

Дорогой Друг!

Сейчас Вы временно оторваны от занятий на факультете. Может быть у Вас найдется время вспомнить то, что Вы начинали изучать. В этом случае, я надеюсь, Вам может пригодиться это пособие. Оно представляет собой нечто среднее между задачником и краткими сведениями по теории. Предполагается, что Вы уже немного ознакомились с ТФМ, может быть прослушали курс лекций или его фрагмент, но для Вас могло остаться не совсем ясным, для чего изучать ТФМ, какова роль в нем отдельных теорем, и Вы не совсем уверены в решении задач. Тогда постарайтесь прочитать пособие и решить те задачи, которые Вам понравятся. Я постарался резко отделить то, что мне кажется очень важным, от вспомогательного или вовсе маловажного. Если Вы решите все задачи (а они часто сформулированы в виде вопросов, возникающих в связи с формулировкой теорем, в виде предложений довести до конца доказательство), то Вы, как мне кажется, освоите самую важную часть курса. Обратите внимание на то, что часто я предполагаю, что Вы сами выберете ту конкретную формулировку задачи, которая Вас заинтересует. В общем, я рассчитываю, что Вы - мой будущий коллега по работе и сильный студент (даже если Вы до сих пор получали в основном тройки и четверки!). Позвольте мне передать Вам привет от факультета и сказать, что мы ждем лично Вас!

Соколов Д. Д. Пособие по решению задач в курсе теории функций комплексной переменной. - М.: Изд-во Моск. ун-та, 1987. - 24 с.

В пособии приведены основные понятия и теоремы курса теории функций комплексной переменной, намечены схемы их доказательства. Разобраны основные типы задач курса, приведены задачи для самостоятельного решения.

Печатается по постановлению Редакционно-издательского совета Московского университета

01/7/02/-87 - заказное

© Издательство
Московского университета, 1987 г.

1. ПОНЯТИЕ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ.

Центральная идея теории функций комплексной переменной возникает при формулировке понятия производной. На первый взгляд эта производная определяется совершенно аналогично производной функции действительной переменной, как предел разностного отношения:

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}.$$

Однако приращение комплексного аргумента Δz характеризуется не величиной $|\Delta z|$, но и направлением $\arg \Delta z$, а производная по определению от этого направления не зависит. Поэтому дифференцируемость функции комплексного переменного - значительно более редкое явление, чем дифференцируемость функции действительного переменного, а дифференцируемые функции комплексного переменного - аналитические функции - обладают гораздо более единообразными свойствами, чем дифференцируемые функции действительной переменной.

Важнейшая задача ТФП - обсудить свойство аналитичности с разнообразных точек зрения, дать его характеристики на разных языках.

1. Координатная характеристика. Соотношение Коши-Римана.

Комплексное число можно представить себе как пару действительных чисел, а функцию комплексной переменной как пару функций двух действительных переменных: $z = x + iy$, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Тогда условие аналитичности сильно ограничивает возможный вид функций u и v . Выбирая Δz равным сначала Δx , а затем $i\Delta y$ и выражая $f'(z_0)$ через частные производные функций u и v можно получить условие Коши-Римана (проведите эту выкладку самостоятельно!).

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

которые выражают свойство аналитичности на координатном языке.

Пример. Является ли аналитической функция $f(z) = z$?

Решение. Подставляя в соотношения Коши-Римана $u(x, y) = x$, $v(x, y) = y$, получаем $\frac{\partial u}{\partial x} = 1 = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 0 = -\frac{\partial v}{\partial x}$. Соотношения Коши-Римана выполнены, следовательно, наша функция аналитическая.

Пример. Является ли аналитической функция $f(z) = \bar{z}$, где черта - знак комплексного сопряжения?

Решение. $(x+iy) = x-iy$. Подставляя в соотношения Коши-Римана получаем $(u(x,y)=x; v(x,y)=-y); z \neq -1; 0=0$. Первое из этих соотношений не выполняется, поэтому наша функция не аналитическая.

Задача. Является ли аналитической функция $f(x+iy) = \sin(x+y) + xy - ix^2$

Задача. Когда Вы убедитесь, что для нее соотношения Коши-Римана также не выполняются, попробуйте решить, может ли вообще функция $u(x,y) = \sin(x+y) + xy$ быть действительной частью аналитической функции.

Эту задачу трудно решить, если не вывести следствие условий Коши-Римана: действительная и мнимая части аналитической функции удовлетворяют уравнению Лапласа:

$$u_{xx} + u_{yy} = \Delta u = 0; \Delta v = 0.$$

(для этого достаточно продифференцировать первое из условий по x , а второе по y и скомбинировать результаты. Прделайте эту выкладку!). Теперь легко убедиться, что у нашей функции не равен нулю лапласиан, т.е. ответ на вопрос отрицательный.

Задача. Может ли не равная тождественно постоянной аналитическая функция иметь постоянную действительную часть?

Отрицательный ответ Вы легко получите из тех же соотношений Коши-Римана. А вот может ли не равная тождественно постоянной аналитическая функция иметь постоянный модуль? Или аргумент? Интуитивно представляется вероятным, что ответ на эти важные вопросы тоже отрицателен, но для того, чтобы убедиться в этом, Вам придется вывести соотношения Коши-Римана в том случае, когда функция задана в виде $f(z) = R(x,y)e^{i\phi(x,y)}$. Идея вывода та же, Вы должны получить следующие соотношения: $\frac{\partial R}{\partial x} = R \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial y} = -R \frac{\partial \phi}{\partial x}$. Теперь очевидно, что если, скажем, $R = \text{const}$, то и $\phi = \text{const}$. Для полноты картины выведите соотношения Коши-Римана в случае, если $f(z) = u(\rho, \varphi) + iv(\rho, \varphi); z = \rho e^{i\varphi}$ (ответ: $\frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \varphi}, \frac{\partial u}{\partial \varphi} = -\rho \frac{\partial v}{\partial \rho}$). И $f(z) = R(\rho, \varphi)e^{i\phi(\rho, \varphi)}$

2. Геометрическая характеристика. Конформные отображения.

