Тематическая лекция 5

ПОЛУЛИНЕЙНОЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ

В этой лекции мы рассмотрим первый базовый оператор эллиптического типа следующего вида:

$$-\Delta u + f(x, u),$$

где функция $f(x, u)$ принадлежит к так называемому классу *каратеодориевых* функций.

§ 1. Оператор Немыцкого

Прежде чем рассматривать общее определение оператора Немыцкого, мы рассмотрим следующую нелинейную функцию:

$$|u|^{q-2}u \quad \text{при} \quad q > 1. \tag{1.1}$$

Ясно, что если функция $u(x) \in L^q(\Omega)$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — это область с гладкой границей, то оператор

$$F(u) \stackrel{def:}{=} |u(x)|^{q-2}u(x) : L^q(\Omega) \to L^{q'}(\Omega), \quad q' = \frac{q}{q-1}. \tag{1.2}$$

Кроме того, $F(u) \in \mathbb{C}(L^q(\Omega); L^{q'}(\Omega))$, т. е. для любой последовательности $\{u_m\} \in L^q(\Omega)$ такой, что

$$u_m(x) \to u(x) \quad \text{сильно в} \quad L^q(\Omega)$$

при $m \to +\infty$, то

$$F(u_m) \to F(u) \in L^{q'}(\Omega) \quad \text{сильно в} \quad L^{q'}(\Omega)$$

при $m \to +\infty$. В частности, при $q \geqslant 2$ это утверждение получается непосредственно, если воспользоваться очевидным неравенством

$$\left| |u_1|^{q-2}u_1 - |u_2|^{q-2}u_2 \right| \leqslant (q-1) \max\left\{ |u_1|^{q-2}, |u_2|^{q-2} \right\} |u_1 - u_2| \, .$$

Осталось возвести обе части этого неравенства в степень q' и для правой части воспользоваться неравенством Гельдера с показателями

$$q_1 = q - 1, \quad q_2 = \frac{q-1}{q-2}, \quad \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} = 1.$$

И в результате получить следующую оценку:

$$\int\limits_{\Omega} |F(u_1) - F(u_2)|^{q'}\, dx \leqslant$$

$$\leqslant (q-1)^{q'} \max\left\{ \left(\int\limits_{\Omega} |u_1|^q\, dx\right)^{(q-2)/(q-1)}, \left(\int\limits_{\Omega} |u_2|^q\, dx\right)^{(q-2)/(q-1)} \right\} \times$$

$$\times \left(\int\limits_{\Omega} |u_1 - u_2|^q\, dx\right)^{1/(q-1)}.$$

Откуда сразу же получаем неравенство

$$\|F(u_1) - F(u_2)\|_{q'} \leqslant (q-1) \max\left\{ \|u_1\|_q^{q-2}, \|u_2\|_q^{q-2} \right\} \|u_1 - u_2\|_q.$$

Из этой оценки сразу же получаем, что $F(u) \in \mathbb{C}(L^q(\Omega); L^{q'}(\Omega))$ при $q \geqslant 2$.

Это важное свойство наследует *оператор Немыцкого*. Дадим определение.

Определение 1. *Функция $f(x,u)$ называется каратеодориевой, если*

(i) *для всех $u \in \mathbb{R}^1$ функция $f(x,u)$ измерима по Лебегу по $x \in \Omega$;*
(ii) *для почти всех $x \in \Omega$ функция $f(x,u)$ непрерывна по $u \in \mathbb{R}^1$.*

Определение 2. *Оператор*

$$N_f(u) \stackrel{def:}{=} f(x, u(x)),$$

порожденный каратеодориевой функцией $f(x,u)$ носит название оператора Немыцкого.

Важное свойство нелинейной функции $F(u) = |u|^{q-2}u$ быть непрерывным отображением из $\mathbb{C}(L^q(\Omega); L^{q'}(\Omega))$ наследует оператор Немыцкого. А именно, справедлива важная теорема М. А. Красносельского об операторе Немыцкого.

Теорема Красносельского. *Для того чтобы оператор Немыцкого $N_f(u)$, порожденный каратеодориевой функцией $f(x,u)$ (Ω — это ограниченная область), был непрерывным отображением из $\mathbb{C}(L^p(\Omega); L^q(\Omega))$ при $p,q \geqslant 1$, необходимо и достаточно, чтобы для всех $u \in \mathbb{R}^1$ и всех $x \in \Omega$ было выполнено неравенство*

$$|f(x,u)| \leqslant a + b|u|^{p/q}, \tag{1.3}$$

где $a, b > 0$ — это некоторые постоянные.

Доказательство необходимости достаточно сложное. Хотя доказательство достаточности относительно просто. Однако, мы не будем доказывать эту теорему.

Заметим, что оператор Немыцкого при выполнении условия (1.3) является потенциальным оператором, т. е. существует функционал

$$\psi(u) : L^p(\Omega) \to \mathbb{R}^1.$$

Действительно, справедлива следующая лемма:
Л е м м а 1. *Пусть каратеодориева функция $f(x,u)$ удовлетворяет следующему неравенству*:

$$|f(x,u)| \leqslant a + b|u|^{p/p'} \quad \textit{при} \quad p' = \frac{p}{p-1} \quad \textit{и} \quad p \in (1, +\infty). \tag{1.4}$$

Тогда функционал

$$\psi(u) = \int\limits_{\Omega} F(x, u(x))\, dx, \quad F(x,z) = \int\limits_0^z f(x,\xi)\, d\xi, \tag{1.5}$$

является дифференцируемым по Фреше, причем имеет место следующее равенство:

$$\psi_f'(u) = N_f(u) \quad \textit{для всех} \quad u \in L^p(\Omega) \quad \textit{при} \quad p \in (1, +\infty). \tag{1.6}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Для потенциальной функции $F(x,u)$, определенной формулой (1.5), имеют место следующие неравенства:

$$|F(x,u)| \leqslant \left| \int\limits_0^{u(x)} f(x,\xi)\, d\xi \right| \leqslant a|u| + \frac{b}{p}|u|^p \leqslant$$

$$\leqslant \frac{|a|^{p'}}{p'} + \frac{|u|^p}{p} + \frac{b}{p}|u|^p = a_1 + b_1|u|^p, \tag{1.7}$$

где $a_1, b_1 > 0$. Очевидно, что по своему определению потенциальная функция $F(x,u)$ является Каратеодориевой и поэтому в силу теоремы М. А. Красносельского и (1.7) приходим к выводу, что соответствующий оператор Немыцкого

$$N_F(u) : L^p(\Omega) \to L^1(\Omega)$$

и является ограниченным и непрерывным. Следовательно, функционал $\psi(u)$, определенный формулой (1.5) является ограниченным и непрерывным из $L^p(\Omega)$ в $\mathbb{R}^1$. Действительно, в силу оценки (1.7) имеет место цепочка неравенств:

$$|\psi(u)| \leqslant \int\limits_{\Omega} |F(x,u(x))|\, dx \leqslant \int\limits_{\Omega} a_1\, dx + b_1 \int\limits_{\Omega} |u|^p\, dx \leqslant a_2 + b_2\|u\|_p^p.$$

Ограниченность доказана. Докажем непрерывность. Пусть

$$u_n \to u \quad \text{сильно в} \quad L^p(\Omega).$$

Тогда

$$|\psi(u_n) - \psi(u)| \leqslant \|N_F(u_n) - N_F(u)\|_1 \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Итак, непрерывность и ограниченность функционала $\psi(u)$ доказана. Докажем теперь его дифференцируемость по Фреше. Рассмотрим следующее выражение:

$$\omega(u,v) \equiv \psi(u+v) - \psi(u) - \langle N_f(u), v\rangle \quad \text{для} \quad u,v \in L^p(\Omega).$$

$$|\omega(u,v)| \leqslant \left| \int\limits_{\Omega} [F(x,u(x)+v(x)) - F(x,u(x))]\,dx - \int\limits_{\Omega} N_f(u)(x)v(x)\,dx \right|.$$

Заметим, что имеет место цепочка равенств

$$F(x,u(x)+v(x)) - F(x,u(x)) = \\ = \int\limits_0^1 \frac{d}{dt} F(x,u(x)+tv(x))\,dt = \int\limits_0^1 f(x,u(x)+tv(x))v(x)\,dt.$$

Поэтому справедлива оценка

$$|\omega(u,v)| \leqslant \int\limits_0^1 dt \int\limits_{\Omega} dx\, |N_f(u+tv)(x) - N_f(u)(x)|\,|v(x)| \leqslant \\ \leqslant \int\limits_0^1 dt\, \|N_f(u+tv) - N_f(u)\|_{p'}\, \|v\|_p.$$

Следовательно, в силу непрерывности оператора Немыцкого $N_f(\cdot)$ имеет место предельное неравенство

$$\lim_{\|v\|_p \to 0} \frac{|\omega(u,v)|}{\|v\|_p} \leqslant \lim_{\|v\|_p \to 0} \int\limits_0^1 dt\, \|N_f(u+tv) - N_f(u)\|_{p'} = 0.$$

Лемма доказана.

