ОГЛАВЛЕНИЕ

Лекция 1

ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

§ 1. Аксиомы линейного пространства

Определение 1. *Множество векторов $\mathfrak{L}$ с определенными на нём операциями сложения векторов и умножения векторов на числа из поля $\mathbb{K}$, не выводящие сумму векторов и произведение вектора на число из множества $\mathfrak{L}$, называется линейным пространством, если справедливы следующие свойства*:

ВП1. *коммутативность сложения*: *для любых векторов x и y*

$$x + y = y + x;$$

ВП2. *ассоциативность сложения*: *для любых векторов x, y и z*

$$(x + y) + z = x + (y + z);$$

ВП3. *свойство нулевого вектора*: *существует нулевой вектор ϑ такой, что для любого вектора x*

$$x + \vartheta = x;$$

ВП4. *существование противоположного вектора*: *для любого вектора x существует такой вектор $-x$, что*

$$x + (-x) = \vartheta;$$

ВП5. *свойство единицы*: *для любого вектора x*

$$1 \cdot x = x;$$

ВП6. *ассоциативность умножения на число*: *для любого вектора x и любых чисел α и β*

$$(\alpha\beta) \cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x);$$

ВП7. *дистрибутивность относительно сложения векторов*: *для любых векторов x и y и любого числа α*

$$\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y;$$

ВП8. *дистрибутивность относительно сложения чисел: для любого вектора x и любых чисел α и β*

$$(\alpha+\beta)\cdot x=\alpha\cdot x+\beta\cdot x.$$

Замечание 1. Аксиомы **ВП1–ВП4** относятся к внутреннему закону композиции «+»; аксиомы **ВП5**, **ВП6** относятся к внешнему закону композиции «·» умножения векторов на числа из поля $\mathbb{K}$, а аксиомы **ВП7**, **ВП8** связывают свойства внутреннего закона композиции «+» и умножения векторов на числа «·» из поля $\mathbb{K}$.

Лемма 1. *Нулевой вектор линейного пространства единственный.*

Доказательство. Пусть существуют два вектора $\vartheta_1, \vartheta_2 \in \mathcal{L}$ такие, что

$$\vartheta_1+a=a \quad \text{и} \quad \vartheta_2+a=a \quad \text{для всех} \quad a\in\mathcal{L}.$$

Тогда с учетом аксиомы **ВП1** коммутативности сложения и аксиомы нулевого вектора **ВП3** справедлива следующая цепочка равенств:

$$\vartheta_2=\vartheta_2+\vartheta_1=\vartheta_1+\vartheta_2=\vartheta_1.$$

Лемма доказана.

Лемма 2. *Противоположный вектор к вектору линейного пространства единственный.*

Доказательство. Пусть

$$a+b=\vartheta \quad \text{и} \quad a+c=\vartheta.$$

Тогда с учетом аксиом коммутативности **ВП1**, ассоциативности **ВП2** и нулевого вектора **ВП3** справедлива следующая цепочка равенств:

$$b=b+\vartheta=\vartheta+b=(a+c)+b=(c+a)+b=c+(a+b)=c+\vartheta=c.$$

Лемма доказана.

Лемма 3. *Уравнение*

$$a+x=b \tag{1.1}$$

для любых $a, b\in\mathcal{L}$ имеет единственное решение:

$$x=b+(-a). \tag{1.2}$$

Доказательство. Действительно, из (1.1), а также аксиом коммутативности **ВП1** и ассоциативности **ВП2** вытекают равенства:

$$x=x+\vartheta=x+(a+(-a))= \\ =(x+a)+(-a)=(a+x)+(-a)=b+(-a). \tag{1.3}$$

Поэтому если решение уравнения (1.1) существует, то оно имеет вид (1.2). Обратно справедливы следующие равенства:

$$a+(b+(-a))=a+((-a)+b)=(a+(-a))+b=\vartheta+b=b+\vartheta=b, \tag{1.4}$$

где мы воспользовались аксиомами **ВП1–ВП4**.

Лемма доказана.

Лемма 4. *Справедливо следующее равенство*:

$$0 \cdot a = \vartheta \quad \textit{для всех} \quad a \in \mathcal{L}. \tag{1.5}$$

Доказательство. Действительно, с учетом **ВП8** имеем:

$$0 \cdot a = (0+0) \cdot a = 0 \cdot a + 0 \cdot a.$$

Это равенство можно переписать в следующем виде:

$$0 \cdot a + 0 \cdot a = 0 \cdot a,$$

из которого в силу леммы 3 и **ВП4** вытекает равенство:

$$0 \cdot a = 0 \cdot a + (-0 \cdot a) = \vartheta.$$

Лемма доказана.

Лемма 5. *Справедливо следующее равенство*:

$$k \cdot \vartheta = \vartheta \quad \textit{для всех} \quad k \in \mathbb{K}. \tag{1.6}$$

Доказательство. Действительно, с учетом **ВП8** и **ВП3** справедливы следующие равенства:

$$k \cdot \vartheta = k \cdot (\vartheta + \vartheta) = k \cdot \vartheta + k \cdot \vartheta.$$

Отсюда получаем:

$$k \cdot \vartheta + k \cdot \vartheta = k \cdot \vartheta.$$

Из леммы 3 и **ВП4** имеем:

$$k \cdot \vartheta = k \cdot \vartheta + (-k \cdot \vartheta) = \vartheta.$$

Лемма доказана.

Лемма 6. *Справедливо следующее равенство*:

$$-a = (-1) \cdot a \quad \textit{для любого} \quad a \in \mathcal{L}. \tag{1.7}$$

Доказательство. Действительно, с учетом **ВП5**, **ВП8** и леммы 4 справедлива следующая цепочка равенств:

$$a + (-1) \cdot a = 1 \cdot a + (-1) \cdot a = (1-1) \cdot a = 0 \cdot a = \vartheta \Rightarrow -a = (-1) \cdot a.$$

Лемма доказана.

§ 2. Линейная комбинация. Линейная зависимость

Определение 2. *Пусть дано семейство векторов линейного пространства* $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \subset \mathcal{L}$ *и числа* $\alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^n \in \mathbb{K}$. *Всякий вектор* $x \in \mathcal{L}$, *представимый в виде*:

$$x = \alpha^1 \cdot a_1 + \alpha^2 \cdot a_2 + \cdots + \alpha^n \cdot a_n,$$

называется линейной комбинацией семейства векторов $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. *Говорят также, что* x *линейно выражается через семейство векторов* $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.

Определение 3. *Линейная комбинация семейства векторов* $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \subset \mathcal{L}$ *называется тривиальной, если*

$$\alpha^1 = \cdots = \alpha^n = 0,$$

и называется нетривиальной, если среди чисел $\alpha^1, \ldots, \alpha^n$ *хотя бы одно отлично от нуля.*

Определение 4. *Семейство векторов* $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \subset \mathcal{L}$ *называется линейно зависимой, если существует нетривиальная линейная комбинация семейства векторов* $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, *равная нулевому вектору; иначе говоря, если справедливо равенство*:

$$\alpha^1 \cdot a_1 + \alpha^2 \cdot a_2 + \cdots + \alpha^n \cdot a_n = \vartheta,$$

где среди чисел $\alpha^1, \ldots, \alpha^n$ *хотя бы одно отлично от нуля.*

Определение 5. *Семейство векторов* $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \subset \mathcal{L}$ *называется линейно независимой, если равенство*

$$\alpha^1 \cdot a_1 + \alpha^2 \cdot a_2 + \cdots + \alpha^n \cdot a_n = \vartheta$$

возможно только в том случае, когда

$$\alpha^1 = \cdots = \alpha^n = 0.$$

Лемма 7. *Семейство векторов, состоящее из одного вектора, линейно зависимо тогда и только тогда, когда этот вектор нулевой.*

Доказательство. Действительно, рассмотрим равенство:

$$\alpha \cdot x = \vartheta.$$

Если $x \neq \vartheta$, то это равенство справедливо тогда и только тогда, когда $\alpha = 0$. Обратно, равенство $\alpha \cdot \vartheta = \vartheta$ имеет место, например, при $\alpha = 1$.

Лемма доказана.

Лемма 8. *Если часть семейства векторов линейно зависима, то и все семейство векторов линейно зависимо.*

Доказательство. Пусть известно, что в семействе векторов $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ часть, состоящая, например, из векторов $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ линейно зависима. Тогда найдется такая их линейная комбинация, что

$$\alpha^1 \cdot a_1 + \cdots + \alpha^m \cdot a_m = \vartheta$$

и числа $\alpha^1, \dots, \alpha^m$ одновременно в ноль не обращаются. Но тогда справедливо следующее равенство:

$$\alpha^1 \cdot a_1 + \dots + \alpha^m \cdot a_m + 0 \cdot a_{m+1} + \dots + 0 \cdot a_n = \vartheta,$$

причем это нетривиальная линейная комбинация векторов. Значит, все семейство векторов $\{a_1, \dots, a_m, a_{m+1}, \dots, a_n\}$ линейно зависимо.

Лемма доказана.

Лемма 9. *Если все семейство векторов линейно независимо, то ее любая часть этого семейства векторов тоже линейно независима.*

Доказательство. Действительно, пусть некоторая часть семейства векторов $\{a_1, \dots, a_n\}$ является линейно зависимой, но тогда в силу леммы 8 и все семейство векторов является линейно зависимым. Следовательно, любая часть этого семейства векторов линейно независима.

Лемма доказана.

Лемма 10. *Для того чтобы семейство векторов, состоящее не менее чем из двух векторов, было линейно зависимым, необходимо и достаточно, чтобы существовал какой-то вектор этого семейства, линейно выражающийся через остальные векторы семейства.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть семейство векторов $\{a_1, \dots, a_n\}$ является линейно зависимым. Тогда существует такая линейная их комбинация:

$$\alpha^1 \cdot a_1 + \dots + \alpha^n \cdot a_n = \vartheta,$$

в которой числа $\alpha^1, \dots, \alpha^n$ одновременно в ноль не обращаются. Например, пусть $\alpha^1 \neq 0$. Тогда имеет место равенство:

$$a_1 = -\frac{\alpha^2}{\alpha^1} \cdot a_2 - \frac{\alpha^3}{\alpha^1} \cdot a_3 - \dots - \frac{\alpha^n}{\alpha^1} \cdot a_n,$$

т.е. вектор a_1 линейно выражается через оставшиеся векторы рассматриваемого семейства.

Достаточность. Пусть, например, вектор a_1 линейно выражается через оставшиеся векторы семейства:

$$a_1 = \alpha^2 \cdot a_2 + \dots + \alpha^n \cdot a_n.$$

Это равенство можно переписать в следующем виде:

$$(-1) \cdot a_1 + \alpha^2 \cdot a_2 + \dots + \alpha^n \cdot a_n = \vartheta.$$

Это нетривиальная линейная комбинация векторов рассматриваемой системы. Значит, семейство векторов $\{a_1, \dots, a_n\}$ линейно зависимо.

Лемма доказана.

§ 3. Теорема о базисном миноре

Пусть матрица $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$:

$$A = \|A_1, \ldots, A_n\| = \left\| \begin{matrix} A^1 \\ \vdots \\ A^m \end{matrix} \right\|, \quad A_k = \begin{pmatrix} a_k^1 \\ \vdots \\ a_k^m \end{pmatrix}, \quad A^j = (a_1^j, \ldots, a_n^j).$$

Рассмотрим произвольные $k \in [1, \min\{m,n\}]$ строк матрицы A и произвольные $k \in [1, \min\{m,n\}]$ столбцов матрицы A :

$$A^{j_1}, \cdots, A^{j_k}, \quad 1 \leqslant j_1 < \cdots < j_k \leqslant m,$$

$$A_{i_1}, \cdots, A_{i_k}, \quad 1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n.$$

Определение 6. *Определитель матрицы $B \in \mathbb{K}^{k\times k}$, образованной из элементов на пересечении выделенных k строк и k столбцов и записанный в том же порядке, что и в матрице A, называется минором порядка k данной матрицы.*

$$\begin{pmatrix}
a_1^1 & \cdots & a_{i_1}^1 & \cdots & a_{i_2}^1 & \cdots & a_{i_k}^1 & \cdots & a_n^1 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_1^{j_1} & \cdots & a_{i_1}^{j_1} & \cdots & a_{i_2}^{j_1} & \cdots & a_{i_k}^{j_1} & \cdots & a_n^{j_1} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_1^{j_2} & \cdots & a_{i_1}^{j_2} & \cdots & a_{i_2}^{j_2} & \cdots & a_{i_k}^{j_2} & \cdots & a_n^{j_2} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_1^{j_k} & \cdots & a_{i_1}^{j_k} & \cdots & a_{i_2}^{j_k} & \cdots & a_{i_k}^{j_k} & \cdots & a_n^{j_k} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_1^m & \cdots & a_{i_1}^m & \cdots & a_{i_2}^m & \cdots & a_{i_k}^m & \cdots & a_n^m
\end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix}
a_{i_1}^{j_1} & a_{i_2}^{j_1} & \cdots & a_{i_k}^{j_1} \\
a_{i_1}^{j_2} & a_{i_2}^{j_2} & \cdots & a_{i_k}^{j_2} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{i_1}^{j_k} & a_{i_2}^{j_k} & \cdots & a_{i_k}^{j_k}
\end{pmatrix}.$$

Обозначение. Используется такое обозначение:

$$M_{i_1\cdots i_k}^{j_1\cdots j_k} := \begin{vmatrix}
a_{i_1}^{j_1} & a_{i_2}^{j_1} & \cdots & a_{i_k}^{j_1} \\
a_{i_1}^{j_2} & a_{i_2}^{j_2} & \cdots & a_{i_k}^{j_2} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{i_1}^{j_k} & a_{i_2}^{j_k} & \cdots & a_{i_k}^{j_k}
\end{vmatrix}.$$

Определение 7. *Минор матрицы* $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ *порядка* $k \in \in [1, \min\{m,n\}]$ *называется базисным, если он не равен нулю, а все миноры порядка* $k+1$, *если они существуют, равны нулю.*

Лемма 11. *Если у матрицы* $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ *существуют базисный минор порядка* $k \in \mathbb{N}$, *а также существуют миноры порядков* $k+ +2, \ldots, k+p$ *при* $p \geqslant 2$, *то они все равны нулю.*

Доказательство. Доказательство основано на методе математической индукции. Заметим, что минор порядка $k+2$ можно разложить, например, по первой строчке. Это разложение будет состоять из суммы определителей порядка $k+1$ с какими-то коэффициентами. Осталось заметить, что согласно определению базисного минора все миноры порядка $k+1$ равны нулю. Аналогично и в общем случае вытекает утверждение леммы.

Лемма доказана.

Определение 8. *Столбцы и строки матрицы, пересекающие базисный минор, называются базисными столбцами и базисными строками.*

Справедлива следующая *теорема о базисном миноре*:

Теорема 1. *Базисные столбцы матрицы линейно независимы. Всякий столбец матрицы через них линейно выражается.*

Доказательство. Без ограничения общности будем считать, что базисный минор расположен на пересечении первых r строк и первых r столбцов:

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_r^1 & a_{r+1}^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^r & \cdots & a_r^r & a_{r+1}^r & \cdots & a_n^r \\ a_1^{r+1} & \cdots & a_r^{r+1} & a_{r+1}^{r+1} & \cdots & a_n^{r+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^m & \cdots & a_r^m & a_{r+1}^m & \cdots & a_n^m \end{pmatrix}.$$

Шаг 1. Первое утверждение. Поскольку определитель

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & \cdots & a_r^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^r & \cdots & a_r^r \end{vmatrix} \neq 0,$$

то столбцы матрицы

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_r^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^r & \cdots & a_r^r \end{pmatrix}$$

линейно независимы. Но тогда тем более линейно независимыми будут столбцы:

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_1^1 \\ \vdots \\ a_1^r \\ a_1^{r+1} \\ \vdots \\ a_1^m \end{pmatrix}, \ \cdots, \ A_r = \begin{pmatrix} a_r^1 \\ \vdots \\ a_r^r \\ a_r^{r+1} \\ \vdots \\ a_r^m \end{pmatrix}$$

исходной матрицы A.

Шаг 2. Второе утверждение. Пусть A_k — это произвольный столбец матрицы. Если $k \leqslant r$, то имеет место равенство:

$$A_k = 0 \cdot A_1 + \cdots + 0 \cdot A_{k-1} + 1 \cdot A_k + 0 \cdot A_{k+1} + \cdots + 0 \cdot A_r$$

и, следовательно, столбец A_k линейно выражается через базисные столбцы. Если же $k > r$, то рассмотрим минор порядка $r+1$, полученный «окаймлением» базисного минора столбцом A_k и какой либо строчкой A^s:

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & \cdots & a_r^1 & a_k^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1^r & \cdots & a_r^r & a_k^r \\ a_1^s & \cdots & a_r^s & a_k^s \end{vmatrix} \tag{3.1}$$

Нужно рассмотреть два случая: $s \in \overline{1, r}$ и $s \in \overline{r+1, m}$. *В первом случае* у этого определителя заведомо две одинаковые строчки. Поэтому он равен нулю. *Во втором случае* указанный минор $r+1$–го порядка составлен из элементов, находящихся на пересечении первых r строк и s–ой строчки и первых r столбцов и k–го столбца:

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_r^1 & \cdots & a_k^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^r & \cdots & a_r^r & \cdots & a_k^r & \cdots & a_n^r \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^s & \cdots & a_r^s & \cdots & a_k^s & \cdots & a_n^s \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^m & \cdots & a_r^m & \cdots & a_k^m & \cdots & a_n^m \end{pmatrix}.$$

Соответствующий минор $r+1$–го порядка равен нулю по определению базисного минора. Таким образом, во всех случаях определитель (3.1) $r+1$–го порядка равен нулю.

Теперь мы можем разложить этот определитель (3.1) по последней строчке и получить следующее равенство:

$$0 = a_1^s \mathcal{M}_1 + \cdots + a_r^s \mathcal{M}_r + a_k^s \mathcal{M}, \quad s = \overline{1, m}, \tag{3.2}$$

где $\mathcal{M}_1, ..., \mathcal{M}_r, \mathcal{M}$ — это алгебраические дополнения элементов последней строчки, причем:

$$\mathcal{M} = (-1)^{r+1+r+1} \begin{vmatrix} a_1^1 & \cdots & a_r^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^r & \cdots & a_r^r \end{vmatrix} \neq 0,$$

поскольку это базисный минор рассматриваемой матрицы.

Отметим, что по своему построению алгебраические дополнения к элементам s–ой строчки не зависят от элементов этой строчки. Итак, из (1.2) вытекает, что

$$a_k^s = -\frac{\mathcal{M}_1}{\mathcal{M}} a_1^s - \cdots - \frac{\mathcal{M}_r}{\mathcal{M}} a_r^s, \quad s = \overline{1, m}.$$

Отсюда получаем:

$$A_k = \begin{pmatrix} a_k^1 \\ \vdots \\ a_k^s \\ \vdots \\ a_k^m \end{pmatrix} = -\frac{\mathcal{M}_1}{\mathcal{M}} \begin{pmatrix} a_1^1 \\ \vdots \\ a_1^s \\ \vdots \\ a_1^m \end{pmatrix} - \cdots - \frac{\mathcal{M}_r}{\mathcal{M}} \begin{pmatrix} a_r^1 \\ \vdots \\ a_r^s \\ \vdots \\ a_r^m \end{pmatrix} = \\ = -\frac{\mathcal{M}_1}{\mathcal{M}} A_1 - \cdots - \frac{\mathcal{M}_r}{\mathcal{M}} A_r.$$

Теорема доказана.

Справедлива следующая важная:

Теорема 2. *Базисные строки матрицы линейно независимы и любая строчка матрицы линейно выражаются через базисные.*

Доказательство. Пусть у матрицы $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ базисный минор располагается в левом верхнем углу и $A^1, \ldots, A^r$ — базисные строки. Тогда для матрицы $A^T \in \mathbb{K}^{n \times m}$ столбцы $\left(A^1\right)^T, \ldots, \left(A^r\right)^T$ — это базисные столбцы. Тогда согласно теореме о базисном миноре, во–первых, столбцы $\left(A^1\right)^T, \ldots, \left(A^r\right)^T$ линейно независимы, а любой столбец матрицы A^T линейно выражается через базисные. Если столбцы $\left(A^1\right)^T, \ldots, \left(A^r\right)^T$ линейно независимы, то строки $A^1, \ldots, A^r$ тоже линейно независимы, поскольку равенство:

$$c_1 (A^1)^T + \cdots + c_r (A^r)^T = O^T, \quad O = (0, \ldots, 0)$$

при транспонировании переходит в равенство:

$$O = O^{TT} = (c_1 (A^1)^T + \cdots + c_r (A^r)^T)^T = \\ = c_1 (A^1)^{TT} + \cdots + c_r (A^r)^{TT} = c_1 A^1 + \cdots + c_r A^r. \quad (3.3)$$

Если справедливо равенство:

$$\left(A^k\right)^T = c_1\left(A^1\right)^T + \cdots + c_r\left(A^r\right)^T.$$

Поэтому имеем:

$$A^k = \left(A^k\right)^{TT} = \left(c_1\left(A^1\right)^T + \cdots + c_r\left(A^r\right)^T\right)^T = \\ = c_1\left(A^1\right)^{TT} + \cdots + c_r\left(A^r\right)^{TT} = c_1A^1 + \cdots + c_rA^r. \quad (3.4)$$

Теорема доказана.

Справедлива вспомогательная:

Лемма 12. *Если в однородной системе уравнений число переменных больше, чем число уравнений, то у этой однородной системы существует нетривиальное решение.*

Доказательство. Рассмотрим однородную систему уравнений:

$$A\cdot X = O, \quad \begin{cases} a_1^1x^1 + a_2^1x^2 + \cdots + a_n^1x^n = 0, \\ a_1^2x^1 + a_2^2x^2 + \cdots + a_n^2x^n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_1^mx^1 + a_2^mx^2 + \cdots + a_n^mx^n = 0, \end{cases} \quad (3.5)$$

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^m & \cdots & a_n^m \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{m\times n}, \quad (3.6)$$

$$X = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n\times 1}, \quad O = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{m\times 1}. \quad (3.7)$$

Если матрица A — нулевая, то система уравнений (3.5) имеет нетривиальное решение. Если же матрица A — не нулевая, то у матрицы A имеется базисный минор. Предположим, что базисный минор порядка r располагается в левом верхнем углу. Тогда строки $A^1, \ldots, A^r$ матрицы A линейно независимы, а строчки $A^{r+1}, \ldots, A^m$ линейно выражаются через строки $A^1, \ldots, A^r$:

$$A^j = c_1^jA^1 + \cdots + c_r^jA^r, \quad j = \overline{r+1, m}. \quad (3.8)$$

Теперь рассмотрим следующую систему r уравнений:

$$A^1\cdot X = 0, \ldots, A^r\cdot X = 0, \quad (3.9)$$

которую можно переписать в следующем развернутом виде:

$$\begin{cases} a_1^1x^1 + a_2^1x^2 + \cdots + a_n^1x^n = 0, \\ a_1^2x^1 + a_2^2x^2 + \cdots + a_n^2x^n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_1^rx^1 + a_2^rx^2 + \cdots + a_n^rx^n = 0. \end{cases} \quad (3.10)$$

Докажем, что системы уравнений (3.5) и (3.10) эквивалентны. Прежде всего ясно, что всякое решение системы уравнений (3.5) является решением системы уравнений (3.10). С другой стороны, если столбец X — это решение системы уравнений (3.10), то с учетом (3.8) получим цепочку равенств:

$$A^j \cdot X = \left(c_1^j A^1 + \dots + c_r^j A^r\right) \cdot X = c_1^j A^1 \cdot X + \dots + c_r^j \cdot A^r = \\ = c_1^j 0 + \dots + c_r^j 0 = 0, \quad j = \overline{r+1, m}. \quad (3.11)$$

Отсюда получаем, что X — решение системы уравнений (3.5). Перейдем к рассмотрению укороченной системы уравнений (3.10), которую можно переписать в следующем виде:

$$\begin{cases} a_1^1 x^1 + a_2^1 x^2 + \dots + a_r^1 x^r = -a_{r+1}^1 x^{r+1} - \dots - a_n^1 x^n, \\ a_1^2 x^1 + a_2^2 x^2 + \dots + a_n^2 x^r = -a_{r+1}^2 x^{r+1} - \dots - a_n^2 x^n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_1^r x^1 + a_2^r x^2 + \dots + a_r^r x^r = -a_{r+1}^r x^{r+1} - \dots - a_n^r x^n. \end{cases} \quad (3.12)$$

Заметим, что по определению базисного минора определитель

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & \cdots & a_r^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^r & \cdots & a_r^r \end{vmatrix} \neq 0.$$

Поэтому если свободные переменные $(x^{r+1}, \dots, x^n)$ положить равными, например, $x^{r+1} = \dots = x^n = 1$, то мы автоматически получим из системы уравнений (3.12) базисные переменные $(x^1, \dots, x^r)$, равными вполне определенным значениям. И тогда приходим к выводу о существовании нетривиального решения системы уравнений (3.12), а вместе с ней и исходной системы уравнений (3.5).

Лемма доказана.

§ 4. Линейные оболочки и подпространства линейного пространства

Определение 9. *Пусть дано семейство векторов* $b_1, b_2, \dots, b_r \in \in \mathcal{L}$ *и числа* $\alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^r \in \mathbb{K}$. *Линейной оболочкой семейства векторов* $b_1, b_2, \dots, b_r \in \mathcal{L}$ *называется следующее множество*:

$$L(b_1, b_2, \dots, b_r) := \\ = \left\{\alpha^1 \cdot b_1 + \alpha^2 \cdot b_2 + \dots + \alpha^r \cdot b_r : \forall\, \alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^r \in \mathbb{K}\right\}. \quad (4.1)$$

Лемма 13. *Пусть семейство векторов* $a_1, \dots, a_p$ *принадлежат линейной оболочке семейства векторов* $b_1, \dots, b_r$. *Тогда*:

$$L(a_1, \dots, a_p) \subset L(b_1, \dots, b_r).$$

Доказательство. По условию $a_j \in L(b_1, \ldots, b_r)$ для любого $j = \overline{1, p}$. Поэтому найдутся такие числа

$$\alpha_j^k \in \mathbb{K}, \quad k = \overline{1, r}, \quad j = \overline{1, p},$$

что справедливо следующее равенство:

$$a_j = \sum_{k=1}^{r} \alpha_j^k \cdot b_k. \tag{4.2}$$

Пусть $c \in L(a_1, \ldots, a_p)$. Тогда найдутся такие числа $\beta^j \in \mathbb{K}$ при $j = \overline{1, p}$, что в силу (4.2) справедливы следующие равенства:

$$c = \sum_{j=1}^{p} \beta^j \cdot a_j = \sum_{j=1}^{p} \beta^j \cdot \sum_{k=1}^{r} \alpha_j^k \cdot b_k = \sum_{k=1}^{r} \gamma^k \cdot b_k \in L(b_1, \ldots, b_r), \tag{4.3}$$

где

$$\gamma^k := \sum_{j=1}^{p} \beta^j \alpha_j^k.$$

Лемма доказана.

Определение 10. *Непустое подмножество $\mathcal{P} \subset \mathcal{L}$ линейного пространства $\mathcal{L}$ называется линейным подпространством, если*

$$\alpha \cdot a + \beta \cdot b \in \mathcal{P}$$

для всех $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ и для всех векторов $a, b \in \mathcal{P}$.

Лемма 14. *Линейная оболочка $L(a_1, \ldots, a_r)$ семейства векторов $\{a_1, \ldots, a_r\}$ линейного пространства $\mathcal{L}$ является его подпространством.*

Доказательство. Действительно, пусть векторы $b, c \in L(a_1, \ldots, a_r)$, тогда:

$$b = \sum_{k=1}^{r} \alpha^k \cdot a_k, \quad c = \sum_{k=1}^{r} \beta^k \cdot a_k.$$

$$\alpha \cdot b + \beta \cdot c = \sum_{k=1}^{r} \left(\alpha\alpha^k + \beta\beta^k\right) \cdot a_k = \sum_{k=1}^{r} \delta^k \cdot a_k \in L(a_1, \ldots, a_r),$$

где $\delta^k = \alpha\alpha^k + \beta\beta^k$.

Лемма доказана.

Лемма 15. *Линейное подпространство линейного пространства $\mathcal{L}$ над полем $\mathbb{K}$ само является линейным пространством над тем же полем.*

Доказательство. Несложное доказательство предлагаем провести читателю.

Лемма доказана.

Лемма 16. *Линейная оболочка $L(a_1, \ldots, a_k)$ векторов линейного пространства $\mathcal{L}$ над полем $\mathbb{K}$ само является линейным пространством над тем же полем.*

§ 5. Теорема о двух системах векторов одного линейного пространства

Теорема 3. *Если семейство векторов*

$$\{c_1, \ldots, c_s, b_1, \ldots, b_r\} \subset \mathcal{L},$$

причем

$$\{c_1, \ldots, c_s\} \subset L(b_1, \ldots, b_r), \quad s > r,$$

то векторы $c_1, \ldots, c_s$ линейно зависимы.

Доказательство. Введём обозначения:

$$\mathbf{X} = (b_1, \ldots, b_r), \quad \mathbf{Y} = (c_1, \ldots, c_s). \tag{5.1}$$

Итак, $\mathbf{X}$ — это строчка длины r, а $\mathbf{Y}$ — это строчка длины $s > r$. По условию найдутся такие числа a_k^j при $j = \overline{1, r}$ и $k = \overline{1, s}$, что

$$\begin{gathered} c_1 = a_1^1 \cdot b_1 + a_1^2 \cdot b_2 + \cdots + a_1^r \cdot b_r, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_s = a_s^1 \cdot b_1 + a_s^2 \cdot b_2 + \cdots + a_s^r \cdot b_r \end{gathered} \tag{5.2}$$

Ещё введём обозначение:

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_s^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_s^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^r & a_2^r & \cdots & a_s^r \end{pmatrix}. \tag{5.3}$$

Ясно, что это матрица размера $r \times s$. С учетом обозначений (5.1) и (5.3) равенства (5.2) можно переписать в следующем виде:

$$(c_1, \ldots, c_s) = (b_1, \ldots, b_r) \cdot \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_s^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_s^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^r & a_2^r & \cdots & a_s^r \end{pmatrix} \tag{5.4}$$

или в компактной форме записи:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X} \cdot A. \tag{5.5}$$

Введём столбец переменных:

$$Z = \begin{pmatrix} z^1 \\ z^2 \\ \vdots \\ z^s \end{pmatrix}, \quad z^1, z^2, \ldots, z^s \in \mathbb{K} \tag{5.6}$$

и рассмотрим однородную систему r–уравнений относительно s–неизвестных:

$$A \cdot Z = O \Leftrightarrow \begin{cases} a_1^1 z^1 + a_2^1 z^2 + \cdots + a_s^1 z^s = 0, \\ a_1^2 z^1 + a_2^2 z^2 + \cdots + a_s^2 z^s = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_1^r z^1 + a_2^r z^2 + \cdots + a_s^r z^s = 0. \end{cases} \tag{5.7}$$

Поскольку число уравнений r меньше числа переменных s, то в силу леммы 12 существует нетривиальное решение:

$$Z_0 = \begin{pmatrix} z_0^1 \\ z_0^2 \\ \vdots \\ z_0^s \end{pmatrix} \neq O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{s\times 1}. \tag{5.8}$$

Рассмотрим следующую линейную комбинацию векторов $c_1, \ldots, c_s$:

$$z_0^1 \cdot c_1 + \cdots + z_0^s \cdot c_s = \mathbf{Y} \cdot Z_0 = \mathbf{X} \cdot AZ_0 = \mathbf{X} \cdot O = \vartheta \in \mathcal{L}. \tag{5.9}$$

Следовательно, векторы $c_1, \ldots, c_s$ линейно зависимы.

