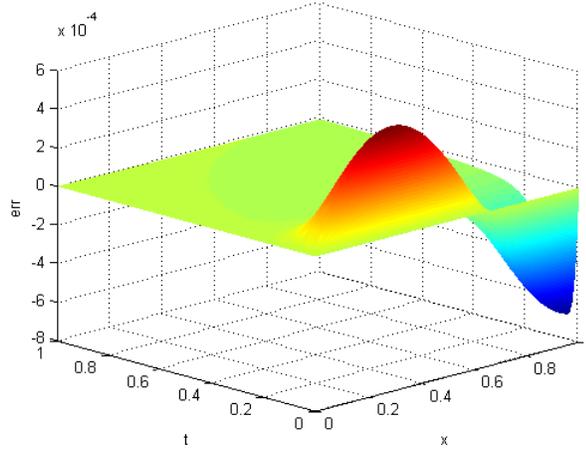


Рис. 9: Погрешность решения задачи с помощью явной схемы с граничным условием (2.6).

Пример 2.2. Постройте чисто неявную разностную схему для начально-краевой задачи (2.1). Сравните численное решение с аналитическим и исследуйте зависимость погрешности от шагов сетки.

РЕШЕНИЕ. Используем ту же сетку, что и в предыдущем примере с той лишь разницей, что соотношение шагов τ и h теперь может быть любым. Разностная аппроксимация уравнения в соответствии с неявной схемой имеет вид:

$$\frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} = \frac{y_{i-1}^{j+1} - 2y_i^{j+1} + y_{i+1}^{j+1}}{h^2} + x_i, \quad i = 1, 2, \dots, N - 1, \quad j = 0, 1, \dots, M - 1. \quad (2.7)$$

Дополним разностное уравнение (2.7) начальными и граничными условиями на сетке. Как и в случае явной схемы, начальное условие и граничное условие Дирихле при $x = 0$ аппроксимируются точно:

$$y_i^0 = \sin\left(\frac{3\pi x_i}{2}\right), \quad i = 0, 1, \dots, N; \quad y_0^{j+1} = 0, \quad j = 1, \dots, M-1.$$

Для аппроксимации граничного условия при $x = 1$ используем те же три способа, что и в случае явной схемы, разобранных в предыдущем примере.

Первый вариант аппроксимации граничного условия Неймана при $x = 1$:

$$\frac{y_N^{j+1} - y_{N-1}^{j+1}}{h} = t_{j+1}, \quad j = 1, \dots, M-1.$$

Получающаяся при этом неявная разностная схема

$$\left\{ \begin{array}{l} y_i^0 = \sin\left(\frac{3\pi x_i}{2}\right), \quad i = 0, 1, \dots, N, \\ y_0^{j+1} = 0, \quad j = 0, 1, \dots, M-1, \\ \frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} = \frac{y_{i-1}^{j+1} - 2y_i^{j+1} + y_{i+1}^{j+1}}{h^2} + x_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad j = 0, 1, \dots, M-1, \\ \frac{y_N^{j+1} - y_{N-1}^{j+1}}{h} = t_{j+1}, \quad j = 0, 1, \dots, M-1 \end{array} \right. \quad (2.8)$$

имеет погрешность аппроксимации $O(\tau + h)$. Значения сеточной функции y_i^j на нулевом слое по времени известны из начального условия, поэтому, как и в случае явной схемы, при каждом фиксированном $j = 0, 1, \dots, M-1$ неизвестными являются y_i^{j+1} . Система уравнений, которым они удовлетворяют, имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} y_0^{j+1} = 0, \\ \frac{\tau}{h^2} y_{i-1}^{j+1} - \left(1 + \frac{2\tau}{h^2}\right) y_i^{j+1} + \frac{\tau}{h^2} y_{i+1}^{j+1} = -(y_i^j + \tau x_i), \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \\ y_N^{j+1} = y_{N-1}^{j+1} + ht_{j+1}, \end{array} \right. \quad (2.9)$$

