

Однородные разностные схемы. Консервативность.

Достаточно часто на практике встречаются задачи, которые содержат дифференциальные операторы с переменными коэффициентами. При построении разностных схем для таких задач нужно быть особенно внимательным при исследовании аппроксимации. Если коэффициенты в уравнении негладкие или даже разрывные, то решение уравнения будет обобщенным. Разностные операторы, обладающие определенным порядком аппроксимации на гладкой функции, допускающей разложение в ряд Тейлора, на обобщенном решении могут этого порядка аппроксимации и не иметь. Поэтому одна и та же схема для задачи определенного класса может аппроксимировать задачу в случае гладкого решения и не аппроксимировать в случае обобщенного решения.

При решении задач с разрывными коэффициентами конечно-разностными методами возможно несколько подходов. Один из них заключается в том, чтобы явным образом прописать на сетке условия сопряжения. При этом узлы сетки должны попадать на линии разрывов коэффициентов. Второй подход состоит в написании так называемых *однородных* разностных схем или схем *сквозного счета*, вид которых остается неизменным для задач рассматриваемого класса независимо от того, являются ли коэффициенты в уравнениях непрерывными гладкими функциями или нет. При этом особую роль играет *консервативность* схемы. Схема называется консервативной, если она отражает на сетке те же законы сохранения, которые присутствовали в исходной дифференциальной задаче.

1 Стационарное уравнение теплопроводности на отрезке

В качестве первого примера рассмотрим краевую задачу для стационарного уравнения теплопроводности на отрезке:

$$\begin{cases} (k(x)u'(x))' - q(x)u(x) = -f(x), & x \in (0, l), \\ u(0) = g_1, & u(l) = g_2, \end{cases} \quad (1.1)$$

где $k(x) > 0$, $q(x) \geq 0$, $f(x)$ — известные функции, $g_1 \geq 0$, $g_2 \geq 0$ — заданные числа.

Если функция $k(x)$ является непрерывно-дифференцируемой, а функции $q(x)$ и $f(x)$ непрерывными на $[0, l]$, то задача (1.1) имеет классическое решение. В противном случае можно говорить только об обобщенном решении задачи. Если функция $k(x)$ имеет разрыв первого рода в точке $x_0 \in (0, l)$, то в этой точке должны выполняться условия сопряжения

$$[u]_{x=x_0} = 0, \quad [ku']_{x=x_0} = 0,$$

где квадратными скобками обозначен скачок функции:

$$[u]_{x=x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0+0} u - \lim_{x \rightarrow x_0-0} u.$$

Если функция $k(x)$ непрерывно-дифференцируема, то задачу (1.1) можно переписать в следующем эквивалентном виде:

$$\begin{cases} ku'' + k'u' - qu = -f, & x \in (0, l), \\ u(0) = g_1, & u(l) = g_2. \end{cases} \quad (1.2)$$

Введем на отрезке $[0, l]$ равномерную сетку:

$$x_n = nh, \quad n = 0, 1, \dots, N, \quad h = \frac{l}{N},$$

и построим для задачи (1.2) следующую разностную схему:

$$\begin{cases} k_n \frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{h^2} + \frac{k_{n+1} - k_{n-1}}{2h} \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2h} - q_n y_n = -f_n, & n = 1, 2, \dots, N-1, \\ y_0 = g_1, & y_N = g_2. \end{cases} \quad (1.3)$$

На *гладком* решении схема (1.3) аппроксимирует задачу (1.1) со вторым порядком погрешности аппроксимации. Переписывая схему (1.3) в виде

$$\begin{cases} y_0 = g_1, \\ \left(\frac{k_n}{h^2} - \frac{k_{n+1} - k_{n-1}}{4h^2} \right) y_{n-1} - \left(\frac{2k_n}{h^2} + q_n \right) y_n + \left(\frac{k_n}{h^2} + \frac{k_{n+1} - k_{n-1}}{4h^2} \right) y_{n+1} = -f_n, & n = 1, \dots, N-1 \\ y_N = g_2, \end{cases}$$

мы получаем систему с трехдиагональной матрицей, которая может быть решена методом прогонки.

Рассмотрим частный случай задачи (1.1). Пусть $k(x) = 1 + x^2$, $q(x) \equiv 0$, $f(x) = 2x$. При этом точное решение задачи имеет вид:

$$u(x) = g_1 - x + (g_2 - g_1 + l) \frac{\operatorname{arctg}(x)}{\operatorname{arctg}(l)}$$

График аналитического решения, а также результаты численного решения задачи по схеме (1.3) в случае $g_1 = 1$, $g_2 = 0.5$, $l = 1$ при $N = 100$ и $N = 1000$ приведены на рис. 1-3.

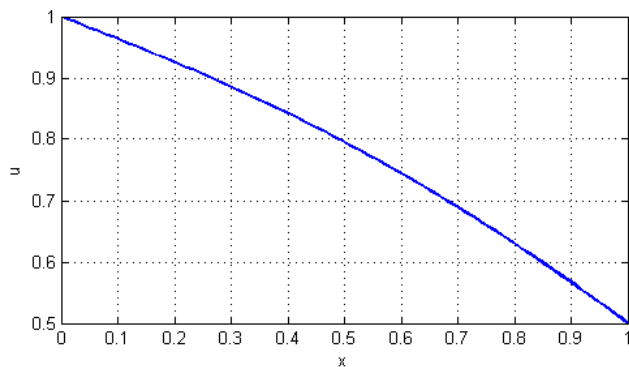


Рис. 1: Аналитическое решение задачи (1.1) при $k(x) = 1 + x^2$, $q(x) \equiv 0$, $f(x) = 2x$, $g_1 = 1$, $g_2 = 0.5$, $l = 1$