На функцию комплексного переменного можно смотреть как на закон, сопоставляющий точкам некоторой области на плоскости

комплексного переменного z другую область на плоскости комплексного переменного w . Тогда существование ненулевой производной у нашей функции означает, что малые векторы, приложенные в данной точке растягиваются при этом отображении с одинаковым коэффициентом растяжения, который равен модулю производной, и поворачиваются на один и тот же угол, равный аргументу производной. Заметим, что при этом отображении углы между малыми векторами, приложенными к данной точке, сохраняются как по величине, так и по знаку. Такое отображение, сохраняющее углы и обладающее постоянством растяжений называется конформным (обычно в определение конформности для удобства включают требование взаимной однозначности). С учетом этих оговорок свойство конформности отображения служит геометрическим выражением свойства аналитичности функции, задающей это отображение.

Полезно научиться строить конформное отображение одной области на плоскости комплексного переменного на другую. Эта задача в чем-то напоминает задачу о взятии неопределенного интеграла: в курсе ТФКП доказываются теоремы, гарантирующие существование такого отображения при весьма широких условиях (попробуйте вспомнить, в чем состоит теорема Римана!), но если Вы хотите решить конкретную задачу, то дело фактически сводится к подбору и подгонке под известные задачи.

Вам нужно научиться опознавать те простейшие ситуации, когда конформное отображение можно осуществить с помощью дробно-линейной функции: $w = f(z) = \frac{a+bz}{c+dz}$. В определении этой функции фигурируют четыре константы a, b, c, d , но независимых среди них только три (числитель и знаменатель можно сократить на один и тот же множитель). Поэтому дробно-линейная функция определяется тремя условиями, например, тем, куда переходят три заданные точки плоскости z . Оказывается, что дробно-линейная функция переводит окружности в окружности. При этом в число окружностей включаются и прямые, которые считаются окружностями бесконечно большого радиуса, проходящими через бесконечность. Вообще, в ТФКП полезно рассматривать не просто плоскость комплексного переменного, а пополнить ее бесконечно удаленной точкой до сферы.

С этим запасом знаний мы сможем построить конформное отображение круга на круг с помощью дробно-линейной функции.

Очень важный пример. Найти функцию, конформно отображающую верхнюю полуплоскость (это тоже круг, но бесконечного радиуса!) на единичный круг.

Решение. Окружность задается тремя точками, соответствующие трех точек задает и дробно-линейную функцию. Потребуем, чтобы три точки на границе полуплоскости переходили в три точки на границе круга. Эти точки можно выбрать с большим произволом, но разумный выбор облегчает подсчеты. Пусть $z_1 = 0, z_2 = 1, z_3 = \infty$; а $f(z_1) = i; f(z_2) = 1; f(z_3) = -1$. Теперь легко получить три соотношения для определения коэффициентов a, b, c, d ; $a/c = 1, a+b/c+d = i; b/c = -1$. Один из этих коэффициентов мы можем выбрать по своему произволу, например, положим $a = 1$. Тогда $c = 1, d = -b; b = \frac{1-i}{1+i}$, так что, после приведения подобных членов, получаем

$$f(z) = \frac{(1+i) - (1-i)z}{(z+i) + (1-i)z}$$

Это отображение заведомо переводит ось x в единичную окружность, но мы еще должны убедиться, что оно отображает на единичный круг верхнюю, а не нижнюю полуплоскость! Для этого достаточно убедиться, что одна точка из верхней полуплоскости, скажем, i , переходит внутрь круга. Действительно, $f(i) = 0$. Если бы мы не получили желаемого результата, то надо было бы поменять местами образы двух наших точек, скажем, считать, что $f(z_2) = -1$ и $f(z_3) = i$. Конечно, я знал эту рекомендацию (принцип соответствия границ: конформное отображение сохраняет направление обхода границы) и сделал правильный выбор заранее. Проверку делать полезно и когда знаешь принцип: я, например, нашел ошибку в знаке.

Вам нужно научиться решать подобные примеры без труда. Постарайтесь научиться этому на следующем десятке примеров:

1. Отобразить в единичный круг нижнюю полуплоскость.
2. Отобразить в единичный круг правую полуплоскость.
3. Отобразить в единичный круг внешнюю полуплоскость.
4. Отобразить в единичный круг внутренность круга $|z| < 2$
5. Можно ли конформно отобразить на единичный круг кольцо $1 < |z| < 2$?
6. Можно ли отобразить на единичный круг первый квадрант с помощью дробно-линейной функции? Убедитесь в том, что этого

сделать нельзя и постройте потом требуемое отображение с помощью комбинации дробно-линейной функции и функции $f(z) = z^2$.

7. Отобразить внешность круга $|z-1| > 1$ в круг $|z-1| < 1$.
8. Отобразить полуплоскость $\operatorname{Re} z > \sqrt{2} \operatorname{Im} z$ в единичный круг.
9. Отобразить полуплоскость $\operatorname{Re} z + \sqrt{2} \operatorname{Im} z > 1$ в единичный круг.
10. Отобразить полуплоскость $\operatorname{Re} z > 2$ в единичный круг.

Найденное Вами конформные отображения неединственны. Действительно, сам единичный круг можно конформно отобразить на себя так, чтобы заданная точка внутри круга перешла в начало координат, а аргумент производной в этой точке у конформного отображения был бы равен заданному числу. Для того, чтобы построить подобное отображение, достаточно знать, что дробно-линейная функция переводит точки, симметричные относительно окружности, в симметричные же точки.

Пример. Построим конформное отображение единичного круга на себя, при котором точка $z_1 = 1/2$ переходит в начало координат, а $\arg f'(z_1) = 0$. Для этого заметим, что точка $z_2 = 2$ симметрична точке $z_1 = 1/2$ относительно единичной окружности ($1/2 \cdot 2 = 1$, т.е. квадрату радиуса окружности). Точка $z_1 = 1/2$ переходит в центр круга, точка $z_2 = 2$ переходит в симметричную ей точку, а такой по определению является $w = \infty$. Теперь легко подобрать коэффициенты дробно-линейной функции так, чтобы удовлетворить этим условиям: $f(z) = \frac{z-1/2}{z-2}$. Коэффициент A можно найти из таких соображений. Во-первых, наше отображение должно перевести точку $z_3 = 1$ на единичный круг. Поэтому $|A \frac{1-1/2}{1-2}| = 1$ т.е. $|A| = 2e^{i\alpha}$, где α — действительное число (условие $|z| = 1$ означает для комплексных чисел не $z = \pm 1$, а $z = e^{i\alpha}$!). Теперь легко убедиться, что $f'(z_1) = -e^{i\alpha}$, т.е. условие $\arg f'(z_1) = 0$ означает $e^{i\alpha} = -1$. Итак, $f(z) = \frac{z-1/2}{z-2}$. Это конформное отображение уже определено единственным образом (теорема единственности).

