Тематическая лекция 10

ВЫРОЖДАЮЩЕЕСЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ

В этой тематической лекции мы рассмотрим задачу Коши для вырождающегося параболического уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u^m, \quad m > 1$$

в случае неотрицательных решений $u(x,t) \geqslant 0$.

§ 1. Постановка задачи Коши

В этой лекции мы рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u^m \quad \text{при} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^N \otimes (0,T), \tag{1.1}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{1.2}$$

Существуют различные определения слабых решений задачи Коши (1.1), (1.1). Дадим определение.

Определение 1. *Неотрицательная функция $u(x,t)$ называется слабым решением задачи Коши* (1.1), (1.2) *в области $D = \mathbb{R}^N \otimes (0,T)$, если $u(x,t), u^m(x,t) \in L^1_{loc}(D)$ и функция $u(x,t)$ удовлетворяет равенству*

$$\int\limits_D \left(u(x,t)\frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial t} + u^m(x,t)\Delta\varphi(x,t) \right) dx\,dt + \int\limits_{\mathbb{R}^N} u_0(x)\varphi(x,0)\,dx = 0 \tag{1.3}$$

для любой функции $\varphi(x,t) \in \mathbb{C}^\infty(\overline{D})$, которая обращается в ноль при $|x| > r > 0$ и при $t = T$ для некоторого $r > 0$.

Замечание 1. Если

$$\frac{\partial u^m}{\partial x_i} \in L^1_{loc}(D), \quad i = \overline{1,N},$$

тогда интегрированием по частям из (1.3) мы получим равенство

$$\int\limits_{D} \left(u(x,t)\frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial t} - (D_x u^m(x,t), D_x\varphi(x,t)) \right) dx\,dt + \\ + \int\limits_{\mathbb{R}^N} u_0(x)\varphi(x,0)\,dx = 0. \quad (1.4)$$

Справедливо следующее утверждение:

Лемма 1. *Если $u(x,t)$ — это слабое решение задачи Коши* (1.1), (1.2) *в смысле определения* 1, *тогда для любого $\tau \in (0,T)$ справедливо равенство*

$$\int\limits_{D_\tau} \left(u(x,t)\frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial t} + u^m(x,t)\Delta\varphi(x,t) \right) dx\,dt - \\ - \int\limits_{\mathbb{R}^N} u(x,\tau)\varphi(x,\tau)\,dx + \int\limits_{\mathbb{R}^N} u_0(x)\varphi(x,0)\,dx = 0 \quad (1.5)$$

для всякой $\varphi(x,t) \in \mathbb{C}^\infty(\overline{D})$, обращающейся в нуль при $|x| > r$ при некотором $r > 0$, где $D_\tau = \mathbb{R}^N \otimes (0,\tau)$.

Доказательство.

Для доказательства леммы выберем в качестве пробной функции в равенстве (1.3) функцию $\varphi(x,t)\eta_\varepsilon(t)$, где

$$\eta_\varepsilon(t) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad t \in [0, \tau - \varepsilon]; \\ 0, & \text{если} \quad t \in [\tau, T], \end{cases} \qquad \eta_\varepsilon(t) \in \mathbb{C}^\infty([0,T]), \qquad \left|\eta_\varepsilon^{'}(t)\right| \leqslant \frac{c}{\varepsilon}.$$

В силу равенства (1.3) получим равенство

$$\int\limits_{D_\tau} \eta_\varepsilon(t) \left(u(x,t)\frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial t} + u^m(x,t)\Delta\varphi(x,t) \right) dx\,dt + \\ + \int\limits_{D_\tau} u(x,t)\varphi(x,t)\eta_\varepsilon^{'}(t)\,dx\,dt + \int\limits_{\mathbb{R}^N} u_0(x)\varphi(x,0)\,dx = 0.$$

Заметим, что

$$\int\limits_0^\tau \eta_\varepsilon^{'}(t)\,dt = \eta_\varepsilon(\tau) - \eta_\varepsilon(0) = -1.$$

Поэтому имеем

$$\left| \int\limits_{D_\tau} u(x,t)\varphi(x,t)\eta_\varepsilon^{'}(t)\,dx\,dt + \int\limits_{\mathbb{R}^N} u(x,\tau)\varphi(x,\tau)\,dx \right| =$$

$$= \left| \int\limits_{D_\tau} \eta'_\varepsilon(t) \left(u(x,t)\varphi(x,t) - u(x,\tau)\varphi(x,\tau) \right) dx\, dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{c}{\varepsilon} \int\limits_{\tau-\varepsilon}^{\tau} \left| \int\limits_{\mathbb{R}^N} \left(u(x,t)\varphi(x,t) - u(x,\tau)\varphi(x,\tau) \right) dx \right| dt \to +0$$

при $\varepsilon \to +0$.