то есть является системой с трехдиагональной матрицей:

$$\left\{ \begin{array}{l} y_0^{j+1} = \varkappa_1 y_1^{j+1} + \mu_1, \\ A_i y_{i-1}^{j+1} - C_i y_i^{j+1} + B_i y_{i+1}^{j+1} = -F_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \\ y_N^{j+1} = \varkappa_2 y_{N-1}^{j+1} + \mu_2, \end{array} \right. \quad (2.10)$$

где $\varkappa_1 = 0$, $\mu_1 = 0$, $A_i = B_i = \frac{\tau}{h^2}$, $C_i = 1 + \frac{2\tau}{h^2}$, $F_i = y_i^j + \tau x_i$, $\varkappa_2 = 1$, $\mu_2 = ht_{j+1}$. Очевидно, что достаточные условия устойчивости прогонки:

$$A_i > 0, \quad B_i > 0, \quad C_i \geq A_i + B_i, \quad C_i \neq A_i + B_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad 0 \leq \varkappa_p \leq 1, \quad p = 1, 2$$

для системы (2.9) выполнены.

Решая систему (2.9) методом прогонки и последовательно увеличивая значения j на единицу, мы полностью решим систему (2.8). Результаты вычислений по неявной схеме (2.8) в случае $N = M = 50$ приведены на рис. 10-11.

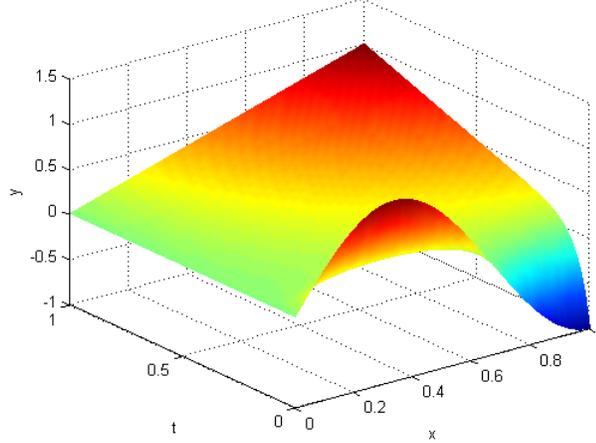


Рис. 10: Численное решение задачи (2.1) с помощью неявной схемы (2.8).

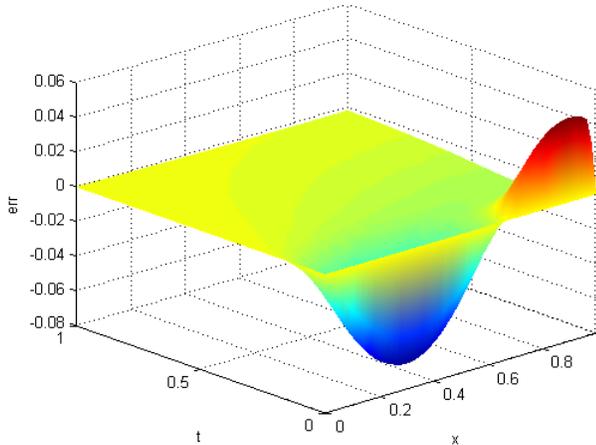


Рис. 11: Погрешность численного решения задачи (2.1) с помощью неявной схемы (2.8).

Второй вариант аппроксимации граничного условия Неймана при $x = 1$:

$$y_N^{j+1} = \left(1 + \frac{h^2}{2\tau}\right)^{-1} \left(y_{N-1}^{j+1} + ht_{j+1} + \frac{h^2}{2} \left(1 + \frac{y_N^j}{\tau}\right)\right), \quad j = 0, 1, \dots, M-1. \quad (2.11)$$

В этом случае для неизвестных y_i^{j+1} при каждом фиксированном j получаем трехдиагональную систему вида (2.10), где

$$\varkappa_2 = \left(1 + \frac{h^2}{2\tau}\right)^{-1}, \quad \mu_2 = \varkappa_2 \cdot \left(ht_{j+1} + \frac{h^2}{2} \left(1 + \frac{y_N^j}{\tau}\right)\right).$$

Погрешность расчетов по соответствующей неявной схеме в случае $N = M = 50$ приведена на рис. 12.