§ 2. Постановка задачи Дирихле для уравнения $-\Delta u + f(x,u) = g(x)$

Прежде всего приведем классическую постановку задачи Дирихле с однородными граничными условиями в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ с гладкой границей $\partial\Omega$. Действительно, нужно найти решение $u(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\Omega) \cap \mathbb{C}(\overline{\Omega})$ следующей задачи:

$$-\Delta u + f(x,u) = g(x) \quad \text{при} \quad x \in \Omega, \tag{2.1}$$

$$u(x) = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega, \tag{2.2}$$

где $g(x) \in \mathbb{C}(\Omega)$, $f(x,u) \in \mathbb{C}(\Omega \otimes \mathbb{R}^1)$. Для того чтобы предложить слабую постановку задачи Дирихле (2.1), (2.2) нужно рассмотреть обобщенный оператор Лапласа. Действительно, в соответствии со второй тематической лекцией оператор Лапласа расширяется до оператора

$$\Delta = \operatorname{div}(D_x\cdot) : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega).$$

При этом

$$D_x : H_0^1(\Omega) \to \underbrace{L^2(D) \otimes L^2(D) \otimes \cdots \otimes L^2(D)}_{N},$$

т. е. оператор градиента D_x понимается как строка $(\partial_{x_1}, ..., \partial_{x_N})$, состоящая из слабых частных производных, которые понимаются в смысле равенства

$$\int\limits_{\Omega} \partial_{x_k} v(x)\varphi(x)\,dx = -\int\limits_{\Omega} v(x)\partial_{x_k}\varphi(x)\,dx, \quad v(x) \in H_0^1(\Omega)$$

для всех $\varphi(x) \in \mathbb{C}_0^\infty(\Omega)$, где $\partial_{x_k} v(x)$ — это слабая производная, а $\partial_{x_k}\varphi(x)$ — классическая. Наконец, оператор div понимается в смысле производных обобщенных функций из $\mathcal{D}'(\Omega)$

$$\langle \operatorname{div}\xi, \varphi(x)\rangle \overset{def:}{=} -\int\limits_{\Omega} (\xi(x), D_x\varphi(x))\,dx$$

для всех $\varphi(x) \in H_0^1(\Omega)$, $D_x\varphi(x)$ — слабый градиент,

$$\xi(x) \in \underbrace{L^2(D) \otimes L^2(D) \otimes \cdots \otimes L^2(D)}_{N},$$

$\langle\cdot,\cdot\rangle$ — это скобки двойственности между $H_0^1(\Omega)$ и $H^{-1}(\Omega)$. Итак,

$$\langle \operatorname{div}(D_x u(x)), \varphi(x)\rangle \overset{def:}{=} -\int\limits_{\Omega} (D_x u(x), D_x\varphi(x))\,dx, \tag{2.3}$$

где D_x — оператор слабого градиента. В силу этого оправдано следующее определение слабого решения задачи Дирихле (2.1), (2.2).

Определение 3. *Функция $u(x) \in H_0^1(\Omega)$ называется слабым решением задачи Дирихле* (2.1), (2.2), *если для всех $\varphi(x) \in H_0^1(\Omega)$ выполнено равенство*

$$\langle -\Delta u(x) + N_f(u) - g(x), \varphi(x)\rangle = 0, \tag{2.4}$$

где $g(x) \in H^{-1}(\Omega)$, а для каратеодориевой функции $f(x,u)$ выполнено неравенство (1.4), *причем*

$$1 < p \leqslant \frac{2N}{N-2} \quad \textit{при} \quad N \geqslant 3. \tag{2.5}$$

З а м е ч а н и е 1. Неравенство (2.5) необходимо для того, чтобы имело место плотное и непрерывное вложение [1)]

$$H_0^1(\Omega) \overset{ds}{\subset} L^p(\Omega) \Rightarrow L^{p'}(\Omega) \overset{ds}{\subset} H^{-1}(\Omega) \quad \text{при} \quad N \geqslant 3.$$

В этом случае оператор Немыцкого $N_f(u)$, порожденный функцией $f(x,u)$, действует как

$$N_f(u) : H_0^1(\Omega) \overset{ds}{\subset} L^p(\Omega) \to L^{p'}(\Omega) \overset{ds}{\subset} H^{-1}(\Omega) \quad \text{при} \quad N \geqslant 3.$$

Поэтому оператор

$$-\Delta u + f(x,u) - g(x) \in H^{-1}(\Omega).$$

Наконец, отметим, что равенство (2.4) эквивалентно равенству

$$\int\limits_\Omega (D_x u(x), D_x \varphi(x))\, dx + \int\limits_\Omega f(x,u(x))\varphi(x)\, dx = \langle g(x), \varphi(x)\rangle \tag{2.6}$$

для всех $\varphi(x) \in H_0^1(\Omega)$.

§ 3. Метод компактности

В этом параграфе мы при некоторых условиях на нелинейную функцию $f(x,u)$ докажем разрешимость в слабом смысле задачи Дирихле (2.1), (2.2). С этой целью мы воспользуемся методом Галеркина в сочетании с методом компактности.

Итак, рассмотрим линейное всюду плотное семейство функций $\{w_j\} \subset H_0^1(\Omega)$, в качестве которой можно взять систему собственных функций обобщенного оператора Лапласа в области Ω

$$\langle \Delta w_j(x) + \lambda_j w_j(x), \varphi(x)\rangle = 0 \quad \text{для всех} \quad \varphi(x) \in H_0^1(\Omega), \quad j \in \mathbb{N},$$

ортонормированную условием

$$\int\limits_\Omega (D_x w_j, D_x w_k(x))\, dx = \delta_{jk}.$$

Пусть

$$u_m(x) \overset{def}{=} \sum_{k=1}^m c_{mk} w_k(x), \quad c_m = (c_{m1}, ..., c_{mm}) \in \mathbb{R}^m. \tag{3.1}$$

Дадим определения Галеркинской системы уравнений для рассматриваемой задачи.

[1)] Т. е. оператор вложения $J_p : H_0^1(\Omega) \to L^p(\Omega)$ является, в частности, сильно непрерывным.

Определение 4. *Строка $c_m \in \mathbb{R}^m$ называется решением галеркинской системы уравнений, соответствующей слабому решению задачи Дирихле* (2.4), *если $c_m = (c_{m1}, ..., c_{mm})$ является решением системы m алгебраических уравнений*

$$\langle -\Delta u_m(x) + N_f(u_m) - g(x), w_j(x)\rangle = 0 \quad \textit{при} \quad j = \overline{1,m}. \tag{3.2}$$

Замечание 2. Заметим, что систему (3.2) $m \in \mathbb{N}$ алгебраических уравнений можно переписать в следующем виде:

$$\int\limits_\Omega (D_x u_m(x), D_x w_j(x))\, dx + \int\limits_\Omega f(x, u_m(x)) w_j(x)\, dx = \langle g(x), w_j(x)\rangle \tag{3.3}$$

при $j = \overline{1,m}$.

Предположим, что каратеодориева функция $f(x,u)$ удовлетворяет неравенствам

$$|f(x,u)| \leqslant a + b|u|^{q-1}, \quad f(x,u)u \geqslant a_1|u|^q - a_2 \quad \text{при} \quad q > 1, \tag{3.4}$$

где $a, b > 0$ и $a_1 > 0$, $a_2 \geqslant 0$.

Для доказательства существования решения $c_m \in \mathbb{R}^m$ системы галеркинских приближений (3.2) нам необходим результат — *лемма об остром угле.*

Лемма 2. *Пусть $\mathbb{T} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — непрерывное отображение, для некоторого $R > 0$ удовлетворяющее условию*

$$(\mathbb{T}a, a) \geqslant 0 \quad \textit{при} \quad |a| = R.$$

Тогда существует такое $a \in \mathbb{R}^n$, что $|a| \leqslant R$ и $\mathbb{T}a = 0$.

Доказательство.

Допустим, что

$$\mathbb{T}a \neq 0 \quad \text{для всех} \quad a \in \mathbb{K}_R = \{a | a \in \mathbb{R}^n,\ |a| \leqslant R\}.$$

Тогда отображение, определяемое по правилу

$$a \to -R\frac{\mathbb{T}a}{|\mathbb{T}a|},$$

является непрерывным отображением из K_R в K_R. В силу теоремы Брауэра о неподвижной точке существует $a \in K_R$, такое, что

$$a = -R\frac{\mathbb{T}a}{|\mathbb{T}a|}.$$

Очевидно, $|a| = R$ и $(\mathbb{T}a, a) = -R|\mathbb{T}a| < 0$, в противоречие с нашим предположением, что $(\mathbb{T}a, a) \geqslant 0$ для $|a| = R$.

Лемма доказана.

Справедливо следующее утверждение:

Лемма 3. *Система галеркинских приближений* (3.3) *имеет решение $c_m \in \mathbb{R}^m$ для каждого $m \in \mathbb{N}$.*

Доказательство.

Рассмотрим следующий оператор:

$$T(c_m) = (T_1(c_m), ..., T_m(c_m)), \tag{3.5}$$

$$T_j(c_m) = \int\limits_{\Omega} (D_x u_m(x), D_x w_j(x))\, dx + \\ + \int\limits_{\Omega} f(x, u_m(x)) w_j(x)\, dx - \langle g(x), w_j(x)\rangle. \tag{3.6}$$

Заметим, что в силу выбора системы $\{w_j\} \subset H_0^1(\Omega)$ справедлива следующая цепочка равенств:

$$T_j(c_m) = c_{mj} + \int\limits_{\Omega} f(x, u_m(x)) w_j(x)\, dx - \langle g(x), w_j(x)\rangle.$$

Отсюда в силу второго неравенства в (3.4) получим

$$(T(c_m), c_m) = \sum_{j=1}^{m} T_j(c_m) c_{mj} = \\ = |c_m|^2 + \int\limits_{\Omega} f(x, u_m(x)) u_m(x)\, dx - \langle g(x), u_m(x)\rangle \geqslant \\ \geqslant |c_m|^2 + a_1 \int\limits_{\Omega} |u_m|^q\, dx - a_2|\Omega| - \|g\|_* \|D_x u_m\|_2. \tag{3.7}$$

Заметим, что имеет место неравенство

$$\|D_x u_m\|_2 \leqslant K|c_m|, \quad K > 0,$$

где $K = K(m)$ и не зависит от c_m, в силу которого получим

$$(T(c_m), c_m) \geqslant |c_m|^2 - a_3 - K_1|c_m| \Rightarrow \exists\, R > 0,\ |c_m| = R,\ (T(c_m), c_m) \geqslant 0.$$

В силу леммы об остром угле найдется такое $c_m \in \mathbb{R}^m$ в замкнутом шаре $|c_m| \leqslant R$, что

$$T(c_m) = 0 \Rightarrow T_j(c_m) = 0 \quad \text{для всех} \quad j = \overline{1, m}.$$

Лемма доказана.

