



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. М.В. Ломоносова

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ

В.Т. Волков, А.В. Кравцов, Д.В. Минаев, В.Ю. Попов, Н.Е. Шапкина.

**Вопросы и задачи к экзамену и зачету
по теории функций комплексной переменной.**

(III семестр)

Пособие для студентов II курса

Москва

2016

В.Т. Волков, А.В. Кравцов, Д.В. Минаев, В.Ю. Попов, Н.Е. Шапкина.

Вопросы и задачи к экзамену и зачету по теории функций комплексной переменной.

Пособие предназначено для студентов 2 курса физического факультета МГУ, изучающих курс теории функций комплексной переменной в III семестре. В нем приведен список основных вопросов и заданий, предлагаемых студентам 2 курса для наилучшего усвоения материала и подготовки к экзамену и зачету.

Материал соответствует курсу лекций по ТФКП, который читается на физическом факультете МГУ в III семестре, а также содержанию семинарских занятий по этому предмету. Данное издание переработано в соответствии с пожеланиями преподавателей, ведущих занятия, и студентов.

Рекомендовано Советом отделения прикладной математики в качестве пособия для студентов физического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова, обучающихся по направлениям «физика» и «астрономия».

© Физический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова, 2016.
©В.Т. Волков, ©А.В. Кравцов, ©Д.В. Минаев, ©В.Ю. Попов, ©Н.Е. Шапкина.

**Вопросы и задачи к зачету и экзамену по курсу
«Теория функций комплексной переменной»**

1. Комплексные числа. Элементарные действия с комплексными числами.

Геометрическая интерпретация комплексных чисел

1.1 Основные определения, формулы и теоремы.

- Сформулируйте определения комплексного числа, его действительной и мнимой части. Запишите комплексное число z в алгебраической форме.
- Сформулируйте определения модуля и аргумента комплексного числа, дайте их геометрическую интерпретацию. Запишите комплексное число $z \neq 0$ в тригонометрической и показательной формах.
- Сформулируйте определение числа \bar{z} , комплексно сопряжённого к числу z . Укажите, как связаны модули и аргументы этих чисел.
- Сформулируйте определение операции умножения комплексных чисел. Укажите, как связаны модуль и аргумент произведения комплексных чисел с модулями и аргументами множителей.
- Сформулируйте определение операции деления комплексных чисел. Укажите, как связаны модуль и аргумент частного комплексных чисел с модулями и аргументами делимого и делителя.
- Запишите формулы произведения и частного двух комплексных чисел, представленных в тригонометрической форме.
- Запишите неравенства треугольника для комплексных чисел.
- Запишите формулу возведения комплексного числа в натуральную степень. Укажите, как меняются модуль и аргумент при возведении комплексного числа в натуральную степень.
- Запишите формулу извлечения корня n -ой степени из комплексного числа (n – натуральное число). Как меняются модуль и аргумент при извлечении корня n -ой степени? Как располагаются значения корня n -ой степени на комплексной плоскости?
- Запишите формулу Муавра.
- Запишите формулу Эйлера.
- Сформулируйте определение предела последовательности $\{z_n\}$ комплексных чисел. Приведите примеры последовательности, имеющей предел, и последовательности, не имеющей предела.

- Сформулируйте теорему о связи существования предела последовательности комплексных чисел $\{z_n = x_n + iy_n\}$ с существованием пределов последовательностей действительных чисел $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$.
- Сформулируйте теорему о связи существования предела последовательности $\{z_n\}$ с существованием предела последовательности $\{|z_n|\}$.

1.2 Задачи к зачету и экзамену.

1.2.1 Выразите действительную и мнимую части комплексного числа через пару комплексно сопряженных чисел.

1.2.2 Запишите комплексное число в алгебраической, тригонометрической и показательной формах:

а) $\frac{1+i}{1-i}$; б) $\frac{1}{i}$; в) $\frac{\sqrt{2}}{1+i}$; г) $\frac{\sqrt{2}}{1-i}$;
 д) $(1+i)^{20}$; е) $(\sqrt{3}+i)^6$; ж) $(1-i)^{20}$; з) $(1+i)^{10}$.

1.2.3 Найдите модуль и аргумент комплексного числа:

а) $\frac{5i}{i+2}$; б) $\frac{5i-5}{2i+1}$; в) $\frac{4i-2}{i-1}$; г) $\frac{5i+5}{2i-1}$;
 д) i^3 ; е) i^4 ; ж) $(1-i)^{10}$; з) $(1+i)^{20}$.

1.2.4 Вычислите (результат представьте в форме $a+ib$):

а) $z - \frac{1}{\bar{z}}$, если $z = i-1$; б) $z - \frac{1}{\bar{z}}$, если $z = i+1$; в) $\frac{z}{\bar{z}}$, если $z = 3i+1$;
 г) $|(1+3i)(\overline{3+i})|$; д) $\left| \frac{3+i}{1-3i} \right|$; е) $\left| \left(\frac{2+4i}{3+i} \right)^2 \right|$;
 ж) $|(1+i)^6|$; з) $\operatorname{Im} \left(\frac{3-i}{2+i} \right)^{13}$; и) $\operatorname{Re} \left(\frac{2-i}{3+i} \right)^{11}$.

1.2.5 Найдите значение выражения $z = z_1 z_2$, если x — действительное число и

а) $z_1 = x+3i$, $z_2 = 1+2i$ и $\operatorname{Re} z = -4$; б) $z_1 = x+5i$, $z_2 = 2-i$ и $\operatorname{Re} z = 9$;
 в) $z_1 = x+3i$, $z_2 = 1+2i$ и $\operatorname{Im} z = 7$; г) $z_1 = 1+ix$, $z_2 = 2x+i$ и $\operatorname{Im} z = 1$;
 д) $z_1 = 2-i$, $z_2 = 5+ix$ и $\operatorname{Re} z = 5$.

1.2.6 Изобразите на комплексной плоскости множества точек, задаваемые уравнениями и неравенствами:

а) $|z-i| + |z+i| = 4$; б) $|z-i| - |z+i| = 2$; в) $|z-1+i| = |z+3|$;
 г) $|z| - 3\operatorname{Im} z = 6$; д) $3|z| - \operatorname{Re} z = 12$; е) $\bar{z} = z^2$;
 ж) $|z-i| < 3$; з) $|z+1+i| > \sqrt{2}$; и) $1 < |z-1+2i| < 3$;

- к) $\frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{\pi}{3}$; л) $\pi < \operatorname{Im} z < 2\pi$; м) $\frac{\pi}{2} < \arg(z+i) < \frac{3\pi}{4}$;
 н) $\operatorname{Im} z > 0$; о) $\operatorname{Im} iz > 2$; п) $\pi < \operatorname{Re} z < 2\pi$;
 р) $\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z < 1$; с) $|z| > \operatorname{Re} z + 1$; т) $|z-2| + |z+2| > 3$;
 у) $|z-i| + |z+i| < 5$; ф) $|z+i| > |z-1|$.

1.3 Теоремы с доказательством.

- Выведите формулы для произведения комплексных чисел в тригонометрической и показательной форме.
- Выведите формулы для отношения комплексных чисел в тригонометрической и показательной форме.
- Докажите теорему о связи существования предела последовательности комплексных чисел $\{z_n = x_n + iy_n\}$ с существованием пределов последовательностей действительных чисел $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$.
- Докажите, что из существования предела последовательности $\{z_n\}$ следует существование предела последовательности $\{|z_n|\}$.
- Докажите, что из существования пределов последовательностей $\{|z_n|\}$ и $\{\arg z_n\}$ следует существованием предела последовательности $\{z_n\}$.

1.4 Теоретические задачи и задачи повышенной сложности.

1.4.1 Вычислите, используя формулу Эйлера

а) $\sum_{k=0}^n \cos kx$; б) $\sum_{k=1}^n \sin kx$.

1.4.2 Пусть последовательность $\{z_n\}$ имеет предел. Следует ли отсюда, что последовательность $\{\arg z_n\}$ имеет предел? Ответ обоснуйте.

1.4.3 Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a \neq 0$, $z_n \neq 0$ для любого n и $\arg a = \varphi_0$. Докажите, что существует такая последовательность $\{\varphi_n\}$, что $\varphi_n = \arg z_n$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = \varphi_0$.

1.4.4 Изобразите на комплексной плоскости множество точек, задаваемое неравенством $2|z| > |1+z^2|$.