Лемма доказана.

Замечание 2. Отметим, что из равенства (1.5), очевидно, вытекает равенство (1.3) для любой функции $\varphi(x,t) \in \mathbb{C}^\infty(\overline{D})$, которая обращается в ноль при $|x| > r$ и при $t = T$ при некотором $r > 0$.

§ 2. Единственность слабого решения задачи Коши

Справедлива следующая теорема:

Теорема 1. *Предположим, что*

$$0 \leqslant u_0(x) \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Тогда задача Коши (1.1), (1.2) *может иметь не более одного слабого решения в* $L^1(D) \cap L^\infty(D)$.

Доказательство.

Шаг 1. Из леммы 1 вытекает два равенства

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} u_i(x,\tau)\varphi(x,\tau)\, dx - \int\limits_{\mathbb{R}^N} u_0(x)\varphi(x,0)\, dx =$$

$$= \int\limits_{D_\tau} \left(u_i(x,t) \frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial t} + u_i^m(x,t)\Delta\varphi(x,t) \right) dx\, dt \quad (2.1)$$

при $i = 1, 2$ для любого $\tau \in (0,T)$ и для любой функции $\varphi(x,t) \in \mathbb{C}^\infty(\overline{D})$, которая обращается в ноль при $|x| > r > 0$ при некотором $r > 0$. Положим

$$u(x,t) \stackrel{def:}{=} u_1(x,t) - u_2(x,t).$$

Тогда вычитая одно равенство (2.1) из другого, мы получим следующее равенство:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} u(x,\tau)\varphi(x,\tau)\, dx =$$

$$= \int\limits_{D_\tau} \left(u(x,t) \frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial t} + (u_1^m(x,t) - u_2^m(x,t))\Delta\varphi(x,t) \right) dx\, dt =$$

$$= \int\limits_{D_\tau} u(x,t)\left(\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial t} + a(x,t)\Delta\varphi(x,t)\right)dx\,dt, \quad (2.2)$$

где

$$a(x,t) = \begin{cases} \frac{u_1^m(x,t)-u_2^m(x,t)}{u_1(x,t)-u_2(x,t)}, & \text{если} \quad u_1(x,t) \neq u_2(x,t); \\ m u_1^{m-1}(x,t), & \text{если} \quad u_1(x,t) = u_2(x,t), \end{cases} \quad (2.3)$$

при $(x,t) \in D_\tau$.

Шаг 2. Рассмотрим следующую функцию:

$$a_k(x,t) \stackrel{def:}{=} \rho_k(x,t) * a(x,t) + \frac{1}{k}, \quad (x,t) \in D, \quad (2.4)$$

где $\rho_k(x,t)$ — это гладкое ядро, а символом $*$ мы обозначили свертку по всем переменным (x,t). Кроме того, рассмотрим следующую первую краевую задачу в цилиндре

$$D_{\tau,R} = B_R \otimes (0,\tau), \quad B_R = \{x \in \mathbb{R}^N : |x| < R\} :$$

$$\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial t} + a_k(x,t)\Delta\varphi(x,t) = 0 \quad \text{в} \quad (x,t) \in D_{\tau,R}, \quad (2.5)$$

$$\varphi(x,t) = 0 \quad \text{на} \quad |x| = R, \quad 0 < t < \tau, \quad (2.6)$$

$$\varphi(x,\tau) = g(x) \quad \text{при} \quad |x| < R, \quad (2.7)$$

где $R > R_0 + 1$, а $R_0 > 0$ выбирается таким образом, чтобы

$$\operatorname{supp}\{g(x)\} \subset B_{R_0} = \left\{x \in \mathbb{R}^N : |x| < R_0\right\}.$$