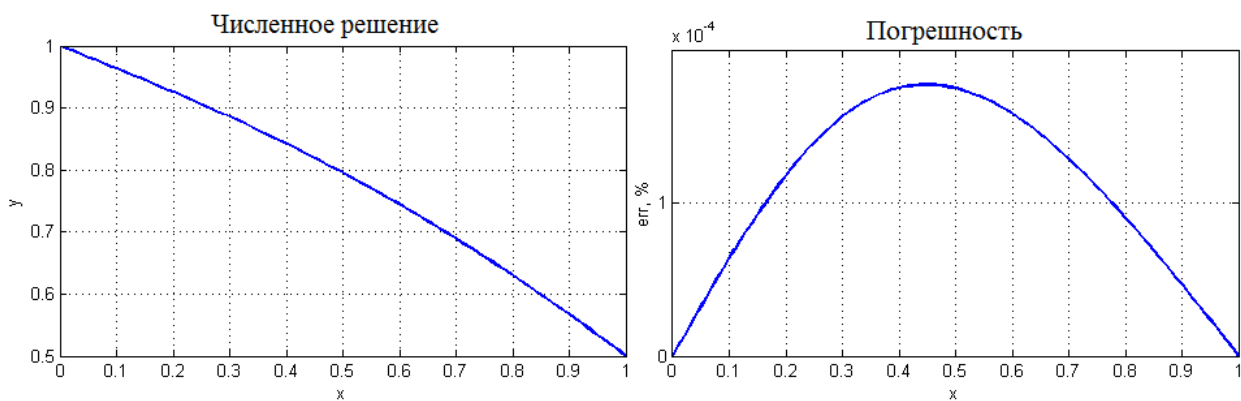


Рис. 2: Численное решение задачи (1.1) по схеме (1.3) и его погрешность при $N = 100$

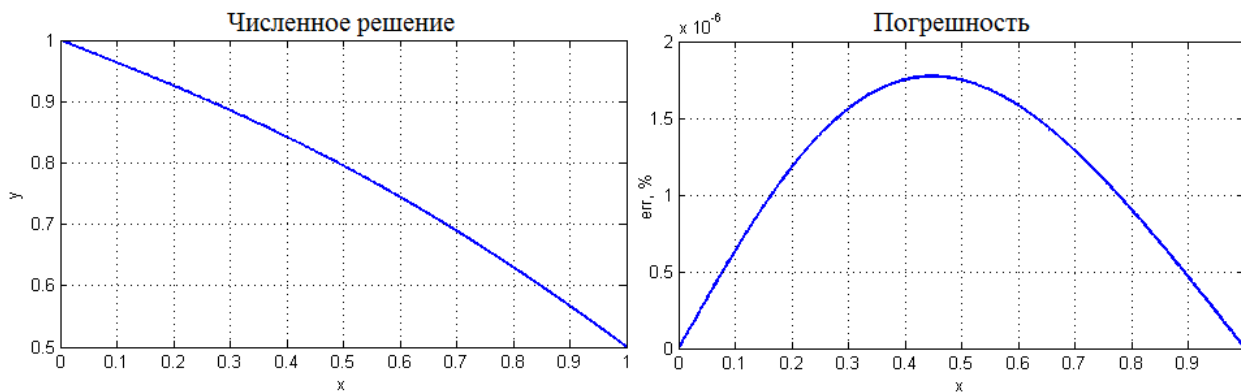


Рис. 3: Численное решение задачи (1.1) по схеме (1.3) и его погрешность при $N = 1000$

С уменьшением шага сетки численное решение стремится к аналитическому.

Рассмотрим теперь случай, когда функция $k(x)$ имеет разрыв первого рода в точке x_0 :

$$k(x) = \begin{cases} k_1(x), & x \in [0, x_0), \\ k_2(x), & x \in (x_0, l], \end{cases}$$

где $k_1(x)$ и $k_2(x)$ — непрерывно-дифференцируемые функции при $x \in [0, x_0]$ и $x \in [x_0, l]$ соответственно, причем $k_1(x_0) \neq k_2(x_0)$. Задачу (1.1) в этом случае можно записать в следующем эквивалентном виде:

$$\begin{cases} k_1 u_1'' + k_1' u_1' - q u_1 = -f, & x \in (0, x_0), \\ k_2 u_2'' + k_2' u_2' - q u_2 = -f, & x \in (x_0, l), \\ u_1(0) = g_1, \\ u_2(l) = g_2, \\ u_1(x_0) = u_2(x_0), \\ k_2(x_0) u_2'(x_0) = k_1(x_0) u_1'(x_0). \end{cases} \quad (1.4)$$

Построим для задачи (1.4) разностную схему с учетом условий сопряжения. Введем сетку, один из узлов которой обязательно попадает в точку x_0 :

$$x_n = n h_1, \quad n = 0, 1, \dots, N_1, \quad N_1 h_1 = x_0 \Leftrightarrow h_1 = \frac{x_0}{N_1},$$

$$x_n = x_0 + (n - N_1) h_2, \quad n = N_1 + 1, \dots, N, \quad x_0 + (N - N_1) h_2 = l \Leftrightarrow h_2 = \frac{l - x_0}{N - N_1}.$$

Если мы хотим, чтобы при $x \leq x_0$ и при $x > x_0$ шаги сетки были приблизительно равны, то можно потребовать выполнения условия:

$$\frac{x_0}{N_1} \approx \frac{l - x_0}{N - N_1},$$

откуда получаем

$$N = N_1 + \text{round} \left(\frac{(l - x_0) N_1}{x_0} \right). \quad (1.5)$$

Следовательно, число N_1 интервалов сетки на отрезке $[0, x_0]$ можно задавать произвольно, а полное число N интервалов сетки на отрезке $[0, l]$ находить по формуле (1.5).