2. Функции комплексной переменной. Решение простейших уравнений

2.1 Основные определения, формулы и теоремы.

- Сформулируйте определение однозначной функции. Приведите пример.
- Сформулируйте определение многозначной функции. Приведите пример.
- Сформулируйте определение функции, однолистной на некотором множестве. Приведите пример.
- Запишите формулу возведения комплексного числа в целую степень.
- Сформулируйте определение корня n -ой степени из комплексного числа.
- Сформулируйте определение показательной функции e^z .
- Сформулируйте определения тригонометрических функций $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{tg} z$, $\operatorname{ctg} z$.
- Сформулируйте определения гиперболических функций $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$, $\operatorname{th} z$, $\operatorname{cth} z$.
- Сформулируйте определение логарифмической функции $\operatorname{Ln} z$.
- Сформулируйте определение общей степенной функции z^a , $a \neq 0$.
- Сформулируйте определение дробно-линейной функции.
- Сформулируйте определение функции Жуковского.

2.2 Задачи к зачету и экзамену.

2.2.1 Вычислите (найдите все значения). Результат представьте в форме $a+ib$, где a и b действительные числа.

- а) $\cos(2+i)$; б) $\sin 2i$; в) $\cos \pi i$; г) $\operatorname{tg}(2-i)$;
 д) $\operatorname{Ln} 2$; е) $\ln 2$; ж) $\operatorname{Ln} i$; з) $\operatorname{Ln}(2-3i)$;
 и) $1^{\left(\frac{1+i}{1-i}\right)}$; к) i^π ; л) π^i ; м) $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^i$.

2.2.2 Найдите все решения уравнения. Результат представьте в форме $a+ib$, где a и b действительные числа.

- а) $z^3 - 8 = 0$; б) $z^4 - 1 = 0$; в) $z^4 + 1 = 0$;
 г) $z^2 + z + 1 = 0$; д) $z^2 - 4z + 13 = 0$; е) $|z| = z^2$;
 ж) $\sin z = 2$; з) $\cos z = i$; и) $\operatorname{tg} z = 2 + i$;
 к) $\sin z + \cos z = 2$; л) $\sin z - \cos z = 3$; м) $e^{2z} + e^z = 3$;
 н) $e^z + i = 0$; о) $\operatorname{ch} z = i$; п) $\operatorname{ch} z - \operatorname{sh} z = 1$;
 р) $\operatorname{sh} z - \operatorname{ch} z = 2i$.

2.3 Теоремы с доказательством.

- Выведите формулу Муавра.
- Сформулируйте и докажите основные свойства комплексной экспоненты $e^{i\varphi}$.

2.4 Теоретические задачи и задачи повышенной сложности.

2.4.1 Найдите сумму и произведение всех корней уравнения

$$z^n + a^n = 0, \quad a > 0.$$

2.4.2 Найдите сумму и произведение всех корней уравнения

$$z^n - a^n = 0, \quad a > 0.$$

2.4.3 Выведите формулы:

а) $\operatorname{Arc} \cos z = -i \operatorname{Ln} \left(z + \sqrt{z^2 - 1} \right)$; б) $\operatorname{Arc} \sin z = -i \operatorname{Ln} \left(iz + \sqrt{1 - z^2} \right)$;

в) $\operatorname{Arctg} z = \frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{i + z}{i - z}$.

2.4.4 Запишите главное значение функции $f(z) = \sqrt{z}$, где $z = x + iy$, в виде $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ в области а) $\operatorname{Im} z > 0$; б) $\operatorname{Re} z > 0$.

3. Условия Коши-Римана. Аналитические и гармонические функции.

3.1 Основные определения, формулы и теоремы.

- Сформулируйте определение функции комплексной переменной, дифференцируемой в точке. Приведите пример.
- Сформулируйте, в чем состоит геометрический смысл аргумента производной аналитической функции.
- Сформулируйте необходимые и достаточные условия дифференцируемости функции в точке.
- Сформулируйте определение функции, аналитической в области, не содержащей точку $z = \infty$.
- Сформулируйте необходимые и достаточные условия аналитичности функции в области, не содержащей точку $z = \infty$.
- Сформулируйте определение функции, гармонической в некоторой области.
- Сформулируйте определение сопряжённых гармонических в некоторой области функций.
- Сформулируйте, как связаны аналитичность функции $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ с гармоничностью функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$.
- Запишите условия Коши–Римана в случае, когда $z = x + iy$,
 $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$.
- Запишите условия Коши–Римана в случае, когда $z = re^{i\varphi}$,
 $w = f(z) = u(r, \varphi) + iv(r, \varphi)$.
- Запишите условия Коши–Римана в случае, когда $z = x + iy$,
 $w = f(z) = R(x, y) \cdot e^{i\Phi(x, y)}$.
- Запишите условия Коши–Римана в случае, когда $z = re^{i\varphi}$,
 $w = f(z) = R(r, \varphi) \cdot e^{i\Phi(r, \varphi)}$.

3.2 Задачи к зачету и экзамену.

3.2.1 Исследуйте на дифференцируемость функции:

- а) $f(z) = \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z$; б) $f(z) = z + \bar{z}$; в) $f(z) = \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} \bar{z}$;
г) $f(z) = z^2 + (\bar{z})^2$; д) $f(z) = \operatorname{Im} \bar{z}$; е) $f(z) = \bar{z} \cdot \operatorname{Im} z$;
ж) $f(z) = \operatorname{Re} z \cdot \operatorname{Im} z$.

3.2.2 Определите, является ли функция $f(z)$ аналитической:

- а) $f(z) = \operatorname{Re}(z^2)$; б) $f(z) = \operatorname{Im}(z^2)$; в) $f(z) = |z|^2 \cdot \operatorname{Re} z$;
г) $f(z) = |z|^2 \cdot \operatorname{Im} z$; д) $f(z) = \bar{z} \cdot \operatorname{Re} z$; е) $f(z) = z \cdot \operatorname{Im} \bar{z}$;
ж) $f(z) = (\bar{z})^2$; з) $f(z) = z^2 + |\bar{z}|^2$; и) $f(z) = z^2 + (\bar{z})^2$.

3.2.3 Проверьте, выполняются ли условия Коши-Римана для функций:

- а) $f(z) = \frac{i}{z}$; б) $f(z) = z^2$; в) $f(z) = (z + 2i)^3$;
г) $f(z) = e^{iz}$; д) $f(z) = \sin 2z$; е) $f(z) = \operatorname{ch} z$;
ж) $f(z) = \bar{z}$; з) $f(z) = \frac{1}{2} \cdot \left(z + \frac{1}{z} \right)$; и) $f(z) = z^n, n \in \mathbb{N}$;
к) $f(z) = \ln|z| + i \arg z$; л) $f(z) = z \cdot |z|$; м) $f(z) = z \cdot \operatorname{Re} z$.

3.2.4 Докажите, что указанные ниже функции могут быть действительной $u(x, y)$ или мнимой $v(x, y)$ частью аналитической функции комплексной переменной $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, где $z = x + iy$. Найдите функцию $f(z)$.

- а) $u(x, y) = x^3 - 3xy^2 - x$;
б) $u(x, y) = x^2 - y^2 + 5x + y - \frac{y}{x^2 + y^2}$;
в) $v(x, y) = 3x^2y - y^3 - y$;
г) $v(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$;
д) $v(x, y) = \ln(x^2 + y^2) + x^3 - 2y$.

3.3 Теоремы с доказательством.

- Докажите теорему о необходимых и достаточных условиях дифференцируемости функции в точке.
- Выведите соотношения Коши-Римана в случае, когда $z = x + iy$, $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$.
- Выведите соотношения Коши-Римана в случае, когда $z = x + iy$, $w = f(z) = R(x, y) \cdot e^{i\Phi(x, y)}$.
- Выведите соотношения Коши-Римана в случае, когда $z = re^{i\varphi}$, $w = f(z) = u(r, \varphi) + iv(r, \varphi)$.

3.4 Теоретические задачи и задачи повышенной сложности.

