Тематическая лекция 8

НЕЛИНЕЙНЫЕ ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

В этой лекции мы рассмотрим базовые операторы параболического типа следующего вида:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta_p u - f(x,t,u),$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - m \operatorname{div}\left(\left(u^2+\varepsilon^2\right)^{(m-1)/2} D_x u\right)$$

при $p > 1$.

§ 1. Метод компактности в сочетании с методами монотонности и Галеркина

Рассмотрим следующую задачу Коши–Дирихле:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta_p u + f(x,t,u) \quad \text{в} \quad D = \Omega \otimes (0,T], \quad p \geqslant 2, \tag{1.1}$$

$$u(x,t) = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega \otimes (0,T], \tag{1.2}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \text{на} \quad x \in \overline{\Omega}, \tag{1.3}$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — это ограниченная область с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$. Относительно функции

$$f(x,t,u) : D \otimes \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$$

предположим, что она является непрерывной класса $\mathbb{C}(\overline{D} \otimes \mathbb{R}^1; \mathbb{R}^1)$ и удовлетворяет условию роста

$$|f(x,t,u)| \leqslant a + b|u|^{q+1}, \quad a, b > 0, \tag{1.4}$$

причем оператор Немыцкого $N_f(u)$, порожденный функцией $f(x,t,u)$ является ограниченно липшиц-непрерывным, т. е.

$$\|N_f(u_1) - N_f(u_2)\|_{(q+2)/(q+1)} \leqslant \mu(R)\|u_1 - u_2\|_{q+2}, \tag{1.5}$$

где $\mu(\cdot)$ — это неубывающая функция, ограниченная на компактах, и

$$R = \max\left\{\|u_1\|_{q+2}, \|u_2\|_{q+2}\right\},$$

$$q \in (0, p^* - 2), \quad p^* \stackrel{def}{=} \begin{cases} Np/(N-p), & \text{если} \quad N > p; \\ +\infty, & \text{если} \quad N \leqslant p. \end{cases} \tag{1.6}$$

При выполнении условия (1.6) имеет место вполне непрерывное вложение

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^{q+2}(\Omega).$$

Сформулируем определение слабого решения задачи Коши–Дирихле (1.1)–(1.3).

Определение 1. *Функция $u(x,t)$ класса*

$$u(x,t) \in L^\infty(0,T; W_0^{1,p}(\Omega)), \quad u'(x,t) \in L^2(0,T; L^2(\Omega))$$

называется слабым решением задачи Коши–Дирихле (1.1)–(1.3), *если для любого $\varphi(x,t) \in \mathbb{C}_0^\infty(D)$ выполнено равенство*

$$\int_0^T \int_\Omega \Big[u'(x,t)\varphi(x,t) + |D_x u(x,t)|^{p-2} \left(D_x u(x,t), D_x \varphi(x,t)\right) -$$

$$- f(x,t,u(x,t))\varphi(x,t)\Big]\, dx\, dt = 0, \tag{1.7}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{1.8}$$

Замечание 1. Отметим, что пространство

$$W_1 \stackrel{def}{=} \left\{v(x,t) : \ v(x,t) \in L^2(0,T; L^2(\Omega)), \ v'(x,t) \in L^\infty(0,T; W_0^{1,p}(\Omega))\right\}$$

вложено в пространство $\mathbb{C}([0,T]; L^2(\Omega))$. И поэтому начальное условие (1.8) имеет смысл.

Наша цель — это доказать, что при некотором малом $T > 0$ существует слабое решение задачи Коши–Дирихле (1.1)–(1.3) в смысле определения 1. С этой целью мы воспользуемся методом Галеркина в сочетании с методами компактности и с учетом свойств монотонности оператора p–Лапласиана.

Шаг 1. Галеркинские приближения. Поскольку банахово пространство $W_0^{1,p}(\Omega)$ является сепарабельным, то в нем существует «галеркинский» базис, т.е. такое счетное линейное множество, которое всюду плотно в $W_0^{1,p}(\Omega)$. Обозначим это множество как

$$\{w_j(x)\}_{j=1}^{+\infty} \stackrel{ds}{\subset} W_0^{1,p}(\Omega).$$

Рассмотрим следующую функцию:

$$u_m(x,t) = \sum_{k=1}^m c_{mk}(t) w_k(x), \quad c_{mk}(t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0,T_m]), \quad k = \overline{1,m}. \tag{1.9}$$

Дадим определение системы галеркинских уравнений для слабого решения в смысле определения 1.

Определение 2. *Функции* $c_{mk}(t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T_m])$ *при* $k = \overline{1, m}$ *называются решением галеркинской системы уравнений, если эти функции удовлетворяют задаче Коши для следующей системы дифференциальных уравнений первого порядка*:

$$\int\limits_{\Omega} \Big[u_m^{'}(x,t) w_j(x) + |D_x u_m(x,t)|^{p-2} \left(D_x u_m(x,t), D_x w_j(x) \right) - \\ - f(x,t,u_m(x,t)) w_j(x) \Big] \, dx = 0, \quad (1.10)$$

при $j = \overline{1, m}$, *где мы используем обозначение* (1.9). *При дополнительном условии*

$$u_{m0} = \sum_{k=1}^{m} c_{mk}(0) w_k(x) \to u_0(x) \quad \text{сильно в} \quad W_0^{1,p}(\Omega) \quad (1.11)$$

при $m \to +\infty$.

Прежде всего нам нужно доказать, что система галеркинских уравнений имеет решение класса $c_{mk}(t) \in \mathbb{C}^{(1)}[0, T_m]$ при некотором $T_m > 0$, которое вообще говоря зависит от $m \in \mathbb{N}$. С этой целью заметим, что систему уравнений (1.10) можно представить в следующем виде

$$\sum_{k=1}^{m} a_{kj} \frac{d c_{mk}(t)}{dt} = F_j(t, c_m), \quad F_j(t, c_m) \stackrel{def:}{=} F_{1j}(c_m) + F_{2j}(t, c_m), \quad (1.12)$$

$$F_{1j}(c_m) \stackrel{def:}{=} - \int\limits_{\Omega} |D_x u_m(x,t)|^{p-2} \left(D_x u_m(x,t), D_x w_j(x) \right) dx, \quad (1.13)$$

$$F_{2j}(t, c_m) \stackrel{def:}{=} \int\limits_{\Omega} f(x,t,u_m(x,t)) w_j(x) \, dx, \quad (1.14)$$

причем матрица $A = (a_{kj})$ при производной по времени для каждого $m \in \mathbb{N}$ является невырожденной. Докажем, что функции $F_j(c_m)$ является ограниченно липшиц–непрерывной. Действительно, имеем

$$\left| F_{1j}(c_m^1) - F_{1j}(c_m^2) \right| \leqslant \\ \leqslant \int\limits_{\Omega} \left| |D_x u_m^1(x,t)|^{p-2} D_x u_m^1(x,t) - |D_x u_m^2(x,t)|^{p-2} D_x u_m^2(x,t) \right| |D_x w_j| \, dx \leqslant \\ \leqslant (p-1) \int\limits_{\Omega} \max \left\{ |D_x u_m^1|^{p-2}, |D_x u_m^2|^{p-2} \right\} \left| D_x u_m^1 - D_x u_m^2 \right| |D_x w_j| \, dx \leqslant \\ \leqslant \mu_{1j}(R) \| D_x u_m^1 - D_x u_m^2 \|_p \leqslant a_1(m) \mu_{1j}(R) |c_m^1 - c_m^2|, \quad (1.15)$$

где мы воспользовались обобщенным неравенством Гельдера с параметрами

$$\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}+\frac{1}{q_3}=1,\quad q_1=\frac{p}{p-2},\quad q_2=p,\quad q_3=p$$

и ввели обозначение

$$\mu_{1j}(r)=(p-1)\|D_x w_j\|_p R^{p-2},\quad R=\max\left\{\|D_x u_m^1\|_p, \|D_x u_m^2\|_p\right\}.$$

Кроме того, мы использовали легко проверяемое неравенство

$$\|D_x u_m^1 - D_x u_m^2\|_p \leqslant a_1(m)|c_m^1 - c_m^2|$$

с некоторой константой $a_1(m)$, зависящей от $m\in\mathbb{N}$. Точно также рассмотрим функцию $F_{2j}(t,c_m)$. Действительно, справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned}
&\left|F_{2j}(t,c_m^1)-F_{2j}(t,c_m^2)\right| \leqslant \\
&\qquad\leqslant \int\limits_\Omega \left|f(x,t,u_m^1(x,t))-f(x,t,u_m^2(x,t))\right| |w_j(x)|\,dx = \\
&\qquad\qquad= \int\limits_\Omega \left|N_f(u_m^1)-N_f(u_m^2)\right| |w_j(x)|\,dx \leqslant \\
&\qquad\qquad\leqslant \|N_f(u_m^1)-N_f(u_m^2)\|_{(q+2)/(q+1)}\|w_j\|_{q+2} \leqslant \\
&\qquad\qquad\leqslant \mu_{2j}(R)\|u_m^1-u_m^2\|_{q+2} \leqslant a_2(m)\mu_{2j}(R)|c_m^1-c_m^2|, \qquad (1.16)
\end{aligned}$$

где

$$\mu_{2j}(R)=\mu(R)\|w_j\|_{q+2}$$

и мы воспользовались неравенством

$$\|u_m^1-u_m^2\|_{q+2}\leqslant a_2(m)|c_m^1-c_m^2|$$

с некоторой постоянной $a_2(m)>0$, зависящей от $m\in\mathbb{N}$. Итак, правая часть $F_j(t,c_m)$ является непрерывной по $t\in[0,T_m]$ и ограниченно липшиц–непрерывной по $c_m\in\mathbb{R}^m$, поэтому задача Коши для системы уравнений (1.12) имеет единственное решение $c_{km}(t)\in\mathbb{C}^{(1)}([0,T_m])$ при $k=\overline{1,m}$ и при некотором $T_m>0$, зависящим, вообще говоря, от $m\in\mathbb{N}$.