Простейшая разностная схема, учитывающая условия сопряжения в точке x_0 , имеет вид:

$$\begin{cases} k_n^1 \frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{h_1^2} + \frac{k_{n+1}^1 - k_{n-1}^1}{2h_1} \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2h_1} - q_n y_n = -f_n, & n = 1, 2, \dots, N_1 - 1, \\ k_{N_1}^1 \frac{y_{N_1} - y_{N_1-1}}{h_1} = k_{N_1}^2 \frac{y_{N_1+1} - y_{N_1}}{h_2}, \\ k_n^2 \frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{h_2^2} + \frac{k_{n+1}^2 - k_{n-1}^2}{2h_2} \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2h_2} - q_n y_n = -f_n, & N_1 + 1, \dots, N - 1, \\ y_0 = g_1, \quad y_N = g_2, \end{cases} \quad (1.6)$$

где $k_n^1 = k_1(x_n)$ и $k_n^2 = k_2(x_n)$.

Система (1.6) является системой с трехдиагональной матрицей:

$$\begin{cases} y_0 = g_1, \\ A_n y_{n-1} - C_n y_n + B_n y_{n+1} = -F_n, \quad n = 1, \dots, N-1, \\ y_N = g_2, \end{cases} \quad (1.7)$$

где

$$A_n = \begin{cases} \frac{k_n^1}{h_1^2} - \frac{k_{n+1}^1 - k_{n-1}^1}{4h_1^2}, & n = 1, 2, \dots, N_1 - 1, \\ \frac{k_n^1}{h_1}, & n = N_1, \\ \frac{k_n^2}{h_2^2} - \frac{k_{n+1}^2 - k_{n-1}^2}{4h_2^2}, & n = N_1 + 1, \dots, N, \end{cases}$$

$$B_n = \begin{cases} \frac{k_n^1}{h_1^2} + \frac{k_{n+1}^1 - k_{n-1}^1}{4h_1^2}, & n = 1, 2, \dots, N_1 - 1, \\ \frac{k_n^2}{h_2}, & n = N_1, \\ \frac{k_n^2}{h_2^2} + \frac{k_{n+1}^2 - k_{n-1}^2}{4h_2^2}, & n = N_1 + 1, \dots, N, \end{cases}$$

$$C_n = \begin{cases} \frac{2k_n^1}{h_1^2} + q_n, & n = 1, 2, \dots, N_1 - 1, \\ \frac{k_n^1}{h_1} + \frac{k_n^2}{h_2}, & n = N_1, \\ \frac{2k_n^2}{h_2^2} + q_n, & n = N_1 + 1, \dots, N, \end{cases} \quad F_n = \begin{cases} f_n, & n = 1, 2, \dots, N_1 - 1, \\ 0, & n = N_1, \\ f_n, & n = N_1 + 1, \dots, N. \end{cases}$$

Систему (1.7) можно решить методом прогонки.

Рассмотрим частный случай: $f(x) \equiv 0$, $q(x) \equiv 0$, $k_1 \neq k_2$ — константы, $g_1 = 1$, $g_0 = 0$, $l = 1$. Задача (1.4) принимает в этом простейшем случае вид

$$\begin{cases} u'' = 0, & x \in (0, x_0) \cup (x_0, 1), \\ u(0) = 1, \quad u(1) = 0, \\ [u]|_{x_0} = 0, \quad k_2 u'|_{x_0+0} = k_1 u'|_{x_0-0}. \end{cases} \quad (1.8)$$

Ее решением является кусочно-линейная функция

$$u(x) = \begin{cases} 1 - \alpha_0 x, & x \in [0, x_0], \\ \beta_0(1 - x), & x \in [x_0, 1], \end{cases}$$

коэффициенты α_0 и β_0 которой можно найти из условий сопряжения:

$$\begin{cases} 1 - \alpha_0 x_0 = \beta_0(1 - x_0) \\ -k_1 \alpha_0 = -k_2 \beta_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta_0 = \varkappa \alpha_0 \\ \alpha_0 = \frac{1}{\varkappa(1 - x_0) + x_0} = \frac{1}{\varkappa + (1 - \varkappa)x_0}, \end{cases}$$

где $\varkappa = \frac{k_1}{k_2}$.

График аналитического решения задачи, а также результаты расчетов по схеме (1.6) для $x_0 = 0.33333333$ приведены на рис. 4 - 5.

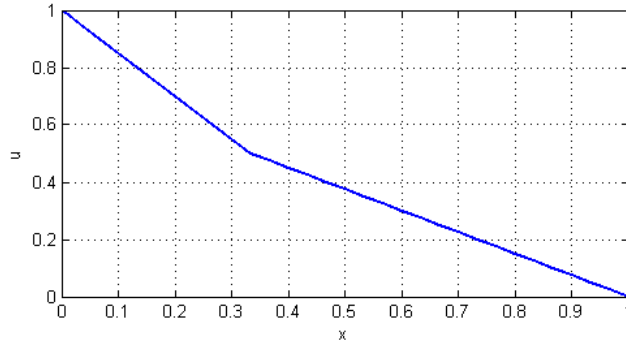


Рис. 4: Аналитическое решение задачи (1.8)