Теорема доказана.

Лемма 17. *Если векторы $c_1, \ldots, c_s \in L(b_1, \ldots, b_r)$ и линейно независимы, то $s \leqslant r$.*

§ 6. Размерность и базис линейного пространства

Определение 11. *Если для каждого $n \in \mathbb{N}$ в линейном пространстве $\mathcal{L}$ найдется линейно независимое семейство векторов, состоящее из n векторов, то пространство $\mathcal{L}$ называется бесконечномерным.*

Определение 12. *Линейное пространство $\mathcal{L}$ называется конечномерным, если выполнены следующие два условия:*

1. *в $\mathcal{L}$ существует линейно независимое семейство векторов, состоящее из $n \in \mathbb{N}$ векторов;*
2. *любое семейство векторов из $\mathcal{L}$, состоящее из $n+1$ векторов линейно зависимо.*

Число n называется размерностью линейного пространства $\mathcal{L}$ и обозначается $\dim \mathcal{L}$. Линейное пространство $\{\vartheta\}$ называется нульмерным.

Примеры. Линейное пространство $\{\vartheta\}$ имеет размерность 0. В рамках аксиоматики Гильберта имеем $\dim \mathbb{V}_1 = 1$, $\dim \mathbb{V}_2 = 2$ и $\dim \mathbb{V}_3 = 3$. Однако, в аксиоматике Вейля это нужно положить в основу аксиоматики, которые называются *аксиомами размерности*:

P1: Размерность прямой равна 1: $\dim \mathbb{V}_1 = 1$.

P2: Размерность плоскости равна 2: $\dim \mathbb{V}_2 = 2$.

P3: Размерность пространства равна 3: $\dim \mathbb{V}_3 = 3$.

Определение 13. *Базисом конечномерного линейного пространства $\mathcal{L}$ называется линейно независимое семейство векторов $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ этого пространства, через которое может быть линейно выражен произвольный вектор $x \in \mathcal{L}$:*

$$x = \sum_{i=1}^{n} x^i \cdot \mathbf{e}_i = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \mathbf{E} \cdot X, \quad X = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix},$$

где $\mathbf{E} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$. Столбец коэффициентов X называется столбцом координат вектора $\mathbf{x}$ в базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$.

Определение 14. *Семейство векторов $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m\} \in \mathcal{L}$ называется полным, если любой вектор $\mathbf{b} \in \mathcal{L}$ можно представить в виде линейной комбинации векторов этого семейства.*

Лемма 18. *Если семейство векторов $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — это базис линейного пространства $\mathcal{L}$, то линейная оболочка $L(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) = \mathcal{L}$.*

Доказательство. Ясно, что

$$\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\} \subset \mathcal{L} \Rightarrow L(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \subset \mathcal{L},$$

$$x \in \mathcal{L} \Rightarrow x = \sum_{k=1}^{n} x^k \cdot \mathbf{e}_k \in L(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \Rightarrow \mathcal{L} \subset L(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n).$$

Лемма доказана.

Лемма 19. *Разложение по базису линейного пространства единственно.*

Доказательство. Действительно, пусть $\mathbf{E} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ — это строчка, состоящая из векторов базиса в $\mathcal{L}$. Тогда:

$$x = \sum_{k=1}^{n} x^k \cdot \mathbf{e}_k = \sum_{k=1}^{n} y^k \cdot \mathbf{e}_k \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x^1 - y^1) \cdot \mathbf{e}_1 + (x^2 - y^2) \cdot \mathbf{e}_2 + \cdots + (x^n - y^n) \cdot \mathbf{e}_n = \vartheta.$$

Отсюда в силу линейной независимости базиса имеем:

$$x^1 = y^1, \ldots, x^n = y^n.$$

Лемма доказана.

З а м е ч а н и е 2. Для компактности записи различных выражений, содержащих знаки суммирования используется *правило Эйнштейна*, состоящее в следующем:

1. если в выражении *индекс встречается ровно два раза* один раз снизу и один раз сверху, то предполагается суммирование по нему. Например,
$$x = \sum_{i=1}^{n} x^i \cdot \mathbf{e}_i = x^i \cdot \mathbf{e}_i.$$
2. если индекс встречается большее число раз, то по нему не предполагается суммирование. Например,
$$a_k b^k c^k,$$
хотя
$$(a_k + b_k)c^k = \sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)c^k.$$

Введем важный *символ Кронекера*:
$$\delta^j_k = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad j = k; \\ 0, & \text{если} \quad j \neq k. \end{cases}$$

Заметим, что
$$a_j \delta^j_k = \sum_{j=1}^{n} a_j \delta^j_k = a_k.$$

Т е о р е м а 4. *Все базисы конечномерного линейного пространства $\mathcal{L}$ состоят из одинакового числа векторов. Это число равно размерности* $\dim \mathcal{L}$ *линейного пространства $\mathcal{L}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\}$ и $\{\mathbf{f}_1, ..., \mathbf{f}_m\}$ — это два базиса векторного пространства $\mathcal{L}$. Тогда:
$$\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n \in L(\mathbf{f}_1, ..., \mathbf{f}_m) = \mathcal{L}, \quad \mathbf{f}_1, ..., \mathbf{f}_m \in L(\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n) = \mathcal{L}.$$

Следовательно, в силу следствия 17 из теоремы 3 имеют место два неравенства:
$$n \leqslant m \quad \text{и} \quad m \leqslant n \Rightarrow m = n.$$

С другой стороны, любое семейство из $n+1$ векторов:
$$\mathbf{g}_1, \ldots, \mathbf{g}_n, \mathbf{g}_{n+1} \in \mathcal{L} = L(\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n),$$
поэтому в силу теоремы 3 семейство $\{\mathbf{g}_1, \ldots, \mathbf{g}_n, \mathbf{g}_{n+1}\}$ линейно зависимо. Таким образом,
$$n = \dim \mathcal{L}.$$

Т е о р е м а д о к а з а н а.

Замечание 3. Пусть x и y — это два вектора из векторного пространства $\mathcal{L}$. Пусть $\mathbf{E} = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — это базис в $\mathcal{L}$. Тогда:

$$x = \sum_{k=1}^{n} x^k \cdot \mathbf{e}_k, \quad y = \sum_{k=1}^{n} y^k \cdot \mathbf{e}_k,$$

$$x + y = \sum_{k=1}^{n} (x^k + y^k) \cdot \mathbf{e}_k, \quad \alpha \cdot x = \sum_{k=1}^{n} (\alpha x^k) \cdot \mathbf{e}_k.$$

Следовательно, при сложении векторов их координаты складываются, а при умножении вектора на число его координаты умножаются на это число.

§ 7. Ранг семейства векторов

Определение 15. *Рангом семейства векторов* $\{a_1, \ldots, a_k\}$ *линейного пространства* $\mathcal{L}$ *называется* $\dim L(a_1, \ldots, a_k)$ — *размерность линейной оболочки этого семейства векторов как линейного пространства. Будем использовать следующее обозначение*:

$$\operatorname{rang}\{a_1, \ldots, a_k\}.$$

Лемма 20. *Если векторы* $c_1, \ldots, c_s \in L(b_1, \ldots, b_r)$ *одного и того же линейного пространства* $\mathcal{L}$, *то ранг семейства векторов* $\{c_1, \ldots, c_s\}$ *не выше ранга семейства векторов* $\{b_1, \ldots, b_r\}$.

Доказательство. Пусть $\{c_{k_1}, \ldots, c_{k_p}\}$ — базис в $L(c_1, \ldots, c_s)$. В частности, имеем:

$$k_p = \operatorname{rang}\{c_1, \ldots, c_s\}.$$

Пусть $\{b_{j_1}, \ldots, b_{j_d}\}$ — это базис в $L(b_1, \ldots, b_r)$. В частности,

$$j_d = \operatorname{rang}\{b_1, \ldots, b_r\}.$$

Заметим, что

$$L(b_1, \ldots, b_r) = L(b_{j_1}, \ldots, b_{j_d}).$$

Поскольку $c_1, \ldots, c_s \in L(b_1, \ldots, b_r)$, то имеем:

$$c_{k_1}, \ldots, c_{k_p} \in L(b_{j_1}, \ldots, b_{j_d}),$$

причем семейства векторов $\{c_{k_1}, \ldots, c_{k_p}\}$ и $\{b_{j_1}, \ldots, b_{j_d}\}$ по построению являются линейно независимыми. Поэтому в силу следствия 17 получаем неравенство:

$$k_p \leqslant j_d \Rightarrow \operatorname{rang}\{c_1, \ldots, c_s\} \leqslant \operatorname{rang}\{b_1, \ldots, b_r\}.$$

Лемма доказана.

Лемма 21. *Если векторы* $c_1, \ldots, c_s \in L(b_1, \ldots, b_r)$, *а векторы* $b_1, \ldots, b_r \in L(c_1, \ldots, c_s)$, *то ранги семейств векторов* $\{b_1, \ldots, b_r\}$ *и* $\{c_1, \ldots, c_s\}$ *совпадают.*

Доказательство. Действительно, дважды применяя результат следствия 20, получим два неравенства:

$$\operatorname{rang}\{c_1, \ldots, c_s\} \leqslant \operatorname{rang}\{b_1, \ldots, b_r\} \quad \text{и} \quad \operatorname{rang}\{b_1, \ldots, b_r\} \leqslant \operatorname{rang}\{c_1, \ldots, c_s\},$$

из которых вытекает равенство:

$$\operatorname{rang}\{c_1, \ldots, c_s\} = \operatorname{rang}\{b_1, \ldots, b_r\}.$$

Лемма доказана.

§ 8. Ранг матрицы

Определение 16. *Рангом матрицы* $A = \|A_1, \ldots, A_n\|$ *называется* $\dim L(A_1, \ldots, A_n)$. Обозначение. $\operatorname{rang} A$.

Теорема 5. *Ранг произвольной матрицы равен порядку ее базисного минора.*

Доказательство. *Случай* $\operatorname{rang} A = 0$. В этом случае $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ — нулевая матрица и поэтому у нее нет отличных от нуля миноров. Поэтому порядок базисного минора матрицы A считается равным нулю.

Случай $\operatorname{rang} A > 0$. В этом случае матрица $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ ненулевая. Для определенности пусть:

$$A = \|A_1, \ldots, A_n\|,$$

а $A_1, \ldots, A_r$ — базисные столбцы матрицы A, где $r \in [1, n]$ — это порядок базисного минора матрицы A. Тогда, с одной стороны, базисные столбцы $A_1, \ldots, A_r$ этой матрицы в силу теоремы о базисном миноре являются линейно независимыми. С другой стороны, любой столбец A_k матрицы A по той же теореме о базисном миноре линейно выражается через r базисных столбцов:

$$A_k \in L(A_1, \ldots, A_r),\ k = \overline{1, n} \Rightarrow \\ \Rightarrow L(A_1, \ldots, A_r, A_{r+1}, \ldots, A_n) = L(A_1, \ldots, A_r).$$

Значит, имеем $\operatorname{rang} A = r$.

Теорема доказана.

Лемма 22. *Ранг семейства строк матрицы A равен порядку базисного минора этой матрицы.*

Доказательство. Если матрица $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ нулевая, то утверждение очевидно. Пусть матрица $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ не нулевая. Рассмотрим транспонированную матрицу $A^T \in \mathbb{K}^{n\times m}$. Тогда строчки матрицы A перейдут в столбцы матрицы A^T. В силу результата теоремы 5 имеем $\operatorname{rang} A^T = r$, где r — порядок базисного минора матрицы A^T. С другой стороны, при транспонировании, очевидно, что базисные столбцы переходят в базисные строки, а базисные строки — в базисные столбцы. Таким образом, порядок базисного минора не меняется. Поэтому порядок базисного минора матрицы A^T совпадает с порядком базисного минора матрицы A. Таким образом, $\operatorname{rang} A^T = \operatorname{rang} A$. Осталось воспользоваться результатом теоремы 5.

Лемма доказана.

Лемма 23. *Если* $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, *то* $\operatorname{rang} A$ *не превосходит* $\min\{m,n\}$.

Доказательство. Действительно, порядок базисного минора не превосходит числа строк и числа столбцов матрицы $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$. Стало быть, приходим к выводу о том, что $\operatorname{rang} A = r \leqslant \min\{m,n\}$.

Лемма доказана. Справедливо следующее важное для дальнейшего утверждение:

Лемма 24. *Если* $A \in \mathbb{K}^{m\times p}$, $B \in \mathbb{K}^{p\times n}$, *то для произведения этих матриц* $C = A\cdot B \in \mathbb{K}^{m\times n}$ *справедливо неравенство*:

$$\operatorname{rang} C \leqslant \min\{\operatorname{rang} A, \operatorname{rang} B\}. \tag{8.1}$$

Доказательство. Действительно, пусть:

$$C = \|C_1,\dots,C_n\| = \left\| \begin{matrix} C^1 \\ \vdots \\ C^m \end{matrix} \right\|$$

тогда имеем:

$$C_k = A\cdot B_k = \sum_{j=1}^{p} b_k^j A_j \Rightarrow L(C_1,\dots,C_n) \subset L(A_1,\dots,A_p), \tag{8.2}$$

$$C^j = A^j \cdot B = \sum_{k=1}^{p} a_k^j B^k \Rightarrow L(C^1,\dots,C^m) \subset L(B^1,\dots,B^p). \tag{8.3}$$

Из вложений (8.2) и (8.3) и леммы 20 вытекает утверждение леммы.

Лемма доказана.

§ 9. Геометрия подпространств. Прямая сумма подпространств

Сначала предложим алгоритм построения базиса в конечномерном линейном пространстве $\mathcal{L}$. Справедлива следующая вспомогательная:

Лемма 25. *Если семейство векторов* $\{x_1,\dots,x_m\} \subset \mathcal{L}$ *— линейно независимое и существует вектор* $x_{m+1} \in \mathcal{L}$ *такой, что* $x_{m+1} \notin L(x_1,\dots,x_m)$, *то семейство векторов* $\{x_1,\dots,x_m,x_{m+1}\}$ *линейно независимое в* $\mathcal{L}$.

Доказательство. Пусть противное и семейство векторов $\{x_1,\dots,x_m,x_{m+1}\}$ линейно зависимое. Тогда найдется нетривиальная линейная комбинация:

$$\alpha^1\cdot x_1 + \dots + \alpha^m \cdot x_m + \beta\cdot x_{m+1} = \vartheta, \tag{9.1}$$

причем

$$(\alpha^1,\dots,\alpha^m,\beta) \neq (0,\dots,0,0). \tag{9.2}$$

Возможны только две ситуации: $\beta = 0$ и $\beta \neq 0$. Рассмотрим отдельно два случая.

Случай 1. Пусть $\beta = 0$. Тогда из (9.1) и (9.2) получим:

$$\alpha^1 \cdot x_1 + \dots + \alpha^m \cdot x_m = \vartheta, \tag{9.3}$$

причем

$$(\alpha^1, \dots, \alpha^m) \neq (0, \dots, 0). \tag{9.4}$$

Это означает, что семейство векторов $\{x_1, \dots, x_m\}$ линейно зависимо в противоречии с исходным предположением.

Случай 2. Пусть $\beta \neq 0$. Тогда из равенства (9.1) получаем равенство:

$$x_{m+1} = -\frac{\alpha^1}{\beta} \cdot x_1 - \dots - \frac{\alpha^m}{\beta} \cdot x_m \in L(x_1, \dots, x_m), \tag{9.5}$$

хотя по исходному предположению вектор $x_{m+1} \notin L(x_1, \dots, x_m)$.

Мы рассмотрели все случаи и во всех случаях пришли к противоречиям. Следовательно, равенство (9.1) при условии (9.2) невозможно, т. е. семейство векторов $\{x_1, \dots, x_m, x_{m+1}\}$ линейно независимое.

Лемма доказана.

Имеет место важное обобщение:

Лемма 26. *Если семейства векторов $\{x_1, \dots, x_m\} \subset \mathcal{L}$ и $\{y_1, \dots, y_p\} \subset \mathcal{L}$ — линейно независимые по отдельности и $L(x_1, \dots, x_m) \cap L(y_1, \dots, y_p) = \{\vartheta\}$, то семейство векторов $\{x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_p\}$ тоже линейно независимое.*

Доказательство. Пусть выполнены условия леммы и семейство векторов $\{x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_p\}$ линейно зависимое в $\mathcal{L}$. Таким образом, имеет место равенство:

$$\alpha^1 \cdot x_1 + \dots + \alpha^m \cdot x_m + \beta^1 \cdot y_1 + \dots + \beta^p \cdot y_p = \vartheta, \tag{9.6}$$

хотя

$$\left(\alpha^1, \dots, \alpha^m, \beta^1, \dots, \beta^p\right) \neq (0, \dots, 0, 0, \dots, 0). \tag{9.7}$$

Возможны только два случая: $(\beta^1, \dots, \beta^p) = (0, \dots, 0)$ и $(\beta^1, \dots, \beta^p) \neq$ $\neq (0, \dots, 0)$. Рассмотрим эти два случая.

Случай 1. Пусть $(\beta^1, \dots, \beta^p) = (0, \dots, 0)$. Тогда из (9.6) и (9.7) имеем:

$$\alpha^1 \cdot x_1 + \dots + \alpha^m \cdot x_m = \vartheta, \tag{9.8}$$

хотя

$$\left(\alpha^1, \dots, \alpha^m\right) \neq (0, \dots, 0). \tag{9.9}$$

Из (9.8), (9.9) вопреки условию леммы получаем, что семейство векторов $\{x_1, \dots, x_m\}$ линейно зависимое.

Случай 2. Пусть $(\beta^1, \dots, \beta^p) \neq (0, \dots, 0)$. Докажем, что тогда вектор

$$y := \beta^1 \cdot y_1 + \dots + \beta^p \cdot y_p \neq \vartheta. \tag{9.10}$$

Действительно, пусть $y = \vartheta$. Тогда в силу линейной независимости семейства векторов $\{y_1, \dots, y_p\}$ получим, что $(\beta^1, \dots, \beta^p) = (0, \dots, 0)$.

Пришли к противоречию. Значит, с одной стороны, вектор $y \neq \vartheta$, причем из (9.6) получим равенство:

$$y = \alpha^1 \cdot x_1 + \dots + \alpha^m \cdot x_m \in L(x_1, \dots, x_m). \tag{9.11}$$

С другой стороны, в силу определения (9.10) вектора y имеем $y \in \in L(y_1, \dots, y_p)$. Итак, $y \in L(x_1, \dots, x_m) \cap L(y_1, \dots, y_p)$, причем $y \neq \vartheta$. Пришли к противоречию с условием леммы.

Значит, наше предположение не верно и семейство векторов $\{x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_p\}$ линейно независимое в $\mathcal{L}$.

Лемма доказана.

Справедлива следующая:

Теорема 6. *В любом конечномерном линейном пространстве $\mathcal{L}$ существует базис.*

Доказательство. Пусть $0 < \dim \mathcal{L} < +\infty$.

Шаг 1. Поскольку $\mathcal{L} \neq \{\vartheta\}$, то найдется вектор $x_1 \neq \vartheta$ и $x_1 \in \mathcal{L}$. Если линейная оболочка $L(x_1) = \mathcal{L}$, то семейство $\{x_1\}$ образует базис в $\mathcal{L}$. Если же $L(x_1)$ строго вложено в $\mathcal{L}$, то найдется такой вектор $x_2 \in \mathcal{L}$ и $x_2 \notin L(x_1)$. Тогда согласно результату леммы 25 семейство векторов $\{x_1, x_2\}$ линейно независимое. Рассмотри линейную оболочку $L(x_1, x_2) \subset \mathcal{L}$. Снова возможны две ситуации: либо $L(x_1, x_2) = \mathcal{L}$ либо $L(x_1, x_2)$ строго вложено в линейное пространство $\mathcal{L}$.

Шаг 2. Пусть мы построили линейно независимое семейство векторов $\{x_1, \dots, x_m\} \subset \mathcal{L}$. Тогда либо $L(x_1, \dots, x_m) = \mathcal{L}$ либо $L(x_1, \dots, x_m)$ строго вложено в $\mathcal{L}$. В последнем случае найдется такой вектор $x_{m+1} \in \in \mathcal{L}$, что $x_{m+1} \notin L(x_1, \dots, x_m)$. Тогда в силу леммы 25 семейство векторов $\{x_1, \dots, x_m, x_{m+1}\}$ линейно независимое в $\mathcal{L}$.

Шаг 3. Поскольку $\dim \mathcal{L} < +\infty$ мы за $n = \dim \mathcal{L}$ шагов построим n линейно независимых векторов $\{x_1, \dots, x_n\} \subset \mathcal{L}$ такое, что $L(x_1, \dots, x_n) = \mathcal{L}$, т.е. согласно определению линейной оболочки построим базис в $\mathcal{L}$.

Теорема доказана.

Лемма 27. *Пусть $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ — это два подпространства в линейном пространстве $\mathcal{L}$, причём $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}$. Тогда*:

1. $\dim \mathcal{Q} \leqslant \dim \mathcal{P}$;
2. *если* $\dim \mathcal{Q} = \dim \mathcal{P}$, *то* $\mathcal{Q} = \mathcal{P}$.

Доказательство. *Шаг 1.* Действительно, пусть $\{a_1, \dots, a_r\}$ — это базис в $\mathcal{P}$, а $\{b_1, \dots, b_s\}$ — это базис в $\mathcal{Q}$. Тогда в силу условия леммы имеем $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}$ и поэтому

$$b_1, \dots, b_s \in L(a_1, \dots, a_r).$$

В силу следствия 17 из теоремы 3 имеем $\dim \mathcal{Q} = s \leqslant r = \dim \mathcal{P}$.

Шаг 2. Действительно, пусть $b_1, \dots, b_s$ — это базис в $\mathcal{Q}$, т. е. $s = = \dim \mathcal{Q}$. Предположим, что $\mathcal{Q} \neq \mathcal{P}$. Тогда найдется такой элемент $c \in \in \mathcal{P}$, что $c \notin \mathcal{Q}$. Этот элемент нельзя представить через базис $b_1, \dots, b_s$. Следовательно, семейство

$$b_1, \dots, b_s, c$$

линейно независимое в $\mathcal{P}$. Таким образом, $\dim \mathcal{P} \geqslant s + 1$. Пришли к противоречию.

Лемма доказана.

Определение 17. *Пусть L_1 и L_2 — произвольные линейные подпространства линейного пространства $\mathcal{L}$. Совокупность*

$$L = \{a = a_1 + a_2 : \ a_1 \in L_1, \ a_2 \in L_2\}$$

называется суммой подпространств. Обозначение. $L_1 + L_2$.

Лемма 28. *Сумма $L = L_1 + L_2$ подпространств линейного пространства $\mathcal{L}$ является подпространством в $\mathcal{L}$.*

Доказательство. Пусть $a, b \in L = L_1 + L_2$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Тогда найдутся такие $a_1, b_1 \in L_1$ и $a_2, b_2 \in L_2$, что справедливы равенства:

$$a = a_1 + a_2, \quad b = b_1 + b_2,$$

$$\alpha \cdot a + \beta \cdot b = (\alpha \cdot a_1 + \beta \cdot b_1) + (\alpha \cdot a_2 + \beta \cdot b_2) \in L_1 + L_2,$$

поскольку $\alpha \cdot a_1 + \beta \cdot b_1 \in L_1$, $\alpha \cdot a_2 + \beta \cdot b_2 \in L_2$.

Лемма доказана.

Определение 18. *Совокупность $N = \{a : \ a \in L_1, \ a \in L_2\}$ называется пересечением подпространств L_1 и L_2.* Обозначение. $L_1 \cap L_2$.

Лемма 29. *$L_1 \cap L_2$ является подпространством в $\mathcal{L}$.*

Доказательство. Пусть $a, b \in L_1 \cap L_2$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Тогда $a, b \in L_1$ и $a, b \in L_2$ и поэтому

$$\alpha \cdot a + \beta \cdot b \in L_1, \quad \alpha \cdot a + \beta \cdot b \in L_2 \Rightarrow \alpha \cdot a + \beta \cdot b \in L_1 \cap L_2.$$

Лемма доказана.

Лемма 30. *Объединение $L_1 \cup L_2$ подпространств а в общем случае не является подпространством в линейном пространстве $\mathcal{L}$.*

Доказательство. Пусть $a \in L_1$, $a \notin L_2$ и $b \in L_2$, $b \notin L_1$. Тогда, вообще говоря, $a + b \notin L_1 \cup L_2$. Действительно, рассмотрим на плоскости две различные прямые, проходящие через начало некоторой прямоугольной декартовой системы координат. Тогда сумма двух любых ненулевых векторов таких, что один вектор лежит на одной прямой, а другой вектор лежит на другой прямой. Тогда их сумма не будет лежать на этих прямых.

Лемма доказана.

Теорема 7. *Справедливо следующее равенство*:

$$\dim(L_1 + L_2) = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim(L_1 \cap L_2). \tag{9.12}$$

Доказательство. Введем следующие обозначения:

$$\dim(L_1 \cap L_2) \equiv k, \quad \dim L_1 \equiv k + l_1, \quad \dim L_2 \equiv k + l_2.$$

В этих обозначениях нам нужно доказать, что

$$\dim(L_1 + L_2) = k + l_1 + l_2, \tag{9.13}$$

поскольку

$$\dim L_1 + \dim L_2 - \dim(L_1 \cap L_2) = k + l_1 + k + l_2 - k = k + l_1 + l_2.$$

Пусть $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k\}$ — базис в $L_1 \cap L_2$. Дополним этот базис до базисов подпространств L_1 и L_2 :

$$\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k, \mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_{l_1}\} - \text{базис в} \quad L_1, \tag{9.14}$$

$$\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k, \mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_{l_2}\} - \text{базис в} \quad L_2. \tag{9.15}$$

Докажем, что набор векторов

$$\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k, \mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_{l_1}, \mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_{l_2}\} \tag{9.16}$$

образуют базис в $L_1 + L_2$, откуда и будет следовать, что $\dim(L_1 + L_2) = k + l_1 + l_2$.

Полнота. Прежде всего заметим, что любой вектор $x \in L_1 + L_2$ можно представить в виде линейной комбинации семейства векторов (9.16), поскольку $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in L_1$, $x_2 \in L_2$ и в силу (9.14), (9.15) векторы x_1 и x_2 раскладываются по базисам (9.14), (9.15).

Линейная независимость. Пусть существует нетривиальный набор чисел

$$\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_1, \dots, \beta_{l_1}, \gamma_1, \dots, \gamma_{l_2} \in \mathbb{K},$$

такой, что

$$\alpha_1 \cdot \mathbf{e}_1 + \dots + \alpha_k \cdot \mathbf{e}_k + \beta_1 \cdot \mathbf{f}_1 + \dots + \beta_{l_1} \cdot \mathbf{f}_{l_1} + \gamma_1 \cdot \mathbf{g}_1 + \dots + \gamma_{l_2} \cdot \mathbf{g}_{l_2} = \vartheta. \tag{9.17}$$

Равенство (9.17) можно переписать в следующем виде:

$$a := \alpha_1 \cdot \mathbf{e}_1 + \dots + \alpha_k \cdot \mathbf{e}_k + \beta_1 \cdot \mathbf{f}_1 + \dots + \beta_{l_1} \cdot \mathbf{f}_{l_1} = \\ = -\gamma_1 \cdot \mathbf{g}_1 - \dots - \gamma_{l_2} \cdot \mathbf{g}_{l_2}. \tag{9.18}$$

Из (9.18) с учетом (9.14) и (9.15) вытекает, что $a \in L_1$ и $a \in L_2$, т.е. $a \in L_1 \cap L_2$. А поскольку $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k\}$ — базис в $L_1 \cap L_2$, то найдутся такие числа $\delta_1, \dots, \delta_k \in \mathbb{K}$, что справедливо равенство:

$$a = \delta_1 \cdot \mathbf{e}_1 + \dots + \delta_k \cdot \mathbf{e}_k. \tag{9.19}$$

Из равенств (9.18) и (9.19) вытекает, что

$$\delta_1 \cdot \mathbf{e}_1 + \dots + \delta_k \cdot \mathbf{e}_k = -\gamma_1 \cdot \mathbf{g}_1 - \dots - \gamma_{l_2} \cdot \mathbf{g}_{l_2}. \tag{9.20}$$

По построению (см. (9.15)) семейство векторов $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k, \mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_{l_2}$ является линейно независимым семейством в линейном пространстве L_2. Поэтому равенство (9.20) возможно тогда и только тогда, когда:

$$\delta_1 = \dots = \delta_k = \gamma_1 = \dots = \gamma_{l_2} = 0. \tag{9.21}$$

Из (9.17) и (9.21) вытекает равенство:

$$\alpha_1 \cdot \mathbf{e}_1 + \dots + \alpha_k \cdot \mathbf{e}_k + \beta_1 \cdot \mathbf{f}_1 + \dots + \beta_{l_1} \cdot \mathbf{f}_{l_1} = \vartheta. \tag{9.22}$$

В силу (9.14) семейство векторов $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k, \mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_{l_1}$ линейно независимо в L_1. Тогда равенство (9.22) возможно тогда и только тогда, когда:

$$\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = \beta_1 = \cdots = \beta_{l_1} = 0. \tag{9.23}$$

Из (9.21) и (9.23) вытекает, что равенство (9.17) возможно тогда и только тогда, когда:

$$\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = \beta_1 = \cdots = \beta_{l_1} = \gamma_1 = \cdots = \gamma_{l_2} = 0, \tag{9.24}$$

т.е. семейство векторов (9.16) линейно независимо. Стало быть, семейство (9.16) образует базис в $L_1 + L_2$. Поэтому справедливо (9.13).

Теорема доказана.

Замечание 4. Можно предложить несколько иной способ доказательства теоремы 7. С этой целью нужно воспользоваться алгоритмом построения базиса из теоремы 6.

□ Пусть $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k\}$ — базис в $L_1 \cap L_2$. Достроим его до базиса в L_1. Так что выполнено свойство (9.14). Тогда семейство векторов $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k, \mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_{l_1}\}$ линейно независимое. Теперь достроим базис $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k\}$ до базиса в L_2. Так что выполнено свойство (9.15). Заметим, что векторы $\mathbf{g}_1, \ldots, \mathbf{g}_{l_2}$ линейно независимые и при этом

$$\{\mathbf{g}_1, \ldots, \mathbf{g}_{l_2}\} \notin L_1.$$

Следовательно, согласно результату леммы 26 семейство векторов

$$\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k, \mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_{l_1}, \mathbf{g}_1, \ldots, \mathbf{g}_{l_2}\}$$

тоже линейно независимое. С учетом доказанной полноты этого семейства отсюда вытекает утверждение теоремы 7. ⊠

Определение 19. *Подпространства L_1 и L_2 называются дизъюнктными, если их пересечение состоит из нулевого вектора ϑ, т.е. если $L_1 \cap L_2 = \{\vartheta\}$.*

Определение 20. *Сумма $L = L_1 + L_2$ подпространств L_1 и L_2 называется прямой, если представление любого вектора $x \in L$ в виде $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in L_1$, $x_2 \in L_2$ единственно.* Обозначение. $L = L_1 \oplus L_2$.