Ядро $\rho_k(x,t)$ выбираем таким образом, чтобы

$$\int\limits_0^\tau \int\limits_{B_R} \left(a(x,t) - \rho_k(x,t) * a(x,t)\right)^2 dx\,dt \leqslant \frac{1}{k^2}. \quad (2.8)$$

Пусть $\varphi_k(x,t)$ — это гладкое решение первой краевой задачи (2.5)–(2.7). Продолжим это решение нулем на все D_τ :

$$\widetilde{\varphi}_k(x,t) = \begin{cases} \varphi_k(x,t), & \text{если} \quad (x,t) \in D_{\tau,R}; \\ 0, & \text{если} \quad (x,t) \in D_\tau \backslash D_{\tau,R}. \end{cases} \quad (2.9)$$

Шаг 3. Рассмотрим следующую пробную функцию $\xi_R(x) \in \mathbb{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$:

$$\xi_R(x) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad |x| < R-1; \\ 0, & \text{если} \quad |x| > R - \frac{1}{2}, \end{cases} \quad |D_x\xi_R(x)| + |\Delta_R\xi(x)| < c. \quad (2.10)$$

Выберем теперь в качестве функции $\varphi(x,t)$ в равенстве (2.2) следующим образом:

$$\varphi(x,t) = \xi_R(x)\widetilde{\varphi}_k(x,t). \quad (2.11)$$

При этом

$$\Delta\varphi(x,t) = \xi_R(x)\Delta\widetilde{\varphi}_k(x,t) + 2(D_x\xi_R(x), D_x\widetilde{\varphi}_k(x,t)) + \widetilde{\varphi}_k(x,t)\Delta\xi_R(x).$$

Тогда равенство (2.2) примет следующий вид:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} u(x,\tau)\varphi(x,\tau)\,dx = \int\limits_{D_\tau} u(x,t)\left(a(x,t) - a_k(x,t)\right)\Delta\varphi(x,t)\,dx\,dt =$$

$$= \int\limits_{D_\tau} (u_1^m - u_2^m)\left(2(D_x\xi_R(x), D_x\widetilde{\varphi}_k(x,t)) + \widetilde{\varphi}_k(x,t)\Delta\xi_R(x)\right)\,dx\,dt +$$

$$+ \int\limits_{D_\tau} u\xi_R(x)\Delta\widetilde{\varphi}_k(x,t) \overset{def:}{=} I_k + J_k. \quad (2.12)$$

Шаг 4. Теперь мы готовы оценить интегралы I_k и J_k. Сначала получим априорные оценки на $\varphi_k(x,t)$ — решения первой краевой задачи (2.5)–(2.7). Умножим обе части уравнения (2.5) на $\Delta\varphi_k(x,t)$ и после интегрирования по частям по области $B_R \otimes (t,\tau)$ мы получим равенство

$$\frac{1}{2}\int\limits_{B_R} |D_x\varphi_k(x,t)|^2\,dx + \int\limits_t^\tau \int\limits_{B_R} a_k(x,t)\left(\Delta\varphi_k\right)^2\,dx\,ds = \frac{1}{2}\int\limits_{B_R} |D_x g|^2\,dx,$$

из которого вытекают априорные оценки

$$\int\limits_0^\tau \int\limits_{B_R} |D_x\varphi_k|^2\,dx\,dt \leqslant c, \quad (2.13)$$

$$\int\limits_0^\tau \int\limits_{B_R} a_k|\Delta\varphi_k|^2\,dx\,dt \leqslant c. \quad (2.14)$$

Воспользуемся тем, что по условию теоремы $u_i(x,t) \in L^\infty(D)$, тогда мы получим следующую цепочек неравенств: [1])

$$|I_k| \leqslant c\int\limits_0^\tau \int\limits_{B_R\setminus B_{R-1}} (u_1^m + u_2^m)\left(|D_x\varphi_k| + 1\right)\,dx\,dt \leqslant$$

$$\leqslant c \int\limits_{B_R\setminus B_{R-1}} (u_1^m + u_2^m)\,dx\,dt +$$

[1]) Заметим, что носители функций $|D_x\xi_R(x)|$ и $\Delta\xi_R(x)$ лежат в шаровом слое $B_R\setminus B_{R-1}$.