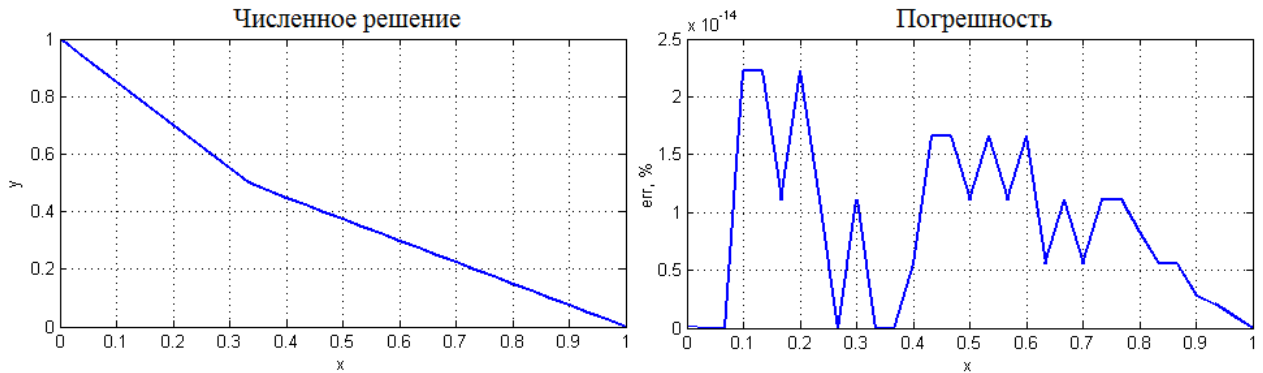


Рис. 5: Численное решение задачи (1.8) по схеме (1.4) и его погрешность при $N_1 = 10$, $N = 30$

Попробуем теперь построить для рассматриваемой задачи схему сквозного счета без явного учета условий сопряжения в точке x_0 . Результаты расчетов по схеме (1.3), сходящейся в случае задачи с непрерывно-дифференцируемыми коэффициентами, приведены на рис. 6 - 7.

С уменьшением шага сетки погрешность численного решения не уменьшается. Это означает, что в случае использования схемы (1.3) для задачи с разрывным коэффициентом $k(x)$ численное решение не сходится к аналитическому. Причина этого заключается

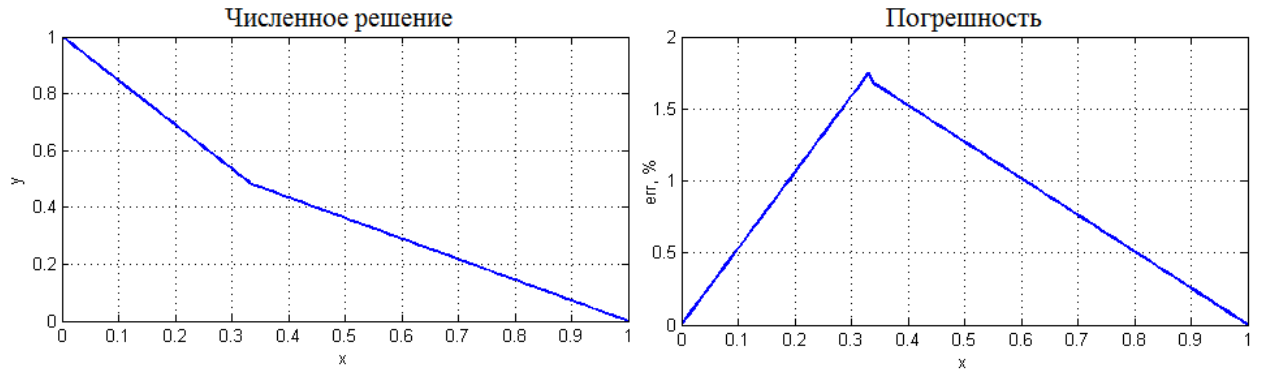


Рис. 6: Численное решение задачи (1.8) по схеме (1.3) и его погрешность при $N = 100$

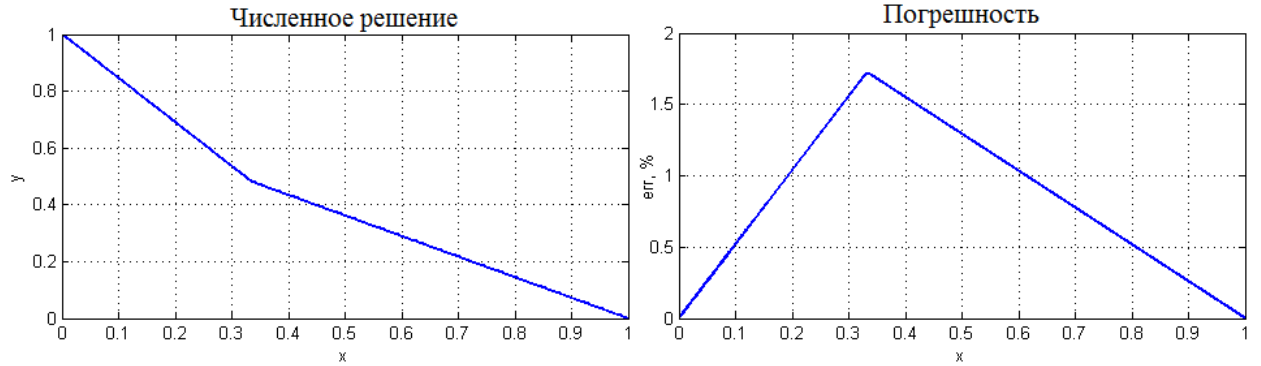


Рис. 7: Численное решение задачи (1.8) по схеме (1.3) и его погрешность при $N = 1000$

в том, что схема (1.3) нарушает закон сохранения тепла, то есть является неконсервативной. Можно показать (см. приложение), что функция $\tilde{u}(x)$, к которой стремится решение системы (1.3) при $h \rightarrow 0$, удовлетворяет краевой задаче:

$$\begin{cases} \tilde{u}'' = 0, & x \in (0, x_0) \cup (x_0, 1), \\ \tilde{u}(0) = 1, & \tilde{u}(1) = 0, \\ [\tilde{u}]|_{x_0} = 0, & k_2 \tilde{u}'|_{x_0+0} - k_1 \tilde{u}'|_{x_0-0} = \xi, \end{cases}$$

где $\xi \neq 0$ — мощность источника или стока тепла при $x = x_0$. Мощность этого фиктивного источника или стока тепла обращается в 0 только при $k_1 = k_2$.