Теперь нам нужно получить априорную оценку для галеркинских приближений, чтобы затем воспользоваться *методом компактности*. Справедлива следующая лемма:

Лемма 4. *Найдется такая постоянная* $K_2 > 0$, *не зависящая от* $m \in \mathbb{N}$, *что имеет место априорная оценка*

$$\|D_x u_m\|_2 \leqslant K_2 < +\infty \tag{3.8}$$

для всех $m \in \mathbb{N}$.

Доказательство.

Умножим обе части равенства (3.3) на c_{mj} и просуммируем обе части получившегося равенства по $j = \overline{1, m}$. В результате получим следующее равенство:

$$\int\limits_{\Omega} |D_x u_m(x)|^2 \, dx + \int\limits_{\Omega} f(x, u_m(x)) u_m(x) \, dx = \langle g(x), u_m(x) \rangle. \tag{3.9}$$

Воспользуемся теперь вторым неравенством в (3.4) и получим неравенство

$$\int\limits_{\Omega} |D_x u_m(x)|^2 \, dx + a_1 \int\limits_{\Omega} |u_m(x)|^q \, dx - a_2 \leqslant \|g\|_* \|D_x u_m\|_2,$$

из которого легко выводится оценка (3.8) с некоторой постоянной K_2, не зависящей от $m \in \mathbb{N}$. Действительно, имеем

$$\|D_x u_m\|_2^2 \leqslant a_2 + \|g\|_* \|D_x u_m\|_2 \leqslant a_2 + \frac{1}{2} \|D_x u_m\|_2^2 + \frac{1}{2} \|g\|_*^2.$$

Откуда получаем искомую оценку

$$\|D_x u_m\|_2 \leqslant K_2 \stackrel{def:}{=} \left(2a_2 + \|g\|_*^2\right)^{1/2}.$$

Лемма доказана.

Теперь мы можем сделать следующее утверждение, как следствие *компактного вложения* пространства $H_0^1(\Omega)$ в $L^q(\Omega)$ при условии

$$1 < q < \frac{2N}{N-2} \quad \text{при} \quad N \geqslant 3. \tag{3.10}$$

Лемма 5. *Существует такая подпоследовательность* $\{u_{m_n}\} \subset \subset \{u_m\}$, *что*

$$u_{m_n}(x) \rightharpoonup u(x) \in H_0^1(\Omega) \quad \textit{слабо в} \quad H_0^1(\Omega), \tag{3.11}$$

$$u_{m_n}(x) \to u(x) \in H_0^1(\Omega) \quad \textit{сильно в} \quad L^q(\Omega) \tag{3.12}$$

при условиях (3.10).

Доказательство.

В силу рефлексивности банахова пространства $H_0^1(\Omega)$ и результата (3.8) вытекает существование такой подпоследовательности $\{u_{m_n}\} \subset \subset \{u_m\}$, что имеет место предельное свойство (3.11). А в силу вполне непрерывного вложения [1]) $H_0^1(\Omega)$ в $L^q(\Omega)$ при указанных условиях на q имеет место предельное свойство (3.12).

[1]) Линейный вполне непрерывный оператор (например, вполне непрерывный оператор вложения) является полностью непрерывным, т. е. переводит всякую слабо сходящуюся последовательность в сильно сходящуюся.

Лемма доказана.

Теперь мы в состоянии произвести предельный переход в равенстве (3.3). Действительно, в силу (3.11) имеем

$$\int\limits_{\Omega} (D_x u_m(x), D_x w_j(x))\, dx \to \int\limits_{\Omega} (D_x u(x), D_x w_j(x))\, dx$$

при $m \to +\infty$ и для всех $j \in \mathbb{N}$. А в силу теоремы М. А. Красносельского об операторе Немыцкого в силу (3.12) и (3.4) имеем

$$N_f(u_m) \to N_f(u) \quad \text{сильно в} \quad L^{q'}(\Omega) \quad \text{при} \quad m \to +\infty.$$

Поэтому

$$\left|\int\limits_{\Omega} [f(x, u_m(x)) - f(x, u(x))]\, w_j(x)\, dx\right| \leqslant \|N_f(u_m) - N_f(u)\|_{q'} \|w_j\|_q \leqslant \leqslant c(j) \|N_f(u_m) - N_f(u)\|_{q'} \to +0$$

при $m \to +\infty$. Итак, переходя к пределу при $m \to +\infty$ в равенстве (3.3) мы получим следующее равенство:

$$\int\limits_{\Omega} (D_x u(x), D_x w_j(x))\, dx + \int\limits_{\Omega} f(x, u(x)) w_j(x) = \langle g(x), w_j(x)\rangle$$

для всех $j \in \mathbb{N}$. В силу плотности системы функций $\{w_j\}$ в $H_0^1(\Omega)$ мы отсюда получим равенство

$$\int\limits_{\Omega} (D_x u(x), D_x \varphi(x))\, dx + \int\limits_{\Omega} f(x, u(x)) \varphi(x) = \langle g(x), \varphi(x)\rangle \tag{3.13}$$

для всякого $\varphi(x) \in H_0^1(\Omega)$.

Таким образом, мы доказали существование слабого решения рассматриваемой задачи Дирихле.

§ 4. Метод верхних и нижних решений

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — это ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$. Кроме того, пусть $f(x, u) \in \mathbb{C}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^1; \mathbb{R}^1)$ и $f(x, u)$ для всех $x \in \Omega$ дифференцируема по $u \in \mathbb{R}^1$ и для $f(x, u)$ выполнено неравенство

$$|f(x_1, u) - f(x_2, u)| \leqslant K(u)\, |x_1 - x_2|^{\beta} \quad \text{для всех} \quad x_1, x_2 \in \Omega, \tag{4.1}$$

где $\beta \in (0, 1]$ и $0 < K(u) < +\infty$ для ограниченных $|u| \leqslant M < +\infty$. Наконец, пусть

$$|f_u(x, u)| \leqslant D < +\infty \quad \text{для всех} \quad x \in \overline{\Omega}, \quad |u| \leqslant M. \tag{4.2}$$

Рассмотрим следующую задачу Дирихле:

$$-\Delta u = f(x,u) \quad \text{при} \quad x \in \Omega, \quad u(x) = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega. \tag{4.3}$$

Будем рассматривать классические решения этой задачи класса $u(x) \in \in \mathbb{C}^{(2)}(\Omega) \cap \mathbb{C}(\overline{\Omega})$.

Дадим определение нижнего решения (субрешения).

Определение 5. *Функция $\underline{U}(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\Omega) \cap \mathbb{C}(\overline{\Omega})$, удовлетворяющая задаче*

$$-\Delta \underline{U}(x) \leqslant f(x, \underline{U}(x)) \quad \textit{в} \quad \Omega, \quad \underline{U}(x) \leqslant 0 \quad \textit{на} \quad \partial\Omega. \tag{4.4}$$

называется нижним решением задачи (4.3).

Дадим определение верхнего решения (суперрешения).

Определение 6. *Функция $\overline{U}(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\Omega) \cap \mathbb{C}(\overline{\Omega})$, удовлетворяющая задаче*

$$-\Delta \overline{U}(x) \geqslant f(x, \overline{U}(x)) \quad \textit{в} \quad \Omega, \quad \overline{U}(x) \geqslant 0 \quad \textit{на} \quad \partial\Omega. \tag{4.5}$$

называется верхним решением задачи (4.3).

Справедлива следующая теорема:

Теорема 1. *Пусть $\underline{U}(x)$ и $\overline{U}(x)$ — это нижнее и верхнее решение задачи* (4.3) *такие, что*

$$\underline{U}(x) \leqslant \overline{U}(x) \quad \textit{при} \quad x \in \Omega.$$ [1]

Тогда следующие утверждения имеют место:

(i) *существует решение задачи* (4.3), *удовлетворяющее неравенствам*

$$\underline{U}(x) \leqslant u(x) \leqslant \overline{U}(x) \quad \textit{при} \quad x \in \Omega. \tag{4.6}$$

(ii) *существует минимальное и максимальное решения $\overline{u}(x)$ и $\underline{u}(x)$ задачи* (4.3) *такие, что*

$$\underline{U}(x) \leqslant \underline{u}(x) \leqslant \overline{u}(x) \leqslant \overline{U}(x) \quad \textit{при} \quad x \in \Omega. \tag{4.7}$$

Доказательство.

Шаг 1. Рассмотрим функцию

$$g(x,u) \overset{def:}{=} f(x,u) + au, \quad a \in \mathbb{R}^1. \tag{4.8}$$

Мы выберем $a \geqslant 0$ настолько большим, что отображение

$$u \to g(x,u)$$

[1] Заметим, что можно привести такой пример, в котором это неравенство нарушено во всей области.

является возрастающим на сегменте $u(x) \in [\underline{U}(x); \overline{U}(x)]$ для каждого $x \in \Omega$. С этой целью достаточно взять такое $a \geqslant 0$ и

$$a \geqslant \max\left\{-f_u(x,u);\ x \in \overline{\Omega},\ u \in [\underline{U}(x); \overline{U}(x)]\right\}. \,^{1)} \tag{4.9}$$

Шаг 2. Вместо исходной задачи (4.3) рассмотрим эквивалентную ей следующую задачу:

$$-\Delta u + au = g(x,u) \quad \text{при} \quad x \in \Omega, \quad u(x) = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega. \tag{4.10}$$

Наконец, рассмотрим следующую линейную задачу для реккурентного определения $u_n(x)$ по $u_{n-1}(x)$:

$$-\Delta u_n + au_n = g(x,u_{n-1}) \quad \text{при} \quad x \in \Omega, \quad u_n(x) = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega, \tag{4.11}$$

причем $u_0(x) = \overline{U}(x)$. Справедливо промежуточное утверждение:
Лемма 6. *Имеет место цепочка неравенств*:

$$\underline{U}(x) \leqslant \cdots \leqslant u_{n+1}(x) \leqslant u_n(x) \leqslant \cdots \leqslant u_0(x) = \overline{U}(x) \tag{4.12}$$

для всех $x \in \Omega$.