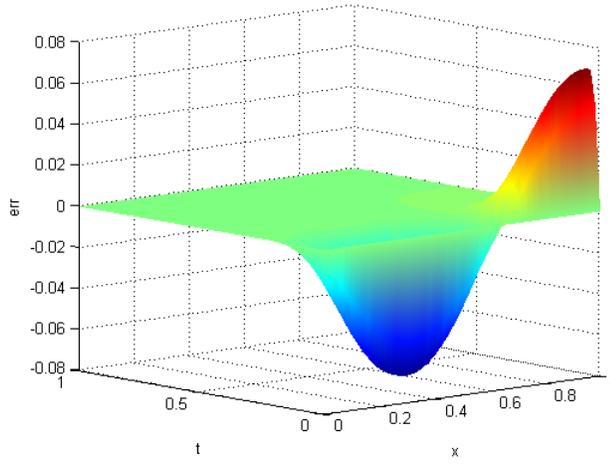


Рис. 12: Погрешность решения задачи (2.1) с помощью неявной схемы с граничным условием (2.11).

Третий вариант аппроксимации граничного условия Неймана при $x = 1$:

$$y_N^{j+1} = \frac{4}{3}y_{N-1}^{j+1} - \frac{1}{3}y_{N-2}^{j+1} + \frac{2ht_{j+1}}{3} \quad (2.12)$$

Для того, чтобы получить для неизвестных y_i^{j+1} систему с трехдиагональной матрицей при каждом фиксированном j , исключим из уравнения (2.12) неизвестное y_{N-2}^{j+1} . Для этого воспользуемся уравнением (2.7) при $i = N - 1$:

$$\frac{\tau}{h^2}y_{N-2}^{j+1} - \left(1 + \frac{2\tau}{h^2}\right)y_{N-1}^{j+1} + \frac{\tau}{h^2}y_N^{j+1} = -F_{N-1}.$$

Следовательно,

$$y_{N-2}^{j+1} = \left(\frac{h^2}{\tau} + 2\right)y_{N-1}^{j+1} - y_N^{j+1} - \frac{h^2}{\tau}F_{N-1},$$

и уравнение (2.12) принимает вид:

$$y_N^{j+1} = \left(1 - \frac{h^2}{2\tau}\right)y_{N-1}^{j+1} + \frac{h^2}{2\tau}F_{N-1} + ht_{j+1}.$$

В результате для неизвестных y_i^{j+1} приходим к системе с трехдиагональной матрицей вида (2.10), где

$$\varkappa_2 = 1 - \frac{h^2}{2\tau}, \quad \mu_2 = \frac{h^2}{2\tau}F_{N-1} + ht_{j+1}.$$

Погрешность расчетов по соответствующей схеме в случае $N = M = 50$ приведена на рис. 13.

Пример 2.3. Постройте симметричную разностную схему (схему с весом $\sigma = 0.5$) для начально-краевой задачи (2.1). Сравните численное решение с аналитическим и исследуйте зависимость погрешности от шагов сетки.

РЕШЕНИЕ. Аппроксимация уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x$$

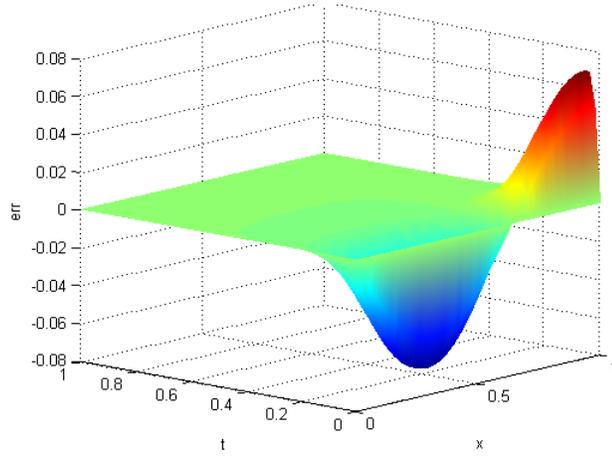


Рис. 13: Погрешность численного решения задачи (2.1) с помощью неявной схемы с граничным условием (2.12).