$$+\,c\left(\int\limits_0^\tau\int\limits_{B_R\setminus B_{R-1}}(u_1^m+u_2^m)^2\right)^{1/2}\left(\int\limits_{B_R\setminus B_{R-1}}|D_x\varphi_k|^2\,dx\,dt\right)^{1/2}\leqslant$$

$$\leqslant c\int\limits_0^\tau\int\limits_{B_R\setminus B_{R-1}}(u_1+u_2)\,dx\,dt+$$

$$+\,c\left(\int\limits_0^\tau\int\limits_{B_R\setminus B_{R-1}}u_1\,dx\,dt\right)^{1/2}+c\left(\int\limits_0^\tau\int\limits_{B_R\setminus B_{R-1}}u_2\,dx\,dt\right)^{1/2}. \quad (2.15)$$

Используя неравенство Гельдера, условие $u=u_1-u_2\in L^\infty(D)$ и априорную оценку (2.14), мы получим для J_k цепочку неравенств

$$|J_k|\leqslant c\left(\int\limits_0^\tau\int\limits_{B_R}\frac{(a-a_k)^2}{a_k}\,dx\,dt\right)^{1/2}\left(\int\limits_0^\tau\int\limits_{B_R}a_k(\Delta\varphi_k)^2\,dx\,dt\right)^{1/2}\leqslant$$

$$\leqslant c\left(\int\limits_0^\tau\int\limits_{B_R}\frac{(a-a_k)^2}{a_k}\,dx\,dt\right)^{1/2}\leqslant$$

$$\leqslant c\sqrt{k}\left(\int\limits_0^\tau\int\limits_{B_R}\left(a-\rho_k*a-\frac{1}{k}\right)^2\,dx\,dt\right)^{1/2}\leqslant$$

$$\leqslant c\sqrt{k}\,\frac{1}{k}+c\sqrt{k}\left(\int\limits_0^\tau\int\limits_{B_R}(a-\rho_k*a)^2\,dx\,dt\right)^{1/2}\leqslant\frac{c}{\sqrt{k}}. \quad (2.16)$$

Итак, в силу оценок (2.15) и (2.16) из равенства (2.12) мы получим оценку

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}^N}u(x,\tau)g(x)\xi_R(x)\,dx\right|\leqslant|I_k|+|J_k|\leqslant c\int\limits_0^\tau\int\limits_{B_R\setminus B_{R-1}}(u_1+u_2)\,dx\,dt+$$

$$+\,c\left(\int\limits_0^\tau\int\limits_{B_R\setminus B_{R-1}}u_1\,dx\,dt\right)^{1/2}+c\left(\int\limits_0^\tau\int\limits_{B_R\setminus B_{R-1}}u_2\,dx\,dt\right)^{1/2}+\frac{c}{\sqrt{k}}\to+0.$$

при $R\to+\infty$ и при $k\to+\infty$, поскольку по условию имеем $u_1,u_2\in$ $\in L^1(D)$. Следовательно, в силу теоремы Беппо Леви мы получим равенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} u(x,\tau)g(x)\,dx = 0 \quad \text{для всех} \quad g(x) \in \mathbb{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Из основной леммы вариационного исчисления получим

$$u(x,\tau) = 0 \quad \text{для п. вс.} \quad (x,\tau) \in D.$$

Теорема доказана.

§ 3. Существование слабого решения задачи Коши (1.1), (1.2)

Справедлива следующая теорема:

Теорема 2. *Предположим, что* $u_0(x) \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ *и* $u_0(x) \geqslant 0$. *Тогда задача Коши* (1.1), (1.2) *имеет единственное решение класса* $L^1(D) \cap L^\infty(D)$.

Доказательство.

Шаг 1. Прежде всего рассмотрим такие две числовые последовательности $\{R_k\}$ и $\{\eta_k\}$, что имеют место следующие свойства:

$$R_k \to +\infty, \quad \eta_k R_k^N \to +0 \quad \text{при} \quad k \to +\infty.\ ^{1)} \tag{3.1}$$

Кроме того, построим такую последовательность функций $\{u_{0k}(x)\} \subset \subset \mathbb{C}_0^\infty(B_{R_k})$ [2] таких, что

$$\|u_{0k}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leqslant \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}, \tag{3.2}$$

$$\|u_{0k} - u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \to +0 \quad \text{при} \quad k \to +\infty. \tag{3.3}$$

