Тематическая лекция 1

МОДЕЛЬНЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ

В этой лекции мы приведем вывод некоторых модельных нелинейных эллиптических и параболических уравнений. Кроме того, мы предложим читателю некоторые возможные их модификации без вывода. Тем не менее, они тоже имеют физический смысл.

§ 1. Уравнения с p–лапласианом

Прежде всего дадим вывод нелинейных уравнений, содержащих в качестве главного нелинейного оператора по пространственным переменным так называемый оператор *p–лапласиана*

$$\Delta_p u(x) \stackrel{def:}{=} \operatorname{div}\left(|Du|^{p-2}Du\right), \quad Du(x) = (\partial_{x_1}u(x), ..., \partial_{x_N}u(x)) . \tag{1.1}$$

Пусть электромагнитная среда занимает область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Рассмотрим систему уравнений Максвелла в квазистационарном приближении в этой области:

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = -n(x), \quad \operatorname{rot}\mathbf{E} = 0, \quad \mathbf{D} = \varepsilon(|\mathbf{E}|)\mathbf{E}, \tag{1.2}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{B} = 0, \quad \operatorname{rot}\mathbf{H} = 0, \quad \mathbf{B} = \chi(|\mathbf{H}|)\mathbf{H}. \tag{1.3}$$

Заметим, что в случае поверхностно–односвязной области Ω можно ввести потенциалы электрического и магнитного полей [1)]

$$\mathbf{E} = -D\varphi(x), \quad \mathbf{H} = -D\psi(x). \tag{1.4}$$

Осталось выписать явный вид для функций $\varepsilon = \varepsilon(|\mathbf{E}|)$ и $\chi = \chi(|\mathbf{H}|)$. Мы воспользуемся следующей модельной степенной зависимостью:

$$\varepsilon(|\mathbf{E}|) = \varepsilon_0|\mathbf{E}|^{p-2}, \quad \chi(|\mathbf{H}|) = \chi_0|\mathbf{H}|^{p-2}, \tag{1.5}$$

где в большинстве случаев $p \geqslant 2$. Однако, возможна ситуация, когда $p \geqslant 1$. Мы в дальнейшем опишем модель, в которой возникает такой показатель.

[1)] Напоминаем, что в нелинейном анализе вместо привычного обозначения для градиента ∇ используется менее привычное обозначение D.

Итак, из систем соответствующих уравнений (1.2), (1.4) и (1.5) или (1.3), (1.4) и (1.5) мы получим следующие модельные уравнения:

$$\operatorname{div}\Big(|D\varphi(x)|^{p-2}D\varphi(x)\Big)=\frac{1}{\varepsilon_0}n(x), \tag{1.6}$$

$$\operatorname{div}\Big(|D\psi(x)|^{p-2}D\psi(x)\Big)=0. \tag{1.7}$$

Заметим, что оператор p–лапласиана является нелинейным *оператором эллиптического типа*. Действительно, справедлива следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned}\Delta_p u(x)&=\operatorname{div}(|Du(x)|^{p-2}Du(x))=\\&=|Du(x)|^{p-4}\left\{|Du(x)|^2\Delta u+(p-2)\sum_{i,j=1,1}^{N,N}\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i\partial x_j}\right\}.\end{aligned} \tag{1.8}$$

Согласно общей теории эллиптических уравнений уравнение вида

$$F(x,u(x),Du(x),D^2u(x))=0$$

является уравнением эллиптического типа, если матрица

$$a_{ij}=\frac{\partial F}{\partial p_{ij}},\quad F=F(x,u,p_i,p_{ij})$$

является положительно определенной. В силу равенств (1.8) мы имеем

$$a_{ij}=|Du(x)|^{p-2}\delta_{ij}+(p-2)|Du(x)|^{p-4}u_{x_i}(x)u_{x_j}(x).$$

Рассмотрим соответствующую квадратичную форму

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1,1}^{N,N}a_{ij}\xi^i\xi^j&=|Du(x)|^{p-2}|\xi|^2+\\&+(p-2)|Du(x)|^{p-4}\left(\sum_{i=1}^{N}\xi^i u_{x_i}(x)\right)^2\geqslant|Du(x)|^{p-2}|\xi|^2.\end{aligned}$$

Таким образом, оператор p–лапласиана является вырожденным эллиптическим оператором при $p>2$ и он вырождается там, где $|Du(x)|=0$. Наконец, если $p<2$, то он является сингулярным оператором. При $p=2$ оператор p–лапласиана является линейным оператором Лапласа.