в соответствии с симметричной разностной схемой имеет вид:

$$\frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} = \frac{1}{2} \left(\frac{y_{i-1}^{j+1} - 2y_i^{j+1} + y_{i+1}^{j+1}}{h^2} + \frac{y_{i-1}^j - 2y_i^j + y_{i+1}^j}{h^2} \right) + x_i, \quad (2.13)$$

где $i = 1, 2, \dots, N - 1$, $j = 0, 1, \dots, M - 1$. Разностное уравнение (2.13) аппроксимирует исходное дифференциальное уравнение теплопроводности с погрешностью $O(\tau^2 + h^2)$ в точках $(x_i, t_j + 0.5\tau)$ для всех внутренних узлов x_i при $j = 0, 1, \dots, M - 1$.

Начальное условие и условие Дирихле при $x = 0$ аппроксимируются так же, как и в двух рассмотренных ранее случаях. Граничное условие Неймана при $x = 1$ можно аппроксимировать как с первым, так и со вторым порядком по h .

Если в качестве аппроксимации условия при $x = 1$ берется разностное уравнение

$$\frac{y_N^{j+1} - y_{N-1}^{j+1}}{h} = t_{j+1}, \quad j = 1, \dots, M - 1,$$

то схема будет иметь погрешность аппроксимации $O(\tau^2 + h)$. Соответствующая система для неизвестных y_i^{j+1} будет трехдиагональной:

$$\begin{cases} y_0^{j+1} = 0, \\ A_i y_{i-1}^{j+1} - C_i y_i^{j+1} + B_i y_{i+1}^{j+1} = -F_i, \quad i = 1, 2, \dots, N - 1, \\ y_N^{j+1} = y_{N-1}^{j+1} + h t_{j+1}, \end{cases} \quad (2.14)$$

где

$$A_i = B_i = \frac{\tau}{2h^2}, \quad C_i = 1 + 2A_i, \quad F_i = y_i^j + \tau x_i + \frac{\tau}{2h^2} (y_{i-1}^j - 2y_i^j + y_{i+1}^j).$$

Достаточные условия устойчивости прогонки для системы (2.14) выполнены. Погрешность решения задачи по схеме (2.14) для $N = M = 50$ приведена на рис. 14.

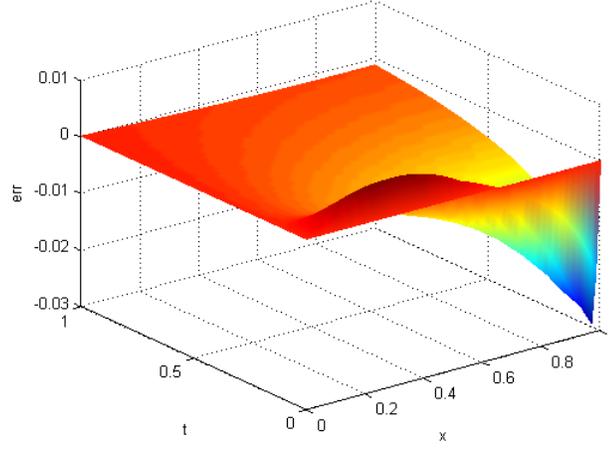


Рис. 14: Погрешность численного решения задачи (2.1) с помощью симметричной схемы.

Построим аппроксимацию граничного условия Неймана при $x = 1$ с погрешностью $O(\tau^2 + h^2)$. Рассмотрим равенство:

$$\frac{u(x, t) - u(x - h, t)}{h} = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} - \frac{h}{2} \left(\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - x \right) + O(h^2), \quad (2.15)$$

где $u(x, t)$ — решение исходной задачи (2.1). Положим в равенстве (2.15) $t = t_j + 0.5\tau$. Так как

$$\begin{aligned} & \frac{u(x, t_j + 0.5\tau) - u(x - h, t_j + 0.5\tau)}{h} = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{u(x, t_j) - u(x - h, t_j)}{h} + \frac{u(x, t_{j+1}) - u(x - h, t_{j+1})}{h} \right) + O(\tau^2) \end{aligned}$$