Задание. Наложите сами на примеры (1-4, 8-10) предыдущего задания дополнительные условия, обеспечивающие единственность конформного отображения (т.е., укажите точку, которую Вы хотите перевести в начало координат и требуемый аргумент производной отображения). Решение этого задания представляет собой комбинацию приемов двух только что разобранных примеров.

3. Характеристика на языке контурных интегралов. Теорема Коши.

Интеграл от аналитической функции по заданному контуру понимается как криволинейный интеграл второго рода ($dz = dx + i dy$), $f = u + i v$:

$$\int_C f(z) dz = \int_C u dx - v dy + i \int_C u dy + v dx$$

Казалось бы, он должен определяться не только начальной и конечной точками интегрирования (и, разумеется, подынтегральной функцией); но и самим контуром. Однако, условия Коши-Римана совпадают с условиями независимости интеграла второго рода от пути интегрирования (проверьте это!). Поэтому при вычислении интеграла от аналитической функции контур интегрирования можно деформировать так, чтобы он не выходил из области аналитичности функции f . В частности, интеграл по замкнутому контуру, внутри которого функция аналитична, равен нулю (теорема Коши). Верно и обратное утверждение - функция, для которой по любому односвязному замкнутому контуру равен нулю - аналитическая (теорема Морера).

Деформируя контур интегрирования так, как это допускается теоремой Коши, можно легко вычислить многие интегралы. Вы обязаны научиться это делать.

Важный пример. Вычислить интеграл $\int \frac{dz}{z}$ по контуру, изображенному на рис. 1.

Решение. Обратим внимание на то, что контур вообще не задан какой-либо формулой. Важны его начальная и конечная точки и то, сколько раз он обходит вокруг начала координат. Нам нужно разумно деформировать наш контур так, чтобы интеграл подсчитывался легко. Для этого заметим, что интеграл $\int \frac{dz}{z}$ легко вычисляется по контурам двух типов: во-первых, вдоль действительной оси: $dz = dx$, $\int_1^x \frac{dz}{z} = \ln x$ ($x > 0$); во-вторых, что менее очевидно, по дуге окружности с центром в особой точке $z = 0$. На этой окружности $z = \rho e^{i\theta}$, $dz = i \rho e^{i\theta} d\theta$ так что $\int \frac{dz}{z} = i \int d\theta$

Поэтому разумно деформировать наш контур в контур, изображенный на рис. 2, где окружность с центром в нуле и радиуса ρ пробегается дважды и еще по ней проходит дуга в φ радиан. Ответ: наш интеграл равен $\ln \rho + i\varphi + i\varphi$

Интеграл $\int_1^x \frac{dz}{z}$ равен $\ln x$, можно считать, что рассмотренный интеграл $\int \frac{dz}{z}$ определяет логарифмическую функцию

в комплексной области. Оказывается, $\ln z$ многозначная функция. При добавлении одного контура интегрирования вокруг начала координат значение логарифма изменяется на $2\pi i$.

Чуть более сложный пример. Естественно считать, что интеграл $\int \frac{dz}{z^2 + 1}$ задает функцию $\text{Arctg } z$. Теперь у подынтегральной функции две особые точки: $z = i$ и $z = -i$. Поэтому $\text{Arctg } z$ тоже многозначная функция, значения которой зависят от того, сколько раз контур интегрирования обходит особые точки. Вычислите сами этот интеграл для случая, когда точка $z = x$ находится на действительной оси. Тогда, очевидно,

$\text{Arctg } z = \text{arctg } x + \frac{\pi}{2} n$. Ваша задача установить, как связано n с количествами обходов контура интегрирования вокруг особых точек. Удобный контур интегрирования (рис. 3) снова состоит из отрезка действительной оси, двух отрезков мнимой оси, ведущих от начала координат к особым точкам и - это самое интересное - к двум (может быть, несколько раз проходимым) бесконечно малым окружностям вокруг особых точек. На этих окружностях $z = \pm i \rho e^{i\varphi}$, $\rho \rightarrow 0$, так что $\frac{dz}{z^2 + 1} = \pm \frac{d\varphi}{2}$. Доведите выкладки до конца. Теперь попробуйте вычислить интеграл в том случае, когда точка z лежит где-то вне действительной оси. Это гораздо более неприятная задача потому, что трудно указать удобный контур, соединяющий точку z с действительной осью. Но попробовать все равно стоит, а потом мы вернемся к этому примеру с других позиций.

Примененная в этом примере идея обхода особой точки по бесконечно малому контуру вообще очень важна в ТФП. В частности, из нее вырастает формула Коши:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

Нужно просто вычислить интеграл в правой части по этому рецепту. Сделайте это сами!

Из этой формулы вытекают, в частности, бесконечная дифференцируемость аналитической функции (при ее дифференцировании под знаком интеграла дифференцируется очень простая и хорошая функция $1/(\zeta - z)$) и принцип максимума модуля аналитической функции. Постарайтесь их вспомнить и доказать. Еще одна важная теорема, вытекающая из формулы Коши - теорема Лиувилля. Аналитическая на всей плоскости функция с ограниченным модулем тождественно равна нулю.

венно равна константе. Для доказательства нужно вычислить производную $f'(z)$, дифференцируя формулу Коши, и оценить производную, отодвигая контур интегрирования в бесконечность. Проведите оценку! Теорема Лиувилля, грубо говоря, утверждает, что у аналитической функции всегда есть особые точки.

Задание. Найдите, по какой последовательности точек неограниченно возрастают (по модулю) функции $\sin z$, $\cos z$, e^{-z^2} , e^{-z^4} . Где лежат особые точки функции $1/z$, $1/z^2$, e^z ?

4. Конструктивное задание аналитической функции разложением в степенной ряд. Аналитическое продолжение.

С помощью формулы Коши можно получить еще один подход к аналитическим функциям. Их можно представлять себе как обобщения многочленов – бесконечные суммы степеней, т.е. степенные ряды или ряды Тейлора. Для доказательства разложимости функции, аналитической в круге, в ряд Тейлора с центром разложения z_0 , совпадающим с центром круга, фактически достаточно разложить соответствующим образом ядро интеграла Коши:

$$\frac{1}{z - z_0} = \frac{1}{z - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{z - z_0}} = \frac{1}{z - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{z - z_0} \right)^n \quad (I)$$

Здесь использована известная формула суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Доведите эту идею до настоящего доказательства.