Известно какую роль в теории эллиптических уравнений играет оператор Лапласа. Такую же роль играет оператор p–лапласиана в теории нелинейных эллиптических уравнений.

Обсудим теперь некоторые важные варианты уравнений для p–лапласиана. Важные случаи связаны с показателем p.

Случай $p = 1$. *Уравнение поверхностей с заданной средней кривизной* $H(x)$.

$$\Delta_1 u(x) = \operatorname{div}\left(\frac{Du(x)}{|Du(x)|}\right) = -H(x).$$

В случае, когда $N = 2$ приходим к следующему уравнению:

$$u_y^2 u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + u_x^2 u_{yy} = H(x)\left(u_x^2 + u_y^2\right)^{3/2}.$$

Случай $p = 2$. В этом случае, как мы уже отмечали, мы приходим к оператору Лапласа

$$\delta_2 u(x) = \Delta u(x) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i^2}.$$

Случай $p = N$. Этот случай является является критическим случаем между случаем $p < N$ и $p > N$. В этом случае решение $N-$гармонического уравнения

$$\Delta_N u(x) = 0$$

относительно преобразования Мёбиуса

$$y = a + \frac{x-a}{|x-a|^2},$$

где a — это постоянная.

Случай $p = \infty$. Рассмотрим уравнение (1.8)

$$\Delta_p u(x) = 0 \Rightarrow |Du(x)|^2 \Delta u + (p-2)\sum_{i,j=1,1}^{N,N} \frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{p-2}|Du(x)|^2 \Delta u + \sum_{i,j=1,1}^{N,N} \frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} = 0.$$

Откуда формально в пределе при $p \to +\infty$ мы получим уравнение

$$\Delta_\infty u(x) \stackrel{def:}{=} \sum_{i,j=1,1}^{N,N} \frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} = 0.$$

Причем это уравнение возникает в теории броуновского движения. Отметим, что в настоящем курсе мы намеренно рассматриваем только частные, но базовые нелинейные уравнения, на основе которых слушатели в дальнейшем смогут читать статьи и монографии по нелинейным уравнениям общего вида. Отметим только, что интерес представляют общие эллиптические уравнения следующего дивергентного вида:

$$\operatorname{div}(\mathbf{A}(x,u,Du)) + B(x,u,Du) = 0. \tag{1.9}$$

Тем не менее, мы приведем некоторые результаты и для такого вида нелинейных уравнений эллиптического типа.

В дальнейшем нас будут интересовать следующие уравнения, содержащие p–лапласиан:

1. Нелинейная задача на собственные значения и соответствующие собственные функции

$$\Delta_p u + \lambda |u|^{p-2} u = 0;$$

2. Уравнение p–Пуассона

$$\Delta_p u(x) = f(x);$$

3. Уравнение следующего вида:

$$\Delta_p u + |u|^q u = 0;$$

4. Соответствующее нелинейное параболическое уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta_p u.$$

Теперь мы рассмотрим некоторые другие уравнения вида (1.9), близкие к уравнению p–лапласиана. Рассмотрим вывод уравнения вида

$$\operatorname{div}(\mathbf{A}(Du)) = 0,$$

возникающее в *газовой динамике*. Стационарный безвихревой поток идеальной сжимаемой жидкости описывается уравнением неразрывности

$$\operatorname{div}(\rho Du) = 0, \tag{1.10}$$

где u — потенциал скоростей, а плотность жидкости ρ связана со скоростью соотношением вида

$$\rho = \left(1 - \frac{\gamma - 1}{2} |Du(x)|^2\right)^{1/(\gamma-1)}, \quad \gamma > 1$$

где постоянная γ равна отношению удельных теплоемкостей газа. В этом случае приходим к уравнению

$$\Delta u(x) - \frac{1}{1 - \frac{\gamma-1}{2}|Du(x)|^2} \sum_{i,j=1,1}^{N,N} \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} = 0. \tag{1.11}$$