Шаг 2. Априорные оценки. Для вывода априорных оценок умножим обе части равенства (1.10) на $c_{mj}(t)$ и просуммируем по $j=\overline{1,m}$ и получим в результате равенство

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_m\|_2^2+\|D_x u_m\|_p^p=\int\limits_\Omega f(x,t,u_m)u_m\,dx. \qquad (1.17)$$

Заметим, что в силу условия роста (1.4) и неравенства Юнга имеет место неравенство

$$|f(x,t,s)s| \leqslant a_1 + b_1|s|^{q+2}, \quad a_1 = \frac{q+1}{q+2}a^{(q+2)/(q+1)}, \quad b_1 = b + \frac{1}{q+2}.$$

Отсюда и из (1.17) получим следующее неравенство:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_m\|_2^2 + \|D_x u_m\|_p^p \leqslant c_1 + b_1\|u_m\|_{q+2}^{q+2}, \quad c_1 = a_1|\Omega|. \tag{1.18}$$

Теперь мы должны воспользоваться интерполяционным неравенством. Заметим, что при условии (1.6) и в силу ограниченности области $\Omega \subset \subset \mathbb{R}^N$ имеет место непрерывные вложения

$$W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^{q+2}(\Omega) \subset L^2(\Omega),$$

причем выполнено неравенство

$$\|v\|_{q+2} \leqslant K\|D_x v\|_p^{\alpha}\|v\|_2^{1-\alpha} \quad \text{для всех} \quad v(x) \in W_0^{1,p}(\Omega), \tag{1.19}$$

где

$$\alpha = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q+2}\right)\left(\frac{1}{N} - \frac{1}{p} + \frac{1}{2}\right)^{-1}.$$

Потребуем выполнения основного условия

$$p > \frac{N}{N+2}(q+2) \Rightarrow \alpha(q+2) < p. \tag{1.20}$$

Тогда в силу интерполяционного неравенства (1.19) и трехпараметрического неравенства Юнга с параметрами

$$q_1 = \frac{p}{\alpha(q+2)}, \quad q_2 = \frac{q_1}{q_1 - 1} = \frac{p}{p-(q+2)\alpha}$$

справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\|v\|_{q+2}^{q+2} \leqslant K\|D_x v\|_p^{\alpha(q+2)}\|v\|_2^{(1-\alpha)(q+2)} \leqslant \varepsilon\|D_x v\|_p^p + c_2(\varepsilon)\|v\|_2^{2r}, \tag{1.21}$$

где

$$r = \frac{q+2}{2}\frac{p}{p-\alpha(q+2)}(1-\alpha).$$

Теперь применим неравенство (1.21) к правой части неравенства (1.18). В результате получим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_m\|_2^2 + (1-\varepsilon b_1)\|D_x u_m\|_p^p \leqslant c_1 + b_1 c_2(\varepsilon)\|u_m\|_2^{2r} \tag{1.22}$$

при

$$0 < \varepsilon b_1 < 1.$$

Из неравенства (1.22) вытекает следующее дифференциальное неравенство:

$$\frac{d}{dt}\|u_m\|_2^2 \leqslant 2c_1 + 2b_1 c_2(\varepsilon)\|u_m\|_2^{2r}. \tag{1.23}$$

В силу свойства (1.11) получим

$$\|u_{m0}\|_2 \leqslant M_1 < +\infty,$$

где постоянная $M_1 > 0$ и не зависит от $m \in \mathbb{N}$. Для всякого $r > 0$ интегрируя (1.23) по времени, мы для достаточно малого $T > 0$ получим априорную оценку

$$\|u_m\|_2(t) \leqslant M_2(T) < +\infty \quad \text{для всех} \quad t \in [0, T], \tag{1.24}$$

где постоянная $M_2(T) > 0$ и не зависит от $m \in \mathbb{N}$.

Теперь нам нужно вывести еще одно априорное неравенство. С этой целью умножим обе части равенства (1.10) на $c'_{mj}(t)$ и просуммируем по $j = \overline{1, m}$, тогда получим равенство

$$\|u'_m\|_2^2 + \frac{1}{p}\frac{d}{dt}\|D_x u_m\|_p^p = \frac{d}{dt}\int\limits_\Omega F(x, t, u_m)\, dx, \tag{1.25}$$

где

$$F(x, t, s) = \int\limits_0^s f(x, t, \sigma)\, d\sigma.$$

Интегрируя по времени равенство (1.25) мы получим равенство

$$\int\limits_0^t \|u'_m\|_2^2(\tau)\, d\tau + \|D_x u_m\|_p^p(t) = \\ = \|D_x u_{m0}\|_p^p - \int\limits_\Omega F(x, t, u_{m0})\, dx + \int\limits_\Omega F(x, t, u_m)\, dx. \tag{1.26}$$

В силу условия роста (1.4) справедлива следующая цепочка неравенств:

$$|F(x, t, s)| \leqslant a|s| + \frac{b}{q+2}|s|^{q+2} \leqslant \frac{q+1}{q+2}a^{(q+2)/(q+1)} + \frac{b+1}{q+2}|s|^{q+2}.$$

С другой стороны, функция $F(x, t, s)$, очевидно, является каратеодориевой. Поэтому оператор Немыцкого $N_F(u)$ является сильно непрерывным

$$N_F(u) : L^{q+2}(\Omega) \to L^1(\Omega),$$

поэтому в силу свойства (1.11)

$$\left|\int\limits_\Omega F(x, t, u_{m0})\, dx\right| \leqslant K_1 < +\infty, \quad \|D_x u_{m0}\|_p^p \leqslant K_2 < +\infty,$$

где постоянные K_1 и K_2 не зависят от $m \in \mathbb{N}$. Поэтому из (1.26), (1.21) и (1.24) получим цепочку неравенств

$$\int\limits_0^t \|u_m'\|_2^2(\tau)\,d\tau + \|D_x u_m\|_p^p(t) \leqslant K_3 + K_4\|u_m\|_{q+2}^{q+2} \leqslant$$
$$\leqslant K_3 + \varepsilon K_4 \|D_x u_m\|_p^p(t) + c(\varepsilon)\|u_m\|_2^{2r} \leqslant$$
$$\leqslant K_3 + \varepsilon K_4 \|D_x u_m\|_p^p(t) + K_5(T) \quad (1.27)$$

при $t \in [0,T]$ и малом $T > 0$. Выбирая теперь достаточно малую величину $\varepsilon > 0$ мы получим еще две априорные оценки

$$\|D_x u_m\|_p(t) \leqslant M_3(T) < +\infty \quad \text{для всех} \quad t \in [0,T], \quad (1.28)$$

$$\int\limits_0^T \|u_m'\|_2^2(\tau)\,d\tau \leqslant M_4(T) < +\infty, \quad (1.29)$$

где постоянные $M_3(T), M_4(T) > 0$ не зависят от $m \in \mathbb{N}$, а $T > 0$ достаточно мало.

Шаг 3. Предельный переход. В силу априорных оценок (1.28) и (1.29) вытекает, что функциональная последовательность $\{u_m\}$ равномерно ограничена в $L^\infty(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$, а функциональная последовательность $\{u_m'\}$ равномерно ограничена в $L^2(0,T;L^2(\Omega))$. Поэтому существует такое $u(x,t)$, что

$$u_m \overset{*}{\rightharpoonup} u \quad * - \text{слабо в} \quad L^\infty(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)), \quad (1.30)$$

$$u_m' \rightharpoonup u' \quad \text{слабо в} \quad L^2(0,T;L^2(\Omega)). \quad (1.31)$$

Теперь заметим, что в силу априорных оценок (1.28) и (1.29) вытекает, что функциональная последовательность $\{u_m\}$ равномерно по $m \in \mathbb{N}$ ограничена в банаховом пространстве

$$W \overset{def}{=} \left\{ v: \; v \in L^2(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)), \; v' \in L^2(0,T;L^2(\Omega)) \right\}. \quad (1.32)$$

В силу условия (1.6) имеет место вполне непрерывное вложение

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^{q+2}(\Omega)$$

и, кроме того, в силу ограниченности области $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ имеет место непрерывное вложение

$$L^{q+2}(\Omega) \subset L^2(\Omega).$$

Поэтому в силу теоремы компактности Обэна–Лионса, доказанной в седьмой тематической лекции, существует такая подпоследовательность [1)] $\{u_m\}$, что имеет место предельное свойство

$$u_m \to u \quad \text{сильно в} \quad L^2(0,T;L^{q+2}(\Omega)) \quad \text{при} \quad m \to +\infty. \quad (1.33)$$

[1)] Подпоследовательность последовательности $\{u_m\}$ мы для удобства обозначаем также как и исходную последовательность.

Заметим, [1] что имеет место равенство

$$\|\Delta_p u_m\|_* = \|D_x u_m\|_p^{p-1} \Rightarrow \|\Delta_p u_m\|_*^{p'} = \|D_x u_m\|_p^p, \tag{1.34}$$

где $\|\cdot\|_*$ — это норма банахова пространства $W^{-1,p'}(\Omega)$ сопряженного к $W_0^{1,p}(\Omega)$. Поэтому в силу априорной оценки (1.28) функциональная последовательность $\{\Delta_p u_m\}$ равномерно по $m \in \mathbb{N}$ ограничена в рефлексивном банаховом пространстве $L^{p'}(0,T;W^{-1,p'}(\Omega))$. Поэтому существует такая подпоследовательность, [2] что

$$-\Delta_p u_m \rightharpoonup \chi \quad \text{слабо в} \quad L^{p'}(0,T;W^{-1,p'}(\Omega)), \quad p' = \frac{p}{p-1}. \tag{1.35}$$

З а м е ч а н и е 1. Отметим, что при $p > 1$ сопряженным банаховым пространством к банахову пространству $L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$ является банахово пространство $L^{p'}(0,T;W^{-1,p'}(\Omega))$, причем скобками двойственности между этими банаховыми пространствами является следующая величина

$$\langle f, g\rangle_T \stackrel{def:}{=} \int\limits_0^T \langle f(t), g(t)\rangle\, dt,$$

где

$$f(t) \in L^{p'}(0,T;W^{-1,p'}(\Omega)), \quad g(t) \in L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)),$$

а величина $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — это скобки двойственности между $W_0^{1,p}(\Omega)$ и $W^{-1,p'}(\Omega)$.

С одной стороны, предельное свойство (1.33) означает, что существует такая подпоследовательность $\{u_m\}$, что

$$u_m(t) \to u(t) \quad \text{сильно в} \quad L^{q+2}(\Omega) \quad \text{для п.вс.} \quad t \in [0,T]. \tag{1.36}$$

А с другой стороны, имеет место непрерывное вложение

$$L^\infty(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)) \subset L^{q+2}(D), \quad D \stackrel{def:}{=} \Omega \otimes (0,T).$$

Неравенство (1.21) в сочетании с априорными оценками (1.24) и (1.28) означает, что имеет место априорная оценка

$$\int\limits_0^T \|u_m\|_{q+2}^{q+2}(t)\, dt \leqslant M_5(T) < +\infty, \tag{1.37}$$

где постоянная $M_5(T) > 0$ и не зависит от $m \in \mathbb{N}$. В силу ограниченности области $D \subset \mathbb{R}^{N+1}$ и условия роста (1.4) получим, что

---

[1] Смотри тематическую лекцию 1.