3.4.1 Докажите, что $f(z) = z \operatorname{Re} z$ дифференцируема только в точке

- $z = 0$ и найдите $f'(0)$.
- 3.4.2 Докажите, что для функции $f(z) = \sqrt{|\operatorname{Re} z \cdot \operatorname{Im} z|}$ в точке $z = 0$ выполняются условия Коши-Римана, но $f'(0)$ не существует.
- 3.4.3 Пусть $w = f(z)$ обладает следующими свойствами в точке z : u и v - дифференцируемые функции ($w = u + iv$); существует $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \arg \frac{\Delta w}{\Delta z}$. Докажите, что функция $w = f(z)$ дифференцируема в точке z .
- 3.4.4 Пусть $w = f(z)$ обладает следующими свойствами в точке z : u и v - дифференцируемые функции ($w = u + iv$); существует $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta w}{\Delta z} \right|$. Докажите, что либо функция $w = f(z)$, либо функция $w = \bar{f}(z)$ дифференцируема в точке z .
- 3.4.5 Пусть в области $D: -\pi < \arg z < \pi$ задана функция $f(z) = \sqrt[n]{re^{i\varphi}}$, $z = re^{i\varphi}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Докажите, что $f(z)$ является аналитической в D и $f'(z) = \frac{f(z)}{nz}$.
- 3.4.6 Выясните, будет ли гармонической функция u^2 , если u гармоническая функция?
- 3.4.7 Пусть функция $f(z)$ является аналитической в некоторой области. Является ли указанная ниже функция $u(x, y)$ гармонической в этой области? Ответ обоснуйте.
- а) $u(x, y) = |f(z)|$; б) $u(x, y) = \ln |f(z)|$; в) $u(x, y) = \arg f(z)$.

4. Интеграл по кривой на комплексной плоскости. Интегральная формула Коши.

4.1 Основные определения, формулы и теоремы.

- Сформулируйте определение интеграла от непрерывной функции комплексной переменной вдоль кусочно-гладкой кривой.
- Запишите формулу вычисления интеграла от непрерывной функции комплексной переменной вдоль кусочно-гладкой кривой через определённый интеграл.
- Запишите неравенство для модуля интеграла.
- Сформулируйте теорему Коши для односвязной области.
- Сформулируйте теорему Коши для ограниченной области.

- Сформулируйте теорему Коши для многосвязной области.
- Сформулируйте теорему об аналитичности интеграла с переменным верхним пределом.
- Сформулируйте определение первообразной для функции $f(z)$, заданной в некоторой области.
- Запишите формулу Ньютона–Лейбница и укажите условия её применимости.
- Запишите интегральную формулу Коши для односвязной области.
- Запишите интегральную формулу для производной порядка n аналитической функции.
- Сформулируйте определение интеграла типа Коши.
- Сформулируйте теорему о среднем.
- Сформулируйте теорему Лиувилля.
- Сформулируйте теорему Морера.
- Сформулируйте принцип максимума модуля аналитической функции.
- Сформулируйте принцип минимума модуля аналитической функции.

4.2 Задачи к зачету и экзамену.

Вычислите интегралы по указанным кривым на комплексной плоскости (первой указана начальная точка интегрирования).

- 4.2.1 $\int_L z dz$ а) по отрезку прямой, соединяющему точки $z=0$ и $z=1+i$;
 б) по дуге параболы $y=x^2$, соединяющей точки $z=0$ и $z=1+i$;
 в) по кривой, состоящей из двух отрезков прямых, соединяющих точки $z=0$, $z=1$ и $z=1+i$.
- 4.2.2 $\int_L \bar{z} dz$ а) по отрезку прямой, соединяющему точки $z=0$ и $z=1+i$;
 б) по дуге параболы $y=x^2$, соединяющей точки $z=0$ и $z=1+i$;
 в) по кривой, состоящей из двух отрезков прямых, соединяющих точки $z=0$, $z=1$ и $z=1+i$.
- 4.2.3 $\int_L |z|^2 dz$ а) по отрезку прямой, соединяющему точки $z=-2i$ и $z=2i$;
 б) по дуге окружности $|z|=2$, $\operatorname{Re} z \geq 0$.
- 4.2.4 $\int_L z^2 dz$ а) по отрезку прямой, соединяющему точки $z=-2i$ и $z=2i$;

б) по дуге окружности $|z|=2$, $\operatorname{Re} z \geq 0$.

4.2.5 $\oint_{|z|=R} \frac{dz}{z}$ (обход окружности $|z|=R$ в положительном направлении).

4.2.6 $\oint_{|z|=R} \frac{dz}{\bar{z}}$ (обход окружности $|z|=R$ в положительном направлении).

Вычислите интегралы, используя интегральную формулу Коши:

4.2.7 а) $\oint_{|z|=2} \frac{e^z dz}{(z+1)^3}$; б) $\oint_{|z+i|=2} \frac{\sin z dz}{z(1-z)^2}$; в) $\oint_{|z-3|=3} \frac{z dz}{z^4-1}$.

4.2.8 $\oint_C \frac{dz}{z(z^2-1)}$ (C – замкнутая простая кусочно-гладкая кривая, не проходящая через точки $z=0$, $z=1$ и $z=-1$). Найдите все возможные значения указанного интеграла при различных положениях контура C .

4.3 Теоремы с доказательством.

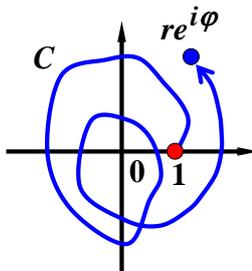
- Докажите теорему Коши для односвязной области.
- Докажите теорему Коши для многосвязной области.
- Докажите теорему об аналитичности интеграла с переменным верхним пределом.
- Докажите интегральную формулу Коши для односвязной области.
- Докажите аналитичность интеграла типа Коши.
- Докажите интегральную формулу для производной порядка n аналитической функции.
- Выведите формулу Ньютона-Лейбница.
- Докажите принцип максимума модуля аналитической функции.
- Докажите теорему Лиувилля.
- Докажите теорему о среднем.
- Докажите теорему Морера.

4.4 Теоретические задачи и задачи повышенной сложности.

4.4.1 Является ли функция $f(z) = \int_L \frac{\operatorname{Re} \xi}{\xi - z} d\xi$, где L – окружность $|z|=1$, проходимая против часовой стрелки, аналитической в круге $|z|<1$?
Ответ обоснуйте.

4.4.2 Имеет ли функция $f(z) = \frac{1}{z}$ первообразную в области $0 < |z| < 2$?
Ответ обоснуйте.

- 4.4.3 Вычислите интеграл $\oint_{|z-z_0|=R} \frac{dz}{z-z_0}$. Объясните, почему ответ не зависит от R и от z_0 .
- 4.4.4 Вычислите интеграл $\oint_{|z|=2} \frac{dz}{z}$. Поясните, почему, несмотря на то, что интегрирование ведется по замкнутому контуру, целиком лежащему в области $1 < |z| < 3$, которая является областью аналитичности функции $f(z) = \frac{1}{z}$, интеграл отличен от нуля.
- 4.4.5 Вычислите интеграл $\oint_{|z-z_0|=R} (z-z_0)^m dz$ для различных целых значений m .
- 4.4.6 Пусть функция $f(z)$ аналитична в круге $|z| < R$ и непрерывна в замкнутом круге $|z| \leq R$. Докажите, что для любой точки z , принадлежащей кругу $|z| < R$, выполнено неравенство $|f(z)| \leq \frac{MR}{R-|z|}$, где $M = \max_{|z|=R} |f(z)|$.
- 4.4.7 Пусть функция $f(z)$ аналитична в круге $|z| < 1$ и непрерывна в замкнутом круге $|z| \leq 1$, причем $f(z) \equiv \text{const} \neq 0$ при $|z|=1$. Докажите, что тогда либо $f(z) \equiv \text{const}$ в круге $|z| < 1$, либо $f(z)$ имеет нуль в этом круге. Указание: воспользуйтесь принципом максимума модуля аналитической функции.
- 4.4.8 Пусть $f(z)$ является аналитической на всей комплексной плоскости, причём $\sup_{z \in \mathbb{C}} |f(z)| \leq 2$, $f(1) = 1$. Найдите $f(i)$.
- 4.4.9 Существует ли функция $f(z)$, аналитическая на всей комплексной плоскости и удовлетворяющая условиям $f(0) = 0$ и $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 1$? Ответ обоснуйте.
- 4.4.10 Вычислите интеграл $\int_C \frac{dz}{z}$, где кусочно-гладкий контур C изображен на рисунке



5. Степенные ряды. Ряд Тейлора.

5.1 Основные определения, формулы и теоремы.