Доказательство.

Для доказательства этого утверждения мы воспользуемся слабым принципом максимума. Прежде всего докажем, что

$$u_1(x) \leqslant u_0(x) = \overline{U}(x).$$

Согласно определению $u_1(x)$ и $\overline{U}(x)$ мы получим неравенство

$$\begin{aligned}
-\,\Delta\left(\overline{U}(x) - u_1(x)\right) + a\left(\overline{U}(x) - u_1(x)\right) \geqslant& \\
\geqslant g(x,\overline{U}(x)) - g(x,u_0(x)) =& \\
= g(x,\overline{U}(x)) - g(x,\overline{U}(x)) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \Omega,& \quad (4.13)
\end{aligned}$$

$$\overline{U}(x) - u_1(x) \geqslant 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega. \tag{4.14}$$

Согласно слабому принципу максимума имеем

$$\overline{U}(x) \geqslant u_1(x) \quad \text{в} \quad \Omega. \tag{4.15}$$

Теперь заметим, что имеет место неравенство

$$\begin{aligned}
-\,\Delta\left(\underline{U}(x) - u_1(x)\right) + a\left(\underline{U}(x) - u_1(x)\right) \leqslant& \\
\leqslant g(x,\underline{U}(x)) - g(x,\overline{U}) \leqslant 0,& \quad (4.16)
\end{aligned}$$

$$\underline{U}(x) - u_1(x) \leqslant 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega. \tag{4.17}$$

В силу слабого принципа максимума имеем

$$u_1(x) \geqslant \underline{U}(x) \quad \text{в} \quad x \in \Omega. \tag{4.18}$$

---

1) Этому условию удовлетворяет, в частности, функция $f(x,u) = |u|^q u$ при $q > 0$, а также произвольного вида функция $f(u)$ такая, что $|f^{'}(t)| \leqslant b$.

Воспользуемся методом математической индукции. Предположим, что

$$\underline{U}(x) \leqslant \cdots \leqslant u_n(x) \leqslant u_{n-1}(x) \leqslant \\ \leqslant \cdots \leqslant u_1(x) \leqslant u_0(x) = \overline{U}(x) \quad \text{в} \quad \Omega. \quad (4.19)$$

Докажем, что отсюда следует

$$\underline{U}(x) \leqslant u_{n+1}(x) \leqslant u_n(x). \quad (4.20)$$

Действительно, используя реккурентные формулы для $u_{n+1}(x)$ и $u_n(x)$ при $n \geqslant 1$, мы получим

$$- \Delta(u_n(x) - u_{n+1}(x)) + a\,(u_n(x) - u_{n+1}(x)) = \\ = g(x, u_{n-1}) - g(x, u_n) \geqslant 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \quad (4.21)$$

$$u_n(x) - u_{n+1}(x) = 0 \geqslant 0. \quad (4.22)$$

В силу слабого принципа максимума имеем

$$u_n(x) \geqslant u_{n+1}(x) \quad \text{в} \quad \Omega. \quad (4.23)$$

Теперь заметим, что в силу определения нижнего решения $\underline{U}(x)$ имеем

$$-\Delta\underline{U}(x) + a\underline{U}(x) \leqslant g(x, \underline{U}) \quad \text{в} \quad \Omega, \quad (4.24)$$

$$\underline{U}(x) \leqslant 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega. \quad (4.25)$$

В силу реккурентного определения $u_{n+1}(x)$ имеем

$$- \Delta\,(u_{n+1}(x) - \underline{U}(x)) + a\,(u_{n+1}(x) - \underline{U}(x)) \geqslant \\ \geqslant g(x, u_n) - g(x, \underline{U}) \geqslant 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \quad (4.26)$$

$$u_{n+1}(x) - \underline{U}(x) \geqslant 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega. \quad (4.27)$$

Снова в силу слабого принципа максимума имеем

$$\underline{U}(x) \leqslant u_{n+1}(x) \quad \text{в} \quad \Omega.$$

Промежуточная лемма доказана.

Шаг 3. В силу результата леммы 6 существует такая функция $u(x)$, что для всех $x \in \Omega$ выполнено предельное свойство

$$u_n(x) \searrow u(x) \quad \text{при} \quad n \to +\infty. \quad (4.28)$$

Наша задача перейти к пределу при $n \to +\infty$ в реккурентном равенстве (4.11) и доказать, что $u(x)$ является решением предельного равенства.

Рассмотрим функциональную последовательность

$$g_n(x) \stackrel{def:}{=} g(x, u_n(x)),$$

$$g(x, \underline{U}(x)) \leqslant g_{n+1}(x) \leqslant g_n(x) \leqslant g(x, \overline{U}(x)) \Rightarrow g_n(x) \in L^\infty(\Omega)$$

равномерно [1] по $n \in \mathbb{N}$, а поскольку область Ω ограничена, то

$$g_n(x) \in L^p(\Omega) \quad \text{для всех} \quad p \in [1, +\infty] \tag{4.29}$$

равномерно по $n \in \mathbb{N}$. [2]

Тогда в силу известной оценки Шаудера [3] в $W^{2,p}(\Omega)$ при любом $p \in (1, +\infty)$ для решения $u_n(x)$ уравнения (4.11) выполнено следующее неравенство:

$$\|u_n\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leqslant c_3 < +\infty, \tag{4.30}$$

где постоянная $c_3 > 0$ не зависит от $n \in \mathbb{N}$.

Заметим, что при $p > N/2$ имеет место непрерывное вложение

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathbb{C}^{1,\alpha}(\overline{\Omega}), \quad \alpha = 1 - \frac{N}{2p} \in (0, 1).$$

Стало быть, в силу (4.29) имеет место априорная оценка

$$\|u_n\|_{\mathbb{C}^{1,\alpha}(\overline{\Omega})} \leqslant c_4 < +\infty, \tag{4.31}$$

где постоянная $c_4 > 0$ не зависит от $n \in \mathbb{N}$. Поскольку $g(x, z)$ дифференцируема по $z \in \mathbb{R}^1$ в силу формула Лагранжа имеем [4]

$$\begin{gathered}|f(x_1, u_n(x_1)) - f(x_2, u_n(x_2))| \leqslant \\ \leqslant |f(x_1, u_n(x_1)) - f(x_2, u_n(x_1))| + |f(x_2, u_n(x_1)) - f(x_2, u_n(x_2))| \leqslant \\ \leqslant K(u_n)|x_1 - x_2|^\beta + \\ + \max\{|f_z(x_2, u_n(x_1))|, |f_z(x_2, u_n(x_2))|\} |u_n(x_1) - u_n(x_2)| \leqslant \\ \leqslant K|x_1 - x_2|^\beta + D|x_2 - x_1|.\end{gathered} \tag{4.32}$$

Поскольку область Ω ограничена, то из (4.33) мы получим итоговую оценку

$$|f(x_1, u_n(x_1)) - f(x_2, u_n(x_2))| \leqslant B|x_2 - x_1|^\beta,$$

а постоянная $B > 0$ не зависит от $n \in \mathbb{N}$. Отсюда сразу же получаем, что

---

[1] Т. е. имеет место оценка $|g_n(x)| \leqslant c_1 < +\infty$, где постоянная $c_1 > 0$ не зависит от $n \in \mathbb{N}$.

[2] Т. е. имеет место оценка $\|g_n(x)\|_p \leqslant c_2 < +\infty$, где постоянная $c_2 > 0$ не зависит от $n \in \mathbb{N}$.

[3] Существует альтернативный подход на основе использования интеполяционных неравенств для шаудеровских полунорм, который позволяет без привлечения априорных оценок Шаудера в $W^{2,p}(\Omega)$ получить разрешимость в пространстве Гельдера $\mathbb{C}^{2+\alpha}(\Omega)$. Этот подход будет в дальнейшем применен во втором параграфе восьмой тематической лекции для доказательства локальной разрешимости первой краевой задачи для параболического уравнения.

[4] Если $f(x, u) = f(u)$, то при указанных условиях получим сразу же $f(u(x)) \in \mathbb{C}^\alpha(\overline{\Omega})$ и далее можно воспользоваться классической $\mathbb{C}^{2+\alpha}$ априорной оценкой Шаудера.

$$
\begin{aligned}
&|g(x_1, u_n(x_1)) - g(x_2, u_n(x_2))| \leqslant \\
&\qquad\qquad \leqslant a\,|u_n(x_1) - u_n(x_2)| + B|x_2 - x_1|^\beta \leqslant \\
&\qquad\qquad\quad \leqslant D|x_2 - x_1| + B|x_2 - x_1|^\beta \leqslant M_1|x_1 - x_2|^\beta, \quad (4.33)
\end{aligned}
$$

где постоянная $D > 0$ не зависит от $n \in \mathbb{N}$. Отсюда в силу классической априорной оценки Шаудера для решения задачи (4.11) получим оценку

$$\|u_n\|_{\mathbb{C}^{2+\beta}(\overline{\Omega})} \leqslant c_5 < +\infty, \tag{4.34}$$

где постоянная $0 < c_5$ не зависит от $n \in \mathbb{N}$.