Теорема 8. *Для того чтобы сумма подпространств L_1 и L_2 была прямой, необходимо и достаточно, чтобы $L_1 \cap L_2 = \{\vartheta\}$.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $L = L_1 \oplus L_2$ и $z_0 \in L_1 \cap L_2$. Для произвольного $x \in L$ справедливо следующее разложение:

$$x = x_1 + x_2, \quad x_1 \in L_1, \quad x_2 \in L_2. \tag{9.25}$$

Но тогда справедливо следующее разложение:

$$x = (x_1 + z_0) + (x_2 - z_0), \quad x_1 + z_0 \in L_1, \quad x_2 - z_0 \in L_2. \tag{9.26}$$

Поскольку разложение (9.25) должно быть единственным, то с учетом (9.26) получаем равенства:

$$x_1 = x_1 + z_0, \quad x_2 = x_2 - z_0 \Rightarrow z_0 = \vartheta. \tag{9.27}$$

Следовательно, $L_1 \cap L_2 = \{\vartheta\}$.

Достаточность. Пусть $L_1 \cap L_2 = \{\vartheta\}$. Предположим, что для $x \in \in L = L_1 + L_2$ справедливы следующие два разложения:

$$x = x_1 + x_2 = y_1 + y_2, \quad x_1, y_1 \in L_1, \quad x_2, y_2 \in L_2. \tag{9.28}$$

Но тогда:

$$x_1 - y_1 = y_2 - x_2 \in L_1 \cap L_2 = \{\vartheta\} \Rightarrow x_1 = y_1, \quad x_2 = y_2, \tag{9.29}$$

т.е. разложение любого $x \in L = L_1 + L_2$ единственно и поэтому $L = = L_1 \oplus L_2$.

Теорема доказана.

Теорема 9. *Для того чтобы линейное пространство $\mathcal{L}$ разлагалось в прямую сумму подпространств L_1 и L_2, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись два условия*: a) $\dim L_1 + \dim L_2 = \dim \mathcal{L}$, b) $L_1 \cap \cap L_2 = \{\vartheta\}$.

Доказательство. *Необходимость.* Если $\mathcal{L} = L_1 \oplus L_2$, то согласно результату теоремы 8 вытекает, что $L_1 \cap L_2 = \{\vartheta\}$ и $\mathcal{L} = L_1 + + L_2$. Поэтому с учетом теоремы 7 имеем $\dim \mathcal{L} = \dim L_1 + \dim L_2$.

Достаточность. Поскольку $L_1 \cap L_2 = \{\vartheta\}$, то нам достаточно доказать, что $\mathcal{L} = L_1 + L_2$. Очевидно, что $L_1 + L_2$ является подпространством в $\mathcal{L}$, причем в силу 7

$$\begin{aligned}\dim(L_1 + L_2) = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim(L_1 \cap L_2) = \\ = \dim L_1 + \dim L_2 = \dim \mathcal{L}.\end{aligned} \tag{9.30}$$

Поэтому в силу леммы 27 о монотонности размерности имеем $\mathcal{L} = L_1 + + L_2$. И, следовательно,

$$\mathcal{L} = L_1 \oplus L_2.$$

Теорема доказана.

Замечание. Отметим, что разложение в прямую сумму не однозначно определяется одним из линейных подпространств. В конце раздела *примеры решения задач* рассмотрена соответствующая задача.

§ 10. Изоморфизм линейных пространств

Определение 21. *Взаимно однозначное отображение*:

$$\varphi : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2,$$

линейных пространств $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ над одним и тем же полем $\mathbb{K}$ называется изоморфизмом, если для любых $x_1, x_2 \in \mathcal{L}_1$ и всех $\alpha^1, \alpha^2 \in \mathbb{K}$ справедливо равенство:

$$\varphi(\alpha^1 \cdot x_1 + \alpha^2 \cdot x_2) = \alpha^1 \cdot \varphi(x_1) + \alpha^2 \cdot \varphi(x_2).$$

Лемма 31. *Изоморфизм* $\varphi : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ *линейных пространств* $\mathcal{L}_1$ *и* $\mathcal{L}_2$ *над одним и тем же полем* $\mathbb{K}$ *удовлетворяет свойству*:

$$\varphi(\vartheta_1) = \vartheta_2,$$

где $\vartheta_1 \in \mathcal{L}_1$ *и* $\vartheta_2 \in \mathcal{L}_2$ *— соответствующие нулевые векторы.*

Доказательство. Справедлива следующая цепочка равенств:

$$\varphi(\vartheta_1) = \varphi(0 \cdot \vartheta_1) = 0 \cdot \varphi(\vartheta_1) = \vartheta_2.$$

Лемма доказана.

Теорема 10. *Все линейные пространства одной и той же размерности изоморфны между собой.*

Доказательство. *Шаг 1. Построение изоморфизма.* Сначала докажем, что любое линейное пространство $\mathcal{L}$ размерности $n = \dim \mathcal{L}$ изоморфно линейному пространству столбцов $\mathbb{K}^{n\times 1}$.

Пусть $\mathbf{E} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ — строчка, составленная из векторов некоторого базиса в $\mathcal{L}$. Для любого вектора $x \in \mathcal{L}$ справедливо разложение:

$$x = x^k \cdot \mathbf{e}_k. \tag{10.1}$$

В силу единственности разложения вектора по базису и того, что любой набор чисел $Y = (y^1, \ldots, y^n)^T$ по формуле:

$$y = y^k \cdot \mathbf{e}_k. \tag{10.2}$$

порождает некоторый вектор $y \in \mathcal{L}$, то определено взаимно однозначное отображение:

$$\varphi_{\mathbf{E}}(x) = X, \quad X = (x^1, \ldots, x^n)^T, \quad x = x^k \cdot \mathbf{e}_k, \tag{10.3}$$
$$\varphi_{\mathbf{E}} : \mathcal{L} \to \mathbb{K}^{n\times 1}.$$

□ Действительно, с однородной стороны, проверим однозначность отображения (10.3). Имеем:

$$x = x_1^k \cdot \mathbf{e}_k = x_2^k \cdot \mathbf{e}_k \Leftrightarrow (x_1^k - x_2^k) \cdot \mathbf{e}_k = \vartheta \Leftrightarrow x_1^k = x_2^k \quad k = \overline{1, n}.$$

С другой стороны, докажем однозначность обратного к (10.3) отображения. Имеем:

$$\varphi_{\mathbf{E}}(x_1) = \varphi_{\mathbf{E}}(x_2) = X \Leftrightarrow x_1 = x^k \cdot \mathbf{e}_k, \quad x_2 = x^k \cdot \mathbf{e}_k \Leftrightarrow x_1 = x_2. \quad \boxtimes$$

Теперь докажем, что отображение (10.3) линейное. Пусть:

$$x_1 = x_1^k \cdot \mathbf{e}_k, \quad x_2 = x_2^k \cdot \mathbf{e}_k, \quad x = x^k \cdot \mathbf{e}_k.$$

Тогда справедливы следующие равенства:

$$\varphi_{\mathbf{E}}(x_1 + x_2) = (x_1^1 + x_1^2, \ldots, x_1^n + x_2^n)^T =$$
$$= (x_1^1, \ldots, x_1^n)^T + (x_2^1, \ldots, x_2^n)^T = \varphi_{\mathbf{E}}(x_1) + \varphi_{\mathbf{E}}(x_2),$$
$$\varphi_{\mathbf{E}}(\alpha \cdot x) = (\alpha x^1, \ldots, \alpha x^n)^T = \alpha(x^1, \ldots, x^n)^T = \alpha\varphi_{\mathbf{E}}(x).$$

Итак, $\varphi_{\mathbf{E}}$ — изоморфизм.

Шаг 2. Изоморфность двух линейных пространств одной размерности. Итак, пусть у нас имеются два изоморфизма:

$$\varphi_{1\mathbf{E}_1} : \mathcal{L}_1 \to \mathbb{K}^{n\times 1}, \quad \varphi_{2\mathbf{E}_2} : \mathcal{L}_2 \to \mathbb{K}^{n\times 1}, \quad n = \dim \mathcal{L}_1 = \dim \mathcal{L}_2.$$

Тогда определено взаимно однозначное отображение:

$$\varphi^{-1}_{2\mathbf{E}_2} : \mathbb{K}^{1\times n} \to \mathcal{L}_2, \quad \varphi_{2\mathbf{E}_2}(x) = X \Leftrightarrow x = \varphi^{-1}_{2\mathbf{E}_2}(X),$$

$$\varphi^{-1}_{2\mathbf{E}_2}(X_1 + X_2) = \mathbf{E}_2 \cdot (X_1 + X_2) = \mathbf{E}_2 \cdot X_1 + \mathbf{E}_2 \cdot X_2 = x_1 + x_2 = \\ = \varphi^{-1}_{2\mathbf{E}_2}(X_1) + \varphi^{-1}_{2\mathbf{E}_2}(X_2),$$

$$\varphi^{-1}_{2\mathbf{E}_2}(\alpha X) = \mathbf{E}_2 \cdot (\alpha X) = \alpha \cdot \mathbf{E}_2 \cdot X = \alpha \cdot x = \alpha \cdot \varphi^{-1}_{2\mathbf{E}_2}(X).$$

Итак, $\varphi^{-1}_{2\mathbf{E}_2}$ тоже изоморфизм. Тогда имеем:

$$\varphi = \varphi^{-1}_{2\mathbf{E}_2} \circ \varphi_{1\mathbf{E}_1} : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2.$$

Предлагаем студентам доказать несложное утверждение о том, что композиция изоморфизмов является изоморфизмом. Тогда взаимно однозначное отображение φ является искомым изоморфизмом.

Теорема доказана.

Теорема 11. *Между двумя конечномерными линейными пространствами различных размерностей не существует изоморфизма.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{L}_n$ и $\mathcal{L}_m$ — это два линейных пространства размерностей $n = \dim \mathcal{L}_n$ и $m = \dim \mathcal{L}_m$, причем $m < n$ и существует тем не менее изоморфизм:

$$\varphi : \mathcal{L}_n \to \mathcal{L}_m.$$

Пусть $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — базис в $\mathcal{L}_n$, а $\{\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_m\}$ — базис в $\mathcal{L}_m$ и, кроме того, $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \subset \mathcal{L}_m$, где $\varphi_j = \varphi(\mathbf{e}_j)$. Таким образом, имеем:

$$\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \subset \mathcal{L}_m = L(\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_m).$$

Значит, семейство векторов $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ линейно зависимо в $\mathcal{L}_m$ в силу доказанной ранее теоремы 3 о системе двух векторов, поскольку $n > m$. Таким образом, существует следующая нетривиальная линейная комбинация, равная нулевому вектору:

$$c^k \cdot \varphi_k = \vartheta_2 \Leftrightarrow c^k \cdot \varphi(\mathbf{e}_k) = \varphi(\vartheta_1) \Rightarrow \varphi(c^k \cdot \mathbf{e}_k - \vartheta_1) = \vartheta_2 \Rightarrow \\ \Rightarrow c^k \cdot \mathbf{e}_k - \vartheta_1 = \varphi^{-1}(\vartheta_2) = \vartheta_1 \Rightarrow c^k \cdot \mathbf{e}_k = \vartheta_1,$$

что противоречит линейной независимости базиса $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\} \subset \mathcal{L}_n$. Здесь мы воспользовались результатом леммы 31, а также тем, что φ^{-1} изоморфизм, поскольку φ изоморфизм.

Теорема доказана.

§ 11. Примеры решения задач

Задача 1. *Линейное пространство.* Является ли линейным пространством множество $X = \{a + b\sqrt{2}\, :\, a, b \in \mathbb{Q}\}$ над полем $\mathbb{Q}$, если операции сложения и умножения на числа стандартные?

Решение. Легко видеть, что множество X замкнуто относительно операций сложения и относительно умножения на рациональное число. Поскольку это множество является подмножеством множества действительных чисел, а введенные на нем операции — стандартные, свойства ассоциативности, коммутативности и дистрибутивности выполнены автоматически. Тривиальным элементом по сложению является $0 + 0 \cdot \sqrt{2}$, а обратным к элементу $a + b\sqrt{2}$ является элемент $-a - b\sqrt{2}$. Следовательно, X — линейное пространство.

Задача 2. *Линейная зависимость.* Каким условиям должен удовлетворять скаляр x, чтобы столбцы

$$(0, x, -1)^T, \quad (x, 0, 1)^T, \quad (1, -1, x)^T \tag{11.1}$$

из $\mathbb{R}^3$ были линейно зависимы? Каким будет ответ на этот же вопрос при замене $\mathbb{R}^3$ на $\mathbb{Q}^3$?

Решение. Образуем следующую матрицу:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & x & -1 \\ x & 0 & 1 \\ 1 & -1 & x \end{pmatrix}. \tag{11.2}$$

Вычислим определитель этой матрицы:

$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & x & -1 \\ x & 0 & 1 \\ 1 & -1 & x \end{vmatrix} = x(2 - x^2). \tag{11.3}$$

Таким образом, столбцы (11.1) линейно зависимы тогда и только тогда, когда $x = 0$ или $x = \pm\sqrt{2}$.

В том случае если рассматривается линейное пространство $\mathbb{Q}^3$, то эти столбцы линейно зависимы тогда и только тогда, когда $x = 0$, поскольку числа $\pm\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Задача 3. *Базис и координаты.* Доказать, что многочлены:

$$1, \quad t - 1, \quad (t - 1)^2, \quad (t - 1)^3 \tag{11.4}$$

образуют базис в P^3 — вещественных многочленов степени не выше 3, и найти координаты многочлена:

$$p(t) = t^3 - 2t^2 + 5t - 1 \tag{11.5}$$

в этом базисе.

Решение. Шаг 1. Докажем, что (11.4) — базис в P^3. Сначала докажем, что многочлены (11.4) линейно независимы. Рассмотрим их линейную комбинацию:

$$a_0 + a_1(t-1) + a_2(t-1)^2 + a_3(t-1)^3 = 0 \quad \text{для всех} \quad t \in \mathbb{R}, \qquad (11.6)$$

в которой сделаем замену $s = t - 1$ и получим равенство:

$$a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + a_3 s^3 = 0 \quad \text{для всех} \quad s \in \mathbb{R}. \qquad (11.7)$$

Из равенства (11.7) при $s = 0$ получаем, что $a_0 = 0$. Теперь продифференцируем по s обе части равенства (11.7) и в точке $s = 0$ получим равенство $a_1 = 0$ и так далее. В итоге получим, что равенство (11.7), а с ним и равенство (11.6) возможно только при $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 0$, т.е. многочлены (11.4) *линейно независимы.*

Докажем теперь *полноту* семейства многочленов (11.4) в P^3. Действительно, для этого нужно воспользоваться формулой Тейлора в точке $t = 1$:

$$p(t) = p(1) + p'(1)(t-1) + \frac{p''(1)}{2}(t-1)^2 + \frac{p'''(1)}{6}(t-1)^3 \qquad (11.8)$$

для любого $p(t) \in P^3$, поскольку:

$$p^{(k)}(t) = 0 \quad \text{для всех} \quad k \geqslant 4.$$

Формула Тейлора (11.8) и есть разложение произвольного $p(t) \in P^3$ по линейно независимой системе многочленов (11.4). Таким образом, эта система полна и, значит, образует базис в P^3.

Шаг 2. Найдем теперь координаты многочлена (11.5) в базисе (11.4). Действительно, воспользуемся формулой (11.8). Справедливы равенства

$$p(1) = 3, \quad p'(1) = 4, \quad p''(1) = 2, \quad p'''(1) = 6. \qquad (11.9)$$

Из (11.8) и (11.9) получаем формулу

$$p(t) = 3 + 4(t-1) + (t-1)^2 + (t-1)^3. \qquad (11.10)$$

Значит, координаты многочлена (11.5) в базисе (11.4) следующие:

$$X = (3, 4, 1, 1)^T.$$

Задача 4. *Линейные подпространства.* В линейном пространстве P^n вещественных многочленов степени не выше $n \in \mathbb{N}$ задано подмножество $p(2) = 0$. Требуется доказать, что это множество является линейным подпространством и найти в нем базис.

Решение. Очевидно, что если:

$$p_1(2) = p_2(2) = 0, \quad p_1(t), p_2(t) \in P^n,$$

то и

$$\alpha p_1(2) + \beta p_2(2) = 0.$$

Таким образом, указанное множество является подпространством.

Пусть $p(t) \in P^n$ — фиксированный многочлен. Разложим его в ряд Тейлора в окрестности точки $t = 2$ и получим следующее равенство:

$$p(t) = p'(2)(t-2) + \frac{p''(2)}{2!}(t-2)^2 + \cdots + \frac{p^{(n)}(2)}{n!}(t-2)^n, \qquad (11.11)$$

поскольку $p(2) = 0$. Следовательно, полиномы:

$$t-2, \quad (t-2)^2, \cdots, (t-2)^n \qquad (11.12)$$

образуют полное семейство в рассматриваемом линейном подпространстве. Как и в предыдущем примере, несложно показать, что семейство полиномов (11.12) является линейно независимым. Поэтому семейство (11.12) образует базис в линейном подпространстве:

$$\{p(t) \in P^n : \, p(2) = 0\}.$$

Задача 5. *Линейная зависимость.* Пусть вектор x линейно выражается двумя различными способами через векторы $a_1, \ldots, a_m$. Доказать, что семейство векторов $\{a_1, \ldots, a_m\}$ линейно зависимо.

Решение. Итак, пусть:

$$x = \alpha^1 \cdot a_1 + \cdots + \alpha^m \cdot a_m = \beta^1 \cdot a_1 + \cdots + \beta^m \cdot a_m.$$

Отсюда имеем:

$$\left(\alpha^1 - \beta^1\right) \cdot a_1 + \cdots + (\alpha^m - \beta^m) \cdot a_m = \vartheta,$$

причем это нетривиальная линейная комбинация в силу условия задачи. Значит, семейство векторов $\{a_1, \ldots, a_m\}$ линейно зависимо.

Задача 6. *Линейная зависимость.* Пусть $\{a, b, c\}$ — линейно независимая система векторов. Будут ли линейно зависима система векторов:

$$a + b, \ b + c, \ c + a?$$

Решение. Рассмотрим линейную комбинацию этого семейства:

$$\alpha \cdot (a+b) + \beta \cdot (b+c) + \gamma \cdot (c+a) = \vartheta.$$

Отсюда имеем:

$$(\alpha + \gamma) \cdot a + (\alpha + \beta) \cdot b + (\beta + \gamma) \cdot c = \vartheta,$$

а поскольку семейство векторов $\{a, b, c\}$ линейно независимо приходим к равенствам:

$$\alpha + \gamma = \alpha + \beta = \beta + \gamma = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0.$$

Задача 7. *Экзаменационная задача.* Доказать, что в линейном вещественном пространстве $\mathbb{R}^{N \times N}$ (пространство всех матриц размера $N \times N$ с элементами из поля $\mathbb{R}$) подмножество, состоящее из симметричных матриц (т. е. матриц, удовлетворяющих условию $A^T = A$), является линейным подпространством. Найти размерность и указать какой–либо базис этого подпространства.

Решение. Шаг 1. Пусть $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{N\times N}$, $A_1^T = A_1$ и $A_2^T = A_2$. Тогда для любых $\alpha^1, \alpha^2 \in \mathbb{R}$ имеем:

$$(\alpha^1 A_1 + \alpha^2 A_2)^T = \alpha^1 A_1^T + \alpha^2 A_2^T = \alpha^1 A_1 + \alpha^2 A_2.$$

Шаг 2. Размерность всего пространства $\mathbb{R}^{N\times N}$ равна N^2. Если $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ и $A^T = A$, то имеем:

$$\{A\}_k^j = \{A\}_j^k \quad \text{при} \quad j,k = \overline{1,N},$$

т. е.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1N} & a_{2N} & \cdots & a_{NN} \end{pmatrix} =$$

$$= \sum_{j=1}^{N} a_{jj} E_{jj} + \sum_{j<k} a_{jk} \left(E_{jk} + E_{kj}\right), \quad (11.13)$$

где E_{jk} — матрица, состоящая из нулей за исключением j–ой строчки и k–го столбца, где располагается число 1. Докажем, что семейство матриц, состоящих из наборов $\{E_{jj}\}$ и $\{E_{jk} + E_{kj}\}$ (последнее семейство при $j < k$), образует базис в данном линейном подпространстве.

□ Действительно, пусть:

$$\sum_{j=1}^{N} b_{jj} E_{jj} + \sum_{j<k} b_{jk} \left(E_{jk} + E_{kj}\right) = O \in \mathbb{R}^{N\times N}.$$

Это равенство можно переписать в следующем виде:

$$\sum_{j,k=1,1}^{N,N} c_{jk} E_{jk} = O, \quad c_{kj} = c_{jk} = b_{jk}$$

Поскольку семейство матриц $\{E_{jk}\}$, очевидно, линейно независимо, то приходим к выводу о том, что $c_{jk} = 0$. Следовательно, все коэффициенты $b_{jk} = 0$. Значит, семейство линейно независимо. Полнота этого семейства следует из (11.13). ⊠

Тогда базис этого линейного подпространства симметричных матриц прежде всего состоит из следующих N матриц:

$$E_{11}, \cdots, E_{NN}. \quad (11.14)$$

В силу симметричности матриц следующие матрицы дополняют матрицы (11.14) до базиса во всем пространстве:

$$F_{jk} = E_{jk} + E_{kj} \quad \text{при} \quad j < k. \quad (11.15)$$

Вычислим число этих матриц. С этой целью заметим, что базис во всем пространстве $\mathbb{R}^N$ состоит из семейства матриц:

$$\{E_{jk}\}, \quad j,k = \overline{1,N}. \tag{11.16}$$

Этот базис можно записать как состоящий из матриц (11.14) и из матриц:

$$\{E_{jk}\} \quad \text{при} \quad j > k, \tag{11.17}$$

$$\{E_{jk}\} \quad \text{при} \quad j < k. \tag{11.18}$$

Число матриц (11.17) и (11.18) одинаково и равно M, которое можно вычислить:

$$2M + N = N^2 \Leftrightarrow M = \frac{N(N-1)}{2}. \tag{11.19}$$

Нетрудно понять, что число матриц (11.15) тоже равно M. Следовательно, базисных матриц (11.14) и (11.15) в линейном подпространстве симметричных матриц равно:

$$M + N = \frac{N(N-1)}{2} + N = \frac{N(N+1)}{2}. \tag{11.20}$$

Задача 8. *Экзаменационная задача.* Доказать, что в линейном вещественном пространстве $\mathbb{R}^{N\times N}$ (пространство всех матриц размера $N \times N$ с элементами из поля $\mathbb{R}$) подмножество, состоящее из антисимметричных матриц (т. е. матриц, удовлетворяющих условию $A^T = -A$), является линейным подпространством. Найти размерность и указать какой–либо базис этого подпространства.

Решение. Шаг 1. Пусть $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{N\times N}$, $A_1^T = -A_1$ и $A_2^T = -A_2$. Тогда для любых $\alpha^1, \alpha^2 \in \mathbb{R}$ имеем:

$$(\alpha^1 A_1 + \alpha^2 A_2)^T = \alpha^1 A_1^T + \alpha^2 A_2^T = -(\alpha^1 A_1 + \alpha^2 A_2).$$

Шаг 2. Поскольку для матриц этого линейного подпространства:

$$\{A\}_k^j = -\{A\}_j^k \quad \text{при} \quad j,k = \overline{1,N},$$

то

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots & -a_{1N} \\ a_{12} & 0 & \cdots & -a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1N} & a_{2N} & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \sum_{k<j} a_{jk} \left(E_{jk} - E_{kj}\right). \tag{11.21}$$

Поэтому базис этого линейного подпространства образуют матрицы вида:

$$D_{jk} = E_{jk} - E_{kj}, \quad k > j. \tag{11.22}$$

Докажем, что это семейство матриц образует базис в данном линейном подпространстве.

□ Действительно, пусть выполнено равенство:

$$\sum_{k>j} b_{jk} D_{jk} = O \in \mathbb{R}^{N\times N}.$$

Справедливы следующие равенства:

$$\sum_{k>j} b_{jk} E_{jk} - \sum_{k>j} b_{jk} E_{kj} = O,$$

$$\sum_{j\neq k} c_{jk} E_{jk} = O, \quad c_{jk} = \begin{cases} b_{jk}, & \text{если} \quad k > j; \\ -b_{jk}, & \text{если} \quad k < j. \end{cases}$$

Поскольку семейство матриц $\{E_{jk}\}$ линейно независимо, то линейно независимо и любое его под семейство. Следовательно, приходим к выводу о том, что $c_{jk} = 0$, т.е. $b_{jk} = 0$. Линейная независимость доказана. Полнота семейства $\{D_{jk}\}$ следует из равенства (11.21). ⊠

Можно заметить, что количество этих базисных матриц совпадает с числом матриц (11.15). Поэтому размерность линейного подпространства антисимметричных матриц равно:

$$\frac{N(N-1)}{2}. \tag{11.23}$$

З а д а ч а 9. *Экзаменационная задача.* Доказать, что в линейном вещественном пространстве $\mathbb{R}^{N\times N}$ (пространство всех матриц размера $N \times N$ с элементами из поля $\mathbb{R}$) подмножество, состоящее из матриц с нулевым следом (т.е. сумма диагональных элементов матрицы равна нулю), является линейным подпространством. Найти размерность и указать какой–либо базис этого подпространства.

Решение. Шаг 1. Пусть $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{N\times N}$ и $\operatorname{tr} A_1 = \operatorname{tr} A_2 = 0$. Тогда для любых $\alpha^1, \alpha^2 \in \mathbb{R}$ имеем:

$$\operatorname{tr}(\alpha^1 A_1 + \alpha^2 A_2) = \alpha^1 \operatorname{tr} A_1 + \alpha^2 \operatorname{tr} A_2 = 0.$$

Шаг 2. Пусть $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ и $\operatorname{tr} A = 0$, т. е.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{NN} \end{pmatrix}, \quad a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{NN} = 0. \tag{11.24}$$

Отсюда получаем равенство:

$$A = \sum_{j\neq k} a_{jk} E_{jk} + \sum_{j=1}^{N-1} a_{jj} E_{jj} + a_{NN} E_{NN} =$$

$$= \sum_{j\neq k} a_{jk} E_{jk} + \sum_{j=1}^{N-1} a_{jj} E_{jj} - \sum_{j=1}^{N-1} a_{jj} E_{NN} =$$

$$= \sum_{j \neq k} a_{jk} E_{jk} + \sum_{j=1}^{N-1} a_{jj}(E_{jj} - E_{NN}). \quad (11.25)$$

Докажем, что семейство матриц, состоящее из наборов $\{E_{jk}\}$ при $j \neq k \in \overline{1, N}$ и $\{E_{jj} - E_{NN}\}$ при $j = \overline{1, N}$ образуют базис в данном линейном подпространстве.

□ Действительно, рассмотрим равенство:

$$\sum_{j \neq k} b_{jk} E_{jk} + \sum_{j=1}^{N-1} b_{jj}(E_{jj} - E_{NN}) = O \in \mathbb{R}^{N \times N},$$

из которого получаем равенство:

$$\sum_{j \neq k} b_{jk} E_{jk} + \sum_{j=1}^{N-1} b_{jj} E_{jj} + b_0 E_{NN} = O, \quad b_0 = -\sum_{j=1}^{N} b_{jj}.$$

В силу линейной независимости семейства $\{E_{jk}\}$ приходим к выводу о том, что $b_{jk} = 0$. Следовательно, линейная независимость данного семейства матриц доказана. Полнота следует из равенства (11.25). ☒

Заметим, что число элементов базиса равно:

$$N^2 - N + (N - 1) = N^2 - 1.$$

Задача 10. *Экзаменационная задача.* Доказать, что линейное вещественное пространство $\mathbb{R}^{N \times N}$ (пространство всех матриц размера $N \times N$ с элементами из поля $\mathbb{R}$) представляет собою прямую сумму двух своих линейных подпространств: линейного подпространства симметричных матриц (т. е. матриц, удовлетворяющих условию $A^T = A$) и линейного подпространства антисимметричных матриц (т. е. матриц, удовлетворяющих условию $A^T = -A$).

Решение. Произвольную матрицу $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ можно единственным образом представить в виде суммы симметричной матрицы из $\mathbb{R}^{N \times N}$ и антисимметричной матрицы из $\mathbb{R}^{N \times N}$ следующим образом:

$$A = \frac{A + A^T}{2} + \frac{A - A^T}{2}.$$

Докажем единственность разложения.

□ Действительно, пусть имеют место два разложения:

$$A = A_1 + B_1 = A_2 + B_2, \quad A_1, A_2 \in \mathbb{R}_s^{N \times N}, \quad B_1, B_2 \in \mathbb{R}_{as}^{N \times N}.$$

Справедливы следующие равенства:

$$A_1 + B_1 = A_2 + B_2 \Leftrightarrow \mathbb{R}_s^{N \times N} \ni A_1 - A_2 = B_2 - B_1 \in \mathbb{R}_{as}^{N \times N},$$

$$(A_1 - A_2)^T = (B_2 - B_1)^T \Rightarrow A_1 - A_2 = B_1 - B_2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow A_1 - A_2 = O = B_1 - B_2 \Rightarrow A_1 = A_2, \quad B_1 = B_2. \quad ☒ \quad (11.26)$$

Поэтому прямая сумма линейного подпространства симметричных матриц $\mathbb{R}_s^{N\times N}$ и линейного подпространства антисимметричных матриц $\mathbb{R}_{as}^{N\times N}$ образует все линейное пространство $\mathbb{R}^{N\times N}$:

$$\mathbb{R}_s^{N\times N} \oplus \mathbb{R}_{as}^{N\times N} = \mathbb{R}^{N\times N}.$$

Поэтому:

$$\dim \mathbb{R}_s^{N\times N} + \dim \mathbb{R}_{as}^{N\times N} = \dim \mathbb{R}^{N\times N}.$$

Проверяем:

$$\frac{N(N+1)}{2} + \frac{N(N-1)}{2} = N^2.$$

Задача 11. *Экзаменационная задача.* Доказать, что линейное вещественное пространство $\mathbb{R}^{N\times N}$ (пространство всех матриц размера $N\times N$ с элементами из поля $\mathbb{R}$) представляет собою прямую сумму двух своих линейных подпространств: линейного подпространство матриц с нулевым следом и линейного подпространства матриц λI_N, где $\lambda \in \mathbb{R}$, $I_N \in \mathbb{R}^{N\times N}$ — единичная матрица.