Техника разложения в ряд Тейлора та же, что и для функции действительной переменной. Например, коэффициенты ряда Тейлора можно выразить через производные функции:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad c_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0).$$

Получите разложение (I) с помощью этого способа. На самом деле так действовать удобно далеко не всегда. И формулу (I) мы сначала получили по-другому. Разложите теперь в ряд Тейлора с центром в нуле функцию e^{z^2} . Для этого надо заменить z^2 на y и воспользоваться известным разложением экспоненты. А теперь разложите в ряд Тейлора с центром в нуле

- | | |
|---------------------------------|---|
| 1. $e^z \cos z$ | 4. $(1+z)e^{-z}$ |
| 2. $e^z \sin z$ | 5. $(1-z^2) \operatorname{ch} \sqrt{z}$ |
| 3. $(\operatorname{arctg} z)^2$ | 6. $\ln^2(1-z)$ |

Здесь $\operatorname{arctg} z$ и $\ln z$ – главные значения многозначных функций. Надеюсь, Вы не во всех случаях пробовали считать производные.

Самое интересное отличие рядов Тейлора и ФКП от рядов Тейлора в действительном анализе – нахождение области сходимости ряда. Конечно, и здесь можно пользоваться формулой Коши-Адамара.

$$R^{-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|},$$

где R – радиус сходимости, а черта означает верхний предел. Вычислите по ней радиус сходимости полученных Вами рядов. Однако, если функция задана достаточно удобно, то радиус сходимости можно найти без всяких вычислений – он просто равен расстоянию от центра разложения до ближайшей особой точки. Найдите теперь результаты, полученные по формуле Коши-Адамара без выкладок.

Важный пример. Рассмотрим функцию $\begin{cases} e^{-1/z^2} & z \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases}$. Она

рассматривается в курсе анализа как интересный пример функции, у которой в нуле существуют все производные, и поэтому можно написать ряд Тейлора, который конечно сходится, потому, что все производные равны нулю. Но сама функция вне нуля не обращается в нуль и, поэтому сходящийся ряд Тейлора вовсе не сходится к порождаящей его функции. Совсем по-другому трактует этот пример ФКП. Здесь точка $z=0$ вовсе не точка аналитичности, а особая точка. Вблизи нее функция становится неограниченной, не имеет предела. Проверьте это! Конечно, нет и речи о ее разложимости в ряд Тейлора с центром в нуле.

Конечно, степенной ряд может задавать аналитическую функцию не во всей области ее определения. Например

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$$

Однако, стоящая справа функция определена при всех $z \neq 1$, а ряд сходится лишь при $|z| < 1$. Можно сказать, что функция

$\frac{1}{1-z}$ является аналитическим продолжением суммы ряда $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$. Идея аналитического продолжения степенных рядов повсеместно используется в квантовой теории поля, где ряды тео-

рии возмущений часто сходятся совсем не в тех областях, которые интересуют исследователей, так что результаты часто приходится получать с помощью аналитического продолжения. Конечно, к понятию аналитического продолжения можно подходить и из других соображений. Мы уже фактически строили аналитические продолжения логарифма и арктангенса, рассматривая интегралы. То, что эти и другие подходы дают один и тот же результат, устанавливается теоремой единственности аналитической функции. Согласно этой теореме в данной области может существовать лишь одна аналитическая функция, принимающая заданные значения в некоторой последовательности точек, сходящейся к точке, принадлежащей этой же области. Очень важно, что аналитическая функция не определяется единственным образом значениями на последовательности точек, уходящих в бесконечность (или сходящихся к границе области). Обдумайте, почему так происходит и приведите пример (используйте нули функции $f(z) = \sin z$).

II. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ.

Для того, чтобы научиться решать те задачи, которые должен решать современный физик, мало знать теоремы Тейлора, надо уметь делать простые выкладки. В школе Вы учились это делать для действительных функций, научимся тому же для комплексных.

I. Действия над комплексными числами.

Подсчитайте:

1. $(3i+4) + (2-3i)$
2. $(4i+5) - (7-6i)$
3. $(3i+4)/(2i-3)$ ($i^2 = -1$)
4. $(4i+5)(7-6i)$
5. $\frac{3i+4}{2-3i}$
6. $\frac{4-3i}{3i+5}$
7. $\frac{4i+5}{7-6i}$
8. $7-6i / 4i+5$.

Вспомните, что от комплексности в знаменателе избавляются умножением на комплексно-сопряженное число:

$$\frac{3i+4}{2-3i} = \frac{(3i+4)(2+3i)}{4+9}$$

2. Тригонометрическая и показательная формы комплексных чисел.

Складывать и умножать легче в алгебраической форме, умножать, делить и возводить в степень - в показательной или близкой к ней тригонометрической форме.

Переведите в показательную форму!

- | | |
|------------------|---------|
| 1. $1+i$ | 4. i |
| 2. $1-i$ | 5. -1 |
| 3. $1+\sqrt{3}i$ | 6. $-i$ |
| 4. $\sqrt{3}+i$ | |

При решении этих примеров используйте формулы:

$$z = a+bi = \rho e^{i\varphi} = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

$$\rho = \sqrt{a^2+b^2}; \quad \operatorname{tg} \varphi = b/a.$$

Корень n -ой степени извлекается так (формула Муавра):

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho e^{i\varphi}} = \rho^{1/n} e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}}$$

Очень важно помнить, что аргумент φ определен лишь с точностью до прибавления 2π . Отсюда и получается, что у корня n -ой степени n значений. Они получаются, когда n принимает значения от 0 до $n-1$. Далее пойдут все те же значения радианта, убедитесь в этом.

Вычислите:

- | | | | |
|------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| 1) $\sqrt{2}$ | 2) $\sqrt{2}$ | 3) $\sqrt{2}$ | 4) $\sqrt{2}$ |
| 5) $\sqrt[3]{1}$ | 6) $\sqrt[3]{1}$ | 7) $\sqrt[3]{1}$ | 8) $\sqrt[3]{1}$ |
| 9) $\sqrt[3]{1}$ | 10) $\sqrt[3]{1}$ | 11) $\sqrt[3]{1}$ | 12) $\sqrt[3]{1}$ |

Такие примеры не должны в будущем вызывать у вас затруднений! Если Вы чувствуете себя еще неуверенно с ними, придумайте еще таких же и порешайте их сами.