и

$$\left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right|_{t=t_j+0.5\tau} = \frac{u(x, t_{j+1}) - u(x, t_j)}{\tau} + O(\tau^2),$$

получаем:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{u_i^j - u_{i-1}^j}{h} + \frac{u_i^{j+1} - u_{i-1}^{j+1}}{h} \right) = \left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right|_{(x_i, t_j+0.5\tau)} - \frac{h}{2} \left(\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau} - x_i \right) + O(\tau^2 + h^2).$$

Перейдем в полученном равенстве к пределу при $x_i \rightarrow 1$ (то есть при $i \rightarrow N$), учитывая граничные условия задачи:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{u_N^j - u_{N-1}^j}{h} + \frac{u_N^{j+1} - u_{N-1}^{j+1}}{h} \right) = (t_j + 0.5\tau) - \frac{h}{2} \left(\frac{u_N^{j+1} - u_N^j}{\tau} - 1 \right) + O(\tau^2 + h^2).$$

Следовательно, разностное уравнение

$$\frac{1}{2} \left(\frac{y_N^j - y_{N-1}^j}{h} + \frac{y_N^{j+1} - y_{N-1}^{j+1}}{h} \right) = (t_j + 0.5\tau) - \frac{h}{2} \left(\frac{y_N^{j+1} - y_N^j}{\tau} - 1 \right), \quad j = 0, 1, \dots, M-1 \quad (2.16)$$

будет аппроксимировать условие

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=1} = t$$

с погрешностью $O(\tau^2 + h^2)$. Соответствующая система для y_i^{j+1} при фиксированном j имеет вид:

$$\begin{cases} y_0^{j+1} = 0, \\ A_i y_{i-1}^{j+1} - C_i y_i^{j+1} + B_i y_{i+1}^{j+1} = -F_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \\ y_N^{j+1} = \varkappa_2 y_{N-1}^{j+1} + \mu_2, \end{cases} \quad (2.17)$$

где

$$\varkappa_2 = \left(1 + \frac{h^2}{\tau}\right)^{-1}, \quad \mu_2 = \varkappa_2 \cdot \left(h^2 \left(1 + \frac{y_N^j}{\tau}\right) + 2h \left(t_j + \frac{\tau}{2}\right) - y_N^j + y_{N-1}^j\right).$$

Погрешность, получаемая при численном решении задачи с использованием граничного условия (2.16), для $N = M = 50$ приведена на рис. 15.

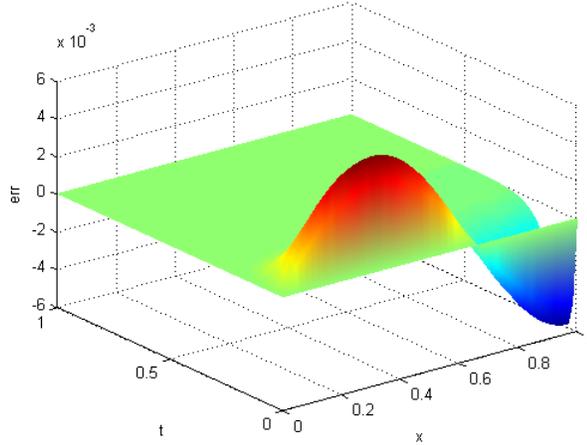


Рис. 15: Погрешность численного решения задачи (2.1) с помощью симметричной схемы с граничным условием (2.16).

Такой же порядок погрешности аппроксимации можно получить, используя граничное условие

$$y_N^{j+1} = \frac{4}{3} y_{N-1}^{j+1} - \frac{1}{3} y_{N-2}^{j+1} + \frac{2ht_{j+1}}{3}. \quad (2.18)$$

Исключим из этого уравнения неизвестное y_{N-2}^{j+1} , используя уравнение (2.13) при $i = N-1$:

$$\frac{\tau}{2h^2} y_{N-2}^{j+1} - \left(1 + \frac{\tau}{h^2}\right) y_{N-1}^{j+1} + \frac{\tau}{2h^2} y_N^{j+1} = -F_{N-1}.$$