2 Интегро-интерполяционный метод (метод баланса) построения консервативных разностных схем

Рассмотрим один из методов построения консервативных схем на примере краевой

задачи для стационарного уравнения теплопроводности:

$$\begin{cases} (k(x)u'(x))' - q(x)u(x) = -f(x), & x \in (0, l), \\ u(0) = g_1, & u(l) = g_2. \end{cases} \quad (2.1)$$

Уравнение (2.1) может быть получено из интегрального уравнения баланса, которое на любом отрезке $[a, b]$, где $0 < a < b < l$, имеет вид:

$$W(a) - W(b) - \int_a^b q(x)u(x)dx + \int_a^b f(x)dx = 0. \quad (2.2)$$

Здесь $W(x) = -k(x)u'(x)$ — плотность потока тепла.

Введем на равномерной сетке

$$x_n = nh, \quad n = 0, 1, \dots, N, \quad Nh = l$$

промежуточные, так называемые *потокосые*, узлы $x_{n\pm 0.5} = x_n \pm 0.5h$ и запишем уравнение баланса (2.2) на отрезке $[x_{n-0.5}, x_{n+0.5}]$:

$$W_{n-0.5} - W_{n+0.5} - \int_{x_{n-0.5}}^{x_{n+0.5}} q(x)u(x)dx + \int_{x_{n-0.5}}^{x_{n+0.5}} f(x)dx = 0. \quad (2.3)$$

Предположим, что $u(x) \approx y_n = \text{const}$ при $x_{n-0.5} \leq x \leq x_{n+0.5}$. Тогда

$$\int_{x_{n-0.5}}^{x_{n+0.5}} q(x)u(x)dx \approx hy_n d_n, \quad (2.4)$$

где

$$d_n = \frac{1}{h} \int_{x_{n-0.5}}^{x_{n+0.5}} q(x)dx.$$

Найдем значения $W_{n-0.5}$ и $W_{n+0.5}$. Для этого проинтегрируем равенство $u'(x) = -\frac{W(x)}{k(x)}$ на отрезке $[x_{n-1}, x_n]$:

$$u_{n-1} - u_n = \int_{x_{n-1}}^{x_n} \frac{W(x)}{k(x)} dx.$$

Предполагая, что $W(x) \approx W_{n-0.5}$ при $x_{n-1} \leq x \leq x_n$, и учитывая, что $u(x) \approx y_n$ при $x_{n-0.5} \leq x \leq x_{n+0.5}$, получим:

$$y_{n-1} - y_n \approx W_{n-0.5} \int_{x_{n-1}}^{x_n} \frac{dx}{k(x)} \Rightarrow W_{n-0.5} \approx -a_n \frac{y_n - y_{n-1}}{h}, \quad (2.5)$$

где

$$a_n = \left(\frac{1}{h} \int_{x_{n-1}}^{x_n} \frac{dx}{k(x)} \right)^{-1}.$$

Аналогично получаем

$$W_{n+0.5} \approx -b_n \frac{y_{n+1} - y_n}{h}, \quad (2.6)$$

где

$$b_n = \left(\frac{1}{h} \int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{dx}{k(x)} \right)^{-1}.$$

Подставляя выражения (2.4), (2.5) и (2.6) в уравнение (2.3) и вводя обозначение:

$$\varphi_n = \frac{1}{h} \int_{x_{n-0.5}}^{x_{n+0.5}} f(x) dx,$$

получим консервативную разностную схему, выражающую на сетке закон сохранения тепла:

$$\begin{cases} \frac{1}{h} \left(b_n \frac{y_{n+1} - y_n}{h} - a_n \frac{y_n - y_{n-1}}{h} \right) - d_n y_n = -\varphi_n, & n = 1, 2, \dots, N-1, \\ y_0 = g_1, \quad y_N = g_2. \end{cases} \quad (2.7)$$

Интегралы, с помощью которых вычисляются коэффициенты a , b , d и φ , представляют собой так называемые *шаблонные функционалы*. Их вид не меняется в зависимости от того, являются функции $k(x)$, $q(x)$ и $f(x)$ непрерывными или нет.

Разностная схема (2.7) аппроксимирует уравнение (2.1) при достаточной гладкости решения $u(x)$ с порядком $O(h^2)$. Если коэффициенты уравнения (2.1) являются гладкими функциями, то

$$a_n = k(x_{n-0.5}), \quad b_n = k(x_{n+0.5}), \quad d_n = q(x_n), \quad \varphi_n = f(x_n).$$

с точностью до $O(h^2)$.

Интегро-интерполяционный метод можно использовать для аппроксимации нестационарных уравнений, а также граничных условий. Также его можно использовать для построения консервативных разностных схем на неравномерных сетках.

3 Пример использования метода баланса

Проиллюстрируем схему (2.7) на примере задачи

$$\begin{cases} (ku')' = 0, & x \in (0, x_0) \cup (x_0, 1), \\ u(0) = 1, & u(1) = 0, \\ [u]_{x_0} = 0, & k_2 u'|_{x_0+0} = k_1 u'|_{x_0-0}, \end{cases} \quad (3.1)$$

где

$$k(x) = \begin{cases} k_1, & x \in [0, x_0), \\ k_2, & x \in (x_0, 1], \end{cases} \quad k_1 = \text{const}, \quad k_2 = \text{const}, \quad k_1 \neq k_2.$$

Введем в области $[0, 1]$ произвольную равномерную сетку с шагом h , не заботясь о том, чтобы какой-то ее узел обязательно попал в точку x_0 . Коэффициенты d_n и правые части φ_n уравнений системы (2.7) в данном случае равны нулю при всех n , то есть схема принимает вид:

$$\begin{cases} \frac{1}{h} \left(b_n \frac{y_{n+1} - y_n}{h} - a_n \frac{y_n - y_{n-1}}{h} \right) = 0, & n = 1, 2, \dots, N-1, \\ y_0 = 1, & y_N = 0. \end{cases}$$