Теперь мы рассмотрим следующую вспомогательную задачу:

$$\frac{\partial u_k}{\partial t} = \Delta u_k^m \quad \text{при} \quad (x,t) \in B_{R_k} \otimes (0,T), \tag{3.4}$$

$$u(x,t) = \eta_k \quad \text{при} \quad (x,t) \in \partial B_{R_k} \otimes (0,T), \tag{3.5}$$

$$u(x,0) = u_{0k}(x) + \eta_k \quad \text{при} \quad x \in B_{R_k}. \tag{3.6}$$

Из классической теории квазилинейных параболических уравнений известно, [3] что существует классическое решение первой краевой задачи (3.4)–(3.6) класса $u_k(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D_k) \cap \mathbb{C}(\overline{D}_k)$, где $D_k = B_{R_k} \otimes (0,T)$.

Шаг 2. На этом шаге мы займемся выводом априорных оценок для решений задачи (3.4)–(3.6).

---

[1] Последнее предельное свойство нужно для стремления к нулю выражения $\eta_k \int\limits_{B_{R_k}} dx \to +0$ при $k \to +\infty$.

[2] Такая последовательность существует и может быть построена применением операции срезки, например, с ядром «шапочка».

[3] Например, это можно доказать методом Лере–Шаудера.

Используя классический слабый принцип максимума для первой краевой задачи (3.4)–(3.6), мы получим следующую априорную оценку:

$$\eta_k \leqslant u_k(x,t) \leqslant u_{0k}(x) + \eta_k \quad \text{при} \quad (x,t) \in \overline{D}_k,$$

из которой в силу неравенства (3.2) получим априорную оценку

$$\eta_k \leqslant u_k(x,t) \leqslant \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} + \eta_k \quad \text{при} \quad (x,t) \in \overline{D}_k. \tag{3.7}$$

Теперь мы умножим обе части уравнения (3.4) на $pu_k^{p-1}(x,t)$ и получим цепочку равенств

$$\frac{\partial u_k^p}{\partial t} = pu_k^{p-1}\Delta u_k^m = p\,\mathrm{div}\left(u_k^{p-1} D_x u_k^m\right) - p\left(D_x u_k^{p-1}, D_x u_k^m\right) =$$
$$= p\,\mathrm{div}\left(u_k^{p-1} D_x u_k^m\right) - mp(p-1)u_k^{m+p-3}\left|D_x u_k\right|^2. \tag{3.8}$$

Заметим, что поскольку на боковой границе $S = \partial B_{R_k} \otimes (0,T)$ достигается минимум функции $u_k(x,t)$, то выполнено неравенство

$$\frac{\partial u_k(x,t)}{\partial n_x} \leqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in S, \tag{3.9}$$

где n_x — это внешняя нормаль к боковой границе S. Поэтому интегрируя обе части равенства (3.8) по $(x,\tau) \in B_{R_k} \otimes (0,t)$, мы получим цепочку выражений

$$\int\limits_{B_{R_k}} u_k^p(x,t)\,dx - \int\limits_{B_{R_k}} \left(u_{0k}(x) + \eta_k\right)^p\,dx = p\int\limits_0^t \int\limits_{\partial B_{R_k}} u_k^{p-1}\frac{\partial u_k(x,t)}{\partial n_x}\,d\sigma\,d\tau -$$
$$- mp(p-1)\int\limits_0^t \int\limits_{B_{R_k}} u_k^{m+p-3}\left|D_x u_k\right|^2\,dx\,d\tau \leqslant$$
$$\leqslant -mp(p-1)\int\limits_0^t \int\limits_{B_{R_k}} u_k^{m+p-3}\left|D_x u_k\right|^2\,dx\,d\tau. \tag{3.10}$$

Таким образом, из неравенства (3.10) мы получим априорную оценку

$$\int\limits_{B_{R_k}} u_k^p(x,t)\,dx + mp(p-1)\int\limits_0^t \int\limits_{B_{R_k}} u_k^{m+p-3}\left|D_x u_k\right|^2\,dx\,d\tau \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_{B_{R_k}} \left(u_{0k}(x) + \eta_k\right)^p\,dx \quad \text{при} \quad t \in (0,T]. \tag{3.11}$$

Используя (3.1)–(3.3), мы получим, что

$$\int\limits_{B_{R_k}} (u_{0k}(x)+\eta_k)^p \, dx \to \int\limits_{\mathbb{R}^N} u_0^p(x)\, dx \quad \text{при} \quad k \to +\infty.$$