- 13) $\sqrt[3]{1+i}$ 14) $\sqrt[3]{1-i}$ 15) $\sqrt[3]{i-1}$

В формуле Муавра число n может быть иррациональным или да-

же комплексным. В этом случае значений, радикала бесконечно много. Рассмотрите примеры

- | | |
|--------------|--------------|
| 1) $i^{1/2}$ | 4) 1^i |
| 2) i^i | 5) $e^{1/2}$ |
| 3) $1^{1/2}$ | 6) e^i |

Запомните! У многочлена n -ой степени всегда n комплексный корень. Конечно, некоторые из этих корней могут быть действительными (действительное число - частный случай комплексного).

Решите уравнения:

- 1) $z^2 + 1 = 0$ 2) $z^4 + 4 = 0$
 3) $z^2 + 2z + 1 = 0$

Выпишите разложения на множители полиномов, стоящих в левых частях этих уравнений.

Э Экспонента. Формула Эйлера.

Это одна из самых нужных при вычислениях формула:

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y$$

$$\cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} \quad \sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}$$

$$e^z = e^{a+ib} = e^a (\cos b + i \sin b)$$

Вы уже, наверное, заметили некоторую несогласованность в определениях. Если рассматривать величину e^z как частный случай извлечения корня (комплексного), то она имеет бесконечно много значений, а если как частный случай экспоненты - то одно. На практике это обычно не вызывает затруднений, если помнить, о чем идет речь, но нужно быть внимательным.

Задание. Найдите тули косинуса и синуса и убедитесь, что все они лежат на действительной оси, там же, где и в привычном нам действительном анализе. Экспонента корней не имеет!

4. Логарифм $\text{Ln } z = \text{Ln } p e^{iy} = \text{Ln } p + i y + 2\pi k i$ имеет бесконечно много значений. Про одно из них, аргумент которого заключен между 0 и 2π , говорят как про главное значение.

Вычислите:

- 1) $\text{Ln } 1$ 2) $\text{Ln } i$ 3) $\text{Ln } (-1)$ 4) $\text{Ln } (-i)$

Это тоже Вы должны уметь делать без затруднений.

5. Обратные тригонометрические функции.

Они определяются также, как и в действительном случае, но здесь, в ТФП, их можно выразить через логарифмическую функцию. Например, для арксинуса:

$$y = \text{Arcsin } z; \sin y = z; \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i} = z;$$

$$e^{iy} = x; \frac{x - \frac{1}{x}}{2i} = z; x^2 - 2izx - 1 = 0;$$

$$x = iz \pm \sqrt{-z^2 + 1}; e^{iy} = iz \pm \sqrt{1 - z^2}$$

$$\text{Arcsin } z = \frac{1}{i} \text{Ln} (iz \pm \sqrt{1 - z^2})$$

Если z - действительное число, меньшее по модулю единицы, то под знаком логарифма - число, равное по модулю единице, так что арксинус всегда в этом случае действителен. Проверьте это!

Задание. Выведите представления через логарифм для арккосинуса, арктангенса и арккотангенса.

6. Гиперболические функции определяются так:

$$\text{ch } z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

$$\text{sh } z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

Очевидно $\text{ch } z = \cos iz$.

Выведите такое же представление для гиперболического синуса. Вспомните, что такое гиперболический тангенс. Нарисуйте графики этих функций для действительного аргумента. Особенно важен график гипер-

болического тангенса - он часто встречается в физике при описании явлений насыщения. Как Вы думаете, почему?

Сформулируйте определения обратных гиперболических функций и выразите их через логарифмы.

III. ТЕОРИЯ ВЫЧЕТОВ. ОСОБЫЕ ТОЧКИ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ.

ТФКП очень широко применяются в физике и хорошо знать ее нужно каждому физiku. Однако, не про все ее применения легко рассказать Вам сейчас - Вы изучили еще далеко не все разделы современной физики. Проще всего рассказать о применении ТФКП для вычисления определенных интегралов (наряду с формулой Ньютона-Лейбница и дифференцированием по параметру). Идея этой теории в том, что интеграл по замкнутому контуру определяется поведением функции в особых точках, где она теряет аналитичность. Поэтому нам надо познакомиться поближе с понятием особых точек.

1. Изолированные и неизолированные особые точки. Точка ветвления.

Потеря аналитичности может происходить от многих причин и теория вычетов работает только в одном - но зато самом важном - случае. Займемся постепенным выделением этого случая, который нам нужно научиться опознавать на практике. Мы будем делать это методом исключения, обрисовывая и устранивая нас ситуации.

Во-первых, аналитичность может теряться потому, что функция является многозначной, причем при обходе вокруг данной точки по малому контуру мы получаем другое значение функции. Пример: $f(z) = \sqrt{z}$. Эта функция не дифференцируема в нуле ($f' = 1/(2\sqrt{z})$ и в эту формулу нельзя подставить $z=0$!). Такая точка называется точкой ветвления. Чуть дальше мы поговорим об устранимой особой точке, с которой нельзя путать точку ветвления, т.к. устранимые особые точки бывают у однозначных аналитических функций (или у отдельных ветвей этих функций!).

Точки ветвления имеют не только корни, т.е. функции вида $f(z) = \sqrt[n]{z}$, но и логарифм (здесь точка ветвления - тоже ноль). Практически к этому и сводятся все возможные случаи появления точек ветвления. Эти точки можно характеризовать числом значений функции вблизи точки ветвления, или, как говорят, порядком точки ветвления. У функции $f(z) = \sqrt[n]{z}$ точка ветвления n -го порядка, у логарифма - бесконечного.

Во-вторых, могут встретиться разные типы очень сложных особых точек, про которые трудно высказать что-нибудь позитивное. Для то-

го, чтобы отгородиться от этих трудных, но к счастью редких ситуаций, достаточно наложить на особую точку условие изолированности: в ее достаточно малой окрестности не должно быть других особых точек.