[2] Мы проинтегрировали обе части равенства в (1.34) по $t \in [0,T]$.

последовательность $\{f(x,t,u_m)\}$ равномерно по $m \in \mathbb{N}$ ограничена в банаховом пространстве $L^{(q+2)/(q+1)}(D)$:

$$\int_0^T \|f(x,t,u_m)\|^{(q+2)/(q+1)}_{(q+2)/(q+1)}(t)\,dt \leqslant M_6(T) < +\infty, \tag{1.38}$$

где постоянная $M_5(T) > 0$ и не зависит от $m \in \mathbb{N}$. С одной стороны, в силу предельного свойства (1.36) и свойств операторов Немыцкого имеем

$$f(x,t,u_m) \to f(x,t,u) \quad \text{сильно в} \quad L^{(q+2)/(q+1)}(\Omega) \tag{1.39}$$

для почти всех $t \in [0,T]$. С другой стороны, в силу (1.38) имеем для некоторой подпоследовательности

$$f(x,t,u_m) \rightharpoonup g(t) \in L^{(q+2)/(q+1)}(D) \quad \text{слабо в} \quad L^{(q+2)/(q+1)}(D). \tag{1.40}$$

В силу теоремы Лебега и (1.39) имеет место неравенство

$$g(t) = f(x,t,u) \quad \text{для почти всех} \quad (x,t) \in D. \tag{1.41}$$

Шаг 4. Метод монотонности. Теперь наша задача доказать, что функция $\chi(t) \in L^{p'}(0,T;W^{-1,p'}(\Omega))$ в предельном свойстве (1.35) равна

$$\chi(t) = -\Delta_p u \in L^{p'}(0,T;W^{-1,p'}(\Omega)). \tag{1.42}$$

Сначала перепишем систему галеркинских приближений (1.10) в эквивалентном виде

$$\left\langle u_m' - \Delta_p u_m - f(x,t,u_m), w_j \right\rangle = 0 \quad \text{при} \quad j = \overline{1,m}. \tag{1.43}$$

Умножим обе части этого равенства на функцию $\varphi(t) \in \mathbb{C}_0^\infty(0,T)$ и проинтегрируем по времени, а затем перейдем к пределу при $m \to +\infty$ с учетом предельных свойств (1.31), (1.35), (1.40) и (1.41) получим равенство

$$\int_0^T \left\langle u' + \chi - f(x,t,u), w_j \right\rangle \varphi(t)\,dt = 0 \quad \text{при} \quad j = \overline{1,+\infty} \tag{1.44}$$

для всех $\varphi(t) \in \mathbb{C}_0^\infty(0,T)$. Теперь воспользуемся основной леммой вариационного и получим, что

$$\left\langle u' + \chi - f(x,t,u), w_j \right\rangle = 0 \quad \text{при} \quad j = \overline{1,+\infty} \tag{1.45}$$

для почти всех $t \in [0,T]$. Поскольку $\{w_j\}$ — это галеркинский базис в $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$, то равенство (1.45) эквивалентно равенству

$$\left\langle u' + \chi - f(x,t,u), w \right\rangle = 0 \quad \text{для всех} \quad w \in W_0^{1,p}(\Omega) \tag{1.46}$$

для почти всех $t \in [0,T]$. Возьмем в этом равенстве $w(t) = u(x,t)$. Тогда после интегрирования по времени $t \in [0,T]$ мы получим равенство

$$\int\limits_0^T \langle \chi, u \rangle \, dt = \int\limits_0^T \int\limits_\Omega f(x,t,u) u \, dx \, dt + \frac{1}{2} \|u_0\|_2^2 - \frac{1}{2} \|u\|_2^2(T). \tag{1.47}$$

Введем величину.

$$X_m \stackrel{def:}{=} \int\limits_0^T \langle A(u_m) - A(v), u_m - v \rangle \ dt \tag{1.48}$$

для всех $v(t) \in L^p(0,T; W_0^{1,p}(\Omega))$, где мы ввели обозначение

$$A(w) \stackrel{def:}{=} -\Delta_p w.$$

В силу монотонности оператора

$$-\Delta_p(\cdot) : L^p(0,T; W_0^{1,p}(\Omega)) \to L^{p'}(0,T; W^{-1,p'}(\Omega))$$

выполнено неравенство $X_m \geqslant 0$. Равенство для X_m можно переписать в следующем виде:

$$X_m = \int\limits_0^T \langle A(u_m), u_m \rangle \ dt - \int\limits_0^T \langle A(u_m), v \rangle \ dt - \int\limits_0^T \langle A(v), u_m - v \rangle \ dt. \tag{1.49}$$

Умножим обе части равенства (1.10) на c_{mj}, просуммируем по $j = \overline{1,m}$ и проинтегрируем по $t \in [0,T]$. Тогда в результате получим равенство

$$\int\limits_0^T \langle A(u_m), u_m \rangle \ dt = \int\limits_0^T \int\limits_\Omega f(x,t,u_m) u_m \, dx \, dt + \frac{1}{2} \|u_{m0}\|_2^2 - \frac{1}{2} \|u_m\|_2^2(T). \tag{1.50}$$

Заметим, что из (1.36) вытекает

$$u_m(t) \to u(t) \quad \text{сильно в} \quad L^2(\Omega) \tag{1.51}$$

для почти всех $t \in [0,T]$. Кроме того, как мы заметили ранее, после изменения но множестве нулевой меры Лебега на $[0,T]$ функция $u(t) \in \in \mathbb{C}([0,T]; L^2(\Omega))$. Поэтому из (1.51) вытекает, что

$$\|u_m\|_2(T) \to \|u\|_2(T) \quad \text{при} \quad m \to +\infty. \tag{1.52}$$

В силу предельного свойства (1.11) имеем

$$\|u_{m0}\|_2 \to \|u_0\|_2 \quad \text{при} \quad m \to +\infty. \tag{1.53}$$

Тогда в силу (1.36), (1.40) и (1.52), (1.53) мы получим предельное свойство

$$\lim_{m\to+\infty}\int\limits_0^T \langle A(u_m), u_m\rangle\, dt =$$

$$= \int\limits_0^T\int\limits_\Omega f(x,t,u)u\,dx\,dt + \frac{1}{2}\|u_0\|_2^2 - \frac{1}{2}\|u\|_2^2(T). \quad (1.54)$$

В силу (1.47) имеем

$$\lim_{m\to+\infty}\int\limits_0^T \langle A(u_m), u_m\rangle\, dt = \int\limits_0^T \langle \chi, u\rangle\, dt. \quad (1.55)$$

Теперь из (1.49) в пределе при $m\to+\infty$ получим неравенство

$$0 \leqslant \int\limits_0^T \langle \chi, u\rangle\, dt - \int\limits_0^T \langle \chi, v\rangle\, dt - \int\limits_0^T \langle A(v), u-v\rangle\, dt =$$

$$= \int\limits_0^T \langle \chi - A(v), u-v\rangle\, dt \quad (1.56)$$

для всех $v(t)\in L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$. Положим в последнем неравенстве

$$v = u-\lambda w,\quad \lambda>0,\quad w\in L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)).$$

Тогда получим

$$\int\limits_0^T \langle \chi - A(u-\lambda w), w\rangle\, dt \geqslant 0.$$

В этом равенстве в силу свойства радиальной непрерывности p–Лапласиана мы получим в пределе при $\lambda\to+0$ неравенство

$$\int\limits_0^T \langle \chi - A(u), w\rangle\, dt \geqslant 0 \quad \text{для всех} \quad w\in L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)). \quad (1.57)$$

Если предположить, что $\chi\neq A(u)$, тогда при некотором $w\in$ $\in L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$ будет строгое неравенство

$$\int\limits_0^T \langle \chi - A(u), w\rangle\, dt > 0,$$

но если в нем поменять w на $-w$ мы получим неравенство

$$\int\limits_0^T \langle \chi - A(u), w\rangle \, dt < 0,$$

противоречащее неравенству (1.57).

Значит, $\chi = A(u) = -\Delta_p u$. Следовательно, существует слабое решение исходной задачи Дирихле.

Замечание 2. Отметим, что если в качестве v в выражении (1.48) взять само решение u, то, с одной стороны, в пределе мы получим

$$\lim_{m\to+\infty} X_m = 0.$$

А с другой стороны, для X_m при $v = u$ имеет место предельное неравенство

$$X_m \geqslant 2^{2-p} \int\limits_0^T \int\limits_\Omega |D_x u_m - D_x u|^p \, dx\, dt.$$

Следовательно,

$$u_m \to u \quad \text{сильно в} \quad L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)) \quad \text{при} \quad m \to +\infty.$$

Таким образом, нами доказано следующее утверждение:

Теорема 1. *Для любой* $u_0(x) \in W_0^{1,p}(\Omega)$ *при выполнении условий* (1.4), (1.5), *а также неравенств*

$$2 < q + 2 < \min\left\{p^*, p\frac{N+2}{N}\right\}$$

существует слабое решение задачи Дирихле (1.1)–(1.3) *в смысле определения* 1 *при некотором малом* $T > 0$.

§ 2. Метод верхних и нижних решений

В этом параграфе мы рассмотрим метод верхних и нижних решений для доказательства существования классического решения класса $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{D})$ первой краевой задачи для полулинейного параболического уравнения в $D \in \Omega \otimes (0,T)$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$.