В частности, тогда при $p=1$ и при $p=m+1$ мы из (3.11) получим априорные оценки

$$\int\limits_{B_{R_k}} u_k(x,t)\, dx \leqslant c_1(T) < +\infty, \quad t \in (0,T], \tag{3.12}$$

$$\int\limits_0^T \int\limits_{B_{R_k}} |D_x u_k^m|^2 \, dx\, dt \leqslant m^2 \int\limits_0^T \int\limits_{B_{R_k}} u_k^{2(m-1)} |D_x u_k|^2 \, dx\, dt \leqslant c_2(T) < +\infty. \tag{3.13}$$

Умножим теперь обе части уравнения (3.4) на

$$m u_k^{m-1} \frac{\partial u_k}{\partial t}$$

и тогда получим равенство

$$\frac{4m}{(m+1)^2} \left(\frac{\partial u_k^{(m+1)/2}}{\partial t} \right)^2 = \operatorname{div} \left(\frac{\partial u_k^m}{\partial t} D_x u_k^m \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} |D_x u_k^m|^2 . \tag{3.14}$$

Заметим, что

$$\frac{\partial u_k}{\partial t} = 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \partial B_{R_k} \otimes (0,T).$$

Проинтегрируем обе части равенства (3.14) по $B_{R_k} \otimes (t,T]$ и получим цепочку выражений

$$\begin{aligned} \frac{4m}{(m+1)^2} \int\limits_t^T \int\limits_{B_{R_k}} \left(\frac{\partial u_k^{(m+1)/2}}{\partial t} \right)^2 dx\, d\tau &= \\ = -\frac{1}{2} \int\limits_{B_{R_k}} |D_x u_k^m(x,T)|^2 \, dx + \frac{1}{2} \int\limits_{B_{R_k}} |D_x u_k^m(x,t)|^2 \, dx &\leqslant \\ \leqslant \frac{1}{2} \int\limits_{B_{R_k}} |D_x u_k^m(x,t)|^2 \, dx \quad \text{при} \quad t \in (0,T). \end{aligned} \tag{3.15}$$

Теперь проинтегрируем обе части неравенства (3.15) по $t \in (0,T)$ и получим неравенство

$$\frac{4m}{(m+1)^2}\int\limits_0^T\int\limits_{B_{R_k}} t\left(\frac{\partial u_k^{(m+1)/2}}{\partial t}\right)^2 dx\,dt =$$

$$= \frac{4m}{(m+1)^2}\int\limits_t^T\int\limits_{B_{R_k}} \left(\frac{\partial u_k^{(m+1)/2}}{\partial t}\right)^2 dx\,d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\int\limits_0^T\int\limits_{B_{R_k}} |D_x u_k^m(x,t)|^2\, dx\,dt. \quad (3.16)$$

Заметим, кроме того, что имеет место следующие равенства:

$$\int\limits_0^T\int\limits_{B_{R_k}} t\left(\frac{\partial u_k^m}{\partial t}\right)^2 dx\,dt = m^2\int\limits_0^T\int\limits_{B_{R_k}} t u_k^{2(m-1)}\left(\frac{\partial u_k}{\partial t}\right)^2 dx\,dt =$$

$$= \frac{4m}{(m+1)^2}\int\limits_0^T\int\limits_{B_{R_k}} t u_k^{m-1}\left(\frac{\partial u_k^{(m+1)/2}}{\partial t}\right)^2 dx\,dt. \quad (3.17)$$

Воспользуемся неравенством (3.7) и получим оценку

$$\frac{4m}{(m+1)^2}\int\limits_0^T\int\limits_{B_{R_k}} t u_k^{m-1}\left(\frac{\partial u_k^{(m+1)/2}}{\partial t}\right)^2 dx\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{4m}{(m+1)^2}\left(d+\|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}\right)^{m-1}\int\limits_0^T\int\limits_{B_{R_k}} t\left(\frac{\partial u_k^{(m+1)/2}}{\partial t}\right)^2 dx\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \left(d+\|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}\right)^{m-1}\frac{1}{2}\int\limits_0^T\int\limits_{B_{R_k}} |D_x u_k^m(x,t)|^2\, dx\,dt \leqslant c_3(T) < +\infty. \quad (3.18)$$