- Сформулируйте определение равномерной сходимости функционального ряда.
- Сформулируйте теорему о почленном интегрировании функционального ряда.
- Сформулируйте первую теорему Вейерштрасса о функциональных рядах.
- Сформулируйте вторую теорему Вейерштрасса о функциональных рядах.
- Сформулируйте определения степенного ряда, радиуса и круга сходимости степенного ряда.
- Сформулируйте теорему Абеля о степенных рядах.
- Сформулируйте теорему Коши–Адамара о степенных рядах.
- Запишите формулу Коши–Адамара для радиуса сходимости степенного ряда.
- Сформулируйте теорему об аналитичности суммы степенного ряда.
- Сформулируйте теорему о представлении аналитической функции рядом Тейлора.
- Запишите дифференциальную и интегральную формулы для коэффициентов разложения аналитической функции в степенной ряд.

5.2 Задачи к зачету и экзамену.

5.2.1 Определите область сходимости степенного ряда, исследуйте сходимость ряда в точках границы:

а) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{1-i}\right)^n$; б) $\sum_{n=0}^{\infty} e^{in} (z-2)^n$; в) $\sum_{n=0}^{\infty} i^n (z+1)^n$;

г) $\sum_{n=0}^{\infty} \cos(in)(z-i)^n$; д) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi i}{n} (z+1-i)^n$; е) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{ch} \frac{i}{n} (z+i)^n$;

ж) $\sum_{n=1}^{\infty} n^n z^n$; з) $\sum_{n=0}^{\infty} (3+(-1)^n)^n (z+2)^n$; к) $\sum_{n=1}^{\infty} z^{n!}$.

5.2.2 Разложите функцию $f(z)$ в ряд Тейлора с центром в указанной точке. Найдите радиус сходимости полученного ряда.

а) $f(z) = \frac{(1+z)^2}{z}$ с центром в точке $z=1$; с центром в точке $z=-1$.

б) $f(z) = \frac{(z-1)^2}{2-z}$ с центром в точке $z=1$; с центром в точке $z=0$.

в) $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ с центром в точке $z=0$; с центром в точке $z=1$.

г) $f(z) = \cos z$ с центром в точке $z = 0$; с центром в точке $z = -\frac{\pi}{4}$.

д) $f(z) = \sin(2z+1)$ с центром в точке $z = 0$; с центром в точке $z = -1$.

е) $f(z) = \frac{1}{3z+1}$ с центром в точке $z = -2$; с центром в точке $z = 0$.

ж) $f(z) = \frac{z}{z^2+i}$ с центром в точке $z = 0$; с центром в точке $z = -1$.

з) $f(z) = \ln z$ с центром в точке $z = 1$; с центром в точке $z = -1$.

и) $f(z) = \ln(2-z)$ с центром в точке $z = 0$; с центром в точке $z = 1$.

5.2.3 Запишите 3 первых ненулевых члена разложения функции $f(z)$ в ряд Тейлора с центром в точке $z = 0$:

а) $f(z) = \frac{\operatorname{ch} \sqrt{z}}{1+z^2}$; б) $f(z) = \frac{\cos \sqrt{z}}{1+z^2}$; в) $f(z) = \operatorname{tg} z$; г)

$f(z) = \ln \cos z$.

5.3 Теоремы с доказательством.

- Докажите теорему о почленном интегрировании функционального ряда.
- Докажите первую теорему Вейерштрасса о функциональных рядах.
- Докажите вторую теорему Вейерштрасса о функциональных рядах.
- Докажите теорему об аналитичности суммы степенного ряда.
- Докажите теорему Абеля о степенных рядах.
- Докажите теорему Коши–Адамара о степенных рядах.
- Докажите теорему о представлении аналитической функции рядом Тейлора.

5.4 Теоретические задачи и задачи повышенной сложности.

5.4.1 Исследуйте на равномерную сходимость функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ в замкнутом круге $|z| \leq 1$.

5.4.2 Опишите множество особых точек суммы степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} z^{2^n}$ на границе его круга сходимости.

5.4.3 Найдите радиус сходимости ряда Маклорена функции $f(z) = \frac{1}{1+e^z}$.

6. Единственность задания аналитической функции. Аналитическое продолжение.

6.1 Основные определения, формулы и теоремы.

- Дайте определение нуля $z_0 \neq \infty$ аналитической функции.
- Дайте определение нуля $z_0 \neq \infty$ порядка m аналитической функции.
- Сформулируйте теорему о нулях аналитической функции.
- Сформулируйте теорему единственности задания аналитической функции.
- Дайте определение аналитического продолжения функции $f(z)$, заданной первоначально на некотором множестве.
- Сформулируйте принцип аналитического продолжения.
- Запишите формулу аналитического продолжения через границу области.

6.3 Теоремы с доказательством.

- Докажите теорему о нулях аналитической функции.
- Докажите теорему единственности задания аналитической функции.
- Докажите принцип аналитического продолжения.
- Докажите формулу аналитического продолжения через границу области.

6.4 Задачи повышенной сложности и теоретические задачи.

6.4.1 Пусть функция $f(z)$ является аналитической в области D , ограниченной простой замкнутой кусочно гладкой кривой, и непрерывной в замкнутой области \bar{D} . Кроме того, $f(z) \equiv 0$ на какой-либо дуге границы. Докажите, что $f(z) \equiv 0$ в \bar{D} .

6.4.2 Пусть $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^{n!}$. Докажите, что функцию $f(z)$ нельзя аналитически продолжить за пределы круга $|z| < 1$. Указание: докажите, что $f(z) \rightarrow \infty$ при $z \rightarrow e^{i\frac{2\pi p}{q}}$ по радиусу, где p и q -- взаимно простые числа.

6.4.3 Пусть $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^{2^n}$. Докажите, что функцию $f(z)$ нельзя аналитически продолжить за пределы круга $|z| < 1$. Указание: докажите, что $f(z) \rightarrow \infty$ при $z \rightarrow 1$ по радиусу, и воспользуйтесь тождеством $f(z) = z^2 + z^4 + \dots + z^{2^n} + f(z^{2^n})$, $n = 1, 2, \dots$

6.4.4 Существует ли в окрестности точки $z_0 = 0$ аналитическая функция, принимающая в

точках $z_n = \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, 3, \dots$ значения $1, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{5}, 0, \frac{1}{7}, \dots$? Ответ обоснуйте.

Указание: воспользуйтесь теоремой единственности задания аналитической функции.

6.4.5 Найдите все функции $f(z)$, аналитические в окрестности точки

$z_0 = 0$ и принимающие в точках $z_n = \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, 3, \dots$ значения

$$f(z_n) = \frac{1}{n^2}.$$

Указание: воспользуйтесь теоремой единственности задания аналитической функции.

6.4.6 Пусть $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n\sqrt{n}}$. Имеет ли функция $f(z)$ особую точку

а) в круге $|z| < 1$; б) в замкнутом круге $|z| \leq 1$?

Ответ обоснуйте.

6.4.7 Может ли аналитическая и не равная тождественно нулю в некоторой области

функция иметь бесконечно много нулей в этой области? Ответ обоснуйте.

7. Ряд Лорана. Классификация особых точек.

7.1 Основные определения, формулы и теоремы.

- Сформулируйте определение ряда Лорана. Какова его область сходимости?
- Сформулируйте определение правильной точки. Приведите пример.
- Сформулируйте определение особой точки. Приведите пример.
- Сформулируйте определение изолированной особой точки однозначной аналитической функции.
- Сформулируйте теорему о представлении функции рядом Лорана.
- Запишите формулу для коэффициентов разложения аналитической функции в ряд Лорана.
- Сформулируйте определение устранимой особой точки аналитической функции. Приведите пример.
- Сформулируйте теорему об устранимой особой точке $z_0 \neq \infty$ аналитической функции.
- Сформулируйте определение полюса. Приведите пример.
- Сформулируйте теорему о полюсе $z_0 \neq \infty$ аналитической функции.

- Сформулируйте определение существенно особой точки. Приведите пример.
- Сформулируйте теорему Сохоцкого-Вейерштрасса о существенно особой точке.

7.2 Задачи к зачету и экзамену.

7.2.1 Разложите функцию $f(z)$ в ряд Лорана в проколотой окрестности точки $z=0$:

а) $f(z) = \frac{\sin z}{z^2}$; б) $f(z) = \frac{\sin^2 z}{z}$; в) $f(z) = \frac{e^z}{z}$;
 г) $f(z) = z^3 e^{\frac{1}{z}}$; д) $f(z) = z^4 \cos \frac{1}{z}$; е) $f(z) = \frac{1 - \cos z}{z^2}$;

ж) $f(z) = \frac{1 - e^{-z}}{z^3}$.