Пример неизолированной особой точки: $f(z) = \frac{1}{\sin z}$; $z=0$. Если Вы имеете уже представление о классификации изолированных особых точек, то можете подумать, что эта точка - существенно особая точка. Но это не так, в любой сколь угодно малой окрестности этой точки лежат нули синуса, $z_n = \pi n$, в которых наша функция тоже имеет особые точки (полюса). Мы имеем здесь дело с т.н. точкой сгущения полюсов. Конечно, специально можно придумать и примеры посложнее, но практически этот пример в комбинации с другими функциями, не содержащими неизолированных особых точек - это все, с чем Вы можете встретиться в данной связи.

2. Изолированные особые точки: устранимые особые точки, существенно особые точки, полюса.

Изолированные особые точки распадаются на три класса. Во-первых, это точки, в которых существует конечный предел функции. Представительным примером такой особой точки является начало координат для функции $f(z) = \frac{\sin z}{z}$. Конечно, можно подобрать и другие примеры, в которых сокращаются неопределенности числителя и знаменателя. Основная трудность при исследовании таких точек - не спутать ее с регулярной точкой, в которой функция не теряет аналитичности.

Во-вторых, функция может не иметь определенного конечного или бесконечного предела в особой точке, а если мы будем подходить к особой точке по разным путям, то функции будет вести себя существенно по-разному. Пример - бесконечно удаленная точка для экспоненты. Если говорить об элементарных функциях, то суперпозициями этого примера и другими функциями без существенно особых точек и ограничивается дело. Конечно, при этом остается достаточно много простора для конструирования особенностей. Например, точка $z=0$ для функции $f(z) = e^{-1/z^2}$ является существенно особой (комбинация экспоненты и степени). Проверьте, что упомянутые функции действительно не имеют ни конечного, ни бесконечного предела в особой точке!

Наконец, полюс, удобная для теории вычетов особенность - это особая точка, в которой функция стремится к бесконечности. Если говорить об элементарных функциях, то полюс получается из-за обращения в нуль знаменателя. Порядок полюса - это скорость обращения

знаменателя в 0.

При решении примеров превалируют, конечно, элементарные функции, поэтому для опознания вида особой точки достаточно подогнать ее под один из разобранных примеров.

Важный пример: Найти особые точки функции

$$f(z) = \frac{e^{-\frac{1}{z^2}} \sqrt{z^2 - 1}}{(z^2 + 9) \sin \frac{1}{z+2}}$$

и характеризовать эти точки.

Во-первых, видно, что в записи функции присутствует радикал, она неоднозначная, в нулях радикала — точки ветвления. Они легко находятся: ± 1 ; $\pm i$. Радикал третьего порядка, того же порядка и точки ветвления. Далее, обращает на себя внимание экспонента — она дает существенно особую точку 0 в точности как в одном из стандартных примеров. Далее, нули знаменателя получаются из-за квадратного двучлена: $\pm 3i$. Известно, что квадратичная функция разлагается на линейные множители, поэтому нули первого порядка, того же порядка и полюса. Наконец, синус в знаменателе — выглядит в точности как пример неизолированной особой точки — точки сгущения полюсов. Она лежит в точке -2 . Задано синус порождает ряд нулей первого порядка и соответствующим им полюса первого порядка функции

$$-2 + \frac{1}{k}\pi; k = \pm 1; \pm 2; \dots$$

Пользуясь этими же простыми соображениями, найдите особые точки следующих функций и дайте им характеристику:

- 1) $\frac{\cos \frac{1}{z^2} \ln(1+z^2)}{\sqrt{1+3z^2} (z^2+4)}$
- 2) $\frac{\lg z - 1 \cdot (z^2+4z+5)}{(z^2-2z-3)e^{z^2}}$
- 3) $\frac{\sin(z-1)e^{-\frac{1}{z^2}}}{\lg z + 3 (z^2+4z-3)}$
- 4) $\frac{\ln(4-5z) \cos(z-1)}{(z^2+2z-4)^2 e^{-\frac{1}{z^2}}}$

Постарайтесь придумать какие-нибудь более сложные ситуации для элементарных функций — мне отказывает фантазия.

3. Ряды Лорана.

Высказанные соображения об особых точках выглядят чересчур примитивными. С их помощью легко решать простые задачи, но трудно развивать теорию. Более удобно для этого говорить на языке рядов Лорана. Это аналог рядов Тейлора, но не в окрестности регулярной точки, а в кольцеобразной окрестности особой точки. Вообще, можно разлагать в ряды Лорана в любой кольцеобразной окрестности, практически интересно в окрестности, внутренний радиус которой равен нулю. Тогда,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n,$$

где z_0 — особая точка. Формальное отличие от ряда Тейлора — наличие отрицательных степеней. Если таких членов действительно бесконечно много, то мы имеем дело с существенно особой точкой, если их конечное число, а остальные коэффициенты обращаются в нуль, то мы имеем дело с полюсом. В устранимой особой точке вообще нет отрицательных степеней.

Запомните! В малой окрестности точки ветвления и неизолированной особой точки вообще нельзя разлагать в ряд Лорана!

В моей научной жизни никогда не встречались задачи о разложении функции в ряд Лорана (важна возможность такого разложения, а вопрос о том, чему равен 25-ый коэффициент не очень важен). Однако, нужно научиться решать один тип задач просто для того, чтобы осознать само понятие ряда Лорана.

Пример. Пусть $f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$. У этой функции два полюса $z=0$ и $z=1$. Разложим ее в ряд Лорана сначала в кольце $0 < |z| < 1$, потом в кольце $1 < |z| < \infty$. Для этого сначала представим нашу функцию в виде суммы двух простых дробей $f(z) = \frac{A}{z} + \frac{B}{z-1}$. Подбирая неопределенные коэффициенты, получаем $f(z) = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z}$. Что касается первого кольца, то в нем сингулярный член $-\frac{1}{z}$ уже выделен и нам осталось разложить в ряд Тейлора с центром в нуле другую дробь. Это легко сделать, вспомнив, чему равна сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем z . Итак, ответ на первый вопрос:

$$f(z) = -z^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} z^n = - \sum_{n=-1}^{\infty} z^n$$

Разберемся теперь с другим кольцом. В нем вторая из простых дробей ограничена, а первая (как, впрочем, и вторая) имеет определенный предел в бесконечности. Поэтому, если мы сделаем замену пе-

переменных $W = 1/z$, то фактически приходим к задаче о разложении в ряд Тейлора регулярной в нуле функции $f(W) = W^2 / (1 - W)$. Снова вспоминая формулу суммы геометрической прогрессии, получаем:

$$f = \sum_{n=2}^{\infty} W^n = \sum_{n=-\infty}^{-2} z^{-n}.$$

Аналогично сделайте разложения $f(z)$ в ряды Лорана в кольцах, concentрических другой особой точке $z=1$, а также в кольцах, concentрических, скажем, точке $z=1/2$.