Найдем коэффициенты a_n и b_n . Если $x_{n+1} \leq x_0$, то

$$a_n = \left(\frac{1}{h} \int_{x_{n-1}}^{x_n} \frac{dx}{k(x)} \right)^{-1} = \left(\frac{1}{h} \int_{x_{n-1}}^{x_n} \frac{dx}{k_1} \right)^{-1} = k_1,$$

$$b_n = \left(\frac{1}{h} \int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{dx}{k(x)} \right)^{-1} = \left(\frac{1}{h} \int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{dx}{k_1} \right)^{-1} = k_1.$$

Если $x_{n-1} \geq x_0$, то

$$a_n = \left(\frac{1}{h} \int_{x_{n-1}}^{x_n} \frac{dx}{k(x)} \right)^{-1} = \left(\frac{1}{h} \int_{x_{n-1}}^{x_n} \frac{dx}{k_2} \right)^{-1} = k_2,$$

$$b_n = \left(\frac{1}{h} \int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{dx}{k(x)} \right)^{-1} = \left(\frac{1}{h} \int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{dx}{k_2} \right)^{-1} = k_2.$$

Если $x_0 \in [x_n, x_{n+1}]$, то

$$a_n = \left(\frac{1}{h} \int_{x_{n-1}}^{x_n} \frac{dx}{k(x)} \right)^{-1} = \left(\frac{1}{h} \int_{x_{n-1}}^{x_n} \frac{dx}{k_1} \right)^{-1} = k_1,$$

$$b_n = \left(\frac{1}{h} \int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{dx}{k(x)} \right)^{-1} = h \left(\int_{x_n}^{x_0} \frac{dx}{k_1} + \int_{x_0}^{x_{n+1}} \frac{dx}{k_2} \right)^{-1} = h \left(\frac{x_0 - x_n}{k_1} + \frac{x_{n+1} - x_0}{k_2} \right)^{-1}.$$

Если $x_0 \in [x_{n-1}, x_n]$, то

$$a_n = \left(\frac{1}{h} \int_{x_{n-1}}^{x_n} \frac{dx}{k(x)} \right)^{-1} = h \left(\int_{x_{n-1}}^{x_0} \frac{dx}{k_1} + \int_{x_0}^{x_n} \frac{dx}{k_2} \right)^{-1} = h \left(\frac{x_0 - x_{n-1}}{k_1} + \frac{x_n - x_0}{k_2} \right)^{-1},$$

$$b_n = \left(\frac{1}{h} \int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{dx}{k(x)} \right)^{-1} = k_2.$$

Результаты расчетов по схеме (2.7) с указанными выше коэффициентами приведены на рис. 8.

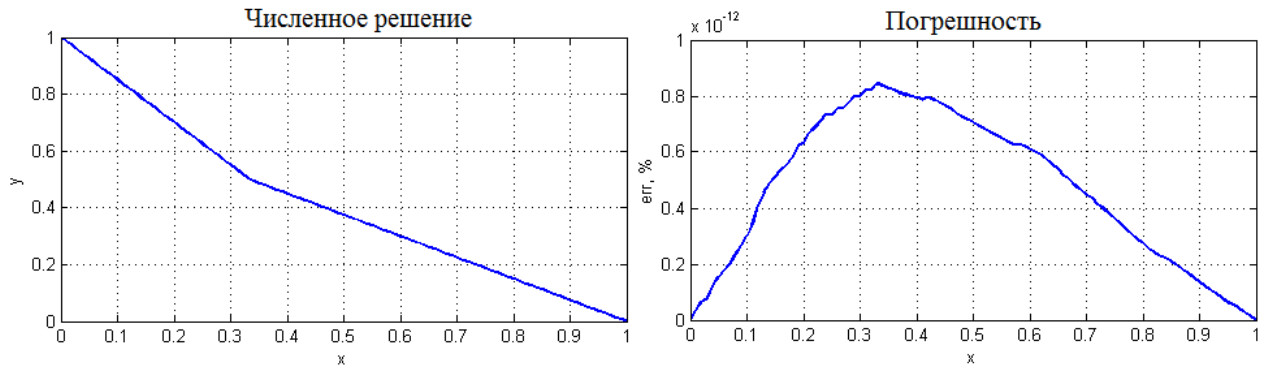


Рис. 8: Численное решение задачи (3.1) по консервативной схеме (2.7) и его погрешность при $N = 100$

4 Задания для самостоятельного решения

Поставьте начально-краевую задачу о малых продольных колебаниях упругого стержня длины l ($x \in [0, l]$) постоянного поперечного сечения, считая деформацию поперечных сечений пренебрежимо малой. Плотность массы стержня равна $\rho(x)$, модуль упругости равен $E(x)$, концы стержня закреплены неподвижно. Пусть колебания стержня вызваны начальным продольным смещением $u(x, 0) = \varphi(x)$, а начальная скорость равна нулю.

Реализуйте численное решение задачи с помощью неконсервативной схемы и консервативной схемы, построенной методом баланса, и сравните результаты с точным решением задачи.