Решение. Шаг 1. Существование. Прежде всего докажем существование указанного разложения. Действительно, пусть $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$:

$$A - \lambda I_N = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{NN} \end{pmatrix} - \lambda I_N =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{NN}-\lambda \end{pmatrix} := A_0, \quad (11.27)$$

где число $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\lambda = \frac{a_{11} + \cdots + a_{NN}}{N}. \quad (11.28)$$

Тогда матрица A_0 в правой части равенства (11.27) имеет нулевой след. Тогда из (11.27) имеем:

$$A = A_0 + \lambda I_N, \quad \operatorname{tr} A_0 = 0. \quad (11.29)$$

Шаг 2. Единственность. Пусть разложений два:

$$A = A_{01} + \lambda_1 I_N = A_{02} + \lambda_2 I_N, \quad \operatorname{tr} A_{01} = \operatorname{tr} A_{02} = 0. \quad (11.30)$$

В силу линейности операции взятия следам матрицы имеем:

$$\operatorname{tr} A = \lambda_1 N = \lambda_2 N \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 \Rightarrow A_{01} = A_{02}.$$

Таким образом, разложение (11.29) единственное.

Задача 12. *Экзаменационная задача.* Доказать, что линейное вещественное пространство $\mathbb{R}^N$ представляет собой прямую сумму своих линейных подпространств: линейного подпространства столбцов, сумма элементов которого равна нулю, и линейного подпространства столбцов вида $\lambda \cdot (1, ..., 1)^T$, где $\lambda \in \mathbb{R}$.

Решение. Шаг 1. Существование. Пусть $A \in \mathbb{R}^N$:

$$A - \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - \lambda \\ \vdots \\ a_N - \lambda \end{pmatrix} := A_0, \qquad (11.31)$$

где

$$\lambda = \frac{a_1 + \cdots + a_N}{N}.$$

Таким образом, приходим к разложению:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_N \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_1 + \cdots + b_N = 0. \qquad (11.32)$$

Шаг 2. Единственность. Пусть разложений два:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_N \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_N \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad (11.33)$$

где $b_1 + \cdots + b_N = c_1 + \cdots + c_N = 0$. Из (11.33) получаем равенства:

$$a_1 + \cdots + a_N = \lambda_1 N = \lambda_2 N \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 \Rightarrow (b_1, \ldots, b_N) = (c_1, \ldots, c_N),$$

т.е. разложение (11.32) единственно.

З а д а ч а 13. *Экзаменационная задача.* Показать, что множество $\mathbb{C}^N$ является линейным пространством как над полем вещественных чисел $\mathbb{C}^N(\mathbb{R})$, так и над полем комплексных чисел $\mathbb{C}^N(\mathbb{C})$. Найти размерности этих линейных пространств и указать какие–либо базисы.

Решение. Шаг 1. Нетрудно проверить, что $\mathbb{C}^N(\mathbb{R})$ и $\mathbb{C}^N(\mathbb{C})$ действительно линейные пространства.

Шаг 2. Базис в $\mathbb{C}^N(\mathbb{C})$. Пусть $A \in \mathbb{C}^N(\mathbb{C})$. Тогда имеем:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix} = a_1\mathbf{e}_1 + \cdots + a_N\mathbf{e}_N, \quad \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \mathbf{e}_N = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

причем семейства столбцов $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_N\}$, очевидно, линейно независимо. Значит, $\dim \mathbb{C}^N(\mathbb{C}) = N$.

Шаг 2. Базис в $\mathbb{C}^N(\mathbb{R})$. Пусть $A \in \mathbb{C}^N(\mathbb{C})$. Тогда имеем:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} a_1 \\ \vdots \\ \operatorname{Re} a_N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i \operatorname{Im} a_1 \\ \vdots \\ i \operatorname{Im} a_N \end{pmatrix} =$$
$$= \operatorname{Re} a_1 \cdot \mathbf{e}_1 + \cdots + \operatorname{Re} a_N \cdot \mathbf{e}_N +$$
$$+ \operatorname{Im} a_1 \cdot \mathbf{f}_1 + \cdots + \operatorname{Im} a_N \cdot \mathbf{f}_N, \quad (11.34)$$

где

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \mathbf{e}_N = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_1 = \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \mathbf{f}_N = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ i \end{pmatrix}.$$

Значит, $\dim \mathbb{C}(\mathbb{R}) = 2N$.

Задача 14. *Экзаменационная задача.* Рассматривается линейное вещественное пространство $P_{2N}(\mathbb{R})$ (пространство всех полиномов на вещественной оси степени не выше $2N$). Является ли линейным подпространством линейного пространства $P_{2N}(\mathbb{R})$ множество всех полиномов F, удовлетворяющих условиям: $F(-1) = F(1) = 0$? В случае положительного ответа найти размерность и указать какой–либо базис этого пространства.

Решение. Шаг 1. Нетрудно доказать, что указанное множество полиномов образует линейное подпространство линейного пространства $P_{2N}(\mathbb{R})$.

Шаг 2. Пусть $F(t) \in P_{2N}(\mathbb{R})$ и $F(-1) = F(1) = 0$. Тогда имеем:

$$F(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_{2N-1} t^{2N-1} + a_{2N} t^{2N}, \quad (11.35)$$

$$F(1) = 0 \Rightarrow a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{2N-1} + a_{2N} = 0, \quad (11.36)$$

$$F(-1) = 0 \Rightarrow a_0 - a_1 + a_2 + \cdots - a_{2N-1} + a_{2N} = 0. \quad (11.37)$$

Из равенств (11.36) и (11.37) получаем следующие равенства:

$$a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{2N} = 0 \Rightarrow a_0 = -a_2 - a_4 - \cdots - a_{2N}, \quad (11.38)$$

$$a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{2N-1} = 0 \Rightarrow a_1 = -a_3 - a_5 - \cdots - a_{2N-1}. \quad (11.39)$$

Подставляя (11.38) и (11.39) в (11.35) получим выражение:

$$F(t) = a_2(t^2 - 1) + a_3(t^3 - t) + \cdot + a_{2N-1}(t^{2N-1} - t) + a_{2N}(t^{2N} - 1). \quad (11.40)$$

Нетрудно проверить, что семейство полиномов:

$$t^2 - 1,\ t^3 - t,\ t^4 - 1,\ t^5 - t,\ \ldots, t^{2N-1} - t,\ t^{2N} - 1$$

образует базис указанного линейного подпространства и его размерность равна: $2N - 2$.

Задача 15. *Вычислительная задача.* Для каждого $p \in \mathbb{R}$ выполнить задания: найти базис линейной оболочки симметричных матриц:

$$X_{1,p} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \; X_{2,p} = \begin{pmatrix} 2p & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \; X_{3,p} = \begin{pmatrix} -p & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \tag{11.41}$$

и найти размерность линейной оболочки $L(X_{1,p}, X_{2,p}, X_{3,p})$; разложить элементы $X_{1,p}$, $X_{2,p}$, $X_{3,p}$ по найденному базису.

Решение. Введем базис в линейном пространстве $\mathbb{R}^{2\times 2}_s$ вещественных симметричных матриц размера 2×2:

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{11.42}$$

Тогда справедливы разложения матриц (11.41) по базису (11.42):

$$X_{1,p} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 1 \cdot E_1 + 1 \cdot E_2 + (-1) \cdot E_3 = E \cdot Y_1, \tag{11.43}$$

$$X_{2,p} = \begin{pmatrix} 2p & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = 1 \cdot E_1 + 2p \cdot E_2 + 3 \cdot E_3 = E \cdot Y_2, \tag{11.44}$$

$$X_{3,p} = \begin{pmatrix} -p & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot E_1 + (-p) \cdot E_2 + 2 \cdot E_3 = E \cdot Y_3, \tag{11.45}$$

где $E = (E_1, E_2, E_3)$ и

$$Y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad Y_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2p \\ 3 \end{pmatrix}, \quad Y_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -p \\ 2 \end{pmatrix}. \tag{11.46}$$

Образуем следующую матрицу:

$$A = \begin{Vmatrix} Y_1^T \\ Y_2^T \\ Y_3^T \end{Vmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2p & 3 \\ 2 & -p & 2 \end{pmatrix}. \tag{11.47}$$

Прежде всего заметим, что $\operatorname{rang} A \geqslant 2$, поскольку первые две строчки матрицы A линейно независимы. Вычислим определитель матрицы A :

$$\det A = 12p + 4. \tag{11.48}$$

Значит, при $p = -1/3$ имеем $\operatorname{rang} A = 2$, а при $p \neq -1/3$ имеем $\operatorname{rang} A = 3$.

Случай 1. Итак, в случае $p \neq -1/3$ базис линейной оболочки $L(X_{1,p}, X_{2,p}, X_{3p})$ образуют матрицы $\{X_{1,p}, X_{2,p}, X_{3,p}\}$ и разложение матриц $X_{1,p}, X_{2,p}, X_{3,p}$ по этому базису очевидным образом выписываются. Очевидно, что $\dim L(X_{1,p}, X_{2,p}, X_{3,p}) = 3$.

Случай 2. Пусть $p = -1/3$. Тогда матрица A примет следующий вид:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2/3 & 3 \\ 2 & 1/3 & 2 \end{pmatrix}. \tag{11.49}$$

Ясно, что третья строчка есть сумма первых двух. Поэтому:

$$Y_3 = Y_1 + Y_2 \Rightarrow X_{3,p} = E \cdot Y_3 = E \cdot (Y_1 + Y_2) = X_{1,p} + X_{2,p}.$$

Итак, в случае $p = -1/3$ базис линейной оболочки $L(X_{1,p}, X_{2,p}, X_{3,p})$ образуют, например, матрицы $X_{1,p}$ и $X_{2,p}$, $\dim L(X_{1,p}, X_{2,p}, X_{3,p}) = 2$ и справедливо разложение по базису:

$$X_{3,p} = 1 \cdot X_{1,p} + 1 \cdot X_{2,p}.$$

Задача 16. *Объединение подпространств.* Пусть $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ — два линейных подпространства в $\mathcal{L}$, причем $\mathcal{L} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$, тогда либо $\mathcal{P}_1 = \mathcal{L}$ либо $\mathcal{P}_2 = \mathcal{L}$.

Решение. Пусть $\mathcal{P}_1 \neq \mathcal{L}$ и $\mathcal{P}_2 \neq \mathcal{L}$. Тогда найдутся такие $x_1, x_2 \in \mathcal{L}$, что $x_1 \in \mathcal{P}_1$, $x_2 \in \mathcal{P}_2$, но $x_1 \notin \mathcal{P}_2$, $x_2 \notin \mathcal{P}_1$, причем $x_1 + x_2 \in \mathcal{L}$. Возможны два случая:

Случай 1. $x_1 + x_2 \in \mathcal{P}_1$ и тогда $x_2 \in \mathcal{P}_1$;

Случай 2. $x_1 + x_2 \in \mathcal{P}_2$ и тогда $x_1 \in \mathcal{P}_2$.

В обоих случаях приходим к противоречию.

Задача 17. *Объединение подпространств.* Пусть $\{\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_m\}$ — семейство линейных подпространств линейного пространства $\mathcal{L}$, причем

$$\mathcal{L} = \bigcup_{j=1}^{m} \mathcal{P}_j. \tag{11.50}$$

Тогда $\mathcal{L} = \mathcal{P}_k$ по крайней мере для какого-то $k \in \overline{1,m}$.

Решение. Пусть выполнено равенство (11.50) и при этом $\mathcal{P}_j \neq \mathcal{L}$ для всех $j = \overline{1,m}$. Возможны два случая:

$$\text{либо} \quad \bigcup_{j=2}^{m} \mathcal{P}_j \neq \mathcal{L} \quad \text{либо} \quad \bigcup_{j=2}^{m} \mathcal{P}_j = \mathcal{L}.$$

Рассмотрим первый случай. Тогда выполнено неравенство:

$$L\left(\bigcup_{j=2}^{m} \mathcal{P}_j\right) \neq \mathcal{L}. \tag{11.51}$$

$\square$ Действительно, если выполнено равенство

$$L\left(\bigcup_{j=2}^{m} \mathcal{P}_j\right) = \mathcal{L}, \tag{11.52}$$

то это означает, что существует базис $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ линейного пространства $\mathcal{L}$, который содержится в $\bigcup\limits_{j=2}^{m} \mathcal{P}_j$. Однако, существует вектор $\mathbf{a} \in \mathcal{P}_1$, $\mathbf{a} \neq \vartheta$ и при этом $\mathbf{a} \notin \bigcup\limits_{j=2}^{m} \mathcal{P}_j$. Поэтому семейство векторов

$\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n, \mathbf{a}\}$ линейно независимо в $\mathcal{L}$. Противоречие. Итак, выполнено неравенство (11.51). $\boxtimes$

Таким образом, имеем:

$$\mathcal{L} = \mathcal{P}_1 \cup L\left(\bigcup_{j=2}^{m} \mathcal{P}_j\right), \quad \mathcal{P}_1 \neq \mathcal{L}, \quad L\left(\bigcup_{j=2}^{m} \mathcal{P}_j\right) \neq \mathcal{L}. \tag{11.53}$$

Осталось воспользоваться рассуждениями при решении предыдущей задачи и прийти к противоречию. Значит, первый случай не возможен. Поэтому

$$\mathcal{L} = \bigcup_{j=2}^{m} \mathcal{P}_j. \tag{11.54}$$

Осталось повторить рассуждения и последовательно получить равенства:

$$\mathcal{L} = \bigcup_{j=3}^{m} \mathcal{P}_j, \quad \mathcal{L} = \bigcup_{j=4}^{m} \mathcal{P}_j, \quad \cdots, \quad \mathcal{L} = \mathcal{P}_m, \tag{11.55}$$

т.е. в конечном итоге получить, что $\mathcal{L} = \mathcal{P}_m$. Противоречие. Значит, по крайней мере одно из линейных подпространств $\mathcal{P}_j = \mathcal{L}$.

З а д а ч а 18. *Прямая сумма подпространств.* Пусть $\mathbb{R}^{n\times n}_{as}$, $\mathbb{R}^{n\times n}_{s}$ и $\mathbb{R}^{n\times n}_{vtr}$ — линейные подпространства в $\mathbb{R}^{n\times n}$ кососимметрических, симметрических и верхнетреугольных матриц. Доказать, что справедливы следующие разложения в прямую сумму:

$$\mathbb{R}^{n\times n} = \mathbb{R}^{n\times n}_{s} \oplus \mathbb{R}^{n\times n}_{as}, \tag{11.56}$$

$$\mathbb{R}^{n\times n} = \mathbb{R}^{n\times n}_{vtr} \oplus \mathbb{R}^{n\times n}_{as}. \tag{11.57}$$

З а м е ч а н и е. Как мы видим разложение в прямую сумму не однозначно определяется одним из линейных подпространств. В данном случае — подпространством антисимметричных матриц $\mathbb{R}^{n\times n}_{as}$.

Решение. Равенство (11.56) доказано выше (смотри задачу !!!). Докажем равенство (11.57). Пусть $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$:

$$A = \begin{pmatrix} a^1_1 & a^1_2 & a^1_3 & \cdots & a^1_n \\ a^2_1 & a^2_2 & a^2_3 & \cdots & a^2_n \\ a^3_1 & a^3_2 & a^3_3 & \cdots & a^3_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^n_1 & a^n_2 & a^n_3 & \cdots & a^n_n \end{pmatrix}. \tag{11.58}$$

Рассмотрим матрицу:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1^3 & a_2^3 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & a_3^n & \cdots & 0 \end{pmatrix}. \tag{11.59}$$

Тогда матрица $B' := A_1 - A_1^T$ — кососимметрическая и у этой матрицы ниже главной диагонали расположены те же элементы, что и у матрицы A. Тогда матрица $C' = A - B'$ — верхнетреугольная матрица. Следовательно, справедливо равенство:

$$A = C' + B'. \tag{11.60}$$

Это разложение единственно, поскольку одновременно кососимметрической и верхнетреугольной матрицей может быть только нулевая.

Лекция 2

ВЗАИМНЫЙ БАЗИС СВОБОДНЫХ ВЕКТОРОВ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЯ

§ 1. Определение взаимного базиса

Пусть $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ — тройка некомпланарных *свободных векторов* в пространстве. Для векторов в пространстве мы будем использовать обозначение $\mathbb{V}_3$. Мы надеемся, что читатель знаком с понятиями скалярного произведения векторов, векторного произведения векторов и, наконец, смешанного произведения векторов, для которых используются следующие соответствующие обозначения:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}), \quad [\mathbf{a}, \mathbf{b}] \quad \text{и} \quad (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \quad \text{для произвольных} \quad \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{V}_3.$$

В стандартном курсе «Аналитическая геометрия» доказывается, что векторы семейства $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ образуют базис в $\mathbb{V}_3$, т.е. для произвольного вектора $\mathbf{x} \in \mathbb{V}_3$ найдутся единственные числа $x^1, x^2, x^3 \in \mathbb{R}$, что будет справедливо равенство:

$$\mathbf{x} = x^1\mathbf{e}_1 + x^2\mathbf{e}_2 + x^3\mathbf{e}_3 \tag{1.1}$$

или в обозначениях Эйнштейна:

$$\mathbf{x} = x^j\mathbf{e}_j. \tag{1.2}$$

Дадим определение взаимного базиса:

Определение 1. *Взаимным базисом* [1] *к базису* $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\} \subset \mathbb{V}_3$ *называется семейство векторов* $\{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3\} \subset \mathbb{V}_3$, *определяемые следующим образом:*

$$\left(\mathbf{e}^j, x\right) = x^j, \quad j = 1, 2, 3, \tag{1.3}$$

где x^j *—* j*–ая координата в разложении* (1.1) *вектора* $\mathbf{x} \in \mathbb{V}_3$ *по базису* $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\} \subset \mathbb{V}_3$.

Замечание 1. Справедливы следующие свойства взаимного базиса:

$$\{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3\} \subset \mathbb{V}_3$$

[1] Слово базис используется потому, что ниже мы докажем, что это семейство действительно образует базис в $\mathbb{V}_3$.

к базису $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\} \subset \mathbb{V}_3$, которые мы собрали в виде следующей леммы:

Лемма 1. *Для любых* $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{V}_3$ *и* $\alpha^1, \alpha^2 \in \mathbb{R}$ *справедливы равенства*:

$$\left(\mathbf{e}^j, \alpha^1 \mathbf{x}_1 + \alpha^2 \mathbf{x}_2\right) = \alpha^1 \left(\mathbf{e}^j, \mathbf{x}_1\right) + \alpha^2 \left(\mathbf{e}^j, \mathbf{x}_2\right), \quad j = 1, 2, 3; \tag{1.4}$$

$$\left(\mathbf{e}^j, \mathbf{e}_k\right) = \delta^j_k, \tag{1.5}$$

где

$$\delta^j_k = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad j = k; \\ 0, & \text{если} \quad j \neq k. \end{cases}$$

Доказательство. Первое равенство — есть свойство линейности скалярного произведения по второму аргументу при фиксированном первом. Второе равенство — прямое следствие определения взаимного базиса.

Лемма доказана.

Лемма 2. *Взаимный базис* $\{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3\} \subset \mathbb{V}_3$ *определяется единственным образом по базису* $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\} \subset \mathbb{V}_3$.

Доказательство. Пусть существует еще один взаимный базис $\{\mathbf{f}^1, \mathbf{f}^2, \mathbf{f}^3\} \subset \mathbb{V}_3$. Тогда справедливы равенства:

$$\left(\mathbf{e}^j, \mathbf{x}\right) = x^j = \left(\mathbf{f}^j, \mathbf{x}\right), \tag{1.6}$$

из которых в силу свойства линейности скалярного произведения по первому аргументу при фиксированном втором аргументе:

$$\left(\mathbf{e}^j - \mathbf{f}^j, \mathbf{x}\right) = 0, \tag{1.7}$$

причем это равенство выполнено для всех векторов $\mathbf{x} \in \mathbb{V}_3$. В частности, возьмем:

$$\mathbf{x} = \mathbf{e}^j - \mathbf{f}^j. \tag{1.8}$$

Из (1.7) и (1.8) вытекает равенство:

$$0 = \left(\mathbf{e}^j - \mathbf{f}^j, \mathbf{e}^j - \mathbf{f}^j\right) = \left|\mathbf{e}^j - \mathbf{f}^j\right|^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \mathbf{e}^j - \mathbf{f}^j = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{f}^j = \mathbf{e}^j \quad \text{для всех} \quad j = 1, 2, 3. \tag{1.9}$$

Лемма доказана.

Теорема 1. *Взаимный базис* $\{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3\} \subset \mathbb{V}_3$ *к базису* $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\} \subset \subset \mathbb{V}_3$ *имеет такой и только такой вид:*

$$\mathbf{e}^1 = \frac{[\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]}{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)}, \quad \mathbf{e}^2 = \frac{[\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1]}{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)}, \quad \mathbf{e}^3 = \frac{[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2]}{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)}. \tag{1.10}$$

Доказательство. Согласно определению взаимного базиса:

$$\{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3\} \subset \mathbb{V}_3$$

к базису $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\} \subset \mathbb{V}_3$ справедливы следующие равенства:

$$\left(\mathbf{e}^1, \mathbf{e}_1\right) = 1, \quad \left(\mathbf{e}^1, \mathbf{e}_2\right) = 0, \quad \left(\mathbf{e}^1, \mathbf{e}_3\right) = 0, \tag{1.11}$$

$$\left(\mathbf{e}^2, \mathbf{e}_1\right) = 0, \quad \left(\mathbf{e}^2, \mathbf{e}_2\right) = 1, \quad \left(\mathbf{e}^2, \mathbf{e}_3\right) = 0, \tag{1.12}$$

$$\left(\mathbf{e}^3, \mathbf{e}_1\right) = 0, \quad \left(\mathbf{e}^3, \mathbf{e}_2\right) = 0, \quad \left(\mathbf{e}^3, \mathbf{e}_3\right) = 1. \tag{1.13}$$

Согласно свойству векторного произведения векторов из $\mathbb{V}_3$ в силу двух последних равенств из (1.11) будем искать вектор $\mathbf{e}^1$ в следующем виде:

$$\mathbf{e}^1 = a_1[\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]. \tag{1.14}$$

Тогда два последних равенства из (1.11) выполнены. А из первого равенства получаем:

$$1 = \left(\mathbf{e}^1, \mathbf{e}_1\right) = a_1([\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3], \mathbf{e}_1) = \\ = a_1(\mathbf{e}_1, [\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]) = a_1(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \Rightarrow a_1 = \frac{1}{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)}, \tag{1.15}$$

поскольку семейство векторов $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ линейно независимо и поэтому их смешанное произведение $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \neq 0$.

Таким образом, имеем:

$$\mathbf{e}^1 = \frac{[\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]}{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)}. \tag{1.16}$$

Аналогичным образом доказываются оставшиеся два равенства из (1.10). Осталось воспользоваться результатом леммы 2.

Теорема доказана.

Теорема 2. *Взаимный базис* $\{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3\} \subset \mathbb{V}_3$ *к базису* $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\} \subset \subset \mathbb{V}_3$ *образует базис в* $\mathbb{V}_3$.

Доказательство. В курсе «Аналитическая геометрия» было доказано, что тройка некомпланарных (линейно независимых) векторов в $\mathbb{V}_3$ образуют базис в $\mathbb{V}_3$. Поэтому нам достаточно доказать, что семейство векторов $\{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3\} \subset \mathbb{V}_3$, определенных равенствами (1.10), являются не компланарными, т.е. являются линейно независимыми.

Действительно, рассмотрим линейную комбинацию:

$$\beta_1\mathbf{e}^1 + \beta_2\mathbf{e}^2 + \beta_3\mathbf{e}^3 = \mathbf{0}, \tag{1.17}$$

в которой $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{R}^3$. Умножим скалярно обе части равенства (1.17) на $\mathbf{e}_1$ и с учетом равенства (1.5) получим равенство $\beta^1 = 0$. Теперь умножим обе части равенства (1.5) умножим скалярно на $\mathbf{e}_2$ и получим $\beta_2 = 0$, а умножая скалярно (1.17) на $\mathbf{e}_3$ получим $\beta_3 = 0$.

Теорема доказана.

Л е м м а 3. *Если базис* $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\} \subset \mathbb{V}_3$ *является ортонормированным, т. е.*

$$(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k) = \delta_{jk}, \quad \delta_{jk} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad j = k; \\ 0, & \text{если} \quad j \neq k, \end{cases} \tag{1.18}$$

то взаимный базис имеет следующий вид:

$$\mathbf{e}^j = \mathbf{e}_j, \quad j = 1, 2, 3. \tag{1.19}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть в обозначениях Эйнштейна имеем:

$$\mathbf{x} = x^j \mathbf{e}_j,$$

тогда имеем:

$$\left(\mathbf{e}^j, \mathbf{x}\right) = x^j = (\mathbf{e}_j, \mathbf{x}) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left(\mathbf{e}^j - \mathbf{e}_j, \mathbf{x}\right) = 0 \quad \text{для всех} \quad \mathbf{x} \in \mathbb{V}_3. \tag{1.20}$$

Отсюда получаем, что $\mathbf{e}^j = \mathbf{e}_j$ для всех $j = 1, 2, 3$. Осталось воспользоваться результатом леммы 2.

Л е м м а д о к а з а н а.

З а м е ч а н и е 2. Заметим, что взаимный базис:

$$\{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3\} \subset \mathbb{V}_3$$

к базису $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\} \subset \mathbb{V}_3$ принадлежат одному и тому же пространству свободных векторов $\mathbb{V}_3$. Ниже мы введем понятие *ковекторного взаимного базиса*, который нельзя путать с рассматриваемым в данной главе взаимным базисом. Приведем пример.

П р и м е р 1. Оказывается, ковекторным взаимным базисом к базису:

$$1, t, \frac{t^2}{2!}, \dots, \frac{t^n}{n!}$$

в пространстве полиномов степени не выше $n \in \mathbb{N}$ будет семейство ковекторов $\{D_t^0, D_t^1, \dots, D_t^n\}$, которые действуют на полином:

$$p_n(t) = a_0 + a_1 t + a_2 \frac{t^2}{2!} + \dots + a_n \frac{t^n}{n!}$$

следующим образом:

$$D_t^j p_n(t) = p_n^{(j)}(0) = a_j,$$

где символом $p_n^{(j)}(0)$ мы обозначили производную j–го порядка от полинома $p_n(t)$, вычисленную в точке $t = 0$.

Л е м м а 4. *Если* $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ — *базис в* $\mathbb{V}_3$, *а* $\{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3\}$ — *взаимный базис в* $\mathbb{V}_3$, *то справедливы следующие равенства:*

$$\left[\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2\right] = \frac{\mathbf{e}_3}{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)}, \tag{1.21}$$

$$\left[\mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3\right] = \frac{\mathbf{e}_1}{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)}, \tag{1.22}$$

$$\left[\mathbf{e}^3, \mathbf{e}^1\right] = \frac{\mathbf{e}_2}{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)}. \tag{1.23}$$

Доказательство. Докажем только равенство (1.21). Равенства (1.22) и (1.23) доказываются аналогично. С этой целью введем обозначение

$$\mathbf{x} = [\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]. \tag{1.24}$$

Тогда справедлива следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned}
[[\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3], [\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1]] = [\mathbf{x}, [\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1]] = \mathbf{e}_3(\mathbf{x}, \mathbf{e}_1) - \mathbf{e}_1(\mathbf{x}, \mathbf{e}_3) = \\
= \mathbf{e}_3(\mathbf{e}_1, \mathbf{x}) - \mathbf{e}_1(\mathbf{x}, \mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_3(\mathbf{e}_1, [\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]) - \\
- \mathbf{e}_1([\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3], \mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_3(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3).
\end{aligned} \tag{1.25}$$

С учетом итогового равенства (1.25) приходим к следующей цепочке равенств:

$$\left[\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2\right] = \frac{[[\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3], [\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1]]}{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)^2} = \frac{\mathbf{e}_3}{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)}. \tag{1.26}$$

Лемма доказана.

§ 2. Применения взаимного базиса

В этом разделе мы рассмотрим ряд приложений взаимного базиса.

Пример 2. Рассмотрим в аффинном пространстве $\mathbb{R}^3$ в некотором репере $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ плоскость, заданную своим общим уравнением:

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad A^2 + B^2 + C^2 > 0. \tag{2.1}$$

Предлагается найти выражение для вектора нормали $\mathbf{n}$ к этой плоскости.

Решение. Действительно, рассмотрим взаимный базис $\{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3\}$ к базису $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. Рассмотрим вектор:

$$\mathbf{n} = A\mathbf{e}^1 + B\mathbf{e}^2 + C\mathbf{e}^3, \tag{2.2}$$

который не равен нулю, поскольку $\{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3\}$ — базис в силу теоремы 2 и по условию $A^2 + B^2 + C^2 > 0$, а равенство:

$$A\mathbf{e}^1 + B\mathbf{e}^2 + C\mathbf{e}^3 = \mathbf{0}$$

возможно тогда и только тогда, когда $A = B = C = 0$. Теперь введем радиус–вектор:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3. \tag{2.3}$$

Если скалярно умножить вектор $\mathbf{n}$ и $\mathbf{r}$, то используя равенство (1.5), получим равенство:

$$(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = Ax + By + Cz. \tag{2.4}$$

Из (2.1) и (2.4) мы получаем уравнение плоскости (2.1) в следующем виде:

$$(\mathbf{r}, \mathbf{n}) + D = 0, \quad \mathbf{n} \neq \mathbf{0}. \tag{2.5}$$

Заметим, что существует следующее решение уравнения (2.5):

$$\mathbf{r}_0 = -\frac{\mathbf{n}}{(\mathbf{n}, \mathbf{n})} D. \tag{2.6}$$

Действительно, несложно проверить равенство:

$$(\mathbf{r}_0, \mathbf{n}) + D = 0. \tag{2.7}$$

Из (2.5) и (2.7) приходим к уравнению:

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{n}) = 0, \quad \mathbf{n} \neq \mathbf{0}. \tag{2.8}$$

Несложный анализ последнего равенства приводит к выводу о том, что вектор $\mathbf{n}$ является вектором нормали к плоскости (2.1).

Пример 3. Рассмотрим в аффинном пространстве $\mathbb{R}^3$ в некотором репере $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ две плоскости, заданные своими общими уравнениями:

$$A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0, \quad A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 > 0, \tag{2.9}$$

$$A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0, \quad A_2^2 + B_2^2 + C_2^2 > 0. \tag{2.10}$$

Найти необходимые и достаточные условия того, чтобы плоскости (2.9) и (2.10) были параллельны.

Решение. Пусть $\{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3\}$ — взаимный базис. Введем векторы нормалей $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_2$ к плоскостям (2.9) и (2.10) соответственно. Они имеют следующий вид:

$$\mathbf{n}_1 = A_1 \mathbf{e}^1 + B_1 \mathbf{e}^2 + C_1 \mathbf{e}^3, \tag{2.11}$$

$$\mathbf{n}_2 = A_2 \mathbf{e}^1 + B_2 \mathbf{e}^2 + C_2 \mathbf{e}^3. \tag{2.12}$$

Очевидно, что необходимым условием того, чтобы плоскости (2.9) и (2.10) были параллельны — это условие, чтобы векторы нормалей $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_2$ были коллинеарны, т.е. найдется такое ненулевое число $\lambda \in \mathbb{R}$, что будет справедливо равенство

$$\mathbf{n}_2 = \lambda \mathbf{n}_1 \Leftrightarrow (A_2 - \lambda A_1)\mathbf{e}^1 + (B_2 - \lambda B_1)\mathbf{e}^2 + (C_2 - \lambda C_1)\mathbf{e}^3 = \mathbf{0}. \tag{2.13}$$

В силу результата теоремы 2 семейство векторов $\{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3\}$ линейно независимо (базис) и поэтому из (2.13) вытекают равенства

$$A_2 = \lambda A_1, \quad B_2 = \lambda B_1, \quad C_2 = \lambda C_1. \tag{2.14}$$

Заметим, что плоскости (2.9) и (2.10), очевидно, совпадают, если

$$D_2 = \lambda D_1 \tag{2.15}$$

и параллельны, если

$$D_2 \neq \lambda D_1. \tag{2.16}$$

Таким образом, искомое необходимое и достаточное условие — это равенства (2.14) и неравенство (2.16).