Рассмотрим следующую первую краевую задачу:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - Lu(x,t) = f(x,t,u) \quad \text{в} \quad (x,t) \in D, \tag{2.1}$$

$$u(x,t) = g(x,t) \quad \text{на} \quad (x,t) \in \partial' D, \tag{2.2}$$

$$Lu(x,t) \stackrel{def:}{=} \sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i \partial x_j} + \\ + \sum_{i=1}^{N} b_i(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_i} + c(x,t)u(x,t), \quad (2.3)$$

где

$$a_{ij}(x,t), \quad b_i(x,t), \quad c(x,t) \in \mathbb{C}^{\alpha,\alpha/2}(\overline{D}), \quad a_{ij} = a_{ji}, \quad (2.4)$$

причем найдутся такие постоянные $\lambda > 0$ и $\Lambda > 0$, что

$$\lambda|\xi|^2 \leqslant \sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \leqslant \Lambda|\xi|^2 \quad \text{для всех} \quad \xi \in \mathbb{R}^N \quad (2.5)$$

для всех $(x,t) \in D$. Предположим кроме того, что функция $f(x,t,u) \in \in \mathbb{C}^{\alpha,\alpha/2,\alpha}(\overline{D} \otimes \mathbb{R}^1)$, а функция $g(x,t) \in \mathbb{C}^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{D})$ при некотором $\alpha \in (0,1]$. [1)]

Отметим, что в силу классической априорной оценки Шаудера [2)] имеет место априорная оценка для задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} - Lu(x,t) = \widehat{f}(x,t) \in \mathbb{C}^{\alpha,\alpha/2}(\overline{D}), \quad (2.6)$$

$$u(x,t) = g(x,t) \in \mathbb{C}^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{D}) \; ^{3)} \quad (2.7)$$

следующего вида:

$$|u|_{2+\alpha,1+\alpha/2;D} \leqslant K(N,D,\alpha)\left(|\widehat{f}|_{\alpha,\alpha/2} + |g|_{2+\alpha,1+\alpha/2}\right). \quad (2.8)$$

Дадим определения верхних и нижних решений первой краевой задачи (2.1), (2.2).

Определение 3. *Функция $\overline{U}(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D) \cap \mathbb{C}(\overline{D})$ называется верхним решением первой краевой задачи* (2.1), (2.2), *если*

$$\frac{\partial \overline{U}(x,t)}{\partial t} - L\overline{U}(x,t) \geqslant f(x,t,\overline{U}) \quad \textit{при} \quad (x,t) \in D, \quad (2.9)$$

$$\overline{U}(x,t) \geqslant g(x,t) \quad \textit{при} \quad (x,t) \in \partial' D. \quad (2.10)$$

[1)] Очевидно, с необходимостью функция $g(x,t)$ удовлетворяет следующему уравнению $g_t - Lg = f(x,t,g)$ на параболической границе $\partial' D$.

[2)] Более детально смотри, например, книгу [?] Крылова Н. В. или конспект лекций автора по курсу «Параболические уравнения».

[3)] Здесь имеется в виду, что существует продолжение функции $g(x,t)$ с параболической границы $\partial' D$ на замыкание $\overline{D}$ указанного класса.

Определение 4. *Функция* $\underline{U}(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D) \cap \mathbb{C}(\overline{D})$ *называется нижним решением первой краевой задачи* (2.1), (2.2), *если*

$$\frac{\partial \underline{U}(x,t)}{\partial t} - L\underline{U}(x,t) \leqslant f(x,t,\underline{U}) \quad \textit{при} \quad (x,t) \in D, \tag{2.11}$$

$$\underline{U}(x,t) \leqslant g(x,t) \quad \textit{при} \quad (x,t) \in \partial' D. \tag{2.12}$$

В дальнейшем мы будем предполагать, что верхнее решение $\overline{U}(x,t)$ и нижнее решение $\underline{U}(x,t)$ упорядочены [1])

$$\overline{U}(x,t) \geqslant \underline{U}(x,t) \quad \text{при} \quad (x,t) \in \overline{D}. \tag{2.13}$$

Дадим определение.

Определение 5. *Для любой упорядоченной пары* $\overline{U}(x,t)$ *и* $\underline{U}(x,t)$ *мы определим множество*

$$\left\langle \underline{U}, \overline{U} \right\rangle \stackrel{def:}{=} \Big\{ u(x,t) \in \mathbb{C}(\overline{D}) : \\ \underline{U}(x,t) \leqslant u(x,t) \leqslant \overline{U}(x,t), \quad (x,t) \in \overline{D} \Big\}. \tag{2.14}$$

Предположим, что нелинейная функция $f(x,t,u)$ удовлетворяет одностороннему условию Липшица

$$f(x,t,u_1) - f(x,t,u_2) \geqslant -\underline{c}(u_1 - u_2), \quad \underline{U} \leqslant u_2 \leqslant u_1 \leqslant \overline{U}, \tag{2.15}$$

где $\underline{c}$ — это постоянная.

ПРИМЕР 1. Например, функция

$$f(x,t,u) = f_0(x,t)|u|^{p-2}u, \quad f_0(x,t) \geqslant 0, \quad p > 1$$

удовлетворяет условию (2.15) с постоянной $\underline{c} = 0$.

Заметим, что в силу условия (2.15) функция

$$F(x,t,u) \stackrel{def:}{=} \underline{c}u + f(x,t,u) \tag{2.16}$$

является монотонно неубывающей по u для всех $(x,t) \in D$ и для всех $u \in \langle \underline{U}, \overline{U} \rangle$. Поэтому уравнение (2.1) можно переписать в следующем виде:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - Lu(x,t) + \underline{c}u = F(x,t,u) \quad \text{в} \quad (x,t) \in D. \tag{2.17}$$

Рассмотрим итерационную схему

$$\frac{\partial u_k}{\partial t} - Lu_k(x,t) + \underline{c}u_k = F(x,t,u_{k-1}) \quad \text{в} \quad (x,t) \in D. \tag{2.18}$$

$$u_k(x,t) = g(x,t) \quad \text{на} \quad (x,t) \in \partial' D, \tag{2.19}$$

[1]) Это не всегда так.

где в качестве $u_0(x,t)$ мы выбираем пока произвольную функцию класса $\mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D)\cap\mathbb{C}(\overline{D})$.

Как известно из линейной $\mathbb{C}^{2+\alpha,1+\alpha/2}$–теории параболических уравнений [1] первая итерация

$$u_1(x,t)\in\mathbb{C}^{\alpha,\alpha/2}(\overline{D}),$$

а последующие итерации

$$u_k(x,t)\in\mathbb{C}^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{D}) \quad \text{при} \quad k=2,3,\ldots.$$

Теперь мы в качестве начального приближения $u_0(x,t)\in\mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D)\cap$ $\cap\,\mathbb{C}(\overline{D})$ возьмем либо

$$u_0(x,t)=\overline{U}(x,t) \quad \text{либо} \quad u_0(x,t)=\underline{U}(x,t), \tag{2.20}$$

которые удовлетворяют условию (2.13). При этом итерационную последовательность решений задачи (2.18), (2.19) с начальным условием $u_0(x,t)=\overline{U}(x,t)$ мы обозначим через $\overline{u}_k(x,t)$ при $k\in\mathbb{N}$, а с начальным условием $u_0(x,t)=\underline{U}(x,t)$ обозначим через $\underline{u}_k(x,t)$ при $k\in\mathbb{N}$.

Справедлива следующая лемма:

Лемма 1. *Пусть* $\overline{U}(x,t)$, $\underline{U}(x,t)$ — *это упорядоченные верхнее и нижнее решения соответственно первой краевой задачи* (2.1), (2.2) *и функция* $f(x,t,u)$ *удовлетворяет условию* (2.15). *Тогда последовательности* $\{\overline{u}_k(x,t)\}$ *и* $\{\underline{u}_k(x,t)\}$ *обладают следующим свойством монотонности*:

$$\begin{aligned}\underline{U}(x,t)=\underline{u}_0(x,t)\leqslant\underline{u}_k(x,t)\leqslant\underline{u}_{k+1}(x,t)\leqslant&\\ \leqslant\overline{u}_{k+1}(x,t)\leqslant\overline{u}_k(x,t)\leqslant\overline{u}_0(x,t)=\overline{U}(x,t)&\end{aligned} \tag{2.21}$$

для всех $k\in\mathbb{N}$.

Доказательство.

Шаг 1. Пусть

$$w(x,t)=\overline{u}_0(x,t)-\overline{u}_1(x,t)=\overline{U}(x,t)-\overline{u}_1(x,t), \quad (x,t)\in\overline{D}.$$

Тогда $w(x,t)\in\mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D)\cap\mathbb{C}(\overline{D})$ — это решение задачи

$$\frac{\partial w}{\partial t}-Lw+\underline{c}w\geqslant F(x,t,\overline{U})-F(x,t,\overline{U})=0 \quad \text{при} \quad (x,t)\in D,$$

$$w(x,t)\geqslant g(x,t)-g(x,t)=0 \quad \text{при} \quad (x,t)\in\partial' D.$$

Слабый принцип максимума [2] дает неравенство $w(x,t)\geqslant 0$ на $\overline{D}$, т. е.

$$\overline{u}_1(x,t)\leqslant\overline{u}_0(x,t)=\overline{U}(x,t), \quad (x,t)\in\overline{D}.$$

[1] Смотри книгу Н. В. Крылова [**?**].

[2] По поводу слабого принципа максимума для классических решений смотри конспект автора по специальному курсу «Параболические уравнения».

Аналогичным образом доказывается неравенство

$$\underline{u}_1(x,t) \geqslant \underline{u}_0(x,t) = \underline{U}(x,t), \quad (x,t) \in \overline{D}.$$

Шаг 2. Пусть теперь

$$w_1(x,t) = \overline{u}_1(x,t) - \underline{u}_1(x,t), \quad (x,t) \in \overline{D}.$$

Тогда $w_1(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D) \cap \mathbb{C}(\overline{D})$ удовлетворяет

$$\frac{\partial w_1}{\partial t} - Lw_1 + \underline{c}w_1 = F(x,t,\overline{U}) - F(x,t,\underline{U}) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in D,$$

$$w_1(x,t) \geqslant g(x,t) - g(x,t) = 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \partial' D.$$

Снова в силу слабого принципа максимума имеем

$$w_1(x,t) \geqslant 0 \quad \text{на} \quad (x,t) \in \overline{D}.$$

Следовательно, имеем

$$\underline{u}_0(x,t) = \underline{U}(x,t) \leqslant \underline{u}_1(x,t) \leqslant \overline{u}_1(x,t) \leqslant \overline{U}(x,t) = \overline{u}_0(x,t), \quad (x,t) \in \overline{D}.$$

Шаг 3. Предположим, что

$$\underline{u}_{k-1}(x,t) \leqslant \underline{u}_k(x,t) \leqslant \overline{u}_k(x,t) \leqslant \overline{u}_{k-1}(x,t), \quad (x,t) \in \overline{D}.$$

Тогда функция

$$w_k(x,t) = \overline{u}_k(x,t) - \overline{u}_{k+1}(x,t), \quad (x,t) \in \overline{D}$$

удовлетворяет

$$\frac{\partial w_k}{\partial t} - Lw_k + \underline{c}w_k \geqslant F(x,t,\overline{u}_{k-1}) - F(x,t,\overline{u}_k) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in D,$$

$$w_k(x,t) = g(x,t) - g(x,t) = 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \partial' D.$$

В силу слабого принципа максимума имеем $w_k(x,t) \geqslant 0$ в $\overline{D}$, т. е.

$$\overline{u}_{k+1}(x,t) \leqslant \overline{u}_k(x,t), \quad (x,t) \in \overline{D}.$$

Аналогичным образом доказывается, что

$$\underline{u}_{k+1}(x,t) \leqslant \underline{u}_k(x,t), \quad \underline{u}_{k+1}(x,t) \leqslant \overline{u}_{k+1}(x,t), \quad (x,t) \in \overline{D}.$$

Лемма доказана.