7.2.2 Разложите функцию $f(z)$ в ряд Лорана в указанной области.

а) $f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-3)}$ в кольце $2 < |z| < 3$; в проколотой окрестности точки $z=3$; $z=\infty$.

б) $f(z) = \frac{1}{z^2 + z}$ в проколотой окрестности точки $z=0$; $z=1$; $z=\infty$.

в) $f(z) = \frac{z^2 - z + 3}{z^3 - 3z + 2}$ в кольце $1 < |z| < 2$; в проколотой окрестности точки $z=1$; $z=\infty$.

г) $f(z) = \frac{2}{z^2 - 1}$ в кольце $1 < |z+2| < 3$, в проколотой окрестности точки $z=-1$; $z=\infty$.

д) $f(z) = \frac{1}{z(z+1)}$ в кольце $1 < |z+i| < \sqrt{2}$.

е) $f(z) = \frac{1}{(z^2 + 1)^2}$ в проколотой окрестности точки $z=-i$; $z=\infty$.

ж) $f(z) = z^2 \sin \frac{1}{z-1}$ в проколотой окрестности точки $z=1$.

з) $f(z) = \frac{z}{\sin z}$ в проколотой окрестности точки $z=0$; $z=\pi$

(выпишите три первых ненулевых слагаемых главной части ряда Лорана).

и) $f(z) = \operatorname{ctg} z$ в проколотой окрестности точки $z=0$ (выпишите три первых ненулевых слагаемых главной части ряда Лорана).

7.2.3 Найдите все особые точки (включая $z=\infty$) функции $f(z)$ и определите их тип (если особая точка изолированная):

$$\begin{array}{lll}
\text{а)} & f(z) = \frac{\sin z}{z}; & \text{б)} & f(z) = \frac{\sin z}{z^2}; & \text{в)} & f(z) = \frac{e^z - 1}{z^3}; \\
\text{г)} & f(z) = \frac{1}{z(z-1)^2}; & \text{д)} & f(z) = z^2 + \frac{1}{z^5}; & \text{е)} & f(z) = \frac{z^4}{1+z^4}; \\
\text{ж)} & f(z) = \frac{\cos z}{e^z + 1}; & \text{з)} & f(z) = \frac{\sin z}{e^z - 1}; & \text{и)} & f(z) = \frac{1 - \cos z}{\sin z}; \\
\text{к)} & f(z) = \frac{z}{\sin z}; & \text{л)} & f(z) = \frac{1}{\cos z}; & \text{м)} & f(z) = \frac{\operatorname{tg} z}{z^3}; \\
\text{н)} & f(z) = \cos\left(\frac{1}{z^2}\right); & \text{о)} & f(z) = \sin\left(\frac{1}{z}\right); & \text{п)} & f(z) = z^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{z^2}\right); \\
\text{р)} & f(z) = \frac{z}{\sin\left(\frac{1}{z}\right)}; & \text{с)} & f(z) = \frac{\operatorname{ctg} z}{z^2}; & \text{т)} & f(z) = \operatorname{ctg} z - \frac{1}{z}; \\
\text{у)} & f(z) = z \cdot \operatorname{ctg} z; & \text{ф)} & f(z) = z \cos z; & \text{х)} & f(z) = z \cdot e^z.
\end{array}$$

7.3 Теоремы с доказательством.

- Докажите теорему о представлении функции рядом Лорана.
- Докажите теорему об устранимой особой точке $z_0 \neq \infty$ аналитической функции.
- Докажите теорему о полюсе $z_0 \neq \infty$ аналитической функции.
- Докажите теорему Сохоцкого-Вейерштрасса о существенно особой точке $z_0 \neq \infty$.
- Докажите теорему о существовании особой точки суммы степенного ряда на границе круга сходимости.

7.4 Теоретические задачи и задачи повышенной сложности.

- 7.4.1 Приведите примеры функций, имеющих устранимую особую точку, полюс, существенно особую точку. Ответ обоснуйте.
- 7.4.2 Приведите пример функции с особой точкой $z_0 \neq \infty$, которая не является изолированной. Ответ обоснуйте.
- 7.4.3 Приведите пример функции с особой точкой $z_0 = \infty$, которая не является изолированной. Ответ обоснуйте.
- 7.4.4 Пусть $z_k, k = 1, 2, 3, \dots, n$ — точки, в которых функция

$$f(z) = \frac{\sin(z^2 + iz + 2)}{z^4 + 3z^2 - 4}$$

имеет полюс. Найдите сумму $z_1 + z_2 + z_3 + \dots + z_n$.

7.4.5 Пусть $f(z) = \frac{1}{\sin z}$. Существует ли такая последовательность

$\{z_n\} \rightarrow 0$, что

последовательность $\{f(z_n)\} \rightarrow 1$? Ответ обоснуйте.

7.4.6 Пусть z_0 – существенно особая точка для функции $f(z)$. Какую особенность может иметь в этой точке функция $g(z) = \frac{1}{f(z)}$? Ответ обоснуйте.

7.4.7 Может ли предел последовательности $\{f_n\}$, $f_n = e^{\frac{1}{z_n}}$ при соответствующем выборе последовательности $\{z_n\} \rightarrow 0$ быть равным:

а) 1; б) 2; в) 0; д) $2i$; г) ∞ .

Ответ обоснуйте.

8. Вычеты.

Вычисление контурных и определенных интегралов с помощью вычетов.

8.1 Основные определения, формулы и теоремы.

- Сформулируйте определение вычета в конечной изолированной особой точке аналитической функции.
- Сформулируйте определение вычета в бесконечно удаленной изолированной особой точке аналитической функции.
- Запишите формулу для вычисления вычета в полюсе $z_0 \neq \infty$ порядка $m \geq 1$ аналитической функции.
- Сформулируйте основную теорему теории вычетов.
- Сформулируйте теорему о вычетах функции, аналитической на всей комплексной плоскости, за исключением конечного числа особых точек.
- Сформулируйте определение логарифмического вычета.
- Сформулируйте теорему о разности числа нулей и числа полюсов аналитической функции.
- Сформулируйте принцип аргумента.
- Сформулируйте теорему Руше.
- Сформулируйте основную теорему алгебры.

8.2 Задачи к зачету и экзамену.

Найдите вычеты функции $f(z)$ относительно всех изолированных особых точек (включая бесконечно удаленную точку):

8.2.1 а) $f(z) = \frac{e^z}{z^2(z^2+1)}$; б) $f(z) = \frac{z}{(z+1)^3(z-2)^2}$; в) $f(z) = \frac{e^{iz}}{(z^2-1)(z+2)}$;
 г) $f(z) = \frac{z^2+z-2}{z^3+1}$; д) $f(z) = \frac{\sin z}{(z+2)^3}$.

8.2.2 а) $f(z) = \sin \frac{1}{z}$; б) $f(z) = \sin \frac{1}{z^2}$; в) $f(z) = z^3 e^{\frac{1}{z}}$;
 г) $f(z) = z^3 e^{\frac{1}{z^2}}$; д) $f(z) = \cos \frac{1}{z-1}$; е) $f(z) = z^3 \cos \frac{1}{z-1}$;

8.2.3 а) $f(z) = \frac{1}{\sin z}$; б) $f(z) = \frac{z}{\sin z}$; в) $f(z) = \frac{\operatorname{tg} z}{z^3}$;
 г) $f(z) = \operatorname{ctg} z$; д) $f(z) = \operatorname{ctg}^2 z$.

8.2.4 Вычислите интегралы (обход контура – в положительном направлении):

а) $\oint_{|z|=1} \frac{\sin z}{z^3} dz$; б) $\oint_{|z-z_0|=R} \frac{dz}{(z-z_0)^2}$; в) $\oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z^2+2z} dz$;
 г) $\oint_{|z|=1} \frac{\cos z-1}{z^3} dz$; д) $\oint_{|z|=2} \frac{1}{z} dz$; е) $\oint_{|z|=2} \frac{1}{z^2+z^3} dz$;
 ж) $\oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{1}{z^2+z^3} dz$; з) $\oint_{|z|=2} \frac{1}{z^3+1} dz$; и) $\oint_{|z|=2} \frac{1}{z^4+1} dz$;
 к) $\oint_{|z|=\frac{1}{2}} z^3 e^{\frac{1}{z}} dz$; л) $\oint_{|z|=1} z \cos \frac{1}{z} dz$; м) $\oint_{|z-2|=1} z \sin \frac{1}{z-2} dz$;
 н) $\oint_{|z|=1} z e^{\frac{1}{z^2}} dz$; о) $\oint_{|z+1|=1} z e^{\frac{1}{z+1}} dz$; п) $\oint_{|z|=1} \operatorname{ctg} z dz$.