Шаг 3. Итак, из (3.17) и (3.18) мы получим априорную оценку

$$\int\limits_0^T\int\limits_{B_{R_k}} t\left(\frac{\partial u_k^m}{\partial t}\right)^2 dx\,dt \leqslant c_3(T) < +\infty. \quad (3.19)$$

В частности, из этой оценки вытекает, что

$$\int\limits_{\delta}^{T}\int\limits_{B_{R_k}} \left(\frac{\partial u_k^m}{\partial t}\right)^2 dx\,dt \leqslant \frac{c_3(T)}{\delta} < +\infty. \tag{3.20}$$

Из оценки (3.13) получим

$$\int\limits_{\delta}^{T}\int\limits_{B_{R_k}} |D_x u_k^m|^2\, dx\,dt \leqslant c_2(T) < +\infty. \tag{3.21}$$

Наконец, в силу (3.7) и (3.12) мы получим

$$\int\limits_{\delta}^{T}\int\limits_{B_{R_k}} u_k^m\, dx\,dt \leqslant c_4(T) < +\infty. \tag{3.22}$$

Из оценок (3.20)–(3.22) мы получим, что последовательность $\{u_k^m(x,t)\}$ равномерно по $m \in \mathbb{N}$ ограничена в банаховом пространстве $H^1(D_{R,\delta})$, где

$$D_{R,\delta} \stackrel{def:}{=} (\delta, T) \otimes B_R$$

для любого $\delta \in (0,T)$ и для любого $R > 0$. Но в силу вполне непрерывного вложения

$$H^1(D_{R,\delta}) \hookrightarrow\hookrightarrow L^2(D_{R,\delta})$$

последовательность $\{u_k^m\}$ сильно компактна в $L^2(D_{R,\delta})$. В этом случае существует такая подпоследовательность $\{u_k^m\}$ [1], что

$$u_k^m \to v \quad \text{сильно в} \quad L^2(D_{R,\delta}),$$

но отсюда вытекает, что опять для некоторой подпоследовательности $\{u_k^m\}$ имеем

$$u_k^m(x,t) \to v(x,t) \quad \text{п. вс. в} \quad D_{R,\delta} \quad \text{при} \quad k \to +\infty.$$

Но отсюда в силу произвольности $R > 0$ и произвольности $\delta \in (0,T)$ получим, что

$$u_k^m(x,t) \to v(x,t) \quad \text{п. вс. в} \quad D \quad \text{при} \quad k \to +\infty. \tag{3.23}$$

Отсюда сразу же получим, что

$$u_k(x,t) \to u(x,t) = v^{1/m}(x,t) \quad \text{п. вс. в} \quad D \quad \text{при} \quad k \to +\infty. \tag{3.24}$$

Шаг 4. Осталось заметить, что классическое решение $u_k(x,t)$ первой краевой задачи (3.4)–(3.6) удовлетворяет равенству [2] при доста-

---

[1] Подпоследовательность мы обозначили так же как и последовательность.

[2] Что может быть доказано умножением уравнения (3.4) на функцию $\varphi(x,t)$ с указанными ниже условиями и интегрированием по частям.

точно большом $k \in \mathbb{N}$

$$\int\limits_D \left(u_k(x,t)\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial t} + u_k^m(x,t)\Delta\varphi(x,t) \right) dx\,dt + \\ + \int\limits_{\mathbb{R}^N} \left(u_{0k}(x) + \eta_k \right) \varphi(x,0)\,dx = 0 \quad (3.25)$$

для любой функции $\varphi(x,t) \in \mathbb{C}^\infty(\overline{D})$, которая обнуляется при $|x| > r > 0$ и при $t = T$ для некоторого $r > 0$. Теперь при фиксированной $\varphi(x,t)$ мы можем с учетом (3.23) и (3.24) перейти к пределу при $k \to +\infty$ и получить из (3.26) равенство

$$\int\limits_D \left(u(x,t)\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial t} + u^m(x,t)\Delta\varphi(x,t) \right) dx\,dt + \\ + \int\limits_{\mathbb{R}^N} u_0(x)\varphi(x,0)\,dx = 0, \quad (3.26)$$

которое означает, что $u(x,t) \in L^\infty(D) \cap L^1(D)$ — это слабое решение первой краевой задачи (1.1), (1.2).

Теорема доказана.