Шаг 4. В силу известного результата существует такая подпоследовательность $\{u_{n_k}\} \subset \{u_n\}$, что

$$u_{n_k}(x) \to u(x) \in \mathbb{C}^{2+\beta}(\overline{\Omega}) \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{C}^{(2)}(\overline{\Omega}) \tag{4.35}$$

при $n_k \to +\infty$. Рассмотрим соответствующую задачу

$$-\Delta u_{n_k} + a u_{n_k} = g(x, u_{n_k - 1}) \quad \text{при} \quad x \in \Omega, \tag{4.36}$$

$$u_{n_k}(x) = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega. \tag{4.37}$$

В силу (4.35) мы можем перейти к пределу при $n_k \to +\infty$, заметив, что для подпоследовательности $\{u_{n_k - 1}\} \subset \{u_n\}$ выполнено предельное свойство

$$g(x, u_{n_k - 1}) \searrow g(x, u) \quad \text{при} \quad n_k \to +\infty$$

для всех $x \in \Omega$. В результате получим равенства для $u(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\overline{\Omega})$

$$-\Delta u(x) + a u(x) = g(x, u) = a u(x) + f(x, u(x)) \quad \text{при} \quad x \in \Omega,$$

$$u(x) = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega.$$

Шаг 5. Итак, мы доказали существование решения $\overline{u}(x) \in \mathbb{C}^{2,\beta}(\Omega)$, удовлетворяющего неравенству

$$\underline{U}(x) \leqslant \overline{u}(x) \leqslant \overline{U}(x) \quad \text{при} \quad x \in \Omega.$$

Если воспользоваться уже проведенной схемой доказательства при выборе $u_0(x) = \underline{U}(x)$, то мы получим в результате итерационного процесса $\{u^m(x)\}$ решение $\underline{u}(x) \in \mathbb{C}^{2+\beta}(\Omega)$, удовлетворяющего неравенству

$$\underline{U}(x) \leqslant \underline{u}(x) \leqslant \overline{U}(x) \quad \text{при} \quad x \in \Omega$$

и

$$u^m(x) \nearrow \underline{u}(x) \quad \text{при} \quad m \to +\infty.$$

Исходя из итерационного процесса можно доказать, что для всех $m, n \in \mathbb{N}$ соответствующие итерационные последовательности $\{u_n(x)\}$ и $\{u^m(x)\}$ связаны неравенством

$$
\begin{aligned}
&\underline{U}(x) \leqslant \cdots \leqslant u^m(x) \leqslant u^{m+1}(x) \leqslant \cdots \leqslant \underline{u}(x) \leqslant \\
&\quad \leqslant \overline{u}(x) \leqslant \cdots \leqslant u_{n+1}(x) \leqslant u_n(x) \leqslant \cdots \leqslant \overline{U}(x) \quad \text{при} \quad x \in \Omega. \quad (4.38)
\end{aligned}
$$

Шаг 6. Пусть $u(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\Omega) \cap \mathbb{C}(\overline{\Omega})$ — это произвольное решение задачи Дирихле (4.3), тогда ,очевидно, $u(x)$ — это нижнее решение задачи Дирихле. Поэтому если в наших рассуждениях взять в качестве $\underline{U}(x) = u(x)$ и провести итерационный процесс $\{u_n(x)\}$ мы в результате получим, что

$$u(x) = \underline{U}(x) \leqslant \overline{u}(x) \quad \text{для всех} \quad x \in \Omega. \tag{4.39}$$

Теперь заметим, что, с другой стороны, $u(x)$ является верхним решением $\overline{U}(x)$, поэтому если рассмотреть итерационный процесс $\{u^m(x)\}$ взяв в качестве $\overline{U}(x) = u(x)$ мы получим неравенство

$$\underline{u}(x) \leqslant \overline{U}(x) = u(x) \quad \text{для всех} \quad x \in \Omega. \tag{4.40}$$

Итак, из неравенств (4.39), (4.40) и (4.38) мы получим неравенства

$$\underline{u}(x) \leqslant u(x) \leqslant \overline{u}(x) \quad \text{для всех} \quad x \in \Omega.$$ [1)]

Поэтому $\underline{u}(x)$ — это минимальное решение, а $\overline{u}(x)$ — это максимальное решение задачи Дирихле (4.3).

Теорема доказана.

§ 5. Метод слабых верхних и нижних решений

В этом параграфе мы рассмотрим метод слабых нижних и верхних решений для нелинейного уравнения Пуассона в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ при $N \geqslant 3$ с гладкой границей $\partial\Omega$

$$-\Delta u = f(x, u) \quad \text{в} \quad \Omega, \quad u = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega, \tag{5.1}$$

где

$$f(x, u) : \overline{\Omega} \otimes \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$$

— это непрерывная функция и

$$|f(x, u)| \leqslant a_1 + b_1 |u|^{q+1}, \quad 0 < q \leqslant \frac{4}{N-2}, \tag{5.2}$$

где постоянные $a_1, b_1 \geqslant 0$ и

$$a_1 + b_1 > 0.$$

Причем либо

$$f_u'(x, u) \geqslant 0 \quad \text{либо} \quad |f_u'(x, u)| \leqslant a \tag{5.3}$$

[1)] Заметим, что результат имеет смысл, поскольку исходная задача Дирихле при $f(x, u) = |u|^q u$ и $q > 0$ имеет счетное множество линейно независимых в $H_0^1(\Omega)$ решений.

для всех $x \in \Omega$ и $u \in \mathbb{R}^1$. Здесь мы будем использовать следующие обозначения [1])

$$H_0^1(\Omega) \stackrel{def:}{=} W_0^{1,2}(\Omega), \quad H^{-1}(\Omega) \stackrel{def:}{=} W^{-1,2}(\Omega).$$

Определение 7.

(i) *Функция* $\overline{U} \in H^1(\Omega) \cap \mathbb{C}(\overline{\Omega})$ *называется слабым верхним решением задачи* (5.1), *если*

$$\int\limits_{\Omega} \left(D\overline{U}, Dv\right)\, dx \geqslant \int\limits_{\Omega} f(x, \overline{U}) v\, dx \tag{5.4}$$

для любой функции $v \in H_0^1(\Omega)$, $v \geqslant 0$ *почти всюду*.

(ii) *Функция* $\underline{U} \in H^1(\Omega) \cap \mathbb{C}(\overline{\Omega})$ *называется слабым нижним решением задачи* (5.1), *если*

$$\int\limits_{\Omega} (D\underline{U}, Dv)\, dx \leqslant \int\limits_{\Omega} f(x, \underline{U}) v\, dx \tag{5.5}$$

для любой функции $v \in H_0^1(\Omega)$, $v \geqslant 0$ *почти всюду*.

(iii) *Функция* $u \in H^1(\Omega) \cap \mathbb{C}(\overline{\Omega})$ *называется слабым решением задачи* (5.1), *если*

$$\int\limits_{\Omega} (Du, Dv)\, dx = \int\limits_{\Omega} f(x, u) v\, dx \tag{5.6}$$

для любой функции $v \in H_0^1(\Omega)$.

Замечание 1. Если $\overline{U}, \underline{U} \in \mathbb{C}^2(\Omega) \cap \mathbb{C}(\overline{\Omega})$, то из (5.4) и (5.5) получаем

$$-\Delta\overline{U} \geqslant f(x, \overline{U}), \quad -\Delta\underline{U} \leqslant f(x, \underline{U}) \quad \text{в} \quad \Omega,$$

что соответствует классическим определениям верхних и нижних решений. [2])

Теорема 2. *Пусть существует верхнее* $\overline{U}$ *и нижнее* $\underline{U}$ *решения задачи* (5.1) *такие, что*

$$\underline{U} \leqslant 0, \quad \overline{U} \geqslant 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega \quad \text{в смысле следов,} \quad \underline{U} \leqslant \overline{U} \quad \text{п.в.} \quad \text{в} \quad \Omega. \tag{5.7}$$

Тогда существует слабое решение u *задачи* (5.1) *такое, что*

$$\underline{U} \leqslant u \leqslant \overline{U} \quad \text{п.в.} \quad \text{в} \quad \Omega.$$

Доказательство.

[1]) Смотри вторую тематическую лекцию.

[2]) Идея доказательства этого утверждения такая — пусть в какой–то точке $x_0 \in \Omega$ выражение $-\Delta\overline{U} < f(x, \overline{U})$, но тогда в силу непрерывности этого выражения и в некоторой замкнутой ее окрестности знак будет тот же. Теперь достаточно взять $v(x) \geqslant 0$ с носителем, лежащим в этой замкнутой окрестности и получить противоречие с определением слабого верхнего решения $\overline{U}(x)$.

Доказательство проведем в несколько шагов.

Шаг 1. Фиксируем достаточно большое $\lambda > 0$ так, что отображение

$$z \to f(x,z) + \lambda z \tag{5.8}$$

неубывающее для всех $x \in \Omega$. Такой выбор возможен в силу условия (5.3).

Теперь запишем $u_0 = \underline{U}$ и при заданных u_k $(k = 0, 1, 2...)$ индуктивно определим $u_{k+1} \in H_0^1(\Omega)$ как единственное слабое решение линейной краевой задачи

$$-\Delta u_{k+1} + \lambda u_{k+1} = f(x, u_k) + \lambda u_k \quad \text{в} \quad \Omega, \quad u_{k+1} = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega. \tag{5.9}$$

Шаг 2. Покажем, что

$$\underline{U} = u_0 \leqslant u_1 \leqslant \cdots \leqslant u_k \leqslant u_{k+1} \cdots \quad \text{п.в.} \quad \Omega. \tag{5.10}$$

1. Для этого сначала заметим, что в силу (5.9) при $k = 0$

$$\int\limits_\Omega ((Du_1, Dv) + \lambda u_1 v)\, dx = \int\limits_\Omega (f(x, u_0) + \lambda u_0)\, v\, dx \tag{5.11}$$

для любой $v \in H_0^1(\Omega)$. Вычитая (5.11) из (5.5) [1], получим следующее неравенство:

$$\int\limits_\Omega [(Du_0 - Du_1, Dv) + \lambda(u_0 - u_1, v)]\, dx \leqslant 0, \quad u_0 = \underline{U},$$

и полагая

$$v = (u_0 - u_1)^+ \in H_0^1(\Omega), \quad v \geqslant 0 \quad \text{почти всюду},$$

находим

$$\int\limits_\Omega \left(D(u_0 - u_1), D(u_0 - u_1)^+ + \lambda(u_0 - u_1)(u_0 - u_1)^+\right)\, dx \leqslant 0. \tag{5.12}$$

Однако,

$$D(u_0 - u_1)^+ = \begin{cases} D(u_0 - u_1) & \text{почти всюду на} \quad \{u_0 \geqslant u_1\}, \\ 0 & \text{почти всюду на} \quad \{u_1 \geqslant u_0\}. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\int\limits_{u_0 \geqslant u_1} \left[|D(u_0 - u_1)|^2 + \lambda(u_0 - u_1)^2\right]\, dx \leqslant 0,$$

откуда вытекает, что

$$u_0(x) \leqslant u_1(x) \quad \text{почти всюду на} \quad \Omega.$$

[1] Предварительно нужно в неравенстве (5.5) прибавить к обеим частям этого неравенства слагаемое $\lambda\underline{U}(x)$. Напомним, что $\underline{U}(x) = u_0(x)$.