Пример 4. Рассмотрим в аффинном пространстве $\mathbb{R}^3$ в некотором репере $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ три плоскости, заданные своими общими уравнениями:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 > 0, \tag{2.17}$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \quad A_2^2 + B_2^2 + C_2^2 > 0. \tag{2.18}$$

$$A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0, \quad A_3^2 + B_3^2 + C_3^2 > 0. \tag{2.19}$$

Найти необходимое и достаточное условие, что эти три плоскости пересекаются в единственной точке и найти радиус–вектор $\mathbf{r}_0$ этой точки.

Решение. Рассмотрим векторы нормалей $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$ и $\mathbf{n}_3$ а соответствующим плоскостям (2.17)–(2.19):

$$\mathbf{n}_1 = A_1\mathbf{e}^1 + B_1\mathbf{e}^2 + C_1\mathbf{e}^3, \tag{2.20}$$

$$\mathbf{n}_2 = A_2\mathbf{e}^1 + B_2\mathbf{e}^2 + C_2\mathbf{e}^3, \tag{2.21}$$

$$\mathbf{n}_3 = A_3\mathbf{e}^1 + B_3\mathbf{e}^2 + C_3\mathbf{e}^3. \tag{2.22}$$

Из геометрических соображений понятно, что три плоскости пересекаются в единственной точке, тогда и только тогда, когда векторы нормалей $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$ и $\mathbf{n}_3$ к рассматриваемым плоскостям некомпланарны (линейно независимы). Плоскости (2.17)–(2.19) можно переписать в следующих векторных формах:

$$(\mathbf{n}_1, \mathbf{r}) = -D_1, \tag{2.23}$$

$$(\mathbf{n}_2, \mathbf{r}) = -D_2, \tag{2.24}$$

$$(\mathbf{n}_3, \mathbf{r}) = -D_3. \tag{2.25}$$

Поскольку семейство векторов $\{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3\}$ является некомпланарным семейством (линейно независимым), то они образуют базис в $\mathbb{V}_3$. Поэтому существует взаимный базис $\{\mathbf{n}^1, \mathbf{n}^2, \mathbf{n}^3\} \subset \mathbb{V}_3$, к базису $\{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3\} \subset \mathbb{V}_3$. Рассмотрим следующий радиус–вектор:

$$\mathbf{r}_0 = -D_1\mathbf{n}^1 - D_2\mathbf{n}^2 - D_3\mathbf{n}^3. \tag{2.26}$$

Используя равенства (1.5) приходим к выводу о том, что радиус–вектор (2.26) удовлетворяет системе уравнений (2.23)–(2.25).

Пример 5. Докажите тождество:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})[\mathbf{x}, \mathbf{y}] = \begin{vmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} \\ (\mathbf{a}, \mathbf{x}) & (\mathbf{b}, \mathbf{x}) & (\mathbf{c}, \mathbf{x}) \\ (\mathbf{a}, \mathbf{y}) & (\mathbf{b}, \mathbf{y}) & (\mathbf{c}, \mathbf{y}) \end{vmatrix}. \tag{2.27}$$

Решение. Если $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 0$, то семейство векторов $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\} \subset \mathbb{V}_3$ является компланарным (линейно зависимым). Тогда найдутся такие числа $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, что справедливо равенство:

$$\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c} = \mathbf{0}, \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 > 0. \tag{2.28}$$

Без ограничения общности можно считать, что $\gamma \neq 0$. Тогда из (2.28) вытекает равенство

$$\mathbf{c} = \gamma_1 \mathbf{a} + \gamma_2 \mathbf{b}, \quad \gamma_1 = -\frac{\alpha}{\gamma}, \quad \gamma_2 = -\frac{\beta}{\gamma}. \tag{2.29}$$

Подставим выражение (2.29) для вектора $\mathbf{c}$ в определитель в правой части (2.27). Используя полилинейность определителя относительно столбцов, линейность скалярного произведения векторов относительно обоих аргументов, в результате получим следующее равенство:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} \\ (\mathbf{a},\mathbf{x}) & (\mathbf{b},\mathbf{x}) & (\mathbf{c},\mathbf{x}) \\ (\mathbf{a},\mathbf{y}) & (\mathbf{b},\mathbf{y}) & (\mathbf{c},\mathbf{y}) \end{vmatrix} = \gamma_1 \begin{vmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{a} \\ (\mathbf{a},\mathbf{x}) & (\mathbf{b},\mathbf{x}) & (\mathbf{a},\mathbf{x}) \\ (\mathbf{a},\mathbf{y}) & (\mathbf{b},\mathbf{y}) & (\mathbf{a},\mathbf{y}) \end{vmatrix} + \\ + \gamma_2 \begin{vmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{b} \\ (\mathbf{a},\mathbf{x}) & (\mathbf{b},\mathbf{x}) & (\mathbf{b},\mathbf{x}) \\ (\mathbf{a},\mathbf{y}) & (\mathbf{b},\mathbf{y}) & (\mathbf{b},\mathbf{y}) \end{vmatrix} = 0, \tag{2.30}$$

поскольку у первого определителя совпадают первый и третий столбцы, а у второго определителя — второй и третий.

Пусть теперь $(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) \neq 0$. Тогда $\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\}$ — это базис в $\mathbb{V}_3$. Введём взаимный базис в пространстве $\mathbb{V}_3$:

$$\mathbf{f}^1 = \frac{[\mathbf{b},\mathbf{c}]}{(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})}, \quad \mathbf{f}^2 = \frac{[\mathbf{c},\mathbf{a}]}{(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})}, \quad \mathbf{f}^3 = \frac{[\mathbf{a},\mathbf{b}]}{(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})}. \tag{2.31}$$

Пусть:

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{f}^1 + x_2\mathbf{f}^2 + x_3\mathbf{f}^3, \quad \mathbf{y} = y_1\mathbf{f}^1 + y_2\mathbf{f}^2 + y_3\mathbf{f}^3. \tag{2.32}$$

При этом в силу (1.5) и (1.21)–(1.23) справедливы следующие свойства:

$$(\mathbf{f}^1,\mathbf{a}) = 1, \quad (\mathbf{f}^1,\mathbf{b}) = 0, \quad (\mathbf{f}^1,\mathbf{c}) = 0, \tag{2.33}$$

$$(\mathbf{f}^2,\mathbf{a}) = 0, \quad (\mathbf{f}^2,\mathbf{b}) = 1, \quad (\mathbf{f}^2,\mathbf{c}) = 0, \tag{2.34}$$

$$(\mathbf{f}^3,\mathbf{a}) = 0, \quad (\mathbf{f}^3,\mathbf{b}) = 0, \quad (\mathbf{f}^3,\mathbf{c}) = 1; \tag{2.35}$$

$$[\mathbf{f}^1,\mathbf{f}^2] = \frac{\mathbf{c}}{(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})}, \quad [\mathbf{f}^2,\mathbf{f}^3] = \frac{\mathbf{a}}{(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})}, \quad [\mathbf{f}^3,\mathbf{f}^1] = \frac{\mathbf{b}}{(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})}. \tag{2.36}$$

Если воспользоваться равенствами (2.36) и антикоммутативностью векторного произведения, то мы получим равенства:

$$[\mathbf{x},\mathbf{y}] = \\ = \frac{1}{(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})}\left[(x_1y_2 - x_2y_1)\mathbf{c} + (x_3y_1 - x_1y_3)\mathbf{b} + (x_2y_3 - x_3y_2)\mathbf{a}\right] = \\ = \frac{1}{(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})}\begin{vmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}.$$

Осталось заметить, что в силу (2.32) и (2.33)–(2.35)

$$x_1 = (\mathbf{x}, \mathbf{a}), \quad x_2 = (\mathbf{x}, \mathbf{b}), \quad x_3 = (\mathbf{x}, \mathbf{c}),$$
$$y_1 = (\mathbf{y}, \mathbf{a}), \quad y_2 = (\mathbf{y}, \mathbf{b}), \quad y_3 = (\mathbf{y}, \mathbf{c}).$$

Пример 6. Докажите тождество:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} (\mathbf{x}, \mathbf{a}) & (\mathbf{x}, \mathbf{b}) & (\mathbf{x}, \mathbf{c}) \\ (\mathbf{y}, \mathbf{a}) & (\mathbf{y}, \mathbf{b}) & (\mathbf{y}, \mathbf{c}) \\ (\mathbf{z}, \mathbf{a}) & (\mathbf{z}, \mathbf{b}) & (\mathbf{z}, \mathbf{c}) \end{vmatrix}. \tag{2.37}$$

Решение. Случай $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 0$ рассматривается аналогично предыдущему примеру. Поэтому предположим, что $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \neq 0$. В обозначениях предыдущего примера выполнены следующие равенства:

$$\mathbf{z} = (\mathbf{z}, \mathbf{a})\mathbf{f}^1 + (\mathbf{z}, \mathbf{b})\mathbf{f}^2 + (\mathbf{z}, \mathbf{c})\mathbf{f}^3, \tag{2.38}$$

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})[\mathbf{x}, \mathbf{y}] = \mathbf{a} \begin{vmatrix} (\mathbf{b}, \mathbf{x}) & (\mathbf{c}, \mathbf{x}) \\ (\mathbf{b}, \mathbf{y}) & (\mathbf{c}, \mathbf{y}) \end{vmatrix} - \mathbf{b} \begin{vmatrix} (\mathbf{a}, \mathbf{x}) & (\mathbf{c}, \mathbf{x}) \\ (\mathbf{a}, \mathbf{y}) & (\mathbf{c}, \mathbf{y}) \end{vmatrix} + \mathbf{c} \begin{vmatrix} (\mathbf{a}, \mathbf{x}) & (\mathbf{b}, \mathbf{x}) \\ (\mathbf{a}, \mathbf{y}) & (\mathbf{b}, \mathbf{y}) \end{vmatrix}. \tag{2.39}$$

Тогда:

$$\begin{aligned} (\mathbf{z}, [\mathbf{x}, \mathbf{y}]) &= \\ &= (\mathbf{a}, \mathbf{z}) \begin{vmatrix} (\mathbf{b}, \mathbf{x}) & (\mathbf{c}, \mathbf{x}) \\ (\mathbf{b}, \mathbf{y}) & (\mathbf{c}, \mathbf{y}) \end{vmatrix} - (\mathbf{b}, \mathbf{z}) \begin{vmatrix} (\mathbf{a}, \mathbf{x}) & (\mathbf{c}, \mathbf{x}) \\ (\mathbf{a}, \mathbf{y}) & (\mathbf{c}, \mathbf{y}) \end{vmatrix} + \\ &+ (\mathbf{c}, \mathbf{z}) \begin{vmatrix} (\mathbf{a}, \mathbf{x}) & (\mathbf{b}, \mathbf{x}) \\ (\mathbf{a}, \mathbf{y}) & (\mathbf{b}, \mathbf{y}) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (\mathbf{x}, \mathbf{a}) & (\mathbf{x}, \mathbf{b}) & (\mathbf{x}, \mathbf{c}) \\ (\mathbf{y}, \mathbf{a}) & (\mathbf{y}, \mathbf{b}) & (\mathbf{y}, \mathbf{c}) \\ (\mathbf{z}, \mathbf{a}) & (\mathbf{z}, \mathbf{b}) & (\mathbf{z}, \mathbf{c}) \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

где нужно воспользоваться разложением этого определителя третьего порядка по последней строчке.

Лекция 3

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 1. Основные теоремы

Определение 1. *Алгебраической линейной системой m уравнений с n неизвестными называется система уравнений*:

$$\begin{cases} a_1^1 x^1 + a_2^1 x^2 + \cdots + a_n^1 x^n = b^1, \\ a_1^2 x^1 + a_2^2 x^2 + \cdots + a_n^2 x^n = b^2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots , \\ a_1^m x^1 + a_2^m x^2 + \cdots + a_n^m x^n = b^m, \end{cases} \tag{1.1}$$

где $a_j^k, b^s \in \mathbb{K}$ для $j = \overline{1, n}$, $k, s = \overline{1, m}$, а переменные $x^1, \ldots, x^n$ принимают значения из поля $\mathbb{K}$.

Замечание 1. Из чисел a_j^k можно составить матрицу:

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^m & a_2^m & \cdots & a_n^m \end{pmatrix},$$

которая называется матрицей системы (1.1). Числа b^k при $k = \overline{1, m}$ называются свободными членами системы, а x^j — неизвестными системы (1.1). *Систему уравнений* (1.1) можно переписать в следующем виде:

$$A \cdot X = B, \quad X = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ \vdots \\ b^m \end{pmatrix}. \tag{1.2}$$

Определение 2. *Решением системы из определения* 1 *называется набор чисел*:

$$x^1, x^2, \ldots, x^n,$$

который, будучи поставленным в систему, обращает все ее уравнения в тождества. Система, имеющая решение, называется совместной, а не имеющая решений — несовместной.

Определение 3. *Если не все b^k равны нулю система уравнений из определения 1 называется неоднородной, если же все $b^k = 0$, система называется однородной.*

Определение 4. *Однородную систему уравнений $A \cdot X = O$ с той же матрицей A, что и у неоднородной системы* (1.2), *называется однородной системой, соответствующей неоднородной системе* (1.2).

Определение 5. *Две линейные системы уравнений*:

$$A \cdot X = B \quad и \quad A' \cdot X = B'$$

называются эквивалентными, если все решения первой системы являются решениями второй системы и, наоборот, все решения второй системы являются решениями первой системы.

Замечание 2. Систему (1.2) можно переписать в следующем виде:

$$x^1 A_1 + x^2 A_2 + \cdots + x^n A_n = B, \tag{1.3}$$

где

$$A = \|A_1, A_2, \ldots, A_n\|,$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_1^1 \\ a_1^2 \\ \vdots \\ a_1^m \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_2^1 \\ a_2^2 \\ \vdots \\ a_2^m \end{pmatrix}, \ldots, A_n = \begin{pmatrix} a_n^1 \\ a_n^2 \\ \vdots \\ a_n^m \end{pmatrix}.$$

При такой записи системы уравнений (1.2) рассмотрение этой системы уравнений с позиции линейных пространств состоит в построении всевозможных разложений столбца B по столбцам $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Замечание 3. Еще систему уравнений (1.1) можно переписать в таком виде:

$$A^1 \cdot X = b^1, \ldots, A^m \cdot X = b^m, \quad A = \left\| \begin{matrix} A^1 \\ \vdots \\ A^m \end{matrix} \right\|, \quad X = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}. \tag{1.4}$$

Определение 6. *Система уравнений* (1.2) *называется системой Крамера, если $m = n$ и набор столбцов $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\} \subset \mathbb{K}^{n\times 1}$ является линейно независимым.*

Теорема 1. *Система Крамера* (1.2) *для любого столбца $B \in \mathbb{K}^{n\times 1}$ правой части имеет единственное решение.*

Доказательство. Поскольку набор столбцов $A_1, A_2, \ldots, A_n \in$ $\in \mathbb{K}^{n\times 1}$ является линейно независимым, то они образуют базис в линейном пространстве столбцов $\mathbb{K}^{n\times 1}$ длины n.

□ Действительно, как известно, базис пространства столбцов $\mathbb{K}^{n\times 1}$ состоит из n векторов и поэтому размерность этого линейного пространства равна $n \in \mathbb{N}$. Поэтому семейство столбцов $\{B, A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ линейно зависимо, поскольку их число равно $n+1$. Следовательно, найдутся такие числа $\beta, \alpha^1, \ldots, \alpha^n$, не все равные нулю, что справедливо равенство:

$$\beta B + \alpha^1 A_1 + \cdots + \alpha^n A_n = O \in \mathbb{K}^{n\times 1}. \qquad (1.5)$$

Если $\beta = 0$, то получим равенство:

$$\alpha^1 A_1 + \cdots + \alpha^n A_n = O \in \mathbb{K}^{n\times 1} \Rightarrow \alpha^1 = \cdots = \alpha^n = 0,$$

поскольку семейство столбцов $A_1, A_2, \ldots, A_n$ линейно независимо. Противоречие. Следовательно, $\beta \neq 0$. Поэтому из (1.5) вытекает равенство:

$$B = -\frac{\alpha^1}{\beta} A_1 - \cdots - \frac{\alpha^n}{\beta} A_n \in \mathbb{K}^{n\times 1}. \qquad (1.6)$$

Отсюда получаем полноту семейства столбцов $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ в $\mathbb{K}^{n\times 1}$. ⊠

Следовательно, произвольный столбец $B \in \mathbb{K}^{n\times 1}$ можно единственным образом разложить по базису $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$:

$$B = \xi^1 A_1 + \xi^2 A_2 + \cdots + \xi^n A_n.$$

Следовательно,

$$X := \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \vdots \\ \xi^n \end{pmatrix}$$

— есть единственное решение системы уравнений (1.3).

Теорема доказана.

Справедлива следующая *теорема Кронекера–Капелли*:

Теорема 2. *Для того чтобы система уравнений* (1.3) *имела решение, необходимо и достаточно, чтобы столбец правой части* $B \in L(A_1, A_2, \ldots, A_n)$.

Доказательство. *Необходимость.* Если система уравнений (1.3) имеет решение, то эта система уравнений выполняется при некотором наборе $(x^1, x^2, \ldots, x^n) = (\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^n)$ и поэтому $B \in L(A_1, A_2, \ldots, A_n)$.

Достаточность. Пусть $B \in L(A_1, A_2, \ldots, A_n)$, то найдутся такие числа $\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^n \in \mathbb{K}$, что

$$B = \xi^1 A_1 + \xi^2 A_2 + \cdots + \xi^n A_n \in L(A_1, A_2, \ldots, A_n).$$

И, следовательно, столбец $(\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^n)^T$ является решением системы уравнений (1.3).

Теорема доказана.

Лемма 1. *Для того чтобы система* (1.3) *имела решение, необходимо и достаточно, чтобы имело место равенство*: $\operatorname{rang} L(A_1, A_2, \ldots, A_n) = \operatorname{rang} L(A_1, A_2, \ldots, A_n, B)$.

Доказательство. С одной стороны, совершенно понятно, что $L(A_1, A_2, \ldots, A_n) \subset L(A_1, A_2, \ldots, A_n, B)$. С другой стороны, в силу результата теоремы 2 система уравнений (1.3) имеет решение, тогда и только тогда, когда $B \in L(A_1, A_2, \ldots, A_n)$, что равносильно тому что, $L(A_1, A_2, \ldots, A_n, B) \subset L(A_1, A_2, \ldots, A_n)$. Следовательно, $L(A_1, A_2, \ldots, A_n) = L(A_1, A_2, \ldots, A_n, B)$. Таким образом, согласно определению ранга семейства столбцов имеем:

$$\operatorname{rang} L(A_1, A_2, \ldots, A_n) = \operatorname{rang} L(A_1, A_2, \ldots, A_n, B).$$

Лемма доказана.

Справедлива первая теорема об *альтернативах Фредгольма*:

Теорема 3. *Если квадратная однородная система уравнений, состоящая из n уравнений относительно n переменных:*

$$x^1 A_1 + x^2 A_2 + \cdots + x^n A_n = O, \quad A_k,\ O \in \mathbb{K}^{n\times 1}, \quad k = \overline{1, n}, \qquad (1.7)$$

отвечающая неоднородной системе уравнений

$$x^1 A_1 + x^2 A_2 + \cdots + x^n A_n = B, \quad B \in \mathbb{K}^{n\times 1} \qquad (1.8)$$

имеет только тривиальное решение, то неоднородная система (1.8) *имеет единственное решение для любого столбца $B \in \mathbb{K}^{n\times 1}$.*

Если же однородная система (1.7) *имеет решения, отличные от тривиального, то существует такой столбец $B \in \mathbb{K}^{n\times 1}$, при котором неоднородная система* (1.8) *не имеет ни одного решения.*

Доказательство. Если однородная система уравнений (1.7) имеет только тривиальное решение $(x^1, x^2, \ldots, x^n) = (0, 0, \ldots, 0)$, то набор столбцов $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\} \subset \mathbb{K}^{n\times 1}$ является линейно независимым, а поскольку их число равно n, то они образуют базис в пространстве столбцов $\mathbb{K}^{n\times 1}$. Следовательно, любой столбец $B \in \mathbb{K}^{n\times 1}$ можно разложить единственным образом по базису $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$:

$$B = \xi^1 A_1 + \xi^2 A_2 + \cdots + \xi^n A_n.$$

Стало быть, неоднородная система уравнений (1.8) имеет единственное решение $(x^1, x^2, \ldots, x^n) = (\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^n)$ для любого столбца правой части $B \in \mathbb{K}^{n\times 1}$.

Во втором случае набор столбцов $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ является линейно зависимым и поэтому столбцы этого набора не образуют базиса в $\mathbb{K}^{n\times 1}$. Значит, найдется такой столбец $B \neq O$ из $\mathbb{K}^{n\times 1}$, который нельзя выразить через столбцы $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$, т. е. уравнение

$$B = \xi^1 A_1 + \xi^2 A_2 + \cdots + \xi^n A_n$$

невозможно не для какого-либо набора чисел $(\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^n)^T \in \mathbb{K}^{n\times 1}$.

Теорема доказана.

Справедлива вторая теорема об *альтернативах Фредгольма*:

Теорема 4. *Если однородная система* (1.7) *имеет решения, отличные от тривиального, то для того чтобы неоднородная система* *уравнений* (1.8) *имело решение, необходимо и достаточно, чтобы* $B^T \cdot Y = 0$ *для всех решений* Y *однородной системы уравнений*:

$$A^T \cdot Y = O. \tag{1.9}$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть неоднородная система уравнений (1.8) имеет решение $X \in \mathbb{K}^{n\times 1}$ и $Y \in \mathbb{K}^{n\times 1}$ — произвольное решение однородной системы уравнений (1.9). Тогда справедливы следующие соотношения:

$$\begin{gathered} A \cdot X = B \quad \text{и} \quad A^T \cdot Y = O \Rightarrow Y^T \cdot A \cdot X = Y^T \cdot B \Rightarrow \\ \Rightarrow (Y^T \cdot A \cdot X)^T = (Y^T \cdot B)^T \Rightarrow X^T \cdot (A^T \cdot Y) = B^T \cdot Y \Rightarrow \\ \Rightarrow X^T \cdot O = B^T \cdot Y \Rightarrow B^T \cdot Y = O \end{gathered}$$

для всех решений $Y \in \mathbb{K}^{n\times 1}$ матричного уравнения (1.9), где мы воспользовались известными равенствами для операции транспонирования матриц:

$$Z^{TT} = Z, \quad (Z_1 \cdot Z_2)^T = Z_2^T \cdot Z_1^T$$

для всех

$$Z \in \mathbb{K}^{l\times p}, \quad Z_1 \in \mathbb{K}^{l\times p}, \quad Z_2 \in \mathbb{K}^{p\times r}.$$

Достаточность. Пусть выполнено следующее условие:

$$Y^T \cdot B = 0 \quad \text{для всех решений} \quad Y \in \mathbb{K}^{n\times 1} \quad \text{уравнения} \quad A^T \cdot Y = O.$$

Заметим, что

$$A = \left\| \begin{matrix} A^1 \\ \vdots \\ A^n \end{matrix} \right\|, \quad A^T = \|(A^1)^T, \dots, (A^n)^T\|,$$

$$Y = \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix}, \quad Y^T = (y^1, \dots, y^n),$$

причем

$$A^T \cdot Y = O \Leftrightarrow Y^T \cdot A = O \Leftrightarrow (y^1, \cdots, y^n) \left\| \begin{matrix} A^1 \\ \vdots \\ A^n \end{matrix} \right\| = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда равенство (1.9) можно переписать в следующем виде:

$$y^1 A^1 + \dots + y^n A^n = O, \tag{1.10}$$

а уравнение $Y^T \cdot B = 0$ можно переписать в следующем виде:

$$y^1 b^1 + \dots + y^n b^n = 0. \tag{1.11}$$

Равенства (1.10) и (1.11) можно переписать в следующем виде:

$$y^1(A^1, b^1) + \dots + y^n(A^n, b^n) = (O, 0) \tag{1.12}$$

или в свернутом матричном виде:

$$Y^T \cdot \|A|B\| = \|O|0\| \tag{1.13}$$

для всех столбцов $Y \in \mathbb{K}^{n\times 1}$ — решений однородного уравнения (1.9).

Предположим теперь, что неоднородная система уравнений (1.8) *не совместна*. Это означает, что методом Гаусса–Жордана расширенную матрицу $\widetilde{A} = \|A|B\|$ методом элементарных преобразований строк можно привести к такому упрощенному виду, что у расширенной матрицы появится строчка следующего вида:

$$(0, \dots, 0, 1),$$

причем эта строчка согласно методу Гаусса–Жордана является линейной комбинацией исходных строк расширенной матрицы $\widetilde{A} = \|A|B\|$. Следовательно, найдутся такие числа $y^1, \dots, y^n \in \mathbb{K}$, что

$$y^1(A^1, b^1) + \dots + y^n(A^n, b^n) = (0, \dots, 0, 1) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow Y^T \cdot \|A|B\| = \|O|1\|. \tag{1.14}$$

Из равенства (1.14) вытекает, что есть такой столбец $Y \in \mathbb{K}^{n\times 1}$, что он одновременно удовлетворяет равенствам (1.13) и (1.14), причем:

$$A^T \cdot Y = O \in \mathbb{K}^{n\times 1}.$$

Противоречие. Значит, система (1.8) совместна.

Теорема доказана.

§ 2. Фундаментальное Семейство Решений

В этом параграфе будет показано, что множество решений однородной системы m линейных уравнений относительно n неизвестных является подпространством линейного пространства $\mathbb{K}^{n\times 1}$. При этом мы будем использовать векторную форму записи неоднородной системы уравнений:

$$x^1A_1 + x^2A_2 + \dots + x^nA_n = B. \tag{2.1}$$

и соответствующей однородной системы уравнений:

$$x^1A_1 + x^2A_2 + \dots + x^nA_n = O. \tag{2.2}$$

Справедлива следующая:

Теорема 5. *Множество всех решений однородной системы линейных уравнений* (2.2) *образует линейное подпространство в арифметическом пространстве* $\mathbb{K}^{n\times 1}$.

Доказательство. Пусть:

$$X_1 = (x_1^1, x_1^2, \dots, x_1^n)^T \quad \text{и} \quad X_2 = (x_2^1, x_2^2, \dots, x_2^n)^T$$

— два решения однородной системы уравнений:

$$x^1 A_1 + x^2 A_2 + \dots + x^n A_n = O \Leftrightarrow A \cdot X = O.$$

Тогда для любых $\alpha^1, \alpha^2 \in \mathbb{K}$ справедливы следующие равенства:

$$A \cdot (\alpha^1 X_1 + \alpha^2 X_2) = \alpha^1 A \cdot X_1 + \alpha^2 A \cdot X_2 = \alpha^1 O + \alpha^2 O = O.$$

Теорема доказана.

Определение 7. *Множество всех решений линейной однородной системы* (2.2) *называется пространством решений и обозначается далее знаком* $\mathcal{N}$.

Определение 8. *Базис в пространстве решений* $\mathcal{N}$ *однородной системы уравнений* (2.1) *называется Фундаментальной Системой Решений или ФСР.*

Замечание 4. *Построение ФСР.* Рассмотрим матрицу линейной однородной системы уравнений:

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^m & a_2^m & \cdots & a_n^m \end{pmatrix}. \tag{2.3}$$

Предположим, что матрица $A \neq O$ и поэтому у матрицы A существует базисный минор порядка $r \in [1, \min\{m, n\}]$. Без ограничения общности будем считать, что базисный минор этой матрицы расположен в левом верхнем углу:

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_r^1 & a_{r+1}^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_1^r & \cdots & a_r^r & a_{r+1}^r & \cdots & a_n^r \\ a_1^{r+1} & \cdots & a_r^{r+1} & a_{r+1}^{r+1} & \cdots & a_n^{r+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^m & \cdots & a_r^m & a_{r+1}^m & \cdots & a_n^m \end{pmatrix}.$$

При этом исходная система однородных линейных уравнений имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_r^1 & a_{r+1}^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_1^r & \cdots & a_r^r & a_{r+1}^r & \cdots & a_n^r \\ a_1^{r+1} & \cdots & a_r^{r+1} & a_{r+1}^{r+1} & \cdots & a_n^{r+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^m & \cdots & a_r^m & a_{r+1}^m & \cdots & a_n^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^r \\ x^{r+1} \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad (2.4)$$

которую можно переписать в следующем виде:

$$A^1 \cdot X = 0, \ldots, A^m \cdot X = 0, \qquad (2.5)$$

$$A^j = (a_1^j, \ldots, a_n^j), \quad X = (x^1, \ldots, x^n)^T, \quad j = \overline{1, m}. \qquad (2.6)$$

Тогда в силу теоремы о базисном миноре строчки матрицы системы (2.4) с номерами от $r+1$ до m линейно выражаются через первые r строк:

$$A^j = c_1^j A^1 + \cdots + c_r^j A^r, \quad j = \overline{r+1, m}. \qquad (2.7)$$

Справедлива следующая вспомогательная:
Лемма 2. *Система уравнений* (2.5) *эквивалентна следующей «укороченной» системе уравнений*:

$$A^1 \cdot X = 0, \ldots, A^r \cdot X = 0. \qquad (2.8)$$

Доказательство. Пусть $X \in \mathbb{K}^{n\times 1}$ — это решение системы уравнений (2.5). Тогда X — решение «укороченной» системы уравнений (2.8). Обратно. Пусть $X \in \mathbb{K}^{n\times 1}$ — это решение системы уравнений (2.8). Тогда в силу (2.7) имеет место цепочка равенств:

$$A^j \cdot X = \left(c_1^j A^1 + \cdots + c_r^j A^r\right) \cdot X = c_1^j A^1 \cdot X + \cdots + c_r^j A^r \cdot X = \\ = c_1^j 0 + \cdots + c_r^j 0 = 0, \quad j = \overline{r+1, m}. \qquad (2.9)$$

Следовательно, из (2.8) и (2.9) получаем, что X — это решение (2.5).

Лемма доказана.