8.2.5 Вычислите определенные интегралы, сведя их к интегралам по окружности $|z|=1$ с

помощью замены переменной $z = e^{ix}$:

а) $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\cos x-5}$; б) $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{10-6\cos x}$; в) $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{2+\cos x}$;
 г) $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{2+\sin x}$; д) $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{5-\sin x}$; е) $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sin x-2}$.

8.2.6 Определить число корней уравнения в правой полуплоскости:

а) $z^3-4z^2+5=0$; б) $z^7-2z-5=0$; в) $z^5+5z^4-5=0$;
 г) $z^3-2z-5=0$; д) $z^5+z^4+2z^3-8z-1=0$.

8.3 Теоремы с доказательством.

- Докажите основную теорему теории вычетов.

- Докажите теорему о вычетах функции, аналитической на всей комплексной плоскости, за исключением конечного числа особых точек.
- Докажите теорему о разности числа нулей и полюсов аналитической функции.
- Докажите теорему Руше.
- Докажите (методами ТФКП) основную теорему алгебры.

8.4 Теоретические задачи и задачи повышенной сложности.

8.4.1 Найдите сумму вычетов функции $f(z) = \frac{1}{1+z^n}$ ($n \geq 2$ – натуральное число) во всех изолированных особых точках, кроме бесконечно удаленной точки.

8.4.2 Вычислите интегралы (обход контура – в положительном направлении):

$$\text{а) } \oint_{|z|=2} \frac{dz}{(z^4+1)^5}; \quad \text{б) } \oint_{|z|=3} \frac{dz}{(z^2+2z+5)^6}; \quad \text{в) } \oint_{|z|=2} \frac{z^4 dz}{(z^3-1)^2}.$$

8.4.3 Вычислите интегралы (обход контура – в положительном направлении):

$$\text{а) } \oint_{|z-1|=3} \operatorname{ctg} z \, dz; \quad \text{б) } \oint_{|z-i|=2} \operatorname{tg} z \, dz; \quad \text{в) } \int_{|z-i+2|=5} \frac{dz}{\sin z}.$$

8.4.4 Найдите число корней уравнения в указанной области:

- $z^{10} - 6z^4 + 3z - 1 = 0$ в круге $|z| < 1$;
- $e^z - 4z^n - 1 = 0$ (n – натуральное число) в круге $|z| < 1$;
- $z^6 - 6z + 10 = 0$ в круге $|z| < 1$;
- $z^4 - 3z^3 - 1 = 0$ в круге $|z| < 2$;
- $z^3 + z + 1 = 0$ в круге $|z| < \frac{1}{2}$;
- $z^5 + z^2 + 1 = 0$ в круге $|z| < 2$;
- $z^8 + 6z + 10 = 0$ в круге $|z| < 1$;
- $z^4 - 5z + 1 = 0$ в кольце $1 < |z| < 2$;
- $z^6 - 8z + 10 = 0$ в кольце $1 < |z| < 3$.

Указание: воспользуйтесь теоремой Руше.

9. Вычисление несобственных интегралов с помощью вычетов.

9.1 Основные определения, формулы и теоремы.

- Сформулируйте лемму Жордана для верхней полуплоскости.
- Сформулируйте лемму Жордана для нижней полуплоскости.
- Сформулируйте лемму Жордана для правой полуплоскости.
- Сформулируйте лемму Жордана для левой полуплоскости.

- Сформулируйте теорему о вычислении сходящегося интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ при помощи вычетов.
- Сформулируйте теорему о вычислении сходящегося интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iax} f(x) dx$ ($a > 0$) при помощи вычетов.

9.2 Задачи к зачету и экзамену.

9.2.1 Вычислите несобственные интегралы:

а) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x dx}{(x^2 - 4x + 13)^2}$; б) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 2x + 2)^2}$; в) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^3}$;

г) $\int_0^{+\infty} \frac{(x^2 - 1) dx}{x^4 + 1}$; д) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x^2 + 2) dx}{(x^2 + 4x + 5)^2}$; е) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^6}$.

9.2.2 Вычислите несобственные интегралы:

а) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 2x dx}{x^2 + 1}$; б) $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x dx}{(x^2 + 1)^2}$; в) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x dx}{x^2 + x + 1}$;

г) $\int_0^{+\infty} \frac{x \sin x dx}{x^2 + 1}$; д) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin 3x dx}{x^2 + 2x + 2}$; е) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cos x dx}{x^2 - 2x + 10}$.

9.2.3 Вычислите несобственные интегралы:

а) $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} dx}{x^2 + 4}$; б) $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2} dx}{x^2 + 1}$; в) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x + 3)\sqrt{x}}$;

г) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1) \cdot \sqrt{x}}$; д) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1) \cdot \sqrt[3]{x}}$; е) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x + 1) \cdot \sqrt[4]{x}}$.

9.3 Теоремы с доказательством.

- Докажите лемму Жордана для верхней полуплоскости.
- Докажите лемму Жордана для нижней полуплоскости.
- Докажите лемму Жордана для правой полуплоскости.
- Докажите лемму Жордана для левой полуплоскости.
- Докажите теорему о вычислении сходящегося интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ при помощи вычетов.

- Докажите теорему о вычислении сходящегося интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iax} f(x) dx$ ($a > 0$) при помощи вычетов.

9.4 Теоретические задачи и задачи повышенной сложности.

9.4.1 Пусть $f(z)$ – рациональная функция с полюсами z_1, z_2, \dots, z_N , не лежащими на неотрицательной действительной полуоси, $f(0) \neq 0$, а p такое действительное нецелое число, что

$$\lim_{z \rightarrow 0} |z|^{p+1} \cdot |f(z)| = \lim_{z \rightarrow \infty} |z|^{p+1} \cdot |f(z)| = 0. \text{ Докажите, что}$$

$$\int_0^{+\infty} x^p f(x) dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi i p}} \sum_{k=1}^N \operatorname{Res} [z^p f(z), z_k], \text{ где } z^p = e^{p(\ln|z| + i \arg z)}, 0 < \arg z < 2\pi.$$

9.4.2 Вычислите несобственные интегралы (значение интеграла Пуассона

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \text{ считается известным):}$$

а) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$; б) $\int_0^{+\infty} \sin x^2 dx$; в) $\int_0^{+\infty} \cos x^2 dx$;

г) $\int_0^{+\infty} e^{-ax^2} \cos bx dx$, $a > 0$, $-\infty < b < +\infty$; д) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x dx}{x(x-\pi)}$.

9.4.3 Вычислите $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^n}$, где $n \geq 2$ -- натуральное число. Указание:

рассмотрите в качестве контура интегрирования на комплексной плоскости границу сектора $0 < \arg z < \frac{2\pi}{n}$, $|z| < R$.

10. Преобразование Лапласа

10.1 Основные определения, формулы и теоремы.

- Запишите формулу преобразования Лапласа функции действительной переменной.
- Сформулируйте достаточные условия, при которых определено преобразование Лапласа.
- Сформулируйте теорему об аналитичности изображения по Лапласу функции действительной переменной.
- Сформулируйте теорему запаздывания.
- Запишите формулу изображения свертки.
- Запишите формулу изображения производной.
- Запишите формулу изображения интеграла.
- Запишите формулу Меллина.

- Сформулируйте теорему о достаточных условиях существования оригинала функции комплексной переменной.

10.2 Задачи к зачету и экзамену.

10.2.1 Найдите изображение по Лапласу функции $f(t)$ действительной переменной t ($f(t) \equiv 0$ при $t < 0$), если при $t \geq 0$:

- а) $f(t) = 1$; б) $f(t) = t$; в) $f(t) = t^n$ (n – натуральное число);
 г) $f(t) = e^{2t}$; д) $f(t) = \sin 3t$; е) $f(t) = \cos t$;
 ж) $f(t) = \operatorname{sh} t$; з) $f(t) = \operatorname{ch} 4t$; и) $f(t) = te^{3t}$.