2. Теперь по индукции предположим, что

$$u_{k-1}(x) \leqslant u_k(x) \quad \text{п.в. в} \quad \Omega. \tag{5.13}$$

Из (5.9) находим

$$\int\limits_\Omega [(Du_{k+1}, Dv) + \lambda u_{k+1} v] \, dx = \int\limits_\Omega (f(x, u_k) + \lambda u_k) \, v \, dx \tag{5.14}$$

и

$$\int\limits_\Omega [(Du_k, Dv) + \lambda u_k v] \, dx = \int\limits_\Omega (f(x, u_{k-1}) + \lambda u_{k-1}) \, v \, dx \tag{5.15}$$

для любых $v \in H_0^1(\Omega)$. Вычитая и полагая

$$v \equiv (u_k - u_{k+1})^+ ,$$

находим

$$\int\limits_{u_k \geqslant u_{k+1}} \left[\left| D(u_k - u_{k+1}) \right|^2 + \lambda \left(u_k - u_{k+1} \right)^2 \right] dx =$$

$$= \int\limits_\Omega [(f(x, u_{k-1}) + \lambda u_{k-1}) - (f(x, u_k) + \lambda u_k)] \, (u_k - u_{k+1})^+ \, dx \leqslant 0.$$

Последнее неравенство верно в силу (5.13) и (5.8). Поэтому $u_k \leqslant u_{k+1}$ почти всюду в Ω, как и утверждалось.

Шаг 3. Теперь покажем, что

$$u_k \leqslant \overline{U} \quad \text{почти всюду в} \quad \Omega \quad (k = 0, 1, 2...). \tag{5.16}$$

При $k = 0$ (5.16) верно в силу (5.7). Пусть для некоторого k

$$u_k \leqslant \overline{U} \quad \text{почти всюду в} \quad \Omega. \tag{5.17}$$

Вычитая (5.4) из (5.14) и полагая

$$v \equiv \left(u_{k+1} - \overline{U} \right)^+ ,$$

находим

$$\int\limits_{u_{k+1} \geqslant \overline{U}} \left[\left| D(u_{k+1} - \overline{U}) \right|^2 + \lambda (u_{k+1} - \overline{U})^2 \right] dx \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_\Omega \left[(f(x, u_k) + \lambda u_k) - (f(x, \overline{U}) + \lambda \overline{U}) \right] \left(u_{k+1} - \overline{U} \right)^+ \, dx \leqslant 0$$

в силу (5.17) и (5.8). Таким образом, $u_{k+1} \leqslant \overline{U}$ почти всюду в Ω.

Шаг 4.

1. Ввиду (5.10) и (5.16)

$$\underline{U} \leqslant \cdots \leqslant u_k \leqslant u_{k+1} \leqslant \cdots \leqslant \overline{U} \quad \text{почти всюду в} \quad \Omega. \tag{5.18}$$

Поэтому
$$u(x) \equiv \lim_{k\to+\infty} u_k(x) \tag{5.19}$$
существует для почти всех $x \in \Omega$. Кроме того,
$$u_k \to u \quad \text{сильно в} \quad L^{q+2}(\Omega) \subset L^2(\Omega), \quad q \geqslant 0 \tag{5.20}$$
что гарантируется теоремой о мажорируемой сходимости и (5.18).

□ Действительно, имеем
$$\int\limits_\Omega |u_k(x) - u(x)|^{q+2}\,dx \leqslant c(q)\int\limits_\Omega |V(x)|^{q+2}\,dx < +\infty,$$
$$V(x) \stackrel{def:}{=} \max\left\{|\underline{U}(x)|, |\overline{U}(x)|\right\} \in \mathbb{C}(\overline{\Omega}).$$
В совокупности с (5.19) получаем утверждение. ⊠

2. Наконец, в силу того, что функция $f(x,u)$ каратеодориева с условием роста (5.3), то соответствующий оператор Немыцкого
$$N_f(u) : L^{q+2}(\Omega) \to L^{(q+2)/(q+1)}(\Omega)$$
является сильно непрерывным, т. е., в частности, в силу (5.20)
$$\|N_f(u_n) - N_f(u)\|_{(q+2)/(q+1)} \to +0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty. \tag{5.21}$$

3. Из (5.9) скалярным в смысле скобок двойственности
$$\langle\cdot,\cdot\rangle : H^{-1}(\Omega)\otimes H^1_0(\Omega) \to \mathbb{R}^1$$
умножением на $u_{k+1} \in H^1_0(\Omega)$ получаем равенство
$$\langle -\Delta u_{k+1} + \lambda u_{k+1}, u_{k+1}\rangle = \langle f(x,u_k) + \lambda u_k, u_{k+1}\rangle\,.$$
После «интегрирования по частям» отсюда получим следующую цепочку выражений:
$$\|Du_{k+1}\|^2_{L^2(\Omega)} + \lambda\|u_{k+1}\|^2_{L^2(\Omega)} = \int\limits_\Omega f(x,u_k)u_{k+1}\,dx + \lambda\int\limits_\Omega u_k u_{k+1}\,dx.$$
Справедлива следующая цепочка неравенств:
$$\left|\int\limits_\Omega f(x,u_k)u_{k+1}\,dx\right| \leqslant a_1\int\limits_\Omega |u_{k+1}|\,dx + b_1\int\limits_\Omega |u_k|^{q+1}|u_{k+1}|\,dx \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon\|u_{k+1}\|^2_2 + c_1(\varepsilon) + b_1\|u_k\|^{q+1}_{q+2}\|u_{k+1}\|_{q+2}. \tag{5.22}$$
Заметим, что
$$\underline{U}(x) \leqslant u_k(x) \leqslant \overline{U}(x) \quad \text{для п. вс.} \quad x\in\Omega,$$
причем
$$\underline{U}(x), \overline{U}(x) \in H^1(\Omega) \subset L^{q+2}(\Omega).$$

Поэтому

$$|u_k(x)| \leqslant V(x) \stackrel{def:}{=} \max\left\{|\underline{U}(x)|\,,\left|\overline{U}(x)\right|\right\} \in L^{q+2}(\Omega) \subset L^2(\Omega)$$

для почти всех $x \in \Omega$. Тогда имеем

$$b_1\|u_k\|_{q+2}^{q+1}\|u_{k+1}\|_{q+2} \leqslant b_1\|V(x)\|_{q+2}^{q+1}K_{fr}\|Du_{k+1}\|_2, \tag{5.23}$$

где K_{fr} — это постоянная Фридрихса. Далее применяя трехпараметрическое с малым $\varepsilon > 0$ к правой части в (5.23), мы получим неравенство

$$\left|\int\limits_{\Omega} f(x,u_k)u_{k+1}\,dx\right| \leqslant c_2(\varepsilon) + \varepsilon\|u_{k+1}\|_2^2 + \varepsilon\|Du_{k+1}\|_2^2. \tag{5.24}$$

Также справедливо очевидное неравенство

$$\lambda\left|\int\limits_{\Omega} u_k u_{k+1}\,dx\right| \leqslant \\ \leqslant \varepsilon\|u_{k+1}\|_2^2 + c(\varepsilon)\|u_k\|_2^2 \leqslant \varepsilon\|u_{k+1}\|_2^2 + c(\varepsilon)\|V(x)\|_2^2. \tag{5.25}$$

В силу (5.22) и неравенств (5.24), (5.25) мы получим неравенство

$$(1-\varepsilon)\|Du_{k+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + (\lambda - 2\varepsilon)\|u_{k+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leqslant \\ \leqslant c_3(\varepsilon), \quad \varepsilon \in (0, \min\{1, \lambda/2\})\,. \tag{5.26}$$

Из оценки (5.26) мы приходим к выводу о том, что последовательность $\{u_k\}$ равномерно по $k \in \mathbb{N}$ ограничена в $H^1(\Omega)$. Поскольку гильбертово пространство $H^1(\Omega)$ рефлексивно [1]), то существует такая подпоследовательность $\{u_{k_j}\} \subset \{u_k\}$, что

$$u_{k_j}(x) \rightharpoonup u(x) \quad \text{слабо в} \quad H^1(\Omega).$$

Поскольку имеет место вполне непрерывное вложение

$$H^1(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^2(\Omega),$$

то имеет место предельное свойство

$$u_{k_j}(x) \to u(x) \quad \text{сильно в} \quad L^2(\Omega) \quad \text{при} \quad k_j \to +\infty.$$

Шаг 5. Наконец, проверим, что u — это слабое решение задачи (5.1). Для этого фиксируем $v \in H_0^1(\Omega) \subset L^{q+2}(\Omega)$. Тогда из (5.9) находим

$$\int\limits_{\Omega}\left[\big(Du_{k_j}, Dv\big) + \lambda u_{k_j} v\right]\,dx = \int\limits_{\Omega}\big(f(x,u_{k_j-1}) + \lambda u_{k_j-1}\big)\,v\,dx. \tag{5.27}$$

---

[1]) И поэтому является слабо замкнутым.