Так как

$$y_{N-2}^{j+1} = \left(\frac{2h^2}{\tau} + 2\right) y_{N-1}^{j+1} - y_N^{j+1} - \frac{2h^2}{\tau} F_{N-1},$$

уравнение (2.18) можно переписать в виде:

$$y_N^{j+1} = \left(1 - \frac{h^2}{\tau}\right) y_{N-1}^{j+1} + \frac{h^2}{\tau} F_{N-1} + ht_{j+1}.$$

В результате мы снова приходим к системе с трехдиагональной матрицей вида (2.17) для неизвестных y_i^{j+1} при каждом фиксированном $j = 0, 1, \dots, M-1$, где теперь

$$\varkappa_2 = 1 - \frac{h^2}{\tau}, \quad \mu_2 = \frac{h^2}{\tau} F_{N-1} + ht_{j+1}.$$

Погрешность решения по предложенной схеме при $N = M = 50$ приведена на рис. 16.

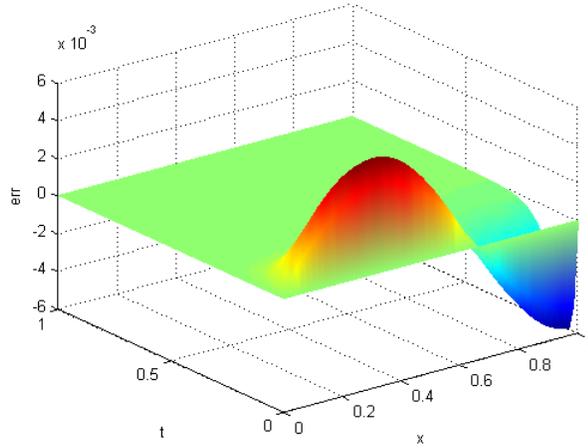


Рис. 16: Погрешность решения задачи с помощью симметричной схемы с граничным условием (2.18).

3 Задачи для самостоятельного решения

Решите аналитически и численно при помощи явной, неявной и симметричной схем начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности на отрезке:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), & x \in (0, l), t \in (0, T], \\ u(x, 0) = u_0(x), \\ -\gamma_0 \frac{\partial u}{\partial x} + \delta_0 u \Big|_{x=0} = g_0(t), \\ \gamma_1 \frac{\partial u}{\partial x} + \delta_1 u \Big|_{x=l} = g_1(t), \end{cases}$$

где:

- а) $a = 2$, $f = \cos\left(\frac{x}{2}\right) \cdot e^t$, $u_0 = \pi - x$, $\gamma_0 = 1$, $\delta_0 = 0$, $\gamma_1 = 0$, $\delta_1 = 1$, $g_0 = 1$, $g_1 = 0$, $l = \pi$;
- б) $a = 1$, $f = e^t (x^2/2 - 1)$, $u_0 = 1 + x^2/2$, $\gamma_0 = 1$, $\delta_0 = 0$, $\gamma_1 = 1$, $\delta_1 = 0$, $g_0 = 0$, $g_1 = e^t$, $l = 1$;
- в) $a = 0.5$, $f = e^t$, $u_0 = 1 + \sin(3x)$, $\gamma_0 = 0$, $\delta_0 = 1$, $\gamma_1 = 1$, $\delta_1 = 0$, $g_0 = e^t$, $g_1 = 0$, $l = \pi/2$;
- г) $a = 1$, $f = 0$, $u_0 = 3 - x + \cos\left(\frac{3\pi x}{4}\right)$, $\gamma_0 = 1$, $\delta_0 = 0$, $\gamma_1 = 0$, $\delta_1 = 1$, $g_0 = 1$, $g_1 = 1$, $l = 2$;
- д) $a = 0.1$, $f = 0$, $u_0 = \cos(\pi x) + x^2 + x$, $\gamma_0 = 1$, $\delta_0 = 0$, $\gamma_1 = 1$, $\delta_1 = 0$, $g_0 = -1$, $g_1 = 5$, $l = 2$.

Сравните результаты численного решения по разным схемам между собой и с аналитическим решением задачи. При использовании явной схемы соблюдайте условие устойчивости $\tau \leq \frac{h^2}{2a^2}$.