Поэтому эквивалентная к (2.4) однородная система линейных уравнений имеет матрицу системы следующего вида:

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_r^1 & a_{r+1}^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_1^r & \cdots & a_r^r & a_{r+1}^r & \cdots & a_n^r \end{pmatrix},$$

а сама эквивалентная система однородных линейных уравнений к (2.4) примет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_r^1 & a_{r+1}^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_1^r & \cdots & a_r^r & a_{r+1}^r & \cdots & a_n^r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^r \\ x^{r+1} \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{2.10}$$

При этом используя свойства произведения матриц эквивалентную систему линейных уравнений (2.10) можно переписать в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_r^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^r & \cdots & a_r^r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^r \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} a_{r+1}^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r+1}^r & \cdots & a_n^r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{r+1} \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}.$$

Таким образом, исходная однородная система линейных уравнений (2.4) эквивалентна следующей, вообще говоря, неоднородной линейной системе уравнений:

$$\widetilde{A}_r \cdot X_r = \widetilde{B}_r, \quad X_r = (x^1, \dots, x^r)^T, \tag{2.11}$$

$$\widetilde{A}_r = \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_r^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^r & \cdots & a_r^r \end{pmatrix}, \quad \widetilde{B}_r = - \begin{pmatrix} a_{r+1}^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r+1}^r & \cdots & a_n^r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{r+1} \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix},$$

причем система линейных уравнений (2.11) относительно переменных $X_r = (x^1, \dots, x^r)^T$ является Крамеровской, поскольку $\det \widetilde{A}_r \neq 0$.

Определение 9. *В эквивалентной системе линейных уравнений* (2.11) *переменные* $x^1, \dots, x^r$ *называются независимыми, а переменные* $x^{r+1}, \dots, x^n$ *называются свободными.*

Замечание 5. *Построение ФСР. Продолжение.* Для построения всех линейно независимых решений однородной системы уравнений:

$$A \cdot X = O, \quad X = (x^1, \dots, x^r, x^{r+1}, \dots, x^n)^T \tag{2.12}$$

с матрицей A, определенной равенством (2.3), воспользуемся полученной эквивалентной системой уравнений (2.11). Для этого сначала построим так называемое *нормальное семейство решений* рассматриваемой однородной линейной системы уравнений.

Шаг 1. Сначала положим в системе уравнений (2.11) свободные переменные равными $x^{r+1} = 1$, $x^{r+2} = \cdots = x^n = 0$ и получим из

(2.11) следующую неоднородную, вообще говоря, линейную систему уравнений:

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_r^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^r & \cdots & a_r^r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^r \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} a_{r+1}^1 \\ \vdots \\ a_{r+1}^r \end{pmatrix}, \tag{2.13}$$

которая, как Крамеровская, имеет единственное решение:

$$X_{1r} = (x_1^1, \ldots, x_1^r)^T.$$

Таким образом, нами построено нетривиальное решение:

$$X_1 = (x_1^1, \ldots, x_1^r, 1, 0, \ldots, 0)^T \tag{2.14}$$

однородной системы уравнений (2.12).

Шаг 2. Теперь положим в системе уравнений (2.11) свободные переменные равными $x^{r+1} = 0$, $x^{r+2} = 1$, $x^{r+3} = \cdots = x^n = 0$ и получим из (2.11) следующую неоднородную, вообще говоря, линейную систему уравнений:

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_r^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^r & \cdots & a_r^r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^r \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} a_{r+2}^1 \\ \vdots \\ a_{r+2}^r \end{pmatrix}, \tag{2.15}$$

которая, как Крамеровская, имеет единственное решение:

$$X_{2r} = (x_2^1, \ldots, x_2^r)^T.$$

Таким образом, нами построено нетривиальное решение:

$$X_2 = (x_2^1, \ldots, x_2^r, 0, 1, \ldots, 0)^T \tag{2.16}$$

однородной системы уравнений (2.12).

Шаг $n - r$. На этом завершающем шаге построения нормального семейства решений положим свободные переменные равными $x^{r+1} = \cdots = x^{n-1} = 0$ и $x^n = 1$ и получим из (2.11) следующую неоднородную, вообще говоря, линейную систему уравнений:

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_r^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^r & \cdots & a_r^r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^r \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} a_n^1 \\ \vdots \\ a_n^r \end{pmatrix}, \tag{2.17}$$

которая, как Крамеровская, имеет единственное решение:

$$X_{n-rr} = (x_n^1, \ldots, x_n^r)^T.$$

Таким образом, нами построено нетривиальное решение:

$$X_{n-r} = (x_{n-r}^1, \ldots, x_{n-r}^r, 0, 0, \ldots, 1)^T \tag{2.18}$$

однородной системы уравнений (2.12).

Лемма 3. *Нормальное семейство решений линейной однородной системы уравнений* (2.12):

$$X_1 = (x_1^1, \ldots, x_1^r, 1, 0, \ldots, 0)^T, \tag{2.19}$$

$$X_2 = (x_2^1, \ldots, x_2^r, 0, 1, \ldots, 0)^T, \tag{2.20}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \tag{2.21}$$

$$X_{n-r} = (x_{n-r}^1, \ldots, x_{n-r}^r, 0, 0, \ldots, 1)^T \tag{2.22}$$

линейно независимое.

Доказательство. Предположим, что столбцы нормального семейства решений однородной системы уравнений (2.12) линейно зависимы. Тогда найдутся такие числа $\alpha^1, \ldots, \alpha^{n-r} \in \mathbb{K}$, не равные одновременно нулю, что справедливо равенство:

$$\alpha^1 X_1 + \cdots + \alpha^{n-r} X_{n-r} = O \in \mathbb{K}^{n\times 1}, \tag{2.23}$$

но тогда согласно свойствам операций сложения столбцов и умножения столбцов на числа приходим к равенству следующего вида:

$$\begin{pmatrix} z^1 \\ \vdots \\ z^r \\ \alpha^1 \\ \alpha^2 \\ \vdots \\ \alpha^{n-r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha^1 = \alpha^2 = \cdots = \alpha^{n-r} = 0.$$

Таким образом, равенство (2.23) возможно тогда и только тогда, когда $\alpha^1 = \alpha^2 = \cdots = \alpha^{n-r} = 0$. Следовательно, построенное нормальное семейство решений (2.19)–(2.22) линейно независимое.

Лемма доказана.

Лемма 4. *Нормальное семейство решений* (2.19)*–*(2.22) *линейной однородной системы уравнений* (2.12) *полно в линейном пространстве $\mathcal{N}$ решений линейной однородной системы уравнений* (2.12).

Доказательство. *Шаг 1.* Рассмотрим эквивалентную систему линейных уравнений (2.11). Поскольку $\det \widetilde{A}_r \neq 0$, то при заданной правой части $\widetilde{B}_r$ эта система имеет единственное решение $X_r = (x^1, \ldots, x^r)^T$. Но в силу явного вида столбца $\widetilde{B}_r$ правой части видно, что он однозначно определяется заданием свободных переменных $x^{r+1}, \ldots, x^n$. Отсюда приходим к важному выводу о том, что задание свободных переменных $x^{r+1}, \ldots, x^n$ *однозначно* определяет решение $X = (x^1, \ldots, x^r, x^{r+1}, \ldots, x^n)^T$ исходной однородной системы уравнений (2.12). Этим результатом мы воспользуемся на следующем шаге доказательства леммы.

Шаг 2. Пусть $X_0 = (x_0^1, \ldots, x_0^r, x_0^{r+1}, \ldots, x_0^n)^T$ — произвольное решение однородной линейной системы уравнений (2.12). Тогда это решение можно представить в виде следующей линейной комбинации нормального семейства решений:

$$X_0 = x_0^{r+1} X_1 + \dots + x_0^n X_{n-r}. \tag{2.24}$$

$\square$ Действительно, с одной стороны, заметим, что правая часть равенства (2.24) в силу теоремы 5 является решением линейной однородной системы уравнений (2.12). С другой стороны, используя свойства сложения столбцов и умножения столбца на числа правая часть равенства (2.24) представима в следующем виде:

$$x_0^{r+1} X_1 + \dots + x_0^n X_{n-r} = \begin{pmatrix} z_0^1 \\ \vdots \\ z_0^r \\ x_0^{r+1} \\ \vdots \\ x_0^n \end{pmatrix} := Y_0, \tag{2.25}$$

причем в силу результата шага 1 решение Y_0 однозначно определяется числами $x_0^{r+1}, \dots, x_0^n$ как и решение X_0. Следовательно, $Y_0 = X_0$. $\boxtimes$

Лемма доказана.

Лемма 5. $\dim \mathcal{N} = n - r$, *где* $r = \operatorname{rang} A$.

Теорема 6. *Пусть матрица B состоит из столбцов, образующих ФСР линейной однородной системы уравнений*:

$$A \cdot X = O. \tag{2.26}$$

Тогда пространство решений однородной линейной системы уравнений:

$$B^T \cdot Y = O \tag{2.27}$$

совпадает с линейной оболочкой строк матрицы A.

Доказательство. Пусть $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$, $\operatorname{rang} A = r \geqslant 1$. Тогда ФСР линейной однородной системы уравнений (2.26) состоит из $n - r$ вектор–столбцов $X_1, \dots, X_{n-r} \in \mathbb{K}^{n \times 1}$. Составим из этих столбцов матрицу B

$$B = \|X_1, \dots, X_{n-r}\| \in \mathbb{K}^{n \times (n-r)}, \tag{2.28}$$

причем

$$A \cdot X_j = O \in \mathbb{K}^{m \times 1}, \quad j = \overline{1, n-r}. \tag{2.29}$$

Поэтому из (2.28) и (2.29) вытекают следующие равенства:

$$\mathbb{K}^{m \times (n-r)} \ni O = \|A \cdot X_1, \dots, A \cdot X_{n-r}\| = \\ = A \cdot \|X_1, \dots, X_{n-r}\| = A \cdot B \tag{2.30}$$

Используя операцию транспонирования матриц с учетом ранее доказанных свойств транспонирования получим из (2.30) равенство

$$B^T \cdot A^T = O \in \mathbb{K}^{(n-r) \times m}. \tag{2.31}$$

Рассмотрим следующую линейную однородную систему уравнений:

$$B^T \cdot Y = O, \quad B^T \in \mathbb{K}^{(n-r)\times n}, \quad A^T \in \mathbb{K}^{n\times m}, \quad Y \in \mathbb{K}^{n\times 1}. \qquad (2.32)$$

Из сравнения (2.31) и (2.32) приходим к выводу о том, что все столбцы матрицы A^T являются решениями системы уравнений (2.32). Поскольку $\operatorname{rang} A^T = \operatorname{rang} A = r$, то число линейно независимых столбцов матрицы A^T совпадает с числом линейно независимых строк матрицы A и равно r. Теперь выясним число столбцов в ФСР системы уравнений (2.32). Заметим, что по построению $\operatorname{rang} B^T = \operatorname{rang} B = n - r$. Следовательно, ФСР состоит из $n - (n - r) = r$ столбцов. Таким образом, пространством решений однородной системы уравнений (2.32) является линейная оболочка столбцов матрицы A^T, т.е. линейная оболочка строчек матрицы A, и только она.

Теорема доказана.

§ 3. Неоднородные системы линейных уравнений

Определение 10. *Множество всех решений линейной неоднородной системы уравнений* (2.1) *обозначается знаком* $\mathcal{M}$.

Определение 11. *Плоскостью* π *в арифметическом пространстве* $\mathbb{K}^{n\times 1}$, *проходящую через точку* $Y_1 \in \mathbb{K}^{n\times 1}$, *и с направляющим* r*–мерным подпространством* $L_r \subset \mathbb{K}^{n\times 1}$ *при* $r \in [1, n-1]$ *называется множество всех точек* $Y \in \mathbb{K}^{n\times 1}$ *таких, что*

$$Y - Y_1 \subset L_r.$$

При $r = 1$ *плоскость называется прямой, а при* $r = n - 1$ *плоскость называется гиперплоскостью. Используется обозначение* $\pi = Y_1 + L_r$.

Замечание 6. Пусть $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_r\}$ — это базис линейного r–мерного подпространства $L_r \subset \mathbb{K}^{n\times 1}$. Тогда для любого столбца $X \in L_r$ найдутся такие числа $t_1, \ldots, t_r \in \mathbb{K}$, что справедливо равенство:

$$X = t_1\mathbf{e}_1 + \cdots + t_r\mathbf{e}_r.$$

Тогда уравнение r–мерной плоскости π из определения 11 можно записать в векторной параметрической форме:

$$\pi = \left\{Y \in \mathbb{K}^{n\times 1} : \ Y = Y_1 + t_1\mathbf{e}_1 + \cdots + t_r\mathbf{e}_r, \ \forall\, t_1, \ldots, t_r \in \mathbb{K}\right\}.$$

Замечание 7. *Геометрическая интерпретация решений неоднородных линейных уравнений.* Множество $Y_1 + L_r$ с геометрической точки зрения называется r–мерной плоскостью, а с алгебраической точки зрения называется линейным многообразием.

Теорема 7. *Множество всех решений неоднородной системы линейных уравнений* (2.1) *образует линейное многообразие в* $\mathbb{K}^{n\times 1}$, *т.е. плоскость.*

Доказательство. Пусть:

$$Y_1 = (y_1^1, y_1^2, \ldots, y_1^n)^T, \quad Y = (y^1, y^2, \ldots, y^n)^T$$

— два решения неоднородной системы линейных уравнений (2.1). Образуем их разность $X = Y - Y_1$. Тогда справедливы следующие равенства:

$$A \cdot X = A \cdot (Y - Y_1) = A \cdot Y - A \cdot Y_1 = B - B = O.$$

Отсюда, с одной стороны, получаем, что $Y - Y_1 \in \mathcal{N}$ для всех $Y \in \mathcal{M}$ и некоторого $Y_1 \in \mathcal{M}$. Но тогда имеем:

$$\mathcal{M} \subset Y_1 + \mathcal{N}. \tag{3.1}$$

С другой стороны, если $X \in \mathcal{N}$ — произвольное решение соответствующей однородной системы уравнений (2.2), а $Y_1 \in \mathcal{M}$ — какое–то решение неоднородной системы линейных уравнений, то справедливы равенства:

$$A \cdot (Y_1 + X) = A \cdot Y_1 + A \cdot X = B + O = B.$$

Следовательно,

$$Y_1 + \mathcal{N} \subset \mathcal{M}. \tag{3.2}$$

Итак, из (3.1) и (3.2) получаем равенство множеств $\mathcal{M} = Y_1 + \mathcal{N}$, из которого вытекает, что $\mathcal{M}$ есть плоскость, проходящая через точку $Y_1 \in \in \mathbb{K}^{n\times 1}$ с направляющим подпространством $\mathcal{N}$.

Теорема доказана.

Теорема 8. *Общее решение совместной неоднородной системы уравнений $A \cdot X = B$ можно представить в следующем виде:*

$$X = Y + \sum_{k=1}^{n-r} c^k X_k, \tag{3.3}$$

где Y — какое–либо частное решение неоднородной системы линейных уравнений, а $\{X_1, \ldots, X_{n-r}\}$ — ФСР соответствующей линейной однородной системы уравнений $A \cdot X = O$.

Доказательство. Результат теоремы является следствием теоремы 7 и леммы 5.

Теорема доказана.

§ 4. Примеры решения задач

Задача 1. Составить систему линейных уравнений, задающую линейную оболочку системы векторов:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \; v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}, \; v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}. \qquad (4.1)$$

Решение. Запишем координаты векторов–столбцов v_1, v_2, v_3, v_4 по строкам в матрицу A :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & -1 & 7 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad (4.2)$$

и рассмотрим соответствующую линейную однородную систему уравнений:

$$A \cdot X = O, \quad X = (x^1, x^2, x^3, x^4, x^5)^T. \qquad (4.3)$$

ФСР этой системы уравнений находится методом Гаусса–Жордана и имеет следующий вид:

$$X_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \qquad (4.4)$$

Запишем матрицу B в следующем виде:

$$B = \|X_1, X_2, X_3\| = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (4.5)$$

Тогда имеем:

$$B^T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (4.6)$$

Рассмотрим следующую линейную однородную систему уравнений:

$$B^T \cdot Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Y = (y^1, y^2, y^3, y^4, y^5)^T, \qquad (4.7)$$

которую можно переписать в развернутой форме:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \\ y^5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{4.8}$$

из которой получаем искомую систему уравнений:

$$-y^1 + y^2 + 2y^3 = 0, \tag{4.9}$$

$$y^1 - y^2 + 2y^4 = 0, \tag{4.10}$$

$$-2y^1 - y^2 + y^5 = 0. \tag{4.11}$$

З а д а ч а 2. Найти размерности и базисы суммы и пересечения подпространств V_1 и V_2 :

$$V_1 = L(X_1, X_2, X_3), \quad V_2 = L(Y_1, Y_2, Y_3), \tag{4.12}$$

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \tag{4.13}$$

$$Y_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad Y_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad Y_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}. \tag{4.14}$$

Решение. Шаг 1. $V_1 + V_2 = \mathbb{R}^3$. Прежде всего составим матрицу:

$$A = \|X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2, Y_3\|^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \tag{4.15}$$

и найдем методом Гаусса–Жордана ее ранг.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -4 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.16}$$

Таким образом, ранг матрицы A равен 3. Поэтому $V_1 + V_2 = \mathbb{R}^3$ и базис в $V_1 + V_2$ можно взять, например, следующий:

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Шаг 2. Базис в $V_1 \cap V_2$. Сначала зададим линейное подпространство V_1 как решение некоторой системы уравнений (см. теорему 6). Для этого запишем матрицу:

$$A_1 = \|X_1, X_2, X_3\|^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}. \tag{4.17}$$

Теперь построим ФСР в пространстве решений следующей однородной системы линейных уравнений:

$$A_1 \cdot X = O, \tag{4.18}$$

которая в силу (4.17) эквивалентна следующей системе уравнений:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{4.19}$$

из которой получаем:

$$x^1 + x^2 - x^3 = 0, \quad x^2 + 2x^3 = 0,$$

ФСР которой состоит, например, из вектора:

$$X_4 = (3 - 2, 1)^T. \tag{4.20}$$

Тогда согласно результату теоремы 6 линейное подпространство V_1 можно определить как решение следующей системы уравнений:

$$X_4^T \cdot X = 0 \Leftrightarrow 3x^1 - 2x^2 + x^3 = 0. \tag{4.21}$$

Теперь запишем линейное подпространство V_2 как решение некоторой линейной однородной системы уравнений. Для этого запишем матрицу:

$$A_2 = \|Y_1, Y_2, Y_3\|^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \sim$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}. \tag{4.22}$$

Таким образом, из (4.22) получаем, что система уравнений

$$A_2 \cdot Y = O \tag{4.23}$$

эквивалентна следующей:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y^1 - 8y^3 = 0, \quad y^2 + 5y^3 = 0. \tag{4.24}$$

Таким образом, ФСР системы уравнений (4.23) состоит, например, из столбца:

$$Y_4 = (8, -5, 1)^T. \tag{4.25}$$

Тогда согласно результату теоремы 6 линейное подпространство V_2 можно определить как решение следующей системы уравнений:

$$Y_4^T \cdot Y = 0 \Leftrightarrow 8y^1 - 5y^2 + y^3 = 0. \tag{4.26}$$

Но тогда базис в $V_1 \cap V_2$ — есть в точности ФСР системы уравнений (4.21) и (4.26):

$$3x^1 - 2x^2 + x^3 = 0, \quad 8x^1 - 5x^2 + x^3 = 0. \tag{4.27}$$

ФСР этой системы уравнений состоит из одного столбца, например,

$$Z_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow V_1 \cap V_2 = L(Z_0). \tag{4.28}$$

Задача 3. Пусть в линейном пространстве столбцов $\mathbb{R}^4$ заданы два линейных подпространства:

$$U = L(X_1, X_2), \quad V = L(X_3, X_4), \tag{4.29}$$

$$X_1 = (1, 1, 1, 1)^T, \quad X_2 = (-1, -2, 0, 1)^T, \tag{4.30}$$

$$X_3 = (-1, -1, 1, -1)^T, \quad X_4 = (2, 2, 0, 1)^T. \tag{4.31}$$

Доказать, что имеет место разложение в прямую сумму $\mathbb{R}^4 = U \oplus V$, и найти проекцию столбца

$$w = (4, 2, 4, 4)^T \tag{4.32}$$

на линейное подпространство U параллельно V.

Решение. Шаг 1. Докажем сначала, что столбцы X_1, X_2, X_3, X_4 линейно независимы. Запишем матрицу:

$$A = \|X_1, X_2, X_3, X_4\|^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.33)$$

т.е. ранг матрицы A равен 4 и, стало быть, столбцы X_1, X_2, X_3, X_4 линейно независимы. Следовательно, $\mathbb{R}^4 = U \oplus V$.

Шаг 2. Найдем систему уравнений, которая определяет линейное подпространство $U = L(X_1, X_2)$ и только его. Здесь можно поступить следующим образом:

$$X = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \end{pmatrix} \in U \Leftrightarrow X = \alpha X_1 + \beta X_2,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \quad (4.34)$$

Отсюда вытекает равенство столбцов:

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha - \beta \\ \alpha - 2\beta \\ \alpha \\ \alpha + \beta \end{pmatrix}, \quad (4.35)$$

из которого вытекает:

$$x^1 = \alpha - \beta, \quad x^2 = \alpha - 2\beta, \quad x^3 = \alpha, \quad x^4 = \alpha + \beta. \quad (4.36)$$

Отсюда приходим к следующей системе уравнений:

$$x^1 + x^4 = 2x^3, \quad x^2 + 2x^4 = 3x^3, \quad (4.37)$$

определяющая линейное подпространство $U = L(X_1, X_2)$ и только его. Произвольный столбец линейного подпространства $V = L(X_3, X_4)$ имеет следующий вид:

$$v = \lambda X_3 + \mu X_4 = \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}. \quad (4.38)$$

Искомое разложение столбца w имеет следующий вид:

$$w = u + v, \quad u \in U = L(X_1, X_2), \quad v \in V = L(X_3, X_4). \quad (4.39)$$

Но тогда $w - v \in U$. Заметим, что:

$$w - v = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 + \lambda - 2\mu \\ 2 + \lambda - 2\mu \\ 4 - \lambda \\ 4 + \lambda - \mu \end{pmatrix}. \quad (4.40)$$

Подставим координаты столбца $w - v$ из (4.40) в систему (4.37), определяющая линейное подпространство $U = L(X_1, X_2)$ и только его. В результате получим следующую систему уравнений:

$$4\lambda = 3\mu, \quad 3\lambda = 2\mu + 1 \Rightarrow \lambda = 3, \quad \mu = 4. \tag{4.41}$$

Но тогда из (4.38) получим равенства:

$$v = 3X_3 + 4X_4 = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{4.42}$$

$$u = w - v = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}. \tag{4.43}$$

З а д а ч а 4. В линейном вещественном пространстве $P_2(\mathbb{R})$ (пространство всех полиномов на вещественной оси степени не выше 2) заданы элементы:

$$x_1(t) = -1 + 3t + 2t^2, \quad x_2(t) = 2t + 3t^2, \quad x_3(t) = -1 + 7t + 8t^2,$$

Используя метод Гаусса, выполнить задания: найти базис линейной оболочки $L(x_1, x_2, x_3)$; найти $\dim L(x_1, x_2, x_3)$; разложить элементы x_1, x_2, x_3 по найденному базису.

Решение. Семейство:

$$\mathbf{e}_1 = 1, \quad \mathbf{e}_2 = t, \quad \mathbf{e}_3 = t^2$$

образует базис в $P_2(\mathbb{R})$. Полиномы x_1, x_2 и x_3 можно разложить по этому базису следующим образом:

$$x_1(t) = \mathbf{E} \cdot X_1, \quad x_2(t) = \mathbf{E} \cdot X_2, \quad x_3(t) = \mathbf{E} \cdot X_3, \tag{4.44}$$

где $\mathbf{E} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$,

$$X_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}. \tag{4.45}$$

Составим матрицу:

$$A = \begin{Vmatrix} X_1^T \\ X_2^T \\ X_3^T \end{Vmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 7 & 8 \end{pmatrix}. \tag{4.46}$$

Методом Гаусса найдем базисный минор матрицы A. Вычитая из третьей строчки матрицы первую строчку получим матрицу:

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 7 & 8 \end{pmatrix} \backsim \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}. \tag{4.47}$$

Последняя матрица имеет базисный минор, расположенный на пересечении первых строк и первых двух столбцов. Кроме того, имеем:

$$X_2^T = \frac{1}{2}(X_3^T - X_1^T) \Leftrightarrow X_2 = \frac{1}{2}(X_3 - X_1) \Leftrightarrow X_3 = X_1 + 2X_2. \quad (4.48)$$

Поэтому в силу (4.44) и (4.48) имеем:

$$x_3(t) = \mathbf{E} \cdot X_3 = \mathbf{E} \cdot (X_1 + 2X_2) = \\ = \mathbf{E} \cdot X_1 + 2\mathbf{E} \cdot X_2 = x_1(t) + 2x_2(t). \quad (4.49)$$

Следовательно, базис в $L(x_1, x_2, x_3)$ образуют полиномы $x_1(t)$, $x_2(t)$ и, стало быть, $\dim L(x_1, x_2, x_3) = 2$. А разложение по базису с учетом (4.49) имеет вид:

$$x_1 = 1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2, \quad x_2 = 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2, \quad x_3 = 1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2.$$

Задача 5. Для каждого $p \in \mathbb{R}$ исследовать на совместность неоднородную СЛАУ, заданную расширенной матрицей

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1+p & 1+p & 0 \\ p & 1 & -p \end{array}\right). \quad (4.50)$$

Найти общее решение во всех случаях, когда система совместна.

Решение. Вычислим определитель основной матрицы и получим, что он равен нулю при $p = 1$ и при $p = -1$. Рассмотрим соответствующие случаи.

Случай 1. $p = 1$. В этом случае расширенная матрица (4.50) примет следующий вид:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{array}\right),$$

т.е. система не совместна.

Случай 2. $p = -1$. В этом случае расширенная матрица (4.50) примет следующий вид:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

Общее решение имеет следующий вид:

$$X = \begin{pmatrix} t \\ -1+t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Случай 3. $p \neq 1$ *и* $p \neq -1$. Тогда решая СЛАУ с расширенной матрицей(4.50), получим, что

$$X = \begin{pmatrix} p/(1-p) \\ -p/(1-p) \end{pmatrix}.$$

Лекция 4

ПРИЛОЖЕНИЯ ТЕОРЕМЫ КРОНЕКЕРА–КАПЕЛЛИ

§ 1. Теорема Кронекера–Капелли

Теорема 1. *Линейная система $A \cdot X = B$ совместна тогда и только тогда, когда*

$$\operatorname{rang} \|A\| = \operatorname{rang} \|A \mid B\|.$$

§ 2. Взаимное расположение двух прямых на плоскости

Рассмотрим две прямые на плоскости, заданные уравнениями:

$$l_1 : \ A_1x + B_1y = C_1, \quad l_2 : \ A_2x + B_2y = C_2, \tag{2.1}$$

где $A_j^2 + B_j^2 > 0$, $j = 1, 2$ в некоторой общей декартовой системе координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$. Рассмотрим матрицу A системы (2.1) и расширенную матрицу $\widetilde{A}$ системы уравнений (2.1):

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{A} = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

Ранг $\operatorname{rang} A$ матрицы A может принимать значения 1 и 2, поскольку матрица ненулевая и поэтому $\operatorname{rang} A \neq 0$. Рассмотрим три случая.

Случай 1. Прямые пересекаются. Система уравнений (2.1) *имеет единственное решение — прямые пересекаются.* Это означает, что $|A| \neq 0$, т.е. ранг матрицы A максимален: $\operatorname{rang} A = 2$. Заметим, что $\operatorname{rang} \widetilde{A}$ не может быть меньше 2, поскольку содержит базисный минор:

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \widetilde{A} = 2$.

Случай 2. Прямые параллельны. Система уравнений (2.1) *не имеет решений — прямые параллельны.* С алгебраической точки зрения это означает, что $\operatorname{rang} A < \operatorname{rang} \widetilde{A}$. Как мы уже указывали, $\operatorname{rang} A \geqslant 1$. Поскольку случай $\operatorname{rang} A = 2$ соответствует уже рассмотренной ситуации, то поэтому $\operatorname{rang} A = 1$. Так как $\operatorname{rang} \widetilde{A}$ может быть больше только на единицу, поскольку матрица $\widetilde{A}$ содержит ровно на один столбец больше, чем матрица A, то $\operatorname{rang}\widetilde{A} = 2$. По теореме Кронекера–Капелли система уравнений (2.1) не имеет решений.

Случай 3. Прямые совпадают. Система уравнений (2.1) *имеет бесконечно много решений — прямые совпадают.* После рассмотрения первых двух случаев осталась только единственная ситуация: $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}\widetilde{A} = 1$. По теореме Кронекера–Капелли система уравнений (2.1) совместна.

§ 3. Взаимное расположение трех прямых на плоскости

Пусть прямые l_1, l_2 и l_3 заданы общими уравнениями в некоторой общей декартовой системе координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$:

$$l_1 : \quad A_1x + B_1y = C_1, \quad A_1^2 + B_1^2 > 0, \tag{3.1}$$

$$l_2 : \quad A_2x + B_2y = C_2, \quad A_2^2 + B_2^2 > 0, \tag{3.2}$$

$$l_3 : \quad A_3x + B_3y = C_3, \quad A_3^2 + B_3^2 > 0. \tag{3.3}$$

Случай 1. Прямые пересекаются в единственной точке.

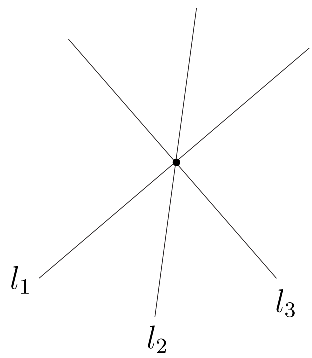

Рис. 1. Три прямые пересекаются в одной точке.

С одной стороны, это означает, что каждые две прямые из трёх пересекаются в единственной точке — это значит, что любые две системы уравнений из трех (3.1)–(3.3) имеют единственное решение (смотри первый случай предыдущего параграфа), т. е.

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_3 & B_3 \\ A_1 & B_1 \end{pmatrix} = 2.$$

С другой стороны, система всех трех уравнений совместна, т. е.

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{pmatrix} = 2.$$

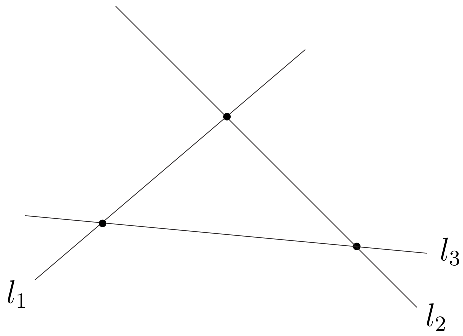

Рис. 2. Три прямые попарно пересекаются.

Случай 2. Прямые попарно пересекаются, но все три прямые не имеют общих точек. С одной стороны, как и в случае 1, любые два уравнения из трёх (3.1)–(3.3) имеют единственное решение, что означает выполнение равенств:

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_3 & B_3 \\ A_1 & B_1 \end{pmatrix} = 2.$$

С другой стороны, все три уравнения не имеют решений, т. е.

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} > \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{pmatrix}, \tag{3.4}$$

где

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{pmatrix} = 2, \tag{3.5}$$

поскольку, с одной стороны, у этой матрице имеется базисный минор второго порядка, например, образованный на пересечении первых двух строк и двух столбцов. С другой стороны,

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} = 3, \tag{3.6}$$

поскольку выполнено неравенство (3.4) и, кроме того, матрица из (3.6) отличается от матрицы из (3.5) ровно на один столбец.

Случай 3. Две прямые из трёх параллельны, а оставшаяся прямая их пересекает.