Теперь мы переходим к доказательству основной теоремы о существовании. Прежде всего, заметим, что итерационная последовательность $\{\overline{u}_k(x,t)\}$ является монотонно невозрастающей и ограниченной снизу нижним решением $\underline{U}(x,t)$, а итерационная последовательность $\{\underline{u}_k(x,t)\}$ является монотонно неубывающей и ограниченной сверху верхним решением $\overline{U}(x,t)$. Следовательно, существуют пределы

$$\lim_{k\to+\infty} \overline{u}_k(x,t) = \overline{u}(x,t), \lim_{k\to+\infty} \underline{u}_k(x,t) = \underline{u}(x,t), \quad (x,t) \in \overline{D}, \qquad (2.22)$$

причем
$$\underline{U}(x,t) \leqslant \underline{u}(x,t) \leqslant \overline{u}(x,t) \leqslant \overline{U}(x,t), \quad (x,t) \in \overline{D}.$$

Ниже мы докажем, что обе функции $\overline{u}(x,t)$ и $\underline{u}(x,t)$ являются решениями первой краевой задачи (2.1), (2.2). Более того, если существует константа $\overline{c} \leqslant \underline{c}$ такая, что

$$f(x,t,u_1) - f(x,t,u_2) \leqslant -\overline{c}(u_1 - u_2), \quad \underline{U} \leqslant u_2 \leqslant u_1 \leqslant \overline{U}, \qquad (2.23)$$

тогда решение первой краевой задачи даже единственно.

Справедлива следующая теорема:

Теорема 2. *Пусть* $\overline{U}(x,t)$ *и* $\underline{U}(x,t)$ *упорядоченные верхнее и нижнее решения первой краевой задачи* (2.1), (2.2), *а функция* $f(x,t,u)$ *удовлетворяет условию* (2.15). *Тогда*

(i) *Последовательность* $\{\overline{u}_k(x,t)\}$ *сходится монотонно сверху к решению* $\overline{u}(x,t) \in \mathbb{C}^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{D})$ *первой краевой задачи* (2.1), (2.2), *а последовательность* $\{\underline{u}_k(x,t)\}$ *сходится монотонно снизу к решению* $\underline{u}(x,t) \in \mathbb{C}^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{D})$ *той же первой краевой задачи, причем*

$$\underline{u}(x,t) \leqslant \overline{u}(x,t), \quad (x,t) \in \overline{D}; \qquad (2.24)$$

(ii) *Всякое решение* $u^*(x,t) \in \langle \underline{U}, \overline{U} \rangle$ *первой краевой задачи* (2.1), (2.2) *удовлетворяют неравенству*

$$\underline{u}(x,t) \leqslant u^*(x,t) \leqslant \overline{u}(x,t), \quad (x,t) \in \overline{D}; \qquad (2.25)$$

(iii) *Если в дополнение выполнено условие* (2.23), *тогда* $\overline{u}(x,t) = \underline{u}(x,t)$ *является единственным* [1] *решением в* $\langle \underline{U}, \overline{U} \rangle$.

Доказательство.

Шаг 1. Поскольку последовательность $\{\overline{u}_k(x,t)\}$ монотонно сверху сходится к $\overline{u}(x,t)$, то в силу монотонности функции $F(x,t,u)$ последовательность $\{F(x,t,\overline{u}_k)\}$ монотонно сверху сходится к $F(\overline{u},x,t)$ для всех $(x,t) \in \overline{D}$. Аналогично последовательность $\{F(\underline{u}_k,x,t)\}$ монотонно снизу сходится к $F(\underline{u},x,t)$. Ранее мы указали на то, что

$$\underline{u}_1(x,t),\ \overline{u}_1(x,t) \in \mathbb{C}^{\alpha,\alpha/2}(\overline{D}),$$
$$\underline{u}_k(x,t),\ \overline{u}_k(x,t) \in \mathbb{C}^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{D}) \quad \text{при} \quad k = 2,3,\ldots.$$

В силу классических априорных оценок Шаудера для обеих итерационных схем (2.18)–(2.20) имеют место следующие оценки:

$$|\overline{u}_k|_{2+\alpha,1+\alpha/2;D} \leqslant K\left(|g|_{2+\alpha,1+\alpha/2;D} + |F(x,t,\overline{u}_{k-1})|_{\alpha,\alpha/2;D}\right), \qquad (2.26)$$

$$|\underline{u}_k|_{2+\alpha,1+\alpha/2;D} \leqslant K\left(|g|_{2+\alpha,1+\alpha/2;D} + |F(x,t,\underline{u}_{k-1})|_{\alpha,\alpha/2;D}\right) \qquad (2.27)$$

[1] Очевидно, что решение единственно вообще.

при $k \geqslant 2$, где постоянная $K = K(N, D, \alpha) > 0$ и не зависит от $k \in \in \mathbb{N}$. В силу итогового неравенства (**??**) первого параграфа седьмой тематической лекции вытекает цепочка неравенств [1])

$$\begin{aligned}
|F(x,t,u_{k-1})|_{\alpha,\alpha/2;D} \leqslant \underline{c}|u_{k-1}|_{\alpha,\alpha/2;D} + |f(x,t,u_{k-1})|_{\alpha,\alpha/2;D} \leqslant \\
\leqslant \varepsilon|u_{k-1}|_{2+\alpha,1+\alpha/2;D} + c_2(\varepsilon)|u_{k-1}|_{0;D} + |f(x,t,u_{k-1})|_{0;D} + \\
+ K_1 + \varepsilon|u_{k-1}|_{2+\alpha,1+\alpha/2;D} + c_3(\varepsilon)|u_{k-1}|_{0;D} = \\
= 2\varepsilon|u_{k-1}|_{2+\alpha,1+\alpha/2;D} + K_1 + c_4(\varepsilon)|u_{k-1}|_{0;D} + |f(x,t,u_{k-1})|_{0;D}. \quad (2.28)
\end{aligned}$$

Отметим, что

$$|u_{k-1}|_{0;D} \leqslant \sup_{x\in D}\left\{|\underline{U}(x)|, |\overline{U}(x)|\right\} = c_4$$

и

$$|f(x,t,u_{k-1})|_{0;D} \leqslant c_5.$$

Теперь в силу неравенств вида (2.26), (2.27) и итогового неравенства (2.28) получим неравенство

$$|u_k|_{2+\alpha,1+\alpha/2;D} \leqslant 2\varepsilon K|u_{k-1}|_{2+\alpha,1+\alpha/2;D} + K_2(\varepsilon). \qquad (2.29)$$

Переобозначим для удобства

$$2\varepsilon K \to \varepsilon$$

и получим из неравенства (2.30) неравенство

$$|u_k|_{2+\alpha,1+\alpha/2;D} \leqslant \varepsilon|u_{k-1}|_{2+\alpha,1+\alpha/2;D} + K_3(\varepsilon) \quad \text{при} \quad k \geqslant 3. \qquad (2.30)$$

Рассмотрим отдельно итерационное неравенство

$$z_{k+1} \leqslant \varepsilon z_k + d, \quad \varepsilon \in (0,1), \quad k \geqslant 2$$

Из него вытекает оценка

$$z_k \leqslant z_2 + K_1 \sum_{n=1}^{+\infty} \varepsilon^n = K_4(\varepsilon) < +\infty \quad \text{при} \quad k \geqslant 2.$$

Следовательно, обе последовательности $\{\underline{u}_k(x,t)\}$ и $\{\overline{u}_k(x,t)\}$ равномерно по $k \geqslant 2$ ограничены в пространстве $\mathbb{C}^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{D})$. Поэтому существуют подпоследовательности [2])

$$\{\overline{u}_\mu\}, \quad \{\underline{u}_\mu\}$$

такие, что

$$\overline{u}_\mu \to \overline{u} \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(\overline{D}) \quad \text{при} \quad \mu \to +\infty,$$

---

[1]) В этом неравенстве мы обе итерационные последовательности обозначаем как $\{u_k(x,t)\}$.

[2]) Смотри книгу Е. М. Ландиса [**?**].

$$\underline{u}_\mu \to \underline{u} \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(\overline{D}) \quad \text{при} \quad \mu \to +\infty,$$

причем предельные функции

$$\underline{u}(x,t), \quad \overline{u}(x,t) \in \mathbb{C}^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{D}).$$

Тем самым, свойство (i) доказано.

Шаг 2. Заметим, что если $u^*(x,t) \in \left\langle \underline{U}, \overline{U} \right\rangle$ — это решение класса $\mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D) \cap \mathbb{C}(\overline{D})$, тогда, очевидно, одновременно $u^*(x,t)$ — это верхнее и нижнее решение. Поэтому если рассмотреть упорядоченные пары

$$\left\langle u^*, \overline{U} \right\rangle \quad \text{и} \quad \left\langle \underline{U}, u^* \right\rangle$$

мы после рассмотрения указанной ранее итерационной схемы получим, что

$$u^*(x,t) \leqslant \overline{u}(x,t) \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in \overline{D},$$

$$u^*(x,t) \geqslant \underline{u}(x,t) \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in \overline{D}.$$

Таким образом, свойство (ii) доказано.