Заметим, что минимальное собственное число λ и максимальное собственное число Λ матрицы

$$a_{ij} = \delta_{ij} - \frac{1}{1 - \frac{\gamma-1}{2}|Du(x)|^2} \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \frac{\partial u(x)}{\partial x_j},$$

соответствующей уравнению (1.11) имеют следующий явный вид:

$$\lambda = \frac{1 - \frac{\gamma+1}{2}|Du(x)|^2}{1 - \frac{\gamma-1}{2}|Du(x)|^2} \quad \text{и} \quad \Lambda = 1.$$

Из общей теории известно, что имеет место неравенство

$$\lambda|\xi|^2 \leqslant \sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}\xi^i\xi^j \leqslant \Lambda|\xi|^2.$$

Поэтому при

$$|Du(x)| < \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{1/2},$$

т. е. если газовый поток дозвуковой, уравнение (1.11) эллиптично. А при условии

$$\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{1/2} < |Du(x)| < \left(\frac{2}{\gamma-1}\right)^{1/2}$$

уравнение становится гиперболическим уравнением.

Теперь рассмотрим *уравнение капиллярности*. Профиль установившейся поверхности жидкости с постоянным поверхностным натяжением в равномерном поле тяжести подчиняется уравнению капиллярности

$$\operatorname{div}\left(\frac{Du(x)}{\sqrt{1+|Du(x)|^2}}\right) = ku(x), \tag{1.12}$$

где $u = u(x)$ — это высота жидкости над невозмущенной поверхностью, k — это постоянная, положительная или отрицательная в зависимости от того, внутрь или наружу действует гравитационное поле. Естественное физическое граничное условие для функции $u(x)$, удовлетворяющей условию (1.12) в области с фикисированной твердой границей, имеет вид

$$\frac{1}{\sqrt{1+|Du(x)|^2}}\frac{\partial u(x)}{\partial n_x} = \cos\gamma,$$

где величина γ — это так называемый угол контакта, т. е. угол между поверхностью жидкости и твердой границей, занимаемой жидкостью.

§ 2. Уравнение фильтрации в пористой среде

В этом параграфе мы приведем физические модели, приводящие к уравнению следующего вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u^m, \quad m > 1, \quad \Delta = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}, \tag{2.1}$$

где величина $u = u(x,t)$ имеет смысл неотрицательной физической величины (плотность, температура). Однако, можно рассматривать и следующий вариант нелинейного параболического уравнения (2.1)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta\left(|u|^{p-2}u\right), \quad p > 2. \tag{2.2}$$

Течение газа через пористую среду. Сначала мы рассмотрим одну из первых физических моделей, приводящих к уравнению (2.1) для плотности $\rho = \rho(x,t)$. Рассмотрим следующую систему уравнений:

$$\varepsilon\rho_t + \operatorname{div}(\rho\mathbf{v}) = 0 \tag{2.3}$$

— это уравнение неразрывности, где $\varepsilon \in (0,1)$ — это параметр «пористости». Следующее уравнение выражает так называемый закон Дарси

$$\mu\mathbf{v} = -kD_x p, \tag{2.4}$$

где $p = p(x,t)$ — это давление, а μ — это вякость жидкости. Наконец, давление связано с плотностью следующим образом:

$$p = p_0\rho^\gamma, \quad \gamma \geqslant 1. \tag{2.5}$$

Система уравнений (2.3)–(2.5) сводится к следующему уравнению:

$$\rho_t = c\Delta\rho^m, \quad m = 1+\gamma, \quad c = \frac{\gamma k p_0}{(\gamma+1)\varepsilon\mu}. \tag{2.6}$$

Нелинейное уравнение теплопроводности. Довольно часто задачи, связанные с теплопроводностью являются существенно нелинейными. Так уравнение для нестационарной теплопроводности имеет следующий вид [1]:

$$c\rho\frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div}\left(kD_xT\right), \tag{2.7}$$

где величина $k = k(T)$ — коэффициент теплопроводности, зависящий от температуры T. Например, естественным является степенной закон

$$k(T) = aT^n, \quad n > 0.$$

Итогом опять является опять уравнение (2.1).

Отметим также, что в приложениях к теории горения и теории популяционной динамики в биологии возникают такие уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u^m + f(u). \tag{2.8}$$

[1] Еще раз используем вместо ∇_x символ D_x.