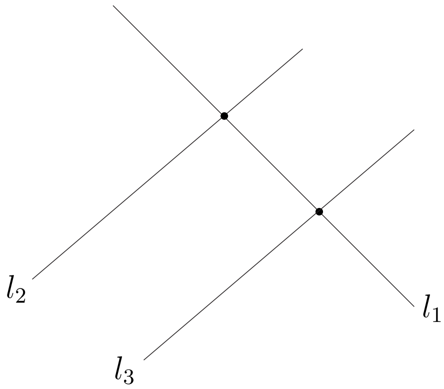

Рис. 3. Две прямые параллельны, а третья их пересекает.

Без ограничения общности можно считать, что прямые l_2 и l_3 параллельны, а прямая l_1 их пересекает. С одной стороны, это означает, что системы уравнений:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y = C_1, \\ A_2x + B_2y = C_2, \end{cases} \quad \begin{cases} A_1x + B_1y = C_1, \\ A_3x + B_3y = C_3, \end{cases}$$

имеют единственные решения. А система уравнений:

$$\begin{cases} A_2x + B_2y = C_2, \\ A_3x + B_3y = C_3, \end{cases}$$

решений не имеет. Итак,

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_3 & B_3 \end{pmatrix} = 2,$$

но (смотри второй случай предыдущего параграфа):

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{pmatrix} = 1 \quad \text{и} \quad \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} = 2.$$

Случай 4. Две прямые совпадают, а третья их пересекает. Без ограничения общности пусть прямые l_2 и l_3 совпадают, а прямая l_1 их пересекает.

Тогда, с одной стороны, это означает, что системы уравнений:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y = C_1, \\ A_2x + B_2y = C_2, \end{cases} \quad \begin{cases} A_1x + B_1y = C_1, \\ A_3x + B_3y = C_3, \end{cases}$$

имеют каждая единственное решение. А система уравнений:

$$\begin{cases} A_2x + B_2y = C_2, \\ A_3x + B_3y = C_3, \end{cases}$$

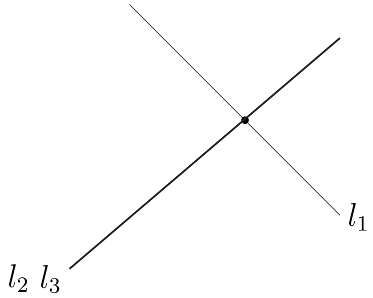

Рис. 4. Две прямые совпадают, а третья их пересекает.

имеет бесконечное число решений. Итак,

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_3 & B_3 \end{pmatrix} = 2,$$

но (смотри третий случай предыдущего параграфа):

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{pmatrix} = 1 \quad \text{и} \quad \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} = 1.$$

Случай 5. Три прямые параллельны.

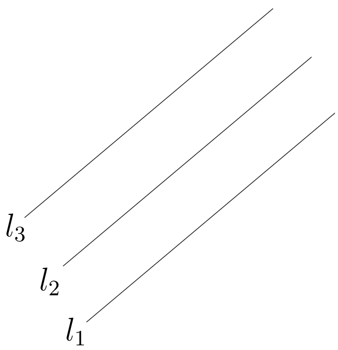

Рис. 5. Три прямые параллельны.

Это означает, что каждые два уравнения из трёх (3.1)–(3.3) не имеют решений (см. случай 2 предыдущего параграфа), т. е.

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_3 & B_3 \\ A_1 & B_1 \end{pmatrix} = 1,$$

но при этом справедливы равенства:

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_3 & B_3 & C_3 \\ A_1 & B_1 & C_1 \end{pmatrix} = 2.$$

Случай 6. Две прямые из трёх совпадают, а третья им параллельна.

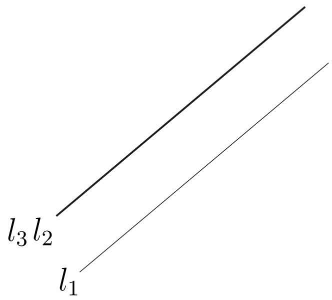

Рис. 6. Две прямые совпадают, а третья им параллельна.

Без ограничения общности, пусть прямые l_2 и l_3 совпадают, а прямая l_1 им параллельна. С одной стороны, система уравнений:

$$\begin{cases} A_2x + B_2y = C_2, \\ A_3x + B_3y = C_3, \end{cases}$$

имеют бесконечно много решений, а, с другой стороны, каждая система уравнений:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y = C_1, \\ A_2x + B_2y = C_2, \end{cases} \qquad \begin{cases} A_1x + B_1y = C_1, \\ A_3x + B_3y = C_3, \end{cases}$$

не имеют решений. Поэтому (см. случаи 1 и 3 из предыдущего параграфа):

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} = 1$$

и при этом справедливы равенства:

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix} = 1, \quad \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = 2,$$

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_3 & B_3 \end{pmatrix} = 1, \quad \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} = 2.$$

Случай 7. Все три прямые совпадают.

Это означает, что совпадают прямые l_1 и l_2, совпадают прямые l_2 и l_3, и поэтому совпадают прямые l_1 и l_3, т. е.

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = 1,$$

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} = 1.$$

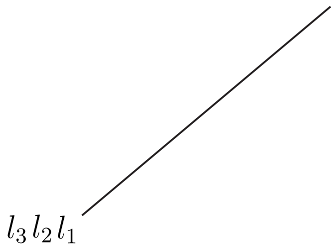

Рис. 7. Три прямые совпадают.

§ 4. Взаимное расположение двух плоскостей в пространстве

Пусть в общей декартовой системе координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ в пространстве две плоскости заданы общими уравнениями:

$$p_1: \quad A_1x + B_1y + C_1z = D_1, \quad p_2: \quad A_2x + B_2y + C_2z = D_2, \tag{4.1}$$

причём

$$A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 > 0, \quad A_2^2 + B_2^2 + C_2^2 > 0.$$

Векторы нормалей к плоскостям p_1 и p_2 имеют следующий вид [1]:

$$\mathbf{n}_1 = A_1\mathbf{f}_1 + B_1\mathbf{f}_2 + C_1\mathbf{f}_3, \quad \mathbf{n}_2 = A_2\mathbf{f}_1 + B_2\mathbf{f}_2 + C_2\mathbf{f}_3, \tag{4.2}$$

где $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_2\}$ взаимный базис к базису $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$.

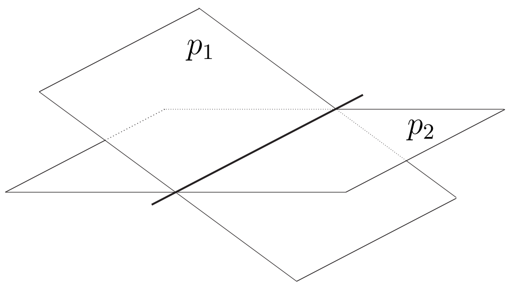

Рис. 8. Две плоскости пересекаются по прямой.

Случай 1. Плоскости пересекаются. Это означает, что система уравнений:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z = D_1, \\ A_2x + B_2y + C_2z = D_2 \end{cases} \tag{4.3}$$

имеет решение, но плоскости не совпадают. Значит:

$$\operatorname{rang} \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = 2. \tag{4.4}$$

[1] см. главу «Взаимный базис векторов и его применения»

□ Действительно, во–первых,

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} \geqslant 1,$$

поскольку $A_j^2 + B_j^2 + C_j^2 > 0$ при $j = 1, 2$. Поскольку плоскости не параллельны и не совпадают, то их векторы нормалей $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_2$ не коллинеарны, а значит, являются линейно независимыми:

$$\alpha\mathbf{n}_1 + \beta\mathbf{n}_2 = \mathbf{0} \Leftrightarrow \alpha = \beta = 0. \tag{4.5}$$

В силу (4.2) равенство (4.5) эквивалентно следующим равенствам:

$$\alpha A_1 + \beta A_2 = \alpha B_1 + \beta B_2 = \alpha C_1 + \beta C_2 = 0, \tag{4.6}$$

которое можно записать в свою очередь в виде строчек:

$$\alpha(A_1, B_1, C_1) + \beta(A_2, B_2, C_2) = (0, 0, 0), \tag{4.7}$$

которое в силу (4.5) возможно тогда и только тогда когда $\alpha = \beta = 0$. Следовательно, строчки матрицы системы уравнений (4.3) линейно независимы. ⊠

Очевидно, что в силу теоремы Кронекера–Капелли имеем:

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = 2.$$

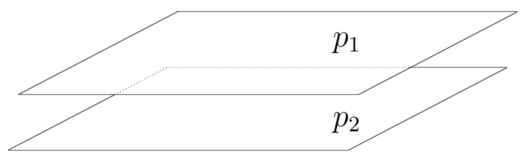

Рис. 9. Две плоскости параллельны.

Случай 2. Плоскости параллельны. Это означает, что система уравнений (4.3) не имеет решений. Заметим, что:

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = 1$$

□ Действительно, в этом случае векторы нормалей $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_2$ к плоскостям p_1 и p_2 коллинеарны. В этом случае точно также рассуждая, что и в предыдущем случае можно доказать, что строчки матрицы системы линейно зависимы. ⊠

При этом:

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix} = 2.$$

□ Действительно, случай 2 — это случай не совместности системы уравнений и поэтому согласно теореме Кронекера–Капелли ранг расширенной матрицы должен быть больше ранга основной матрицы системы. ⊠

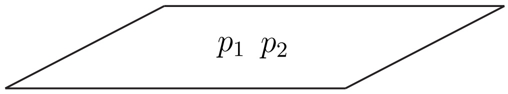

Рис. 10. Две плоскости совпадают.

Случай 3. Плоскости совпадают. Это означает, что система уравнений (4.3) имеет решения. Тогда:

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = 1, \quad \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix} = 1.$$

□ Во–первых, это последняя ситуация из возможных.

Во–вторых, поскольку плоскости совпадают, то их векторы нормалей (4.2) коллинеарны и поэтому строчки основной матрицы системы (4.1) линейно зависимы. А в силу теоремы Кронекера–Капелли ранг расширенной матрицы системы должен совпадать с рангом основной матрицы. ⊠

§ 5. Взаимное расположение трёх плоскостей в пространстве

Пусть три плоскости заданы общими уравнениями:

$$p_1: \quad A_1x + B_1y + C_1z = D_1, \quad A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 > 0, \tag{5.1}$$

$$p_2: \quad A_2x + B_2y + C_2z = D_2, \quad A_2^2 + B_2^2 + C_2^2 > 0, \tag{5.2}$$

$$p_3: \quad A_3x + B_3y + C_3z = D_3, \quad A_3^2 + B_3^2 + C_3^2 > 0 \tag{5.3}$$

в общей декартовой системе координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. Пусть $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$ — это взаимный базис к базису $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. Введём векторы нормалей к указанным плоскостям p_1, p_2, p_3 :

$$\mathbf{n}_1 = A_1\mathbf{f}_1 + B_1\mathbf{f}_2 + C_1\mathbf{f}_3, \tag{5.4}$$

$$\mathbf{n}_2 = A_2\mathbf{f}_1 + B_2\mathbf{f}_2 + C_2\mathbf{f}_3, \tag{5.5}$$

$$\mathbf{n}_3 = A_3\mathbf{f}_1 + B_3\mathbf{f}_2 + C_3\mathbf{f}_3. \tag{5.6}$$

Случай 1. Три плоскости пересекаются в единственной точке. Это означает, что система уравнений:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z = D_1, \\ A_2x + B_2y + C_2z = D_2, \\ A_3x + B_3y + C_3z = D_3 \end{cases} \tag{5.7}$$

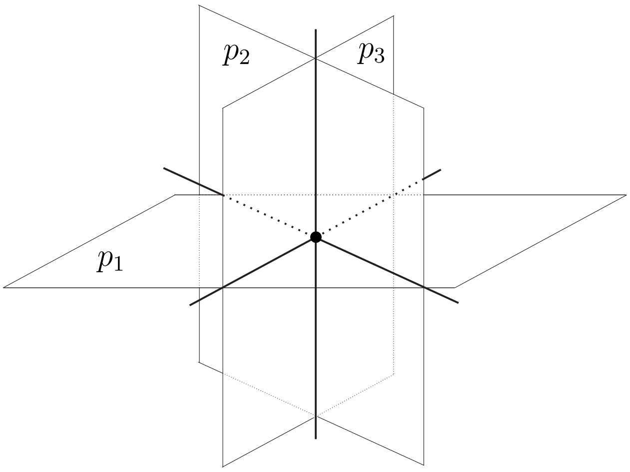

Рис. 11. Три плоскости пересекаются в одной точке.

имеет единственное решение. Следовательно,

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} = 3.$$

Очевидно, что при этом в силу теоремы Кронекера–Капелли:

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix} = 3.$$

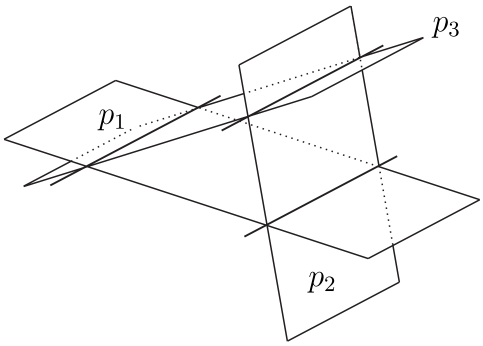

Рис. 12. Плоскости попарно перескаются по прямым.

Случай 2. Плоскости попарно пересекаются, но три плоскости не имеют общих точек. Это означает, что любые два уравнения из трёх (5.7) имеют решения, но все три уравнения (5.7) не имеют решений. Заметим, что

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} = \\ = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_3 & B_3 & C_3 \\ A_1 & B_1 & C_1 \end{pmatrix} = 2. \quad (5.8)$$

□ Действительно, рассмотрим, например, плоскости p_1 и p_2. Нормали к ним имеют следующий вид:

$$\mathbf{n}_1 = A_1\mathbf{f}_1 + B_1\mathbf{f}_2 + C_1\mathbf{f}_3,$$
$$\mathbf{n}_2 = A_2\mathbf{f}_1 + B_2\mathbf{f}_2 + C_2\mathbf{f}_3,$$

где $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$ — взаимный базис к базису $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. Нормали $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_2$ линейно независимы (не коллинеарны). Поэтому строчки:

$$(A_1, B_1, C_1) \quad \text{и} \quad (A_2, B_2, C_2)$$

тоже линейно независимы. Следовательно,

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = 2. \quad \boxtimes$$

Очевидно, что при этом в силу теоремы Кронекера–Капелли выполнены равенства:

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix} = \\ = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \end{pmatrix} = 2.$$

С другой стороны, система уравнений (5.7) трёх уравнений не имеет решений. Следовательно,

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} = 2. \quad (5.9)$$

□ Действительно, во–первых, в матрице системы:

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix}$$

любые две строчки в силу (5.8) линейно независимы и поэтому:

$$2 \leqslant \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} \leqslant 3.$$

Во–вторых, если

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} = 3$$

— это рассмотренный выше случай 1, когда три плоскости пересекаются в одной точке, т.е. система уравнений (5.7) имеет единственное решение. А в данном случае решения нет. ⊠

При этом в силу равенства (5.9) и теоремы Кронекера–Капелли

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix} = 3,$$

где мы опять воспользовались тем, что расширенная матрица системы (5.7) отличается от основной матрицы системы ровно на один столбец и поэтому их ранги могут отличаться не более, чем на 1.

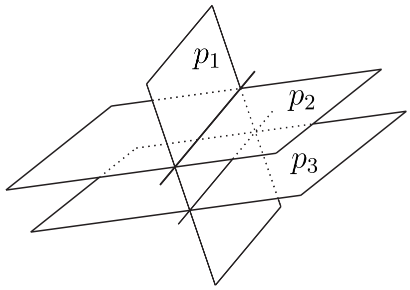

Рис. 13. Две плоскости параллельна, а третья их пересекает.

Случай 3. Две плоскости параллельны, а третья их пересекает. Без ограничения общности будем считать, что плоскости p_2 и p_3 параллельны, а плоскость p_1 их пересекает. Это означает, что система уравнений:

$$\begin{cases} A_2x + B_2y + C_2z = D_2, \\ A_3x + B_3y + C_3z = D_3, \end{cases} \tag{5.10}$$

не имеет решений, а системы уравнений:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z = D_1, \\ A_2x + B_2y + C_2z = D_2, \end{cases} \quad \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z = D_1, \\ A_3x + B_3y + C_3z = D_3, \end{cases} \tag{5.11}$$

имеют решения, но соответствующие плоскости не совпадают (см. предыдущий параграф). Итак, с одной стороны, из несовместности системы уравнений (5.10) имеем:

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} = 1, \quad \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix} = 2, \tag{5.12}$$

□ Действительно, нужно воспользоваться разобранным уже случаем 2 из параграфа 4. ⊠

С другой стороны, из совместности систем уравнений (5.11), а также результата случая 1 параграфа 4 приходим к следующим равенствам:

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} = 2.$$

Очевидно, что при этом в силу теоремы Кронекера–Капелли:

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix} = 2.$$

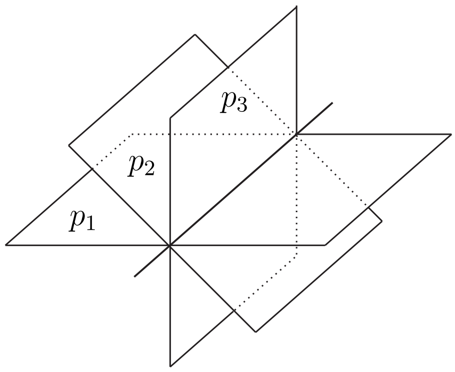

Рис. 14. Три плоскости пересекаются по общей прямой.

Случай 4. Три плоскости пересекаются по прямой. Это означает, что каждые две плоскости из двух пересекаются по прямой, т.е. каждые два уравнения из трёх (5.7) имеют решение — прямую (см. случай 1 параграфа 4). Стало быть, с одной стороны, имеем:

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} = \\ = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_3 & B_3 & C_3 \\ A_1 & B_1 & C_1 \end{pmatrix} = 2. \quad (5.13)$$

Очевидно, что при этом в силу теоремы Кронекера–Капелли имеем:

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix} = \\ = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \end{pmatrix} = 2.$$

С другой стороны, поскольку система уравнений (5.7) совместна и случай максимального ранга рассмотрен в случае 1, поэтому:

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix} = 2. \qquad (5.14)$$

□ Действительно, прежде всего имеем

$$1 \leqslant \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} \leqslant 3.$$

При этом, с одной стороны, случай максимального ранга 3 нами уже изучен в случае 1 и в этом случае три плоскости пересекаются в единственной точке. С другой стороны, в силу (5.13) у матрицы системы (5.1)–(5.3) есть базисный минор второго порядка, например, на пересечении первых строк и первых двух столбцов. Поэтому ранг основной матрицы системы (5.1)–(5.3) равен двум. Наконец, осталось воспользоваться теоремой Кронекера–Капелли и получить равенство (5.14). ⊠

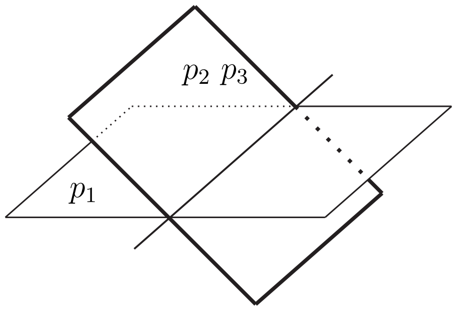

Рис. 15. Две плоскости совпадает, а третья из пересекает.

Случай 5. Две плоскости совпадают, а третья их пересекает. Без ограничения будем считать, что плоскости $p_2 = p_3$, а плоскость p_1 их пересекает. Это означает, что система уравнений:

$$\begin{cases} A_2x + B_2y + C_2z = D_2, \\ A_3x + B_3y + C_3z = D_3, \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений (см. случай 2 параграфа 4) и поэтому имеем:

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} = 1, \quad \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix} = 1.$$

□ Действительно, одно из уравнений является следствием другого. Поэтому строчки:

$$(A_2, B_2, C_2, D_2) \quad \text{и} \quad (A_3, B_3, C_3, D_3)$$

линейно зависимы. ⊠

С другой стороны, системы уравнений

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z = D_1, \\ A_2x + B_2y + C_2z = D_2, \end{cases} \quad \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z = D_1, \\ A_3x + B_3y + C_3z = D_3, \end{cases}$$

имеют решение — прямую (пересекаются, но не совпадают). Здесь нужно снова рассмотреть нормали к плоскостям, как это мы делали ранее (см. случай 1 параграфа 4). Тогда:

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} = 2.$$

Очевидно, что при этом в силу теоремы Кронекера-Капелли имеем:

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix} = 2.$$

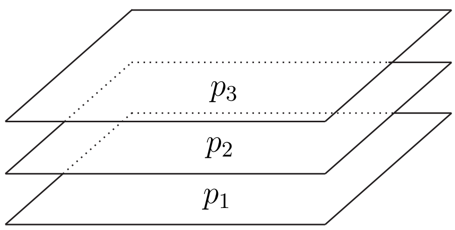

Рис. 16. Три плоскости параллельны.

Случай 6. Три плоскости параллельны. Это означает, что каждые два уравнения из системы трёх уравнений (5.7) не имеют решений (см. предыдущий параграф). Это означает, что:

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} = \\ = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_3 & B_3 & C_3 \\ A_1 & B_1 & C_1 \end{pmatrix} = 1,$$

поскольку нормали:

$$\mathbf{n}_1 = A_1\mathbf{f}_1 + B_1\mathbf{f}_2 + C_1\mathbf{f}_3,$$
$$\mathbf{n}_2 = A_2\mathbf{f}_1 + B_2\mathbf{f}_2 + C_2\mathbf{f}_3,$$
$$\mathbf{n}_3 = A_3\mathbf{f}_1 + B_3\mathbf{f}_2 + C_3\mathbf{f}_3$$

попарно коллинеарны и поэтому строчки

$$(A_1, B_1, C_1) \quad \text{и} \quad (A_2, B_2, C_2),$$

$$(A_2, B_2, C_2) \quad \text{и} \quad (A_3, B_3, C_3),$$
$$(A_3, B_3, C_3) \quad \text{и} \quad (A_1, B_1, C_1)$$

линейно зависимы и при этом

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix} = \\ = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \end{pmatrix} = 2$$

в силу теоремы Кронекера–Капелли.

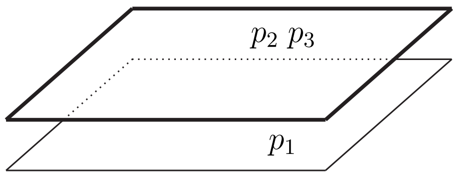

Рис. 17. Две плоскости совпадают, а третья им параллельна.

Случай 7. Две плоскости из трёх совпадают, а третья им параллельна. Без ограничения общности можно считать, что плоскости $p_2 = p_3$, а плоскость p_1 им параллельна. Действительно, равенство $p_2 = p_3$ означает, что система уравнений:

$$\begin{cases} A_2x + B_2y + C_2z = D_2, \\ A_3x + B_3y + C_3z = D_3, \end{cases}$$

совместна и векторы нормалей:

$$\mathbf{n}_2 = A_2\mathbf{f}_1 + B_2\mathbf{f}_2 + C_2\mathbf{f}_3 \quad \text{и} \quad \mathbf{n}_3 = A_3\mathbf{f}_1 + B_3\mathbf{f}_2 + C_3\mathbf{f}_3$$

к плоскостям p_2 и p_3 коллинеарны и поэтому строчки:

$$(A_2, B_2, C_2) \quad \text{и} \quad (A_3, B_3, C_3)$$

линейно зависимы. В силу теоремы Кронекера–Капелли справедливы следующее равенство:

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix} = 1.$$

С другой стороны, системы уравнений:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z = D_1, \\ A_2x + B_2y + C_2z = D_2, \end{cases} \qquad \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z = D_1, \\ A_3x + B_3y + C_3z = D_3, \end{cases}$$

не имеют решение вовсе. Следовательно, точно также как при рассмотрении случая 3 параграфа 4 имеем:

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} = 1,$$

но при этом по теореме Кронекера–Капелли имеем:

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix} = 2.$$

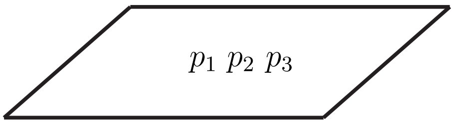

Рис. 18. Три плоскости совпадают.

Случай 8. Три плоскости совпадают. Это означает, что нормали:

$$\mathbf{n}_1 = A_1\mathbf{f}_1 + B_1\mathbf{f}_2 + C_1\mathbf{f}_3,$$
$$\mathbf{n}_2 = A_2\mathbf{f}_1 + B_2\mathbf{f}_2 + C_2\mathbf{f}_3,$$
$$\mathbf{n}_3 = A_3\mathbf{f}_1 + B_3\mathbf{f}_2 + C_3\mathbf{f}_3$$

к плоскостям p_1, p_2 и p_3 попарно коллинеарны м и поэтому строчки

$$(A_1, B_1, C_1) \quad \text{и} \quad (A_2, B_2, C_2),$$
$$(A_2, B_2, C_2) \quad \text{и} \quad (A_3, B_3, C_3),$$
$$(A_3, B_3, C_3) \quad \text{и} \quad (A_1, B_1, C_1)$$

линейно зависимы. Следовательно, у основной матрицы системы (5.1)–(5.3) базисный минор имеет порядок 1, поскольку любые две строчки линейно зависимы:

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} = 1.$$

Поэтому в силу совместности всех трех уравнений и теоремы Кронекера–Капелли имеем:

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix} = 1.$$

§ 6. Взаимное расположение двух прямых в пространстве

Пусть две прямые в пространстве l_1 и l_2 заданы своими векторными параметрическими уравнениями. Для удобства запишем эти уравнения в следующей форме:

$$l_1: \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{a}t, \quad l_2: \quad \mathbf{r} = -\mathbf{r}_2 + \mathbf{b}\tau, \quad t, \tau \in \mathbb{R}. \tag{6.1}$$

Приравняем эти уравнения и получим уравнение:

$$\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 = \mathbf{a}t + \mathbf{b}\tau. \tag{6.2}$$

Пусть $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ — это общая декартова система координат в аффинном пространстве $\mathbb{R}^3$. Пусть в этой системе координат:

$$\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{a} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}.$$

Тогда из (6.2) приходим к системе трёх уравнений относительно двух неизвестных t и τ :

$$\begin{cases} a_x t + b_x \tau = c_x, \\ a_y t + b_y \tau = c_y, \\ a_z t + b_z \tau = c_z. \end{cases} \tag{6.3}$$

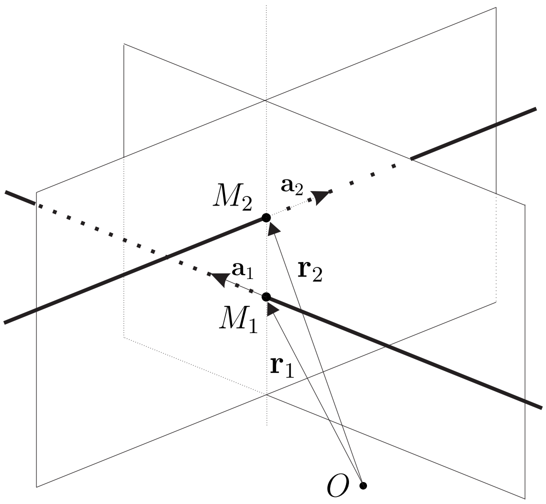

Рис. 19. Скрещивающиеся прямые.

Случай 1. Прямые скрещиваются. Это означает, что векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ не коллинеарны, т. е.

$$\operatorname{rang} \begin{pmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \\ a_z & b_z \end{pmatrix} = 2. \tag{6.4}$$

□ Действительно, поскольку направляющие векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ не нулевые, то:

$$1 \leqslant \operatorname{rang} \begin{pmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \\ a_z & b_z \end{pmatrix} \leqslant 2. \tag{6.5}$$

Если этот ранг равен 1, то столбцы матрицы линейно зависимы, т.е.:

$$\alpha \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\alpha, \beta) \neq (0, 0). \tag{6.6}$$

Но тогда выполнены равенства:

$$\alpha a_x + \beta b_x = \alpha a_y + \beta b_y = \alpha a_z + \beta b_z = 0, \quad (\alpha, \beta) \neq (0, 0). \tag{6.7}$$

Поскольку:

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{e}_1 + a_y \mathbf{e}_2 + a_z \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{b} = b_x \mathbf{e}_1 + b_y \mathbf{e}_2 + b_z \mathbf{e}_3. \tag{6.8}$$

Из (6.7) и (6.8) вытекает равенство:

$$\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad \text{при} \quad (\alpha, \beta) \neq (0, 0),$$

которое противоречит линейной независимости векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Значит, ранг матрицы системы (6.3) равен двум. ⊠

Система уравнений (6.3) не имеет решений, т. е. по теореме Кронекера-Капелли имеем:

$$\operatorname{rang} \begin{pmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{pmatrix} = 3,$$

поскольку расширенная матрица системы отличается от основной матрицы системы ровно одним столбцом.

Случай 2. Прямые параллельны. Это означает, что векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ коллинеарны, т. е.:

$$\operatorname{rang} \begin{pmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \\ a_z & b_z \end{pmatrix} = 1,$$

а система уравнений (6.3) не имеет решений, т. е. по теореме Кронекера-Капелли:

$$\operatorname{rang} \begin{pmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{pmatrix} = 2.$$

Случай 3. Прямые пересекаются. Это означает, что векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ не коллинеарны, т. е.:

$$\operatorname{rang} \begin{pmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \\ a_z & b_z \end{pmatrix} = 2,$$

а система уравнений (6.3) имеет единственное решение, т. е. по теореме Кронекера-Капелли имеем:

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{pmatrix} = 2.$$

Случай 4. Прямые совпадают. Это означает, что направляющие векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ коллинеарны, т. е.

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \\ a_z & b_z \end{pmatrix} = 1$$

и система уравнений (6.3) совместна, т. е. по теореме Кронекера-Капелли имеем:

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{pmatrix} = 1.$$

Лекция 5

КОВЕКТОРЫ

§ 1. Линейные формы и линейные функционалы

Определение 1. *Линейной формой называется функция $f(x)$, определенная на конечномерном линейном пространстве $\mathcal{L}$, со значениями в числовом поле $\mathbb{K}$, над которым рассматривается линейное пространство $\mathcal{L}$:*

$$f : \mathcal{L} \to \mathbb{K}$$

и обладающая свойством линейности:

$$f(\alpha^1 \cdot x_1 + \alpha^2 \cdot x_2) = \alpha^1 f(x_1) + \alpha^2 f(x_2) \tag{1.1}$$

для любых $x_1, x_2 \in \mathcal{L}$ и $\alpha^1, \alpha^2 \in \mathbb{K}$.

Определение 2. *Линейным функционалом называется функция $f(x)$, определенная на бесконечномерном линейном пространстве $\mathcal{L}$, со значениями в числовом поле $\mathbb{K}$, удовлетворяющая свойству линейности* (1.1).

Замечание 1. Иногда линейные формы называют *ковекторами*.