1) Стержень состоит из двух состыкованных в точке $x_0 \in (0, l)$ стержней со следующими параметрами:

$$\rho(x) = \begin{cases} \rho_1, & x \in [0, x_0), \\ \rho_2, & x \in (x_0, l], \end{cases} \quad E(x) = \begin{cases} E_1, & x \in [0, x_0), \\ E_2, & x \in (x_0, l], \end{cases}$$

где ρ_i, E_i — константы, а начальное отклонение стержня имеет вид:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{\sin(\lambda^{(1)}x/a_1)}{\sin(\lambda^{(1)}x_0/a_1)}, & x \in [0, x_0], \\ \frac{\sin(\lambda^{(1)}(l-x)/a_2)}{\sin(\lambda^{(1)}(l-x_0)/a_2)}, & x \in [x_0, l], \end{cases}$$

где $a_i^2 = \frac{E_i}{\rho_i}$, а $\lambda^{(1)}$ — первый положительный корень уравнения:

$$\sqrt{\rho_1 E_1} \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\lambda}{a_2} (x_0 - l) \right) = \sqrt{\rho_2 E_2} \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\lambda}{a_1} x_0 \right).$$

2) Плотность стержня и модуль упругости имеют вид:

$$\rho(x) = \rho_0 \cdot (L - x)^2, \quad E(x) = E_0 \cdot (L - x)^2, \quad L > l,$$

а начальное отклонение равно:

$$\varphi(x) = \frac{1}{L - x} \cdot \sin \frac{\pi x}{l}.$$

5 Приложение

Покажем, что решение разностной схемы

$$\begin{cases} k_n \frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{h^2} + \frac{k_{n+1} - k_{n-1}}{2h} \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2h} = 0, & n = 1, 2, \dots, N-1, \\ y_0 = 1, & y_N = 0 \end{cases} \quad (5.1)$$

в случае, когда

$$k(x) = \begin{cases} k^1, & x \in [0, x_0), \\ k^2, & x \in (x_0, 1], \end{cases}$$

где k^1 и k^2 — константы, а точка x_0 не попадает ни в один из узлов сетки, сходится к кусочно-линейной функции $\tilde{u}(x)$, удовлетворяющей задаче

$$\begin{cases} \tilde{u}'' = 0, & x \in (0, x_0) \cup (x_0, 1), \\ \tilde{u}(0) = 1, & \tilde{u}(1) = 0, \\ [\tilde{u}]_{x_0} = 0, & k^2 \tilde{u}'|_{x_0+0} - k^1 \tilde{u}'|_{x_0-0} = \xi. \end{cases}$$

Если x_0 не попадает ни в один из узлов сетки, то найдется такой внутренний узел x_{n_0} , что $x_0 = x_{n_0} + \theta h$, где $\theta \in (0, 1)$.

При $n = 1, 2, \dots, n_0 - 1$ справедливы равенства $k_{n-1} = k_n = k_{n+1} = k^1$, и разностное уравнение (5.1) принимает вид:

$$y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1} = 0.$$

Аналогичный вид уравнение (5.1) имеет при $n = n_0 + 2, \dots, N - 1$, так как при этом $k_{n-1} = k_n = k_{n+1} = k^2$. Следовательно, y_n является кусочно-линейной функцией:

$$y_n = \begin{cases} 1 - \alpha x_n, & n = 0, 1, \dots, n_0, \\ \beta(1 - x_n), & n = n_0 + 1, \dots, N. \end{cases} \quad (5.2)$$

Коэффициенты α и β найдем, подставляя выражение (5.2) в уравнение (5.1) при $n = n_0$ и $n = n_0 + 1$. Уравнение (5.1) при этом удобно переписать в виде

$$b_n y_x - a_n y_{\bar{x}} = 0,$$

где

$$b_n = k_n + \frac{k_{n+1} - k_{n-1}}{4}, \quad a_n = k_n - \frac{k_{n+1} - k_{n-1}}{4}.$$

Учитывая, что $x_{n_0} = x_0 - \theta h$ и $x_{n_0+1} = x_0 + (1 - \theta)h$, при $n = n_0$ получаем:

$$0 = b_{n_0}(y_{n_0+1} - y_{n_0}) - a_{n_0}(y_{n_0} - y_{n_0-1}) =$$

$$\begin{aligned}
&= b_{n_0} [\beta(1 - x_{n_0+1}) - (1 - \alpha x_{n_0})] - a_{n_0} ((1 - \alpha x_{n_0}) - (1 - \alpha x_{n_0-1})) = \\
&= b_{n_0} [\beta(1 - (x_0 + (1 - \theta)h)) - (1 - \alpha(x_0 - \theta h))] + a_{n_0} \alpha h = \\
&= \beta b_{n_0} (1 - x_0 - (1 - \theta)h) + \alpha (a_{n_0} h + b_{n_0} (x_0 - \theta h)) - b_{n_0}.
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
b_{n_0} &= k_{n_0} + \frac{k_{n_0+1} - k_{n_0-1}}{4} = k^1 + \frac{k^2 - k^1}{4} = \frac{3k^1 + k^2}{4}, \\
a_{n_0} &= k_{n_0} - \frac{k_{n_0+1} - k_{n_0-1}}{4} = k^1 - \frac{k^2 - k^1}{4} = \frac{5k^1 - k^2}{4}.
\end{aligned}$$

При $n = n_0 + 1$ имеет место равенство:

$$\begin{aligned}
0 &= b_{n_0+1}(y_{n_0+2} - y_{n_0+1}) - a_{n_0+1}(y_{n_0+1} - y_{n_0}) = b_{n_0+1} [\beta(1 - x_{n_0+2}) - \beta(1 - x_{n_0+1})] - \\
&- a_{n_0+1} [\beta(1 - x_{n_0+1}) - (1 - \alpha x_{n_0})] = -\beta b_{n_0+1} h - a_{n_0+1} [\beta(1 - x_0 - (1 - \theta)h) - (1 - \alpha(x_0 - \theta h))] = \\
&= -\beta [b_{n_0+1} h + a_{n_0+1} (1 - x_0 - (1 - \theta)h)] - \alpha a_{n_0+1} (x_0 - \theta h) + a_{n_0+1},
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
b_{n_0+1} &= k_{n_0+1} + \frac{k_{n_0+2} - k_{n_0}}{4} = k^2 + \frac{k^2 - k^1}{4} = \frac{5k^2 - k^1}{4}, \\
a_{n_0+1} &= k_{n_0+1} - \frac{k_{n_0+2} - k_{n_0}}{4} = k^2 - \frac{k^2 - k^1}{4} = \frac{3k^2 + k^1}{4}.
\end{aligned}$$