Шаг 3. Для того, чтобы доказать свойство (iii) достаточно показать, что

$$\overline{u}(x,t) \leqslant \underline{u}(x,t) \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in \overline{D}. \tag{2.31}$$

Действительно, функция

$$w(x,t) = \underline{u}(x,t) - \overline{u}(x,t), \quad (x,t) \in \overline{D}$$

удовлетворяет

$$\frac{\partial w}{\partial t} - Lw = f(x,t,\underline{u}) - f(x,t,\overline{u}) \geqslant -\overline{c}w \quad \text{при} \quad (x,t) \in D,$$

$$w(x,t) = g(x,t) - g(x,t) = 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \partial' D.$$

Следовательно, в силу слабого принципа максимума имеем $w(x,t) \geqslant 0$ в $\overline{D}$. Таким образом, свойство (iii) доказано.

Теорема доказана.

§ 3. Метод Лере–Шаудера. Классические решения

В этом параграфе мы рассмотрим следующую первую краевую задачу: [1])

$$\frac{\partial u}{\partial t} = m \operatorname{div} \left(\left(u^2 + \varepsilon^2 \right)^{(m-1)/2} D_x u \right), \quad (x,t) \in D = \Omega \otimes (0,T), \tag{3.1}$$

$$u(x,t) = 0, \quad (x,t) \in S = \partial\Omega \otimes (0,T), \tag{3.2}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \geqslant 0, \quad x \in \overline{\Omega}, \tag{3.3}$$

[1]) Символом D_x мы обозначили градиент.

где $\varepsilon > 0$ — это параметр. Поскольку $\varepsilon > 0$, то уравнение (3.1) является невырожденным параболическим уравнением. В силу принципа максимума имеет место априорные неравенства

$$0 \leqslant u(x,t) \leqslant u_0(x) \in \mathbb{C}^{2+\alpha}(\overline{\Omega}) \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in D. \tag{3.4}$$

Нас интересует классическая разрешимость первой краевой задачи (3.1)–(3.3) в классе $\mathbb{C}^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{D})$ при некотором $\alpha \in (0,1)$. С этой целью мы воспользуемся теоремой Лере–Шаудера **??** шестой тематической лекции.

Введем следующее банахово пространство:

$$\mathbb{B} = \left\{ u(x,t): \; u(x,t) \in \mathbb{C}^{\alpha,\alpha/2}(\overline{\Omega}), \; D_x u(x,t) \in \mathbb{C}^{\alpha,\alpha/2}(\overline{\Omega}) \right\}.$$

Кроме того, рассмотрим следующую линейную относительно $u(x,t)$ задачу с параметром $\sigma \in [0,1]$:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = m\sigma \operatorname{div}\left((v^2 + \varepsilon^2)^{(m-1)/2} D_x u \right) + \\ + (1-\sigma)\Delta u, \quad (x,t) \in D, \tag{3.5}$$

$$u(x,t) = 0, \quad (x,t) \in S = \partial\Omega \otimes (0,T), \tag{3.6}$$

$$u(x,0) = \sigma u_0(x) \geqslant 0, \quad x \in \overline{\Omega}. \tag{3.7}$$

Введем отображение $T(v,\sigma)$, определенного следующим образом:

$$T: \; (v(x,t),\sigma) \in \mathbb{B} \otimes [0,1] \to \mathbb{B}, \tag{3.8}$$

которое сопоставляет функции $v(x,t) \in \mathbb{B}$ решение $u(x,t)$ линейной первой краевой задачи (3.5)–(3.7) с параметром $\sigma \in [0,1]$. В силу классических априорных оценок Шаудера решение этой задачи $u(x,t) \in \in \mathbb{C}^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{\Omega})$. Кроме того, имеет место вполне непрерывное вложение

$$\mathbb{C}^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow\hookrightarrow \mathbb{B}.$$

Поэтому оператор $u = T(v,\sigma)$ является компактным оператором. Кроме того, при $\sigma = 0$ задача (3.5)–(3.7) примет следующий вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u, \quad (x,t) \in D,$$

$$u(x,t) = 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \partial^{'} D = S \cup \overline{B},$$

классическое решение которой единственно в силу принципа максимума и равно нулю $u(x,t) = 0$. Следовательно, $T(v,0) = 0$ для всех $v(x,t) \in \mathbb{B}$.

Используя тонкую и очень непростую технику, аналогичную классической технике Шаудера, можно получить априорные оценки следующего вида — если $u_0(x) \in \mathbb{C}^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ и $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{D})$ —

это решение первой краевой задачи (3.1)–(3.1), то существует такая постоянная $M > 0$, не зависящая от $u(x,t)$, что

$$|u|_{\beta,\beta/2;D} \leqslant M, \quad |D_x u|_{\beta,\beta/2;D} \leqslant M, \quad \beta \in (0,1). \tag{3.9}$$

Пусть теперь при некотором $\sigma \in [0,1]$ оператор $T(v,\sigma)$ имеет неподвижную точку в $\mathbb{B}$

$$u = T(u,\sigma). \tag{3.10}$$

Выпишем это уравнение.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a(x,t,\sigma)\Delta u + f(x,t,\sigma), \tag{3.11}$$

где

$$a(x,t,\sigma) \overset{def:}{=} 1 - \sigma + \sigma m \left(u^2(x,t) + \varepsilon^2\right)^{(m-1)/2}, \tag{3.12}$$

$$f(x,t,\sigma) \overset{def:}{=} \sigma m(m-1) \left(u^2(x,t) + \varepsilon^2\right)^{(m-3)/2} |D_x u(x,t)|^2. \tag{3.13}$$

Тогда $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2+\alpha,1+\alpha/2}(D)$ и в соответствии с априорной оценкой (3.9) имеем

$$a(x,t,\sigma) \in \mathbb{C}^{\gamma,\gamma/2}(\overline{D}), \quad f(x,t,\sigma) \in \mathbb{C}^{\gamma,\gamma/2}(\overline{D})$$

при некотором $\gamma \in (0,1)$. Но тогда существует такая постоянная $K > 0$, не зависящая от $u(x,t)$ и σ, но систематически зависящая от M [1]), такая, что в силу классической априорной оценки Шаудера

$$|u|_{2+\gamma,1+\gamma/2;D} \leqslant K,$$

но поскольку имеет место непрерывное (вполне непрерывное) вложение

$$\mathbb{C}^{2+\gamma,1+\gamma/2}(\overline{D}) \hookrightarrow\hookrightarrow \mathbb{B},$$

то

$$\|u\|_{\mathbb{B}} \overset{def:}{=} |u|_{\beta,\beta/2;D} + |D_x u|_{\beta,\beta/2;D} \leqslant K_1 < +\infty, \tag{3.14}$$

где постоянная K_1 не зависит от $u(x,t)$.

Итак, выполнены все условия теоремы Лере–Шаудера **??** из шестой тематической лекции. Поэтому существует неподвижная точка $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{D})$ оператора $T(u,1)$, т. е. существует решение указанного класса первой краевой задачи (3.1)–(3.3).

З а м е ч а н и е 3. Отметим, что при $\varepsilon = 0$ уравнение (3.1) примет следующий вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u^m,$$

задачу Коши для которого мы изучим в десятой тематической лекции.

---

[1]) Постоянная в правых частях априорных оценок (3.9).

§ 4. Степень отображения Лере–Шаудера

Прежде, чем приступать к рассмотрению степени отображения Лере–Шаудера нам необходимо изучить классическую степень отображения Брауэра.

1. Степень отображения Брауэра.

Пусть Ω — это открытое множество в $\mathbb{R}^N$ и $f(x)$ — это отображение из Ω в $\mathbb{R}^N$. Грубо говоря, степень отображения Брауэра — целочисленная функция от функции f и от множества Ω.

Прежде всего определим степень отображения Брауэра для функций класса $f(x) \in \mathbb{C}^{(1)}(\Omega;\mathbb{R}^N)$, а затем расширим до функций класса $f(x) \in \mathbb{C}(\Omega;\mathbb{R}^N)$. Пусть

$$f(x) = \Bigl(f^1(x), f^2(x), ..., f^N(x)\Bigr) \in \mathbb{C}^{(1)}(\Omega;\mathbb{R}^N).$$

Тогда для любого $x \in \Omega$ производная Фреше

$$f^{'}(x) = \left(\frac{\partial f^i(x)}{\partial x_j}\right)_{N\otimes N} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N.$$

Дадим определение.

Определение 6. *Точка $x \in \Omega$ называется регулярной точкой отображения f, если ранг матрицы производной Фреше $f^{'}(x)$ равен N. В противном случае эта точка называется критической, а точка $y = f(x)$, соответствующая критической точке x отображения $f(x)$, называется критическим значением. В противном случае точка $y = f(x)$ носит название регулярного значения f.*

Справедлива следующая теорема:

Теорема 3. *Пусть Ω — это открытое множество в $\mathbb{R}^N$ и $f(x) \in \mathbb{C}^{(1)}(\Omega;\mathbb{R}^N)$. Тогда мера Лебега критических значений в $\mathbb{R}^N$ отображения $f(x)$ равна нулю.*

Пусть Ω — это ограниченное открытое множество в $\mathbb{R}^N$, $f(x) \in \mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega};\mathbb{R}^N)$ и $p \in \mathbb{R}^N \backslash \{f(\partial\Omega)\}$. Мы определим степень отображения Брауэра $\deg(f,\Omega,p)$ отображения f в Ω в точке p следующим образом:

(i) Если p — это регулярное значение f, тогда положим

$$\deg(f,\Omega,p) = \sum_{x\in f^{-1}(p)} \operatorname{sign}\Bigl(\det f^{'}(x)\Bigr),$$

где $\det f^{'}(x)$ — это определитель матрицы производной Фреше $f^{'}(x)$;

(ii) Если p — это критическое значение отображения f, тогда выберем регулярное значение p_1 отображения f следующим образом:

$$\|p_1 - p\| < \mathrm{distance}(p, f(\Omega))$$

и положим

$$\deg(f,\Omega,p) = \deg(f,\Omega,p_1).$$

Можно доказать, что $\deg(f,\Omega,p)$ не зависит от выбора регулярного значения p_1.

Теперь мы можем определить степень отображения $f\in\mathbb{C}(\overline{\Omega};\mathbb{R}^N)$. Выберем $f_1(x)\in\mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega};\mathbb{R}^N)$ таким образом, чтобы

$$\sup_{x\in\Omega}\|f(x)-f_1(x)\|<\mathrm{distance}(p,f(\partial\Omega)).$$

Тогда определим степень отображения

$$\deg(f,\Omega,p)=\deg(f_1,\Omega,p).$$

Можно доказать, что степень отображения $\deg(f,\Omega,p)$ не зависит от выбора функции f_1.