Задание. Проведите аналогичные разложения для функций (указаны центры систем concentрических колец разложения; определите сами, какие интересно выбирать кольца):

- 1) $f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+2)}$; $z = -1$; $z = -2$; $z = 0$
- 2) $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$; $z = i$; $z = -i$; $z = 0$.
- 3) $f(z) = \frac{1}{z^2-1}$; $z = 1$; $z = -1$; $z = 0$.

Указание. Конечно, когда Вы занимаетесь разложением в ряд Лорана в кольцо с центром в некоторой точке $z = a$, удобно сделать замену переменных так, чтобы перевести эту точку в начало координат — легче будет пользоваться все той же формулой суммы геометрической прогрессии. Будете Вы делать эту замену в уме или на бумаге — вопрос второстепенный. Вспомните, что общие формулы о вычислении коэффициентов ряда Лорана получаются комбинацией приема, примененного нами при решении этих задач, с интегральной формулой Коши. Постарайтесь вывести эти формулы самостоятельно.

4. Вычеты.

Вы помните, что с помощью теоремы Коши интеграл от аналитической функции по замкнутому контуру можно свести к интегралам по малым контурам вокруг особых точек внутри исходного контура. Мы будем считать, что внутри контура функция однозначная, а особые точки — изолированные. На примерах мы видели, что интеграл по малому контуру вокруг особой точки часто легко подсчитать. Разумно несколько формализовать эти вычисления, для чего и нужно понятие вычета.

Вычет $\text{res}[f(z); z_0]$ в точке z_0 от функции $f(z)$ равен минус-первому коэффициенту ряда Лорана этой функции и непосредственно выражается через интересующий нас интеграл:

$$\text{res}[f(z); z_0] = c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(s) ds.$$

Поэтому $\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum \text{res}[f(z); z],$

где сумма берется по особым точкам, лежащим внутри контура. Конечно, при вычислении интегралов нужно всегда помнить о направлении обхода контура, которое определяет знак интеграла.

Формально вычет определен для любой особой изолированной точки, но полезен он в основном для случая полюса. Тогда есть удобные формулы для вычисления вычетов (попробуйте вспомнить, как они выводятся, для этого нужно домножить нашу функцию на бином $(z - z_0)$ в подходящей степени так, чтобы дело свелось к вычислению одного из коэффициентов ряда Тейлора от произведения). Для полюса m -го порядка:

$$\text{res}[f(z); z_0] = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z - z_0)^m f(z)].$$

Для полюса первого порядка (а их большинство!) формула упрощается. В этом случае можно явно выдвинуть обрамляющийся в нуль знаменатель, так что

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}, \quad \varphi(z_0) \neq 0,$$

z_0 — ноль первого порядка функции ψ , тогда

$$\text{res}[f(z); z_0] = \varphi(z_0) / \psi'(z_0)$$

5. Вычисление интегралов.

Конечно, интегралы от комплексных функций встречаются не так уж часто. Однако, часто достаточно лишь чуть по-другому взглянуть на действительный интеграл, чтобы он стал комплексным интегралом по замкнутому контуру. Главное при этом, чтобы пределы интегрирования были "естественными" — от $-\infty$ до $+\infty$, от 0 до 2π в примерах с тригонометрическими функциями или что-то в этом роде.

Пример. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1}$. Достаточно назвать переменную интегрирования другой буквой и представить себе область изменения комплексного переменного как сферу, чтобы понять, что мы имеем дело с контуром, замкнутым через бесконечно удаленную точку.

Мы не учимся специально думать на языке сферы комплексного переменного, поэтому просто говорить, что мы замыкаем контур интегрирования через дугу окружности все большего радиуса (см. рис. 4). Нетрудно оценить, что вклад этой окружности в контурный интеграл стремится к нулю при стремлении радиуса R к ∞ как $R \cdot \frac{1}{R^2} \sim R^{-1} \rightarrow 0$. Поэтому интеграл по нашему контуру в пределе $R \rightarrow \infty$ равен интересующему нас действительному интегралу. С другой стороны, интеграл по контуру определяется двумя особыми точками в верхней полуплоскости (нулями знаменателя) $\pm \frac{1}{i}$. В них легко вычисляются вычеты по формуле для вычета в полюсе первого порядка. В итоге получаем, что интеграл равен π . Можно было бы замкнуть контур и через нижнюю полуплоскость, но при этом пришлось бы внимательно проследить за направлением обхода контура.

Задание. Вычислите теперь аналогично следующие интегралы:

- | | |
|---|--|
| 1) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x^2+8}$ | 5) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+2x^2+8)^2}$ |
| 2) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+9)(x^2+1)}$ | 6) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+9)^2(x^2+1)}$ |
| 3) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+4)(x^2+2x+8)}$ | 7) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+9)(x^2+1)^2}$ |
| 4) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+16)(x^2+4x+20)}$ | |

6. Полюс на контуре интегрирования.

При вычислении интегралов Фурье в конкретных физических задачах сплошь и рядом встречаются интегралы, похожие на только-что рассмотренные, в которых полюс функции лежит на контуре интегрирования. В смысле теории несобственных интегралов они являются расходящимися, однако, в этом случае существует главное значение интеграла, которое и фигурирует в теории рядов Фурье. С точки зрения ТОКП главное значение расходящегося интеграла - это то, что Вы получите, если слегка отступите от полюса и обойдете его по малой

дуге окружности с центром в этом полюсе. Полюс - симметричная особая точка, так что вклад полюса, лежащего на контуре интегрирования, равен половине вклада полюса, лежащего внутри контура. Постарайтесь обосновать это правило. Решите следующие примеры, где контур проходит через полюс:

- | | |
|---|---|
| 1) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x-1)(x-2)(x-3)}$ | 3) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2-1)(x^2+9)(x+4)}$ |
| 2) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x-1)(x^2+9)(x^2+4)}$ | 4) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x-1)(x^2+9)^2(x^2+4)^2}$ |

7. Существенно особая точка и лемма Жордана.