10.2.2 Найдите оригинал $f(t)$, если задано его изображение по Лапласу $F(p)$:

- а) $F(p) = \frac{1}{(p-1)^2}, \quad \operatorname{Re} p > 1$;
 б) $F(p) = \frac{1}{p(p+2)}, \quad \operatorname{Re} p > 0$;
 в) $F(p) = \frac{p-1}{(p-2)^2+1}, \quad \operatorname{Re} p > 2$.

10.2.3 Применяя преобразование Лапласа, решите задачу Коши:

- | | | | |
|----|--|----|--|
| а) | $\begin{cases} y'' + y = t \sin t, & t > 0, \\ y(0) = 1, & y'(0) = 0; \end{cases}$ | б) | $\begin{cases} y'' + y = t \sin t, & t > 0, \\ y(0) = 0, & y'(0) = 1; \end{cases}$ |
| в) | $\begin{cases} y'' + y = te^t, & t > 0, \\ y(0) = 1, & y'(0) = 0; \end{cases}$ | г) | $\begin{cases} y'' + y = te^t, & t > 0, \\ y(0) = 0, & y'(0) = 1; \end{cases}$ |
| д) | $\begin{cases} y'' - y = te^{2t}, & t > 0, \\ y(0) = 1, & y'(0) = 0; \end{cases}$ | е) | $\begin{cases} y'' - y = te^{2t}, & t > 0, \\ y(0) = 0, & y'(0) = 1; \end{cases}$ |
| ж) | $\begin{cases} y'' - y = te^{-2t}, & t > 0, \\ y(0) = 0, & y'(0) = 1; \end{cases}$ | з) | $\begin{cases} y'' + y = te^{-2t}, & t > 0, \\ y(0) = 0, & y'(0) = 1; \end{cases}$ |
| и) | $\begin{cases} y'' + y' = te^{-t}, & t > 0, \\ y(0) = 1, & y'(0) = 0; \end{cases}$ | к) | $\begin{cases} y'' + y' = te^{-t}, & t > 0, \\ y(0) = 0, & y'(0) = 1. \end{cases}$ |

10.2.4 Вычислите интегралы:

- а) $\frac{1}{2\pi i} \int_{1-i\infty}^{1+i\infty} \frac{e^{pt}}{p+2} dp, \quad \underline{t > 0}$;
 б) $\frac{1}{2\pi i} \int_{1-i\infty}^{1+i\infty} \frac{e^{pt}}{p+2} dp, \quad \underline{t < 0}$;
 в) $\frac{1}{2\pi i} \int_{1-i\infty}^{1+i\infty} \frac{e^{pt}}{p^2+4} dp, \quad \underline{t > 0}$;
 г) $\frac{1}{2\pi i} \int_{1-i\infty}^{1+i\infty} \frac{pe^{pt}}{p^2+9} dp, \quad \underline{t > 0}$;

$$\begin{aligned} \text{д)} \quad & \frac{1}{2\pi i} \int_{1-i\infty}^{1+i\infty} \frac{e^{pt}}{p} dp, \quad \underline{t > 0}; \\ \text{е)} \quad & \frac{1}{2\pi i} \int_{1-i\infty}^{1+i\infty} \frac{e^{pt}}{p^2} dp, \quad \underline{t > 0}; \\ \text{ж)} \quad & \frac{1}{2\pi i} \int_{1-i\infty}^{1+i\infty} \frac{e^{pt}}{p(p+2)} dp, \quad \underline{t > 0}; \\ \text{з)} \quad & \frac{1}{2\pi i} \int_{1-i\infty}^{1+i\infty} \frac{e^{pt}}{p(p+3)} dp, \quad \underline{t < 0}. \end{aligned}$$

10.3 Теоремы с доказательством.

- Докажите теорему об аналитичности изображения по Лапласу функции $f(t)$ действительной переменной t .
- Докажите теорему запаздывания.
- Выведите формулу изображения производной.
- Выведите формулу изображения интеграла.
- Докажите теорему о достаточных условиях существования оригинала функции $F(p)$ комплексной переменной p .

10.4 Теоретические задачи и задачи повышенной сложности.

10.4.1 Пусть $F(p)$ – изображение по Лапласу функции $f(t)$. Какая функция переменной t имеет своим изображением n -ю производную $F^{(n)}(p)$ функции $F(p)$ ($n \geq 1$)?

10.4.2 Пусть $F(p)$ – изображение по Лапласу функции $f(t)$. Считая, что изображение n -й производной $f^{(n)}(t)$ функции $f(t)$ ($n \geq 1$) существует, выразите его через $F(p)$.

11. Конформные отображения

11.1 Основные определения, формулы и теоремы.

- Сформулируйте определение отображения $w = f(z)$, конформного в точке $z_0 \neq \infty$.

- Сформулируйте определение конформного отображения области комплексной плоскости на область комплексной плоскости.
- Сформулируйте теорему о необходимом и достаточном условии конформности отображения.
- Сформулируйте теорему о существовании и аналитичности обратной функции.
- Сформулируйте теорему о необходимом и достаточном условии однолиственности в окрестности точки $z_0 \neq \infty$ аналитической функции.
- Сформулируйте теорему Римана о существовании конформного отображения.
- Сформулируйте теорему единственности конформного отображения.
- Сформулируйте принцип соответствия границ при конформном отображении.
- Сформулируйте определение дробно–линейной функции.
- Сформулируйте групповое свойство дробно–линейной функции.
- Сформулируйте круговое свойство дробно–линейной функции.
- Сформулируйте свойство сохранения симметрии дробно–линейной функции.
- Сформулируйте определение функции Жуковского.
- Перечислите свойства функции Жуковского.
- Сформулируйте принцип максимума и минимума гармонической функции.
- Сформулируйте постановку задачи Дирихле для уравнения Лапласа в случае односвязной ограниченной области.
- Запишите формулу Пуассона решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге $|z| < R$.

11.2 Задачи к зачету и экзамену.

11.2.1 Найдите дробно-линейные функции, отображающие:

- | | | |
|----|-----------------------|---|
| а) | точки $-1; i; 1+i$ | соответственно в точки $0; 2i; 1-i$; |
| б) | точки $-1; i; 1+i$ | соответственно в точки $i; \infty; 1$; |
| в) | точки $-1; \infty; i$ | соответственно в точки $i; 1; 1+i$; |
| г) | точки $-1; \infty; i$ | соответственно в точки $\infty; i; 1$; |
| д) | точки $-1; \infty; i$ | соответственно в точки $0; \infty; 1$; |
| е) | точки $1; i; 0$ | соответственно в точки $1; i; -1$; |
| ж) | точки $-1; 0; 1$ | соответственно в точки $1; i; -1$. |

В последнем случае выяснить, какая область является образом полуплоскости $\text{Im } z > 0$?

11.2.2 Найдите образы областей D при заданных дробно-линейных отображениях $w = f(z)$:

- а) $D: |z| < 1, \operatorname{Re} z < 0; \quad w = \frac{1}{z};$ б) $D: |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0;$
 $w = \frac{2z-i}{2+iz};$
- в) $D: 0 < \operatorname{Re} z < 1, \operatorname{Im} z > 0; \quad w = \frac{1}{z};$ г) $D: \operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z > 0;$
 $w = \frac{z-i}{z+i};$
- д) $D: 0 < \operatorname{Re} z < 1; \quad w = \frac{z-1}{z};$ е) $D: 0 < \operatorname{Re} z < 1;$
 $w = \frac{z-1}{z-2};$
- ж) $D: 0 < \operatorname{Im} z < 1; \quad w = \frac{z-i}{z+i};$ з) $D: 0 < \arg z < \frac{\pi}{4}; \quad w = \frac{z}{z-1};$
- и) $D: \frac{\pi}{2} < \arg z < \pi; \quad w = \frac{z+1}{z-1};$ к) $D: 1 < |z| < 2;$
 $w = \frac{z}{z-1}.$

11.2.3 Найдите дробно-линейную функцию $w = f(z)$, конформно отображающую область D плоскости z на область G плоскости w и удовлетворяющую заданным условиям:

- а) $D: \operatorname{Im} z > 0 \rightarrow G: |w| < 1, \quad w(z_0) = 0, \quad \text{где } z_0 \in D;$
- б) $D: \operatorname{Im} z > 0 \rightarrow G: |w| < 1 \quad \text{и} \quad w(i) = 0, \quad \arg w'(i) = -\frac{\pi}{2};$
- в) $D: \operatorname{Im} z > 0 \rightarrow G: |w| < 4 \quad \text{и} \quad w(i) = 0, \quad \arg w'(i) = \alpha;$
- г) $D: \operatorname{Im} z > 0 \rightarrow G: |w| < 1 \quad \text{и} \quad w(2i) = 0, \quad \arg w'(2i) = 0;$
- д) $D: \operatorname{Im} z < 0 \rightarrow G: \operatorname{Im} w > 0 \quad \text{и} \quad w(1) = 0, \quad w(0) = 1, \quad w(-1) = \infty;$
- е) $D: \operatorname{Im} z > 0 \rightarrow G: |w| < 1 \quad \text{и} \quad w(2i) = 0, \quad \arg w'(2i) = 0;$
- ж) $D: |z| < 1 \rightarrow G: |w| < 2 \quad \text{и} \quad w(0) = i, \quad \arg w'(0) = \frac{\pi}{2};$
- з) $D: |z| < 2 \rightarrow G: |w| < 1 \quad \text{и} \quad w(1) = 0, \quad \arg w'(1) = \pi;$
- и) $D: |z-1| < 1 \rightarrow G: |w| < 2 \quad \text{и} \quad w\left(\frac{1}{2}\right) = 0, \quad \arg w'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2};$
- к) $D: |z| < 2 \rightarrow G: |w-1| < 2 \quad \text{и} \quad w(0) = 2i, \quad \arg w'(0) = -\pi;$
- л) $D: |z+i| < 2 \rightarrow G: \operatorname{Re} w > \operatorname{Im} w \quad \text{и} \quad w(-i) = 2, \quad w(i) = 0.$

11.2.4 Найдите образы указанных областей D или кривых L при заданном отображении $w = f(z)$:

- а) $D: \text{полоса } 0 < \operatorname{Im} z < \frac{\pi}{3}, \quad w = e^z;$
- б) $D: \text{полоса } 0 < \operatorname{Re} z < \pi, \quad w = e^{iz};$
- в) $L: \text{прямая } \operatorname{Im} z = \frac{\pi}{3}, \quad w = e^{2z};$
- г) $L: \text{отрезок } [1; 1+2i], \quad w = e^z;$

- д) L : дуга окружности $|z|=1$, $0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{4}$, $w = z^2$;
- е) D : часть плоскости $|z| > 2$, $-\frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{\pi}{4}$, $w = z^2$;
- ж) L : отрезок $[0; 1-i]$, $w = z^3$;
- з) D : полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$, $w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$;
- и) D : часть плоскости $\operatorname{Im} z > 0$, $|z| > 1$, $w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$;
- к) D : полукруг $\operatorname{Im} z > 0$, $|z| < 1$, $w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$;
- л) D : часть плоскости $|z| > 1$, $w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$.

11.2.5 Найдите функцию $w = f(z)$, конформно отображающую заданную область D плоскости z на полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$:

- а) D : полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$ с разрезами по отрезку $[0; i]$ и лучу на мнимой оси $[2i; +i\infty)$;
- б) D : полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$ с разрезом по дуге окружности $|z|=1$, $0 \leq \arg z \leq \alpha < \pi$;
- в) D : вся плоскость z с разрезом по дуге окружности $|z|=1$, $-\frac{\pi}{2} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2}$;
- г) D : часть плоскости $\frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{3\pi}{4}$;
- д) D : вся плоскость с разрезом по лучу $\arg(z-i) = \frac{\pi}{4}$;
- е) D : круг $|z| < 1$ с разрезом по промежутку $(-1; 0]$;
- ж) D : сектор $|z| < 1$, $0 < \arg z < \alpha < 2\pi$;
- з) D : часть плоскости $|z-1| > 1$, $|z-2| < 2$;
- и) D : часть плоскости $\operatorname{Im} z > 0$, $|z| > 1$;
- к) D : часть плоскости $|z + \sqrt{3}| < 2$, $|z| < 1$;
- л) D : часть плоскости $|z| > 1$ с разрезами по отрезку $[1; 2]$ и лучу $(-\infty; -1]$ на действительной оси.

11.3 Теоремы с доказательством.

- Докажите теорему о существовании и аналитичности обратной функции.
- Докажите теорему о необходимом условии однолиственности в точке $z_0 \neq \infty$ аналитической функции.

- Докажите принцип соответствия границ при конформном отображении.
- Докажите круговое свойство дробно–линейной функции.
- Докажите свойство сохранения симметрии дробно–линейной функции.
- Докажите теорему о существовании и единственности дробно–линейной функции, переводящей три различные конечные точки z_1, z_2, z_3 соответственно в три различные конечные точки w_1, w_2, w_3 .
- Докажите (методами ТФКП) принцип максимума и минимума гармонической функции двух переменных.

11.4 Теоретические задачи и задачи повышенной сложности.

- 11.4.1 Запишите общий вид дробно–линейной функции, переводящей конечные точки z_1, z_2 соответственно в точки $w_1 = 0, w_2 = \infty$.
Ответ обоснуйте.
- 11.4.2 Запишите общий вид дробно–линейной функции, переводящей точки $z_1 = 0, z_2 = \infty$ соответственно в точки $w_1 = 0, w_2 = \infty$. Ответ обоснуйте.
- 11.4.3 Запишите формулу конформного отображения верхней полуплоскости на единичный круг. Ответ обоснуйте.
- 11.4.4 Запишите формулу конформного отображения единичного круга на единичный круг. Ответ обоснуйте.
- 11.4.5 Пусть D и G –односвязные области на полной комплексной плоскости с границами, состоящими более, чем из одной точки. Докажите, что существует единственная функция $w = f(z)$, конформно отображающая область D на область G , и удовлетворяющая условиям $f(z_0) = w_0, \arg f'(z_0) = \alpha$ ($z_0 \in D, w_0 \in G; z_0 \neq \infty, w_0 \neq \infty$).
- 11.4.6 Пусть односвязные области D и G состоят из конечных точек, функция $f(z) = \xi(x, y) + i\eta(x, y)$ осуществляет конформное отображение области D на область G , а функция $u(x, y)$ является гармонической в области D . Докажите, что сложная функция $u(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))$ является гармонической в области G .
- 11.4.7 Является ли функция Жуковского однолистной в области $\operatorname{Re} z > 0$?
Ответ обоснуйте.
- 11.4.8 Найдите образ области D при отображении $w = f(z)$, осуществляемом однозначной ветвью $f(z)$ многозначной функции $F(z)$, где ветвь выделяется своим значением в указанной точке.

а) D : часть плоскости $|z| < 1$, $\operatorname{Im} z > 0$; $F(z) = \sqrt{z}$, $f\left(\frac{i}{2}\right) = \frac{1+i}{2}$;

б) D : часть плоскости $|z| > 1$, $\operatorname{Re} z > 0$; $F(z) = \operatorname{Ln} z$, $f(2) = \ln 2 + 2\pi i$.

11.4.9 Является ли функция $f(z)$ однолистной в окрестности точки z_0 ?

Ответ обоснуйте.

а) $f(z) = z + \frac{4}{z}$, $z_0 = 2$; б) $f(z) = z^2 + \frac{2}{z}$, $z_0 = 1$;

в) $f(z) = z \sin z$, $z_0 = 0$.

11.4.10 Является ли функция $f(z) = z^3$

а) однолистной в окрестности каждой точки области $\operatorname{Re} z < 0$?

б) однолистной во всей области $\operatorname{Re} z < 0$?

Ответ обоснуйте.

11.4.11 Докажите, что функция $f(z) = z^2 + az$ является однолистной в полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$ тогда и только тогда, когда $\operatorname{Re} a \geq 0$.

11.4.12 Является ли отображение $w = f(z)$ конформным в области D ?

Ответ обоснуйте.

а) $w = z^4$, $D: \operatorname{Im} z > 0$; б) $w = e^z$, $D: \operatorname{Re} z > 0$;

в) $w = \sin z$, $D: \operatorname{Im} z < 0$.

Литература.

- А.Г. Свешников, А.Н. Тихонов. Теория функций комплексной переменной. М.: Изд-во «Физматлит», 2005.
- Л.И. Волковыский, Г.Л. Лунц, И.Г. Араманович. Сборник задач по теории функций комплексного переменного. М.: Изд-во «Физматлит», 2004.
- А.В. Кравцов, А.Р. Майков. Пособие к курсу теории функций комплексной переменной. М.: Физический факультет МГУ, 2007.
- Лаврентьев М.А. Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Изд-во «Наука», 1987.