Справедливы основные свойства степени отображения Брауэра.

(i) Справедливо свойство тождественного отображения

$$\deg(id,\Omega,p)=\begin{cases}1, & \text{если} \quad p\in\Omega;\\ 0, & \text{если} \quad p\notin\overline{\Omega},\end{cases}$$

где id — это тождественное отображение;

(ii) Если Ω_1, Ω_2 — это два открытых подмножества Ω, причем $\Omega_1\cap\cap\,\Omega_2=\varnothing$ и $p\notin f\left(\overline{\Omega}\setminus(\Omega_1\cap\Omega_2)\right)$, тогда

$$\deg(f,\Omega,p)=\deg(f,\Omega_1,p)+\deg(f,\Omega_2,p);$$

(iii) Пусть

$$H:\ \overline{\Omega}\otimes[0,1]\to\mathbb{R}^N$$

— это непрерывное отображение и обозначим через

$$h_t(x)\overset{def:}{=}H(x,t).$$

Предположим, что отображение

$$p(t):\ [0,1]\to\mathbb{R}^N$$

является непрерывным и $p(t)\notin h_t(\partial\Omega)$ для всех $t\in[0,1]$. Тогда

$$\deg(h_t,\Omega,p(t))\quad\text{не зависит от}\quad t\in[0,1].$$

Основным результатом теории степени отображения Брауэра.

Т е о р е м а 4. *Пусть Ω — это открытое и ограниченное множество из $\mathbb{R}^N$, причем*

$$f(x)\in\mathbb{C}(\overline{\Omega};\mathbb{R}^N),\quad p\in\mathbb{R}^N\setminus\{f(\partial\Omega)\}.$$

Если $p\notin\{f(\overline{\Omega})\}$, тогда

$$\deg(f,\Omega,p)=0$$

и если

$$\deg(f,\Omega,p)\neq0,$$

то уравнение $f(x)=p$ имеет по меньшей мере одно решение.

2. Степень отображения Лере–Шаудера.

Степень отображения Брауэра была обобщена на случай вполне непрерывных отображений [1] Лере и Шаудером. Основой для этого отображения является следующая теорема:

Теорема 5. *Пусть X и Y — это два линейных нормированных пространства и $M \subset X$ — это ограниченное и замкнутое подмножество. Если отображение*

$$F : M \subset X \to Y$$

— это вполне непрерывное отображение, тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует ограниченное и непрерывное отображение

$$F_k : M \subset X \to Y_k \subset Y, \quad \dim Y_k = k,$$

такое что

$$\sup_{x \in M} \|F(x) - F_k(x)\| < \varepsilon.$$

Более того, если пространство Y банахово, то указанное условие является также достаточным для вполне непрерывности отображения F.

Пусть $\Omega \subset X$ — ограниченное и открытое множество в нормированном пространстве X и

$$F : \overline{\Omega} \to X$$

— это вполне непрерывное отображение. Тогда определим вполне непрерывное поле

$$f(\cdot) \stackrel{def:}{=} id \cdot -F(\cdot)$$

и $p \in X \backslash \{f(\partial\Omega)\}$. В силу теоремы 5 существует конечномерное подпространство $X_k \subset X$, $p_k \in X_k$ и ограниченное, непрерывное отображение

$$F_k : \overline{\Omega} \to X_k$$

такое, что

$$\|p - p_k\| + \sup_{x \in \Omega} \|F(x) - F_k(x)\| < \mathrm{distance}(p, f(\partial\Omega)). \qquad (4.1)$$

Обозначим

$$\Omega_k = X_k \cap \Omega, \quad f_k = id - F_k.$$

Тогда

$$f_k \in \mathbb{C}(\overline{\Omega}_k, X_k), \quad p_k \in X_k \backslash \{f_k(\partial\Omega_k)\}$$

и, следовательно, определена степень отображения Брауэра

$$\deg(f_k, \Omega_k, p_k).$$

Определим степень отображения Лере–Шаудера.

[1] Компактных и непрерывных.

Определение 7. *Степенью отображения Лере–Шаудера вполне непрерывного поля f относительно множества $\overline{\Omega}$ и значения p называется величина*

$$\deg(f, \Omega, p) = \deg(f_k, \Omega_k, p_k)$$

при выполнении неравенства (4.1).

Можно доказать, что $\deg(f, \Omega, p)$ не зависит от выбора X_k, p_k и F_k.

Справедливы свойства степени отображения Лере–Шаудера. Пусть Ω — это открытое ограниченное подмножество вещественного нормированного пространства X, $f = id - F$ — это вполне непрерывное поле на $\overline{\Omega}$, $p \in X \backslash \{f(\partial\Omega)\}$.

(i) Справедливо свойство тождественного отображения

$$\deg(id, \Omega, p) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad p \in \Omega; \\ 0, & \text{если} \quad p \notin \overline{\Omega}, \end{cases}$$

где id — это тождественное отображение;

(ii) Если Ω_1, Ω_2 — это два открытых подмножества Ω, причем $\Omega_1 \cap \cap\, \Omega_2 = \varnothing$ и $p \notin f\left(\overline{\Omega} \backslash (\Omega_1 \cap \Omega_2)\right)$, тогда

$$\deg(f, \Omega, p) = \deg(f, \Omega_1, p) + \deg(f, \Omega_2, p);$$

(iii) Пусть

$$H : \overline{\Omega} \otimes [0, 1] \to X$$

— это непрерывное отображение и обозначим через

$$h_t(x) \overset{def:}{=} H(x, t).$$

Предположим, что отображение

$$p(t) : [0, 1] \to X$$

является непрерывным и $p(t) \notin h_t(\partial\Omega)$ для всех $t \in [0, 1]$. Тогда

$$\deg(h_t, \Omega, p(t)) \quad \text{не зависит от} \quad t \in [0, 1]. \tag{4.2}$$

Кроме того, для степени отображения Лере–Шаудера выполнены свойства степени отображения Брауэра и, наконец, справедлива следующая теорема существования решения:

Теорема 6. *Пусть Ω — это открытое и ограниченное множество из вещественного линейного нормированного пространства X, причем*

$$f(\cdot) = id \cdot - F(\cdot)$$

— это вполне непрерывное поле, определенное на $\overline{\Omega}$, $p \in X \backslash \{f(\partial\Omega)\}$. Если $p \notin \{f(\overline{\Omega})\}$, тогда

$$\deg(f, \Omega, p) = 0$$

и если

$$\deg(f, \Omega, p) \neq 0,$$

то уравнение $f(x) = p$ имеет по меньшей мере одно решение в Ω.

3. Существование решения уравнения теплопроводности с нелинейным источником.

В качестве приложения метода на основе степени отображения Лере–Шаудера мы рассмотрим следующую нелинейную задачу:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = |u|^p \quad \text{при} \quad (x,t) \in D, \quad p > 1, \tag{4.3}$$

$$u(x,t) = \varphi(x,t) \quad \text{при} \quad (x,t) \in \partial' D = S \cup \overline{B}, \tag{4.4}$$

где $D = \Omega \otimes (0,T)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — это ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega \in \mathbb{C}^{2,\alpha}$ при $\alpha \in (0,1)$ и $T > 0$.

Заметим, что следующая задача имеет единственное решение в классе $\mathbb{C}^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{D})$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f(x,t) \quad \text{при} \quad (x,t) \in D, \quad p > 1, \tag{4.5}$$

$$u(x,t) = \varphi(x,t) \quad \text{при} \quad (x,t) \in \partial' D = S \cup \overline{B}, \tag{4.6}$$

где $\varphi(x,t) \in \mathbb{C}^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{D})$ и $f(x,t) \in \mathbb{C}^{\alpha,\alpha/2}(\overline{D})$, причем имеет место классическая априорная оценка Шаудера

$$|u|_{2+\alpha,1+\alpha/2;D} \leqslant c_0 \left(|f|_{\alpha,\alpha/2;D} + |\varphi|_{2+\alpha,1+\alpha/2;D} \right), \tag{4.7}$$

где постоянная $c_0 = c_0(N,\Omega,\alpha,T) > 0$. Наша цель — доказать разрешимость нелинейной первой краевой задачи (4.3), (4.4).

Предположим, что $\varphi(x,t) \in \mathbb{C}^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{D})$. Определим отображение

$$F : (f(x,t),\sigma) \in \mathbb{C}^{\alpha,\alpha/2}(\overline{D}) \otimes [0,1] \to u(x,t) \in \mathbb{C}^{\alpha,\alpha/2}(\overline{D}),$$

где $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{D})$ — это решение следующей задачи с параметром $\sigma \in [0,1]$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = \sigma f \quad \text{при} \quad (x,t) \in D, \tag{4.8}$$

$$u(x,t) = \varphi \quad \text{при} \quad (x,t) \in \partial' D. \tag{4.9}$$

Справедлива следующая лемма:

Лемма 2. *Отображение F является компактным.*

Доказательство.

Предположим, что $\{f_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset \mathbb{C}^{\alpha,\alpha/2}(\overline{D})$ и $\{\sigma_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset [0,1]$ и существует такая постоянная $M > 0$, что

$$|f_k|_{\alpha,\alpha/2;D} \leqslant M \quad \text{при} \quad k \in \mathbb{N}. \tag{4.10}$$

Обозначим

$$u_k(x,t) = F(f_k(x,t),\sigma_k), \quad u_k(x,t) \in \mathbb{C}^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{D})$$

— это решение задачи

$$\frac{\partial u_k}{\partial t} - \Delta u_k = \sigma_k f_k, \quad u_k(x,t) = \varphi(x,t).$$

В силу классической априорной оценки Шаудера имеем

$$|u_k|_{2+\alpha,1+\alpha/2;D} \leqslant c_0 \left(\sigma_k |f_k|_{\alpha,\alpha/2;D} + |\varphi|_{2+\alpha,1+\alpha/2;D}\right) \tag{4.11}$$

с постоянной $c_0 > 0$, независящей от $k \in \mathbb{N}$. В силу (4.10) из (4.11) получим, что последовательность $\{u_k\}$ равномерно по $k \in \mathbb{N}$ ограничена в банаховом пространстве $\mathbb{C}^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{D})$, которое вполне непрерывно вложено в банахово пространство $\mathbb{C}^{\alpha,\alpha/2}(\overline{D})$. Это означает, что оператор F компактен.

Лемма доказана.

Справедлива следующая лемма:

Лемма 3. *Отображение F является непрерывным.*

Доказательство.