Устремляя $k_j \to +\infty$, имеем

$$f(x, u_{k_j-1}) \to f(x,u) \quad \text{сильно в} \quad L^{(q+2)/(q+1)}(\Omega),$$
$$u_{k_j-1} \to u \quad \text{сильно в} \quad L^2(\Omega)$$

и поэтому из (5.27) получим, что имеет место предельное равенство

$$\int\limits_{\Omega} [(Du, Dv) + \lambda uv]\, dx = \int\limits_{\Omega} (f(x,u) + \lambda u)\, v\, dx.$$

Сокращая член, содержащий λ, приходим к требуемому равенству

$$\int\limits_{\Omega} (Du, Dv)\, dx = \int\limits_{\Omega} f(x,u) v\, dx \quad \text{для всех} \quad v(x) \in H_0^1(\Omega).$$

Что и требовалось доказать.

Теорема доказана.

§ 6. Метод слабых верхних и нижних решений. Вариационный подход

В этом разделе мы применим вариационный подход в методе верхних и нижних решений. При этом нам удастся существенно ослабить требования на нелинейную функцию $f(x,u)$. Целью нашего исследования является разрешимость задачи

$$-\Delta u = \lambda f(x,u) \quad \text{в} \quad \Omega, \quad u(x) = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega$$

при некотором $\lambda \neq 0$, понимаемой в слабом смысле.

Действительно, предположим, что

$$f(x,u) : \overline{\Omega} \otimes \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$$

является непрерывной функцией. [1] Рассмотрим следующую вспомогательную функцию:

$$f_0(x,t) = \begin{cases} f(x,t), & \text{если} \quad \underline{U}(x) < t < \overline{U}(x),\ x \in \overline{\Omega}; \\ f(x, \overline{U}(x)), & \text{если} \quad t \geqslant \overline{U}(x),\ x \in \overline{\Omega}; \\ f(x, \underline{U}(x)), & \text{если} \quad t \leqslant \underline{U}(x),\ x \in \overline{\Omega}, \end{cases} \tag{6.1}$$

где $\overline{U}(x), \underline{U}(x) \in H^1(\Omega) \cap \mathbb{C}(\overline{\Omega})$ — это слабые верхнее и нижнее решения соответственно. Ясно, что функция

$$f_0(x,u) : \overline{\Omega} \otimes \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$$

[1] Мы теперь не требуем, чтобы при некотором $a > 0$ функция $g(x,u) = f(x,u) + au$ была возрастающей.

является непрерывной. Отметим, что нелинейный эллиптический оператор

$$-\Delta u - \lambda N_{f_0}(u), \quad N_{f_0}(u) \stackrel{def:}{=} f_0(x,u)$$

является потенциальным и соответствующим функционалом $E_0(u)$, производная Фреше которого дает этот оператор, является следующий функционал

$$E_0(u) \stackrel{def:}{=} \frac{1}{2}\int\limits_\Omega |D_x u(x)|^2\,dx - \lambda\int\limits_\Omega F_0(x,u(x))\,dx, \tag{6.2}$$

где

$$F_0(x,t) = \int\limits_0^t f_0(x,s)\,ds.$$

Потребуем только, чтобы функция $f(x,u)$ удовлетворяла условию роста

$$|f(x,u)| \leqslant a + b|u|^{q+1}, \quad q > 0, \tag{6.3}$$

где $a, b \geqslant 0$ и $a + b > 0$. Докажем, что при некотором $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}^1$ задача

$$-\Delta u(x) = \lambda f_0(x,u), \quad u(x) \in H^1_0(\Omega)$$

имеет решение.

Шаг 1. Итак, для применения вариационного подхода рассмотрим следующее многообразие $M \subset H^1_0(\Omega)$

$$M \stackrel{def:}{=} \bigl\{u(x) \in H^1_0(\Omega):\ \varphi(u) = c\bigr\}, \quad \varphi(u) \stackrel{def:}{=} \int\limits_\Omega F_0(x,u(x))\,dx, \tag{6.4}$$

где $0 \neq c \in \operatorname{Im}\varphi$ [1]. Докажем, что многообразие M является слабо замкнутым в $H^1_0(\Omega)$.

$\square$ Действительно, пусть $\{u_n\} \subset M$ и

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{слабо в} \quad H^1_0(\Omega).$$

Заметим, что при $N \geqslant 3$ [2] и при

$$2 < q + 2 < \frac{2N}{N-2} \Rightarrow 0 < q < \frac{4}{N-2} \Rightarrow H^1_0(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^{q+2}(\Omega),$$

т. е. имеет место вполне непрерывное вложение. Линейный и вполне непрерывный оператор (в частности, оператор вложения) является полностью непрерывным и поэтому имеем

$$u_n \to u \quad \text{сильно в} \quad L^{q+2}(\Omega).$$

[1] Символом $\operatorname{Im}\varphi$ мы стандартным образом обозначили область значений функционала φ.

[2] Этот случай мы и рассматриваем.

Поскольку функция $f_0(x,u)$ является каратеодориевой и выполнено условие роста (6.3), то функция $F_0(x,u)$ тоже является каратеодориевой и для нее выпонено условие роста

$$|F_0(x,u)| \leqslant a_1 + b_1|u|^{q+2}.$$

Соответствующий оператор Немыцкого $N_{F_0}(u)$ является непрерывным

$$N_{F_0}(u_n) \to N_{F_0}(u) \in L^1(\Omega) \quad \text{сильно в} \quad L^1(\Omega)$$

при $n \to +\infty$. Но тогда имеет место предельное свойство

$$c = \varphi(u_n) = \int\limits_{\Omega} F_0(x, u_n(x))\, dx \to \int\limits_{\Omega} F_0(x, u(x))\, dx = c \Rightarrow u(x) \in M. \quad \boxtimes$$

Шаг 2. Заметим, что функционал

$$\psi(u) \overset{def:}{=} \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} |D_x u(x)|^2 \; dx = \|u\|^2_{H^1_0(\Omega)} \tag{6.5}$$

является слабо полунепрерывным снизу на $H^1_0(\Omega)$.

□ Действительно, как квадрат нормы гильбертова пространства $H^1_0(\Omega)$ в силу рефлексивности $H^1_0(\Omega)$ функционал $\psi(u)$ как действующий

$$\psi(u) : H^1_0(\Omega) \to \mathbb{R}^1$$

является слабо полунепрерывным снизу $H^1_0(\Omega)$, т. е. для любой последовательности

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{слабо в} \quad H^1_0(\Omega) \Rightarrow \psi(u) \leqslant \liminf_{n\to+\infty} \psi(u_n). \quad \boxtimes$$

Шаг 3. Наконец, очевидно, что функционал $\psi(u)$ является слабо коэрцитивным на $H^1_0(\Omega)$, т. е.

$$\lim_{\|D_x u\|_2 \to +\infty} \psi(u) = \lim_{\|D_x u\|_2 \to +\infty} \frac{1}{2}\|D_x u\|_2^2 = +\infty.$$

Шаг 4. В силу результата теоремы **??** тематической лекции 3 имеем $\exists u_0 \in M$, что

$$\psi(u_0) = \inf_{u\in M} \psi(u).$$

Но тогда в этой точке согласно теоремы Лагранжа имеем

$$\langle \psi'_f(u_0) - \mu_0 \varphi'_f(u_0), \varphi \rangle = 0 \quad \text{для всех} \quad \varphi(x) \in H^1_0(\Omega),$$

что эквивалентно равенству

$$\langle \Delta u_0 - \mu_0 f_0(x, u_0), \varphi \rangle = 0 \quad \text{для всех} \quad \varphi(x) \in H^1_0(\Omega).$$

Возьмем в этом равенстве $\varphi(x) = u_0(x) \in H_0^1(\Omega)$ тогда получим выражение

$$-\|D_x u_0\|_2^2 = \mu_0 \int\limits_\Omega f_0(x, u_0(x)) u_0(x)\, dx,$$

причем поскольку $u_0(x) \in M$, а $c \neq 0$, то $u_0(x) \neq 0$, стало быть,

$$\|D_x u_0\|_2^2 > 0 \Rightarrow \mu_0 \int\limits_\Omega f_0(x, u_0(x)) u_0(x)\, dx < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu_0 = -\|D_x u_0\|_2^2 \left(\int\limits_\Omega f_0(x, u_0(x)) u_0(x)\, dx \right)^{-1} < 0.$$

Таким образом разрешимость задачи доказана.

Шаг 5. Теперь наша задача доказать, что решение $u(x) \in W^{2,p}_{loc}(\Omega)$ для всех $p \in [1, +\infty)$. [1]) С этой целью заметим, что функция $f_0(x, u)$ является не только непрерывной, но и ограниченной, поскольку $\overline{U}(x), \underline{U}(x) \in \mathbb{C}(\overline{\Omega})$, а функция $f(x, u)$ ограничена на компакте $(x, u) \in \in \overline{\Omega} \otimes \{|u| \leqslant M\}$. Следовательно, в силу классических априорных оценок Шаудера имеем

$$f_0(x, u(x)) \in L^\infty(\Omega) \Rightarrow -\Delta u(x) = f_0(x, u(x)) \in L^\infty(\Omega) \Rightarrow u(x) \in W^{2,p}_{loc}(\Omega)$$

для всех $p \in [1, +\infty)$.