Решим систему для коэффициентов α и β :

$$\begin{cases} \beta b_{n_0} (1 - x_0 - (1 - \theta)h) + \alpha (a_{n_0} h + b_{n_0} (x_0 - \theta h)) = b_{n_0}, \\ \beta [b_{n_0+1} h + a_{n_0+1} (1 - x_0 - (1 - \theta)h)] + \alpha a_{n_0+1} (x_0 - \theta h) = a_{n_0+1}. \end{cases} \quad (5.3)$$

Пусть $\varkappa = \frac{k^1}{k^2}$. Тогда $\frac{a_{n_0}}{b_{n_0}} = \frac{5\varkappa - 1}{3\varkappa + 1}$ и $\frac{b_{n_0+1}}{a_{n_0+1}} = \frac{5 - \varkappa}{3 + \varkappa}$, и система (5.3) упрощается:

$$\begin{cases} \beta(1 - x_0 - (1 - \theta)h) + \alpha(\lambda h + x_0 - \theta h) = 1, \\ \beta \left[\frac{5 - \varkappa}{3 + \varkappa} h + 1 - x_0 - (1 - \theta)h \right] + \alpha(x_0 - \theta h) = 1, \end{cases}$$

где $\lambda = \frac{5\varkappa - 1}{3\varkappa + 1}$. Вычитая из первого уравнения второе, получаем:

$$\alpha \lambda h - \beta \frac{5 - \varkappa}{3 + \varkappa} h = 0 \quad \Rightarrow \quad \beta = \mu \alpha,$$

где $\mu = \lambda \frac{3 + \varkappa}{5 - \varkappa}$. Подставляя найденное β , например, в первое уравнение системы, получаем:

$$\alpha = (\mu + (1 - \mu)x_0 + h(\lambda - \theta - (1 - \theta)\mu))^{-1}.$$

С помощью интерполяции доопределим функцию y_n , заданную выражением (5.2) в узлах сетки, на всем отрезке $0 \leq x \leq 1$. В результате получим функцию $\tilde{y}(x, h)$ непрерывно меняющегося аргумента x , заданную при $x \in [0, 1]$, причем:

$$\tilde{y}(x_n, h) = y_n.$$

Перейдем к пределу при $h \rightarrow 0$:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \tilde{y}(x, h) = \tilde{u}(x) = \begin{cases} 1 - \bar{\alpha}_0 x, & x \in [0, x_0], \\ \bar{\beta}_0(1 - x), & x \in [x_0, 1], \end{cases} \quad (5.4)$$

где

$$\bar{\alpha}_0 = \lim_{h \rightarrow 0} \alpha = (\mu + (1 - \mu)x_0)^{-1}, \quad \bar{\beta}_0 = \lim_{h \rightarrow 0} \beta = \mu \bar{\alpha}_0.$$

Точное решение задачи

$$\begin{cases} (k(x)u'(x))' = 0, & x \in (0, x_0) \cup (x_0, 1), \\ u(0) = 1, \quad u(1) = 0, \\ [u]|_{x=x_0} = 0, \quad [ku']|_{x=x_0} = 0 \end{cases} \quad (5.5)$$

имеет вид

$$u(x) = \begin{cases} 1 - \alpha_0 x, & x \in [0, x_0], \\ \beta_0(1 - x), & x \in [x_0, 1], \end{cases}$$

где

$$\alpha_0 = \frac{1}{\varkappa + (1 - \varkappa)x_0}, \quad \beta_0 = \varkappa \alpha_0.$$

Функция $\tilde{u}(x)$ совпадает с решением задачи (5.5) тогда и только тогда, когда $\bar{\alpha}_0 = \alpha_0$ и $\bar{\beta}_0 = \beta_0$. Следовательно, схема (5.1) сходится к решению задачи (5.5), если выполнены равенства:

$$\varkappa + (1 - \varkappa)x_0 = \mu + (1 - \mu)x_0 \Leftrightarrow (\mu - \varkappa)(1 - x_0) = 0 \Leftrightarrow \mu = \varkappa,$$

так как $x_0 < 1$. Пользуясь выражением для μ , получаем:

$$0 = \varkappa - \underbrace{\frac{5\varkappa - 1}{3\varkappa + 1} \cdot \frac{3 + \varkappa}{5 - \varkappa}}_{\mu} = 3 \frac{(1 - \varkappa)^3}{(3\varkappa + 1)(5 - \varkappa)},$$

откуда следует, что $\tilde{u}(x)$ и $u(x)$ совпадают лишь при $\varkappa = 1$, то есть при $k^1 = k^2$. Причина этого заключается в неконсервативности схемы (5.1), нарушающей закон баланса тепла. В самом деле, функция $\tilde{u}(x)$, к которой сходится решение схемы (5.1) при стремлении шага сетки к нулю, представляет собой решение задачи:

$$\begin{cases} (k(x)\tilde{u}'(x))' = 0, & x \in (0, x_0) \cup (x_0, 1), \\ \tilde{u}(0) = 1, \quad \tilde{u}(1) = 0, \\ [\tilde{u}]|_{x=x_0} = 0, \quad [k\tilde{u}']|_{x=x_0} = -k^2\bar{\beta}_0 + k^1\bar{\alpha}_0 = -\bar{\alpha}_0(\mu - \varkappa)k^2 = \xi, \end{cases}$$

где ξ — мощность точечного источника или стока тепла при $x = x_0$, причем $\xi \rightarrow \pm\infty$ при $x \rightarrow 5 \pm 0$.