Предположим, что

$$\{f_k(x,t)\}_{k=1}^{+\infty} \subset \mathbb{C}^{\alpha,\alpha/2}(\overline{D}), \quad \{\sigma_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset [0,1],$$
$$f(x,t) \in \mathbb{C}^{\alpha,\alpha/2}(\overline{D}), \quad \sigma \in [0,1],$$

причем

$$\lim_{k\to+\infty} |f_k - f|_{\alpha,\alpha/2;D} = 0, \quad \lim_{k\to+\infty} \sigma_k = \sigma.$$

Обозначим

$$u_k = F(f_k, \sigma_k), \quad u = F(f,\sigma).$$

По определению отображения F имеем $w = u_k - u \in \mathbb{C}^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{D})$ является решением следующей задачи:

$$\frac{\partial w}{\partial t} - \Delta w = \sigma_k f_k - \sigma f \quad \text{при} \quad (x,t) \in D,$$
$$w(x,t) = 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \partial' D.$$

В силу классической априорной оценки Шаудера имеем

$$\begin{aligned} |u_k - u|_{2+\alpha,1+\alpha/2;D} &\leqslant c_0 |\sigma_k f_k - \sigma f|_{\alpha,\alpha/2;D} \leqslant \\ &\leqslant c_0 \left(\sigma_k |f_k - f|_{\alpha,\alpha/2;D} + |\sigma_k - \sigma||f|_{\alpha,\alpha/2;D}\right) \leqslant \\ &\leqslant c_0 \left(|f_k - f|_{\alpha,\alpha/2;D} + |\sigma_k - \sigma||f|_{\alpha,\alpha/2;D}\right) \to +0 \end{aligned} \tag{4.12}$$

при $k \to +\infty$. В силу непрерывного вложения [1]

$$\mathbb{C}^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{D}) \subset \mathbb{C}^{\alpha,\alpha/2}(\overline{D})$$

имеем

$$|u_k - u|_{\alpha,\alpha/2;D} \to +0 \quad \text{при} \quad k \to +\infty.$$

---

[1] На самом деле вполне непрерывное вложение

Лемма доказана.

Наконец, мы можем доказать следующую теорему:

Теорема 7. *Предположим, что* $\varphi(x,t) \in \mathbb{C}^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{D})$ *и*

$$|\varphi|_{2+\alpha,1+\alpha/2;D} < \frac{1}{2c_0}\left(2(p+1)c_0\right)^{1/(1-p)}, \tag{4.13}$$

где постоянная c_0 — *это постоянная Шаудера в априорной оценке* (4.7). *Тогда задача* (4.3), (4.4) *имеет единственное решение класса* $\mathbb{C}^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{D})$ *при достаточно малом размере области* $D \subset \mathbb{R}^{N+1}_+$. [1]

Доказательство.

Шаг 1. Рассмотрим следующее нелинейное отображение:

$$\Phi(v) = |v|^p : \mathbb{C}^{\alpha,\alpha/2}(\overline{D}) \to \mathbb{C}^{\alpha,\alpha/2}(\overline{D})$$

при $p > 1$. Можно доказать, что это непрерывное отображение. Поскольку отображение F является вполне непрерывным, то можно доказать, что отображение

$$F(\Phi(\cdot),\cdot) : \mathbb{C}^{\alpha,\alpha/2}(\overline{D}) \otimes [0,1] \to \mathbb{C}^{\alpha,\alpha/2}(\overline{D})$$

тоже вполне непрерывно.

Заметим, что задача (4.3), (4.4) в классе $\mathbb{C}^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{D})$ эквивалентна задаче

$$u - F(\Phi(u),1) = 0 \tag{4.14}$$

в классе $\mathbb{C}^{\alpha,\alpha/2}(\overline{D})$.

Шаг 2. Мы собираемся воспользоваться теорией степени отображения Лере–Шаудера. С этой целью нам нужно выбрать такое число $R > 0$, чтобы

$$\left(id - F(\Phi(\cdot),\sigma)\right)(\partial B_R) \neq 0 \quad \text{для всех} \quad \sigma \in [0,1], \tag{4.15}$$

где $B_R(0) = \left\{u(x,t) \in \mathbb{C}^{\alpha,\alpha/2}(\overline{D}) : \ |u|_{\alpha,\alpha/2;D} < R\right\}$. В том случае, если свойство (4.15) доказано, то для того чтобы доказать существование хотя бы одного решения уравнения (4.14) нужно доказать, что

$$\deg\left(id - F(\Phi(\cdot),1), B_R(0), 0\right) \neq 0. \tag{4.16}$$

Более того, если выполнено неравенство (4.15), тогда в силу свойства (iii) степени отображения Лере–Шаудера (см. (4.2)) справедливо равенство

$$\deg\left(id - F(\Phi(\cdot),1), B_R(0), 0\right) = \deg\left(id - F(\Phi(\cdot),0), B_R(0), 0\right). \tag{4.17}$$

Согласно определению отображения F имеем

$$F(\Phi(v),0) = \widehat{u} \in \mathbb{C}^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{D}),$$

---

[1] Т. е. мера Лебега $|D|$ области $D = \Omega \otimes (0,T)$ мала.

где $\widehat{u}(x,t)$ — это единственное решение следующей задачи:

$$\frac{\partial \widehat{u}}{\partial t} - \Delta \widehat{u} = 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in D, \tag{4.18}$$

$$\widehat{u}(x,t) = \varphi(x,t) \quad \text{при} \quad (x,t) \in \partial' D. \tag{4.19}$$

Теперь рассмотрим следующее отображение:

$$G(v,\sigma) = v - \sigma \widehat{u}, \quad v(x,t) \in \mathbb{C}^{\alpha,\alpha/2}(\overline{D}), \quad \sigma \in [0,1].$$

Прежде всего заметим, что

$$G(\cdot,0) = id, \quad G(\cdot,1) = id - F(\Phi(\cdot),0).$$

Если

$$G(\partial B_R(0),\sigma) \neq 0 \quad \text{для всех} \quad \sigma \in [0,1], \tag{4.20}$$

тогда можно применить свойство (iii) степени отображения Лере–Шаудера (см. (4.2)) и получить цепочку равенств

$$\deg\left(id - F(\Phi(\cdot),0), B_R(0), 0\right) = \deg\left(id, B_R(0), 0\right) = 1. \tag{4.21}$$

В силу (4.21) из (4.17) мы получим, что выполнено неравенство (4.16).

Шаг 3. Осталось доказать (4.15) и (4.20).

С этой целью предположим, что $v(x,t) \in \partial B_R(0)$, т. е. $v(x,t) \in \in \mathbb{C}^{\alpha,\alpha/2}(\overline{D})$ и

$$|v|_{\alpha,\alpha/2;D} = R.$$

Для любого $\sigma \in [0,1]$ классические априорные оценки Шаудера дают следующую цепочку неравенств:

$$\begin{aligned} |F(\Phi(v),\sigma)|_{2+\alpha,1+\alpha/2;D} &= |u|_{2+\alpha,1+\alpha/2;D} \leqslant \\ &\leqslant c_0 \left(|\sigma\Phi(v)|_{\alpha,\alpha/2;D} + |\varphi|_{2+\alpha,1+\alpha/2;D} \right) \leqslant \\ &\leqslant c_0 \left(||v|^p|_{\alpha,\alpha/2;D} + |\varphi|_{2+\alpha,1+\alpha/2;D} \right). \end{aligned} \tag{4.22}$$

Заметим, что имеет место цепочка неравенств

$$\begin{aligned} ||v|^p|_{\alpha,\alpha/2;D} &= ||v|^p|_{0;D} + [|v|^p]_{\alpha,\alpha/2;D} \leqslant \\ &\leqslant |v|^p_{0;D} + p|v|^{p-1}_{0;D}[v]_{\alpha,\alpha/2;D} \leqslant R^p + pR^{p-1}R = (p+1)R^p. \end{aligned} \tag{4.23}$$

Потребуем выполнения равенства

$$(p+1)R^p = \frac{1}{2c_0}R \Rightarrow R = \frac{1}{\left(2c_0(p+1)\right)^{1/(p-1)}}. \tag{4.24}$$

В силу (4.24) из (4.23) получим неравенство

$$||v|^p|_{\alpha,\alpha/2;D} \leqslant \frac{R}{2c_0}. \tag{4.25}$$

Предположим, что
$$|\varphi|_{2+\alpha,1+\alpha/2;D} < \frac{R}{2c_0}, \tag{4.26}$$
тогда из (4.22) в силу неравенств (4.25) и (4.26) получим следующее неравенство:
$$|F(\Phi(v),\sigma)|_{2+\alpha,1+\alpha/2;D} < c_0\left(\frac{R}{2c_0}+\frac{R}{2c_0}\right) = R. \tag{4.27}$$
Таким образом,
$$|F(\Phi(v),\sigma)|_{2+\alpha,1+\alpha/2;D} < R \quad \text{для всех} \quad v \in \partial B_R(0), \quad \sigma \in [0,1].$$
Поскольку $|v|_{\alpha,\alpha/2;D} = R$ это показывает, что
$$F(\Phi(v),\sigma) \neq v \quad \text{для всех} \quad v \in \partial B_R(0), \quad \sigma \in [0,1].$$
Таким образом, свойство (4.15) при таком выборе $R > 0$.

Заметим теперь, что имеет место оценка для $\widehat{u} \in \mathbb{C}^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{D})$ имеет место оценка
$$|\widehat{u}|_{\alpha,\alpha/2;D} \leqslant K_1|\widehat{u}|_{2+\alpha,1+\alpha/2;D} \leqslant c_0|\varphi|_{2+\alpha,1+\alpha/2;D} < \frac{R}{2}, \tag{4.28}$$
поскольку константа $K_1 = K_1(|D|) \leqslant 1$ при достаточно малой мере Лебега $|D|$ области D. Таким образом, имеем
$$|G(v,\sigma)|_{\alpha,\alpha/2;D} = |v-\sigma\widehat{u}|_{\alpha,\alpha/2;D} \geqslant$$
$$\geqslant |v|_{\alpha,\alpha/2;D} - \sigma|\widehat{u}|_{\alpha,\alpha/2;D} > R - \frac{R}{2} = \frac{R}{2} \tag{4.29}$$
для всех $v(x,t) \in \partial B_R(0)$ и для всех $\sigma \in [0,1]$. Стало быть, доказано свойство (4.20).

Теорема доказана.