Конечно, только что решенные примеры - это еще не совсем интегралы Фурье - не хватает мнимой экспоненты. С ней связаны дополнительные сложности - теперь бесконечно удаленная точка уже является очень сильной особенностью и мы не можем также бездумно, как и раньше, замыкать контур интегрирования через окружность бесконечно большого радиуса. К счастью, здесь помогает лемма Жордана, позволяющая замыкать контур через ту полуплоскость, в направлении которой убывает экспонента. Итак, при $\omega > 0$ можно замыкать контур в интеграле $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\omega x} dx$ через верхнюю полуплоскость ($e^{i\omega x} \rightarrow 0$ при $x \rightarrow +i\infty$), при $\omega < 0$ - через нижнюю. При $\omega > 0$ - в интеграле $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx$ контур замыкается через левую полуплоскость, при $\omega < 0$ - через правую. Конечно, при этом функция $f(z)$ должна равномерно стремиться к нулю в интересующей нас полуплоскости при уходе точки на бесконечность. Когда Вы имеете дело с косинусом и синусом, их надо либо разбить на экспоненты, либо представить как действительную и мнимую части экспоненты. Теперь решите примеры:

- | |
|--|
| 1) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega x}}{(x^2+9)(x^2+1)} dx$ |
| 2) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \omega x}{(x^2+9)(x^2+1)} dx$ |
| 3) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega x}{(x^2+9)(x^2+1)} dx$ |

(Примеры 2 и 3 легко решаются после решения примера 1 взятием действительной и мнимой части!)

$$4) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x dx}{x}$$

$$5) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x dx}{(x^2+4)(x+1)(x+4)}$$

(Здесь снова нужно вспомнить о полюсах, лежащих на контуре интегрирования!)

$$6) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x dx}{(x^2+4)(x+3)}$$

Порешайте теперь просто разные примеры на теорию вычетов. Часть из них труднее.

$$1) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x dx}{(x^2+4x+13)^2}$$

$$2) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^n}, \quad n \geq 2 \quad - \text{натуральное число}$$

$$3) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x dx}{x^2+4x+20}$$

$$4) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x dx}{x^2+4x}$$

$$5) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x dx}{x^2-5x+6}$$

$$6) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos tx}{1+x^2} dx \quad t - \text{действительное число}$$

$$7) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos tx}{1-x^2} dx \quad t - \text{действительное число}$$

$$8) \int_0^{\infty} \cos x^p dx \quad (p > 1)$$

$$9) \int_0^{\infty} \frac{\sin x^p}{x^p} dx \quad (p > 1/2)$$

8. Интегралы с тригонометрическими функциями.

Еще есть один класс примеров, которые решаются по теории вычетов. Проиллюстрируем его на примере интеграла

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{1 + \cos \varphi}$$

Сделаем замену переменных

$$z = e^{i\varphi}; \quad d\varphi = -\frac{iz dz}{z}; \quad \cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} = \frac{z + \frac{1}{z}}{2};$$

$$I = \frac{2}{i} \int \frac{dz}{\frac{z^2}{2} + 2z + \frac{1}{2}}$$

Интегрирование ведется по кругу $|z|=1$. Особая точка внутри контура - полюс 1-го порядка; $z = -2 + \sqrt{3}$

Вычисляя вычет получаем:

$$I = \frac{4\pi}{\sqrt{3}}$$

Решите сами такие примеры:

$$1) \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{a + \cos \varphi} \quad (a > 1)$$

$$2) \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(a + b \cos \varphi)^2} \quad (a > b > 0)$$

$$3) \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(a + b \cos^2 \varphi)^2} \quad (a > 0, b > 0)$$

$$4) \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{1 - 2a \cos \varphi + a^2}, \quad a \neq \pm 1$$

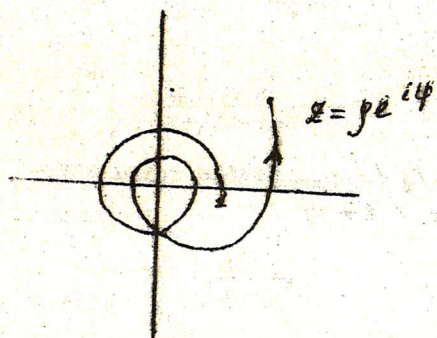


Рис. 1

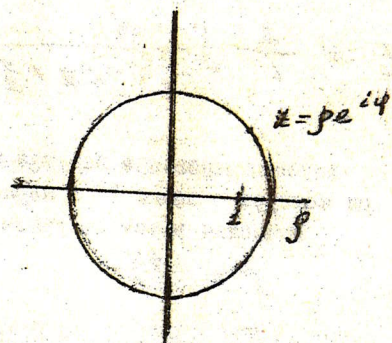


Рис. 2

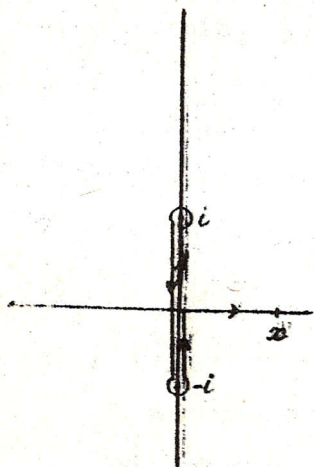


Рис. 3

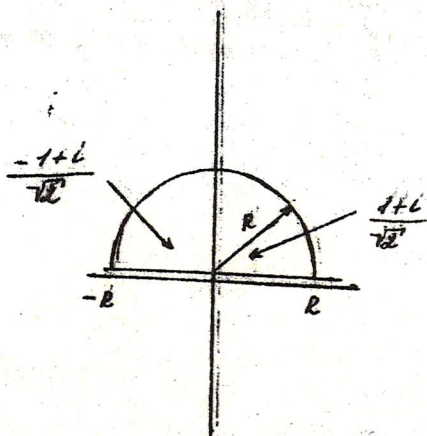


Рис. 4

Дмитрий Дмитриевич Соколов
ПОСОБИЕ ПО РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ В КУРСЕ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ
КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Редактор В.А. Пярагов

НК

Подписано в печать 30.06.87

Формат 60 x 90 / 16

Бумага офсетная

Офсетная печать

Тол. печ. л. 1,5

Уч.-изд. л. 1,25

Дополнительный тираж 300 экз. Заказ № 12.

Заказное.

Цена 3 коп.

Ордена "Знак Почета" издательство

Московского университета

103000, Москва, ул. Герцена, 5/7.

Отпечатано в ЛФОН физического факультета МГУ