Шаг 6. Теперь заметим, что определения слабых верхних и слабых нижних решений можно записать в следующем виде:

$$\langle -\Delta \underline{U}(x) - f(x, \underline{U}(x)), \varphi(x) \rangle \leqslant 0 \quad \text{для всех} \quad \varphi(x) \in H_0^1(\Omega), \tag{6.6}$$

$$\left\langle -\Delta \overline{U}(x) - f(x, \overline{U}(x)), \varphi(x) \right\rangle \geqslant 0 \quad \text{для всех} \quad \varphi(x) \in H_0^1(\Omega), \tag{6.7}$$

причем $\varphi(x) \geqslant 0$ для почти всех $x \in \Omega$. При этом найденное слабое решение $u_0(x) \in H_0^1(\Omega)$ удовлетворяет равенству

$$\langle -\Delta u_0(x) - f_0(x, u_0(x)), \varphi(x) \rangle = 0 \tag{6.8}$$

для всех $\varphi(x) \in H_0^1(\Omega)$. Сначала вычтем из (6.6) равенство (6.8) и получим следующее неравенство:

$$\langle -\Delta \underline{U}(x) + \Delta u_0(x) - f(x, \underline{U}(x)) + f_0(x, u_0(x)), \varphi(x) \rangle \leqslant 0, \tag{6.9}$$

в котором возьмем

$$\varphi(x) = (\underline{U}(x) - u_0(x))^+ \stackrel{def:}{=} \max\{0, \underline{U}(x) - u_0(x)\} \in H_0^1(\Omega), \tag{6.10}$$

[1]) Хотя нижнее слабое и верхнее слабое решения такой гладкостью могут и не обладать.

поскольку в смысле следов функций из $H^1(\Omega)$

$$\underline{U}(x) - u_0(x) \leqslant 0 \quad \text{при} \quad x \in \partial\Omega \Rightarrow (\underline{U}(x) - u_0(x))^+ = 0 \quad \text{при} \quad x \in \partial\Omega.$$

После подстановки получим следующее неравенство:

$$\int\limits_\Omega \left| D_x \left(\underline{U}(x) - u_0(x)\right)^+ \right|^2 dx \leqslant \\ \leqslant \int\limits_\Omega \left(\underline{U}(x) - u_0(x)\right)^+ \left(f(x, \underline{U}(x)) - f_0(x, u_0(x))\right). \quad (6.11)$$

Рассмотрим два случая. Если $u_0(x) < \underline{U}(x)$, то

$$f_0(x, u_0(x)) = f(x, \underline{U}(x)).$$

Если $u_0(x) \geqslant \underline{U}(x)$, то

$$(\underline{U}(x) - u_0(x))^+ = 0.$$

В обоих случаях правая часть неравенства (6.11) равна нулю. Поэтому имеем

$$\int\limits_\Omega \left| D_x \left(\underline{U}(x) - u_0(x)\right)^+ \right|^2 dx = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow D_x \left(\underline{U}(x) - u_0(x)\right)^+ = 0 \Rightarrow u_0(x) \geqslant \underline{U}(x)$$

для почти всех $x \in \Omega$. Аналогичным образом можно получить, что

$$u_0(x) \leqslant \overline{U}(x) \quad \text{для почти всех} \quad x \in \Omega.$$

Шаг 7. Таким образом, имеем

$$\underline{U}(x) \leqslant u_0(x) \leqslant \overline{U}(x) \quad \text{для почти всех} \quad x \in \Omega.$$

Следовательно, из определения функции $f_0(x, u)$ вытекает, что

$$f_0(x, u_0(x)) = f(x, u_0(x)).$$

Стало быть, доказана разрешимость исходной задачи Дирихле.

§ 7. Метод Лере–Шаудера. Слабые решения

Рассмотрим следующую задачу

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x, u) & x \in \Omega, \\ u = 0 & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (7.1)$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega \in \mathbb{C}^{2,\delta}$, $\delta \in (0, 1]$.

Введем обозначение

$$2^* = \begin{cases} \frac{2N}{N-2}, & \text{если} \quad 2 < N, \\ \infty, & \text{если} \quad 2 \geqslant N. \end{cases}$$

Предположим, что функция $f : \Omega \times \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ является каратеодориевой и удовлетворяет условию роста

$$|f(x,u)| \leqslant c|u|^{q-1} + b(x), \quad x \in \Omega, \quad s \in \mathbb{R}^1, \tag{7.2}$$

где $c > 0$ — некоторая постоянная, $q \in (1, 2^*)$, $b(x) \in L^{q'}(\Omega)$,

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1.$$

Ограничение $q \in (1, 2^*)$ гарантирует компактность вложения $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow \to L^q(\Omega)$.

Нашим инструментом будет следующее следствие из теоремы Шаудера:

Следствие из теоремы Шаудера. *Пусть A — вполне непрерывное отображение банахова пространства $\mathbb{B}$ в себя. Пусть существует постоянная M такая, что для всех $x \in \mathbb{B}$ и $\alpha \in [0,1]$, удовлетворяющих уравнению*

$$x = \alpha A x,$$

справедливо неравенство

$$\|x\| < M. \tag{7.3}$$

Тогда оператор A имеет неподвижную точку.

Теперь сопоставим Каратеодориевой функции $f(x,u)$ оператор Немыцкого $N_f \equiv f(x, u(x))$. Заметим, что справедлива следующая цепочка вложений

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega) \xrightarrow{N_f} L^{q'}(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega),$$

из которой вытекает, что оператор Немыцкого N_f является вполне непрерывным оператором

$$N_f : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega).$$

Определение 8. *Слабым решением задачи* (7.1) *называется функция $u \in H_0^{1,p}(\Omega)$, удовлетворяющая уравнению*

$$\langle -\Delta u, v \rangle = \langle N_f u, v \rangle \quad \text{для всех} \quad v \in H_0^1(\Omega), \tag{7.4}$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скобки двойственности между сопряженными гильбертовыми пространствами $H_0^1(\Omega)$ и $H^{-1}(\Omega)$.

Как мы уже установили ранее оператор

$$(-\Delta)^{-1} : H^{-1}(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$$

является изометрией Рисса–Фреше [1]. Поэтому (7.4) может быть переписано в эквивалентном виде

$$u = (-\Delta)^{-1} N_f(u), \tag{7.5}$$

с вполне непрерывным оператором

$$\mathbb{T}(\cdot) \overset{def:}{=} (-\Delta)^{-1} N_f(\cdot) : H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega). \tag{7.6}$$

Докажем, что следующее множество ограничено в $H_0^1(\Omega)$:

$$S = \left\{ u \in H_0^1(\Omega) \middle| \, u = \alpha \mathbb{T}(u) \text{ для некоторого } \alpha \in [0,1] \right\}.$$

$\square$ Действительно, справедлива следующая цепочка равенств для произвольного $u \in H_0^1(\Omega)$:

$$\begin{aligned}\|\mathbb{T}(u)\|^2_{H_0^1(\Omega)} &= (\mathbb{T}(u), \mathbb{T}(u))_{H_0^1(\Omega)} = \\ &= (D_x\mathbb{T}(u), D_x\mathbb{T}(u))_2 = \langle (-\Delta)\,\mathbb{T}(u), \mathbb{T}(u)\rangle = \langle N_f(u), \mathbb{T}(u)\rangle = \\ &= \int\limits_\Omega f(x, u(x))\mathbb{T}(u)\,dx \leqslant \int\limits_\Omega \big(c|u|^{q-1} + b(x)\big)\,|\mathbb{T}(u)|\,dx.\end{aligned}$$

Более того, для $u \in S$, т.е. $u = \alpha\mathbb{T}(u)$ с некоторым $\alpha \in [0,1]$ мы имеем цепочку неравенств

$$\begin{aligned}\|\mathbb{T}(u)\|^2_{H_0^1(\Omega)} &\leqslant c\alpha^{q-1}\|\mathbb{T}(u)\|_q^q + \|b\|_{q'}\|\mathbb{T}(u)\|_q \leqslant \\ &\leqslant c_1^q\alpha^{q-1}\|\mathbb{T}(u)\|^q_{H_0^1(\Omega)} + c_1\|b\|_{q'}\|\mathbb{T}(u)\|_{H_0^1(\Omega)} \leqslant \\ &\leqslant c_1^q\|\mathbb{T}(u)\|^q_{H_0^1(\Omega)} + c_1\|b\|_{q'}\|\mathbb{T}(u)\|_{H_0^1(\Omega)},\end{aligned}$$

где c_1 — наилучшая постоянная вложения $H_0^1(\Omega) \to L^q(\Omega)$. Следовательно, для каждого $u \in S$ справедливо неравенство

$$\|\mathbb{T}(u)\|^2_{H_0^1(\Omega)} - K_1\|\mathbb{T}(u)\|^q_{H_0^1(\Omega)} - K_2\|\mathbb{T}(u)\|_{H_0^1(\Omega)} \leqslant 0 \tag{7.7}$$

с некоторыми постоянными $K_1, K_2 \geqslant 0$. Заметим, что из (7.7) при $q \in (1,2)$ вытекает существует такая постоянная $a \geqslant 0$, что

$$\|\mathbb{T}(u)\|_{H_0^1(\Omega)} \leqslant a.$$

Отсюда вытекает ограниченность S поскольку

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \alpha\|\mathbb{T}(u)\|_{H_0^1(\Omega)} \leqslant a. \quad \boxtimes$$

Отметим, что всегда $2 < 2^*$.

Таким образом, в силу следствия из теоремы Шаудера мы приходим к следующей теореме о разрешимости:

---

[1] В соответствии с теоремой Рисса–Фреше об отождествлении сопряженного гильбертова пространства H^* с гильбертовым пространством H.

Теорема 3. *Если каратеодориева функция* $f : \Omega \times \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ *удовлетворяет* (7.2) *с* $q \in (1, 2)$, *тогда оператор* $(-\Delta)^{-1} N_f$ *имеет неподвижную точку в* $H_0^1(\Omega)$ *или, что эквивалентно, задача* (7.4) *имеет решение. Более того, все решения этой задачи образуют ограниченное множество в* $H_0^1(\Omega)$.