Замечание 2. В этом определении мы использовали обозначение $f(x)$ для значения линейной формы f на векторе x линейного пространства $\mathcal{L}$. Это обозначение не очень удобно в дальнейшем при рассмотрении так называемых обобщенных функций, к которым относится, наверное, вам уже известная δ–функция Дирака. Поэтому ниже мы будем использовать такое обозначение для результата применения линейной формы f к вектору $x \in \mathcal{L}$:

$$\langle f, x \rangle. \tag{1.2}$$

Используемое обозначение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ носит название *скобок двойственности* или *угловых скобок. Не путайте* их со скалярным произведением в евклидовом или в унитарном пространствах, которое мы рассмотрим ниже и для которого мы будем использовать другое обозначение (y, x). В обозначении (1.2) свойство линейности (1.1) примет следующий вид:

$$\langle f, \alpha^1 \cdot x_1 + \alpha^2 \cdot x_2 \rangle = \alpha^1 \langle f, x_1 \rangle + \alpha^2 \langle f, x_2 \rangle \tag{1.3}$$

для любых $x_1, x_2 \in \mathcal{L}$ и $\alpha^1, \alpha^2 \in \mathbb{K}$.

Пример 1. Пусть $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — базис в линейном пространстве $\mathcal{L}$ и $x \in \mathcal{L}$. Запишем разложение вектора x по введенному базису:

$$x = x^i \cdot \mathbf{e}_i, \tag{1.4}$$

где мы пользуемся обозначением Эйнштейна (по индексу $i \in \overline{1, n}$ предполагается суммирование). Рассмотрим следующую числовую функцию:

$$\langle \mathbf{e}^j, x \rangle := x^j, \tag{1.5}$$

где x^j — j–ая координата в разложении по базису (1.4) вектора $x \in \in \mathcal{L}$. Проверим, что $\mathbf{e}^j$ есть линейная форма. Действительно, пусть $x, y \in \mathcal{L}$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ и справедливы следующие разложения по базису $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ линейного пространства $\mathcal{L}$:

$$x = x^i \cdot \mathbf{e}_i, \quad y = y^i \cdot \mathbf{e}_i, \tag{1.6}$$

причем

$$(\alpha \cdot x + \beta \cdot y)^i \mathbf{e}_i = \alpha \cdot x + \beta \cdot y = \alpha x^i \cdot \mathbf{e}_i + \beta y^i \cdot \mathbf{e}_i = (\alpha x^i + \beta y^i) \cdot \mathbf{e}_i. \tag{1.7}$$

Тогда справедлива следующая цепочка равенств:

$$\langle \mathbf{e}^j, \alpha \cdot x + \beta \cdot y \rangle = (\alpha \cdot x + \beta \cdot y)^j = \alpha x^j + \beta y^j = \alpha \langle \mathbf{e}^j, x \rangle + \beta \langle \mathbf{e}^j, y \rangle.$$

Следовательно, $\mathbf{e}^j$ — линейная форма.

Пример 2. В пространстве полиномов P^n степени не выше $n \in \mathbb{N}$ с вещественными коэффициентами рассмотрим следующее отображение:

$$\langle f_{t_0}, p \rangle := p(t_0), \tag{1.8}$$

которое сопоставляет произвольному полиному $p(t) \in P^n$ его значение в некоторой фиксированной точке $t_0 \in \mathbb{R}$. Докажем, что f_{t_0} является линейной формой.

$\triangle$ Действительно, пусть $p(t), q(t) \in P^n$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Тогда справедливы следующие равенства:

$$\langle f_{t_0}, \alpha p + \beta q \rangle = (\alpha p(t) + \beta q(t))(t_0) = \alpha p(t_0) + \beta q(t_0) = \\ = \alpha \langle f_{t_0}, p \rangle + \beta \langle f_{t_0}, q \rangle. \quad \boxtimes$$

Пример 3. Для любого полинома $q(t)$ отображение, определенное на P^n следующим образом:

$$\langle f_q, p \rangle := \int\limits_0^1 q(t) p(t)\, dt$$

является линейной формой, если определенный интеграл понимается в смысле Римана или Лебега.

$\triangle$ Действительно, для любых $p(t), g(t) \in P^n$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ справедливы следующие равенства:

$$
\langle f_q, \alpha p + \beta g\rangle = \int\limits_0^1 q(t)\,[\alpha p(t) + \beta q(t)]\;dt =
$$

$$
= \alpha\int\limits_0^1 q(t)p(t)\,dt + \beta\int\limits_0^1 q(t)g(t)\,dt = \alpha\langle f_q, p\rangle + \beta\langle f_q, g\rangle. \quad \boxtimes \qquad (1.9)
$$

Пример 4. *Бесконечномерное пространство* $\mathbb{C}[0,1]$. Прежде всего заметим, что в линейном пространстве полиномов степени не выше $n \in \mathbb{N}$, для которого используется обозначение P^n базисом является следующее семейство полиномов $\{1, t, t^2, \ldots, t^n\}$ (докажите сами!), причем для каждого $n \in \mathbb{N}$ справедливо вложение $P^n \subset \mathbb{C}[0,1]$, где $\mathbb{C}[0,1]$ — пространство непрерывных на отрезке $[0,1]$ вещественных функций. Следовательно, пространство $\mathbb{C}[0,1]$ является бесконечномерным.

Для любой непрерывной функции $g(t) \in \mathbb{C}[0,1]$ определим линейный функционал над линейным пространством $\mathbb{C}[0,1]$:

$$
\langle f_g, x(t)\rangle := \int\limits_0^1 g(t)x(t)\,dt,
$$

линейность которого доказывается точно также как и в (1.9).

Пример 5. *δ–функция Дирака.* Эта функция определяется следующим образом:

$$
\langle \delta, \varphi\rangle = \varphi(0)
$$

и определен этот линейный функционал над линейным пространством основных функций $\mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$, построение которого далеко выходит за рамки нашего курса. Заметим, что действие δ–функции на основных функций *нельзя записывать* в виде интеграла Римана (и даже в виде интеграла Лебега):

Эта запись неверна!

$$
\langle \delta, \varphi\rangle = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\varphi(x)\,dx, \quad \delta(x) = \begin{cases} +\infty, & \text{если} \quad x = 0; \\ 0, & \text{если} \quad x \neq 0. \end{cases}
$$

Определение 3. *Линейные формы f и g называются равными, и пишут $f = g$, если для всех векторов $x \in \mathcal{L}$ имеет место следующее равенство*:

$$
\langle f, x\rangle = \langle g, x\rangle.
$$

Пример 6. Показать, что две линейные формы f_1 и f_2, заданные на линейном пространстве полиномов P^2 степени не выше 2, равенствами:

$$\langle f_1, p\rangle = \int\limits_{-1}^{1} g_1(t)p(t)\,dt, \quad \langle f_2, p\rangle = \int\limits_{-1}^{1} g_2(t)p(t)\,dt, \tag{1.10}$$

совпадают, если $g_1(t) - g_2(t) = 5t^3 - 3t$.

$\square$ Действительно, справедливы следующие равенства:

$$\langle f_1 - f_2, p\rangle = \int\limits_{-1}^{1} [g_1(t) - g_2(t)]p(t)\,dt = \int\limits_{-1}^{1} [5t^3 - 3t][a_0 + a_1 t + a_2 t^2]\,dt =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} [a_0 5t^3 + a_1 5t^4 + 5a_2 t^5 - 3a_0 t - 3a_1 t^2 - 3a_2 t^3]\,dt =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} [a_1 5t^4 - 3a_1 t^2]\,dt = a_1[2-2] = 0,$$

поскольку:

$$\int\limits_{-1}^{1} t^n\,dt = 0 \quad \text{для любого нечетного} \quad n \in \mathbb{N}. \quad \boxtimes$$

Лемма 1. *Всякая линейная форма $f : \mathcal{L} \to \mathbb{K}$ однозначно определяется своими значениями $\langle f, \mathbf{e}_i\rangle$ на векторах базиса $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ линейного пространства $\mathcal{L}$.*

Доказательство. Пусть линейная форма f задана. Тогда однозначно определены ее значения $\langle f, \mathbf{e}_i\rangle$ на элементах базиса. Обратно. Пусть заданы значения формы $\langle f, \mathbf{e}_i\rangle$ на элементах базиса. Рассмотрим разложение элемента $x \in \mathcal{L}$ по базису $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$:

$$x = x^i \cdot \mathbf{e}_i \Rightarrow \langle f, x\rangle = \langle f, x^i \cdot \mathbf{e}_i\rangle = x^i \langle f, \mathbf{e}_i\rangle.$$

Отсюда вытекает утверждение леммы.

Лемма доказана.

§ 2. Сопряженное линейное пространство

Определение 4. *Суммой линейных форм f и g называется отображение $h : \mathcal{L} \to \mathbb{K}$, определяемое равенством:*

$$\langle h, x\rangle \overset{def:}{=} \langle f, x\rangle + \langle g, x\rangle \quad \textit{для всех} \quad x \in \mathcal{L}.$$

Определение 5. *Произведением линейной формы f на число $\alpha \in \mathbb{K}$ называется отображение $l : \mathcal{L} \to \mathbb{K}$, для всех векторов $x \in \mathcal{L}$ определяемое равенством*:

$$\langle l, x\rangle \stackrel{def:}{=} \alpha\langle f, x\rangle.$$

Обозначение. $l = \alpha \cdot f$.

Лемма 2. *Сумма линейных форм и произведение линейной формы на число являются линейными формами.*

Доказательство. *Шаг 1. Линейность суммы форм.* Пусть $x, y \in \mathcal{L}$ и $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$ — произвольны и $h = f + g$. Справедливы следующие равенства:

$$\begin{aligned}\langle h, \alpha \cdot x + \beta \cdot y\rangle &= \langle f, \alpha \cdot x + \beta \cdot y\rangle + \langle g, \alpha x + \beta y\rangle = \\ &= \alpha\langle f, x\rangle + \beta\langle f, y\rangle + \alpha\langle g, x\rangle + \beta\langle g, y\rangle = \\ &= \alpha(\langle f, x\rangle + \langle g, x\rangle) + \beta(\langle f, y\rangle + \langle g, y\rangle) = \alpha\langle h, x\rangle + \beta\langle h, y\rangle.\end{aligned}$$

Шаг 2. Линейность произведения формы на число. Пусть $l = \gamma \cdot f$. Тогда имеем:

$$\begin{aligned}\langle l, \alpha \cdot x + \beta \cdot y\rangle &= \gamma\langle f, \alpha \cdot x + \beta \cdot y\rangle = \gamma(\alpha\langle f, x\rangle + \beta\langle f, y\rangle) = \\ &= \gamma\alpha\langle f, x\rangle + \gamma\beta\langle f, y\rangle = \alpha\gamma\langle f, x\rangle + \beta\gamma\langle f, y\rangle = \alpha\langle l, x\rangle + \beta\langle l, y\rangle.\end{aligned}$$

Лемма доказана.

Определение 6. *Нулевой формой ϑ^* называется отображение, сопоставляющая любому вектору $x \in \mathcal{L}$ нуль поля $0 \in \mathbb{K}$:*

$$\langle \vartheta^*, x\rangle = 0 \quad \textit{для всех} \quad x \in \mathcal{L}.$$

Лемма 3. *Нулевая форма ϑ^* является линейной.*

Доказательство. Пусть $x, y \in \mathcal{L}$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ — произвольны. Тогда справедливы следующие равенства:

$$\langle \vartheta^*, \alpha \cdot x + \beta \cdot y\rangle = 0 = \alpha 0 + \beta 0 = \alpha\langle \vartheta^*, x\rangle + \beta\langle \vartheta^*, y\rangle.$$

Лемма доказана.

Теорема 1. *Множество всех линейных форм с введенными законами сложения и умножения на числа является линейным пространством.*

Доказательство. Пусть f, g, h — произвольные линейные формы и $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ — произвольные числа. Проверим все аксиомы линейного пространства.

Шаг 1. Коммутативность сложения. Для всех $x \in \mathcal{L}$ справедливы следующие цепочки равенств:

$$\langle f + g, x\rangle = \langle f, x\rangle + \langle g, x\rangle = \langle g, x\rangle + \langle f, x\rangle = \langle g + f, x\rangle.$$

Поэтому в силу определения 3 равенства линейных форм приходим к выводу о том, что $f + g = g + f$.

Шаг 2. Ассоциативность сложения. Для всех $x \in \mathcal{L}$ справедливы следующие цепочки равенств:

$$\langle (f+g)+h, x\rangle = \langle f+g, x\rangle + \langle h, x\rangle = \langle f, x\rangle + \langle g, x\rangle + \langle h, x\rangle = \\ = \langle f, x\rangle + \langle g+h, x\rangle = \langle f+(g+h), x\rangle.$$

Поэтому в силу определения 3 равенства линейных форм приходим к выводу о том, что $f+(g+h) = (f+g)+h$.

Шаг 3. Нулевая форма. Для всех $x \in \mathcal{L}$ с учетом определения 6 справедливы следующие цепочки равенств:

$$\langle f+\vartheta^*, x\rangle = \langle f, x\rangle + \langle \vartheta^*, x\rangle = \langle f, x\rangle.$$

Поэтому в силу определения 3 равенства линейных форм приходим к выводу о том, что $f+\vartheta^* = f$.

Шаг 4. Существование противоположного элемента. Определим противоположный элемент f' к линейной форме f следующим образом:

$$\langle f', x\rangle \stackrel{def:}{=} -\langle f, x\rangle.$$

Тогда для всех $x \in \mathcal{L}$ справедливы следующие равенства:

$$\langle f+f', x\rangle = \langle f, x\rangle + \langle f', x\rangle = 0 = \langle \vartheta^*, x\rangle.$$

Поэтому в силу определения 3 равенства линейных форм приходим к выводу о том, что $f+f^{'} = \vartheta^*$.

Шаг 5. Свойство $1 \in \mathbb{K}$. Для всех $x \in \mathcal{L}$ с учетом определения 6 справедливы следующие цепочки равенств:

$$\langle 1\cdot f, x\rangle = 1\langle f, x\rangle = \langle f, x\rangle.$$

Поэтому в силу определения 3 равенства линейных форм приходим к выводу о том, что $1\cdot f = f$.

Шаг 6. Ассоциативность умножения на число. Для всех $x \in \mathcal{L}$ с учетом определения 6 справедливы следующие цепочки равенств:

$$\langle (\alpha\beta)\cdot f, x\rangle = (\alpha\beta)\langle f, x\rangle = \alpha\langle \beta\cdot f, x\rangle = \langle \alpha\cdot(\beta\cdot f), x\rangle.$$

Поэтому в силу определения 3 равенства линейных форм приходим к выводу о том, что $(\alpha\beta)\cdot f = \alpha\cdot(\beta\cdot f)$.

Шаг 7. Дистрибутивность относительно сложения элементов. Для всех $x \in \mathcal{L}$ с учетом определения 6 справедливы следующие цепочки равенств:

$$\langle \alpha\cdot(f+g), x\rangle = \alpha\langle f+g, x\rangle = \alpha\langle f, x\rangle + \alpha\langle g, x\rangle = \\ = \langle \alpha\cdot f, x\rangle + \langle \alpha\cdot g, x\rangle = \langle \alpha\cdot f + \alpha\cdot g, x\rangle.$$

Поэтому в силу определения 3 равенства линейных форм приходим к выводу о том, что $\alpha\cdot(f+g) = \alpha\cdot f + \alpha\cdot g$.

Шаг 8. Дистрибутивность относительно сложения чисел. Для всех $x \in \mathcal{L}$ с учетом определения 6 справедливы следующие цепочки равенств:

$$\langle(\alpha+\beta)\cdot f, x\rangle = (\alpha+\beta)\langle f, x\rangle = \alpha\langle f, x\rangle + \beta\langle f, x\rangle = \\ = \langle\alpha\cdot f, x\rangle + \langle\beta\cdot f, x\rangle = \langle\alpha\cdot f + \beta\cdot f, x\rangle.$$

Поэтому в силу определения 3 равенства линейных форм приходим к выводу о том, что $(\alpha+\beta)\cdot f = \alpha\cdot f + \beta\cdot f$.

Теорема доказана.

Определение 7. *Линейное пространство всех линейных форм на линейном пространстве $\mathcal{L}$ называется сопряженным к $\mathcal{L}$ линейным пространством и обозначается символом $\mathcal{L}^*$.*

Лемма 4. *Для произвольных $f \in \mathcal{L}^*$, $x \in \mathcal{L}$ и $\alpha \in \mathbb{K}$ справедливы равенства*

$$\langle\alpha\cdot f, x\rangle = \alpha\langle f, x\rangle = \langle f, \alpha\cdot x\rangle. \tag{2.1}$$

Доказательство. Здесь нужно воспользоваться определением умножения линейной формы на числа и линейностью формы $f \in \mathcal{L}^*$.

Лемма доказана.

Теорема 2. *Пусть $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — базис в $\mathcal{L}$. Набор форм $\{\mathbf{e}^1, \ldots \mathbf{e}^n\}$, действующих по правилу*

$$\langle\mathbf{e}^j, x\rangle = x^j, \tag{2.2}$$

где $x = x^j\cdot\mathbf{e}_j$, образуют базис сопряженного пространства $\mathcal{L}^*$.

Доказательство. *Полнота.* Пусть $f \in \mathcal{L}^*$ и $x \in \mathcal{L}$ — произвольны. Тогда с учетом леммы 4 справедлива следующая цепочка равенств:

$$\langle f, x\rangle = \langle f, x^j\cdot\mathbf{e}_j\rangle = x^j\langle f, \mathbf{e}_j\rangle = \langle\mathbf{e}^j, x\rangle\langle f, \mathbf{e}_j\rangle = \langle\langle f, \mathbf{e}_j\rangle\cdot\mathbf{e}^j, x\rangle.$$

Поскольку последнее равенство должно быть выполнено для всех $x \in \mathcal{L}$, то в силу определения 3 равенства линейных форм приходим к равенству

$$f = \langle f, \mathbf{e}_j\rangle\cdot\mathbf{e}^j,$$

т.е. набор $\{\mathbf{e}^1, \ldots \mathbf{e}^n\}$ полный.

Линейная независимость. Прежде всего заметим, что

$$\langle\mathbf{e}^j, \mathbf{e}_i\rangle = \delta^j_i,$$

Пусть

$$\alpha_j\cdot\mathbf{e}^j = \vartheta^*. \tag{2.3}$$

Применим обе части равенства (2.3) к $\mathbf{e}_i$ и получим следующие равенства:

$$\alpha_i = \alpha_j\delta^j_i = \alpha_j\langle\mathbf{e}^j, \mathbf{e}_i\rangle = \langle\alpha_j\mathbf{e}^j, \mathbf{e}_i\rangle = \langle\vartheta^*, x\rangle = 0 \quad \text{для всех} \quad i = \overline{1, n}.$$

Следовательно, набор $\{\mathbf{e}^1, \ldots \mathbf{e}^n\}$ линейно независим в $\mathcal{L}^*$.

Таким образом, с учетом полноты этого семейства ковекторов они образуют базис в $\mathcal{L}^*$.

Теорема доказана.

Лемма 5. *Справедливо равенство* $\dim \mathcal{L}^* = \dim \mathcal{L}$.

Определение 8. *Построенный в теореме 2 базис* $\{\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^n\}$ *линейного пространства* $\mathcal{L}^*$ *называется взаимным к базису* $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ *линейного пространства* $\mathcal{L}$.

Лемма 6. *Пусть* $\{\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^n\} \in \mathcal{L}^*$ *— взаимный базис к базису* $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\} \in \mathcal{L}$. *Тогда для любого* $x \in \mathcal{L}$ *справедливо следующее равенство:*

$$x = \langle \mathbf{e}^j, x \rangle \cdot \mathbf{e}_j. \tag{2.4}$$

Доказательство. Справедлива следующая цепочка равенств:

$$x = x^j \cdot \mathbf{e}_j = \langle \mathbf{e}^j, x \rangle \cdot \mathbf{e}_j.$$

Лемма доказана.

Лемма 7. *Взаимный базис* $\{\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^n\}$ *в* $\mathcal{L}^*$ *однозначно определяется базисом* $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\} \in \mathcal{L}$.

Доказательство. Пусть существуют два взаимных базиса $\{\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^n\}$ и $\{\mathbf{f}^1, \ldots, \mathbf{f}^n\}$ для данного базиса $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\} \in \mathcal{L}$, которые определяются равенствами:

$$\langle \mathbf{e}^j, x \rangle = x^j = \langle \mathbf{f}^j, x \rangle \quad \text{для всех} \quad x \in \mathcal{L}.$$

Таким образом,

$$\langle \mathbf{e}^j - \mathbf{f}^j, x \rangle = 0 \quad \text{для всех} \quad x \in \mathcal{L}.$$

Значит, из определения 3 равенства линейных форм получаем, что

$$\mathbf{e}^j = \mathbf{f}^j \quad \text{при} \quad j = \overline{1, n}.$$

Лемма доказана.

Справедливо следующее важное утверждение:

Лемма 8. *Пусть заданы два семейства векторов* $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m\} \subset \mathcal{L}$ *и ковекторов* $\{\mathbf{b}^1, \ldots, \mathbf{b}^m\} \subset \mathcal{L}^*$, *причем известно, что*

$$\left\langle \mathbf{b}^j, \mathbf{a}_k \right\rangle = \delta^j_k, \tag{2.5}$$

тогда оба семейства $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m\}$ *и* $\{\mathbf{b}^1, \ldots, \mathbf{b}^m\}$ *одновременно линейно независимые в* $\mathcal{L}$ *и* $\mathcal{L}^*$, *соответственно.*

Доказательство. Рассмотрим следующую линейную комбинацию:

$$\alpha^1 \cdot \mathbf{a}_1 + \cdots + \alpha^m \cdot \mathbf{a}_m = \vartheta, \tag{2.6}$$

из которого получим равенства:

$$\left\langle \mathbf{b}^j, \alpha^1 \cdot \mathbf{a}_1 + \cdots + \alpha^m \cdot \mathbf{a}_m \right\rangle = 0, \tag{2.7}$$

$$\alpha^j \left\langle \mathbf{b}^j, \mathbf{a}_j \right\rangle = 0 \Rightarrow \alpha^j = 0. \tag{2.8}$$

В силу произвольности $j = \overline{1, m}$ получаем, что семейство $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m\}$ линейно независимо. Теперь рассмотрим такую линейную комбинацию:

$$\beta_1 \cdot \mathbf{b}^1 + \cdots + \beta_m \cdot \mathbf{b}^m = \vartheta^*, \tag{2.9}$$

из которого получим равенства:

$$\left\langle \beta_1 \cdot \mathbf{b}^1 + \cdots + \beta_m \cdot \mathbf{b}^m, \mathbf{a}_k \right\rangle = 0, \tag{2.10}$$

$$\left\langle \beta_k \cdot \mathbf{b}^k, \mathbf{a}_k \right\rangle = 0 \Rightarrow \beta_k = 0. \tag{2.11}$$

В силу произвольности $k = \overline{1, m}$ приходим к выводу о линейной независимости семейства векторов $\{\mathbf{b}^1, \ldots, \mathbf{b}^m\}$.

Лемма доказана.

§ 3. Линейные формы над P^n

Над линейным пространством P^n многочленов степени не выше $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим ковекторы (линейные формы), определенные следующим образом:

$$D_t^{(s)} : P^n \to \mathbb{R}, \quad \langle D_t^{(s)}, p(t) \rangle := p^{(s)}(0), \quad s \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \tag{3.1}$$

где индексом s мы указываем порядок производной $D_t^{(s)}$.

Лемма 9. *Формы $D_t^{(s)} \in (P^n)^*$, т.е. являются линейными.*

Доказательство. Пусть $p(t), q(t) \in P^n$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ — произвольны. Тогда справедливы следующие равенства:

$$\langle D_t^{(s)}, \alpha p(t) + \beta q(t) \rangle = (\alpha p(t) + \beta q(t))^{(s)}(0) =$$
$$= \alpha p^{(s)}(0) + \beta q^{(s)}(0) = \alpha \langle D_t^{(s)}, p(t) \rangle + \beta \langle D_t^{(s)}, q(t) \rangle.$$

Лемма доказана.

Лемма 10. *Набор линейных форм $\{D_t^{(0)}, \ldots, D_t^{(n)}\}$ образуют базис линейного пространства $(P^n)^*$.*

Доказательство. *Шаг 1. Линейная независимость.* Рассмотрим линейную комбинацию этих линейных форм:

$$\alpha_0 D_t^{(0)} + \alpha_1 D_t^{(1)} + \cdots + \alpha_n D_t^{(n)} = \vartheta^*. \tag{3.2}$$

Применим обе части этого равенства к полиному t^k при $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и получим следующие равенства:

$$\langle \alpha_0 D_t^{(0)} + \alpha_1 D_t^{(1)} + \cdots + \alpha_n D_t^{(n)}, t^k \rangle = \langle \vartheta^*, t^k \rangle = 0, \tag{3.3}$$

Справедливы следующие выражения:

$$\langle D_t^{(j)}, t^k \rangle = k(k-1)\cdots(k-j+1)t^{k-j}\Big|_{t=0} = 0, \quad j \in [0, k-1], \tag{3.4}$$

$$\langle D_t^{(k)}, t^k \rangle = k!, \tag{3.5}$$

$$\langle D_t^{(j)}, t^k \rangle = 0, \quad j \in [k+1, n]. \tag{3.6}$$

Таким образом, из (3.3) с учетом (3.4)–(3.6) получим равенство:

$$\alpha_k k! = 0 \quad \text{для} \quad k = \overline{0, n}.$$

Итак, равенство (3.2) возможно тогда и только тогда, когда все коэффициенты равны нулю, т.е. семейство линейных форм $\{D_t^{(0)}, \ldots, D_t^{(n)}\} \in (P^n)^*$ линейно независимо.

Шаг 2. Базис. Из следствия 5 вытекает, что

$$\dim P^n = \dim(P^n)^*.$$

При этом, как нам уже известно, $\dim P^n = n + 1$. Но линейно независимый набор $D_t^{(0)}, \ldots, D_t^{(n)}$ состоит из $n+1$ элементов, т.е. этот набор образует базис в $(P^n)^*$.

Лемма доказана.

Лемма 11. *Набор линейных форм:*

$$\{D_t^{(0)}, \ldots, D_t^{(n)}\}$$

является взаимным базисом в $(P^n)^*$ к базису:

$$\{1, t, t^2/2, \ldots, t^n/n!\}$$

линейного пространства P^n.

Доказательство. *Шаг 1. Линейная независимость.* Прежде всего докажем, что набор $\{1, t, t^2/2, \ldots, t^n/n!\}$ образует базис линейного пространства P^n. Действительно, рассмотрим следующую линейную комбинацию:

$$\alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 \frac{t^2}{2!} + \cdots + \alpha_n \frac{t^n}{n!} = \vartheta. \tag{3.7}$$

Из этого равенства при $t = 0$ получим равенство $\alpha_0 = 0$. Дифференцируя это равенство в точке $t = 0$ получим $\alpha_1 = 0$. Продолжая дифференцировать, мы получим в итоге равенства $\alpha_0 = \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$. Итак, набор $\{1, t, t^2/2, \ldots, t^n/n!\}$ образует линейно независимое семейство в линейном пространстве P^n.

Шаг 2. Полнота. Пусть $p(t) \in P^n$. Справедливы равенства:

$$\begin{aligned} p(t) &= a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n = \\ &= a_0 1 + a_1 \frac{t}{1} + a_2 2! \frac{t^2}{2!} + \cdots + a_n n! \frac{t^n}{n!} \end{aligned} \tag{3.8}$$

Из равенства (3.8) вытекает, что набор $\{1, t, t^2/2, \ldots, t^n/n!\}$ полон в P^n. Таким образом, из первых двух шагов данного доказательства вытекает, что набор $\{1, t, t^2/2, \ldots, t^n/n!\}$ образует базис в P^n.

Шаг 3. Взаимный базис. С учетом равенств (3.4)–(3.6) мы приходим к следующему выражению:

$$\left\langle D_t^{(j)}, p(t) \right\rangle = \delta^{jk} \left\langle D_t^{(k)}, a_k \frac{t^k}{k!} \right\rangle = a_k \delta^{jk}, \tag{3.9}$$

где δ^{jk} — символ Кронекера и

$$p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 \frac{t^2}{2!} + \cdots + a_n \frac{t^n}{n!}$$

и в частности,

$$\left\langle D_t^{(j)}, \frac{t^k}{k!} \right\rangle = \delta^{jk}.$$

Отсюда и в силу результата леммы 10 приходим к выводу о том, что набор $\{D_t^{(0)}, \ldots, D_t^{(n)}\}$ — это взаимный базис в $(P^n)^*$ к базису $\{1, t, t^2/2, \ldots, t^n/n!\}$ линейного пространства P^n.

Лемма доказана.

Замечание 3. Можно получить разложение полинома $p(t) \in \in P^n$ не пользуясь формулой Тейлора, а только фактом, что базис $\{D_t^{(0)}, \ldots, D_t^{(n)}\} \subset (P^n)^*$ является взаимным к базису $\{1, t, t^2/2, \ldots, t^n/n!\}$ линейного пространства P^n. Действительно, справедлива следующая лемма:

Лемма 12. *Всякий полином $p(t) \in P^n$ разлагается по базису $\{1, t, t^2/2, \ldots, t^n/n!\}$ согласно формуле*:

$$p(t) = p(0) + p'(0)t + p''(0)\frac{t^2}{2!} + \cdots + p^{(n)}(0)\frac{t^n}{n!}. \tag{3.10}$$

Доказательство. В силу результата леммы 11 и равенства (2.4) мы приходим к выводу о том, что справедливо равенство:

$$x = \langle \mathbf{e}^j, x \rangle \cdot \mathbf{e}_j, \tag{3.11}$$

в котором нужно положить:

$$x = p(t) \in P^n, \quad \mathbf{e}^j = D_t^{(j)}, \quad \mathbf{e}_j = \frac{t^j}{j!} \tag{3.12}$$

и в результате получим равенство:

$$p(t) = \sum_{j=0}^{n} \langle D_t^{(j)}, p(t) \rangle \frac{t^j}{j!} = \sum_{j=0}^{n} p^{(j)}(0) \frac{t^j}{j!}. \tag{3.13}$$

Лемма доказана.

§ 4. Дважды сопряженное пространство

Данный параграф не входит в основной курс линейной алгебры для физиков. Однако, заинтересованному читателю мы предлагаем изучить данный параграф после изучения основного материала курса лекций.

Определение 9. *Сопряженное к линейному пространству $\mathcal{L}^*$ носит название дважды сопряженного пространства и обозначается символом $\mathcal{L}^{**}$.*

Замечание 4. Действие линейной формы из $\widehat{x} \in \mathcal{L}^{**}$ на линейном пространстве $\mathcal{L}^{*} \ni f$ мы будем обозначать следующим образом:

$$\langle \widehat{x}, f \rangle_{*}. \tag{4.1}$$

Мы используем такое обозначение, чтобы подчеркнуть, что скобки двойственности $\langle \cdot, \cdot \rangle_{*}$, вообще говоря, отличаются от $\langle \cdot, \cdot \rangle$. И это действительно имеет место в бесконечномерных пространствах. Однако, в *конечномерном случае* справедливо следующее утверждение:

Теорема 3. *Справедливо следующее равенство*:

$$\langle \widehat{x}, f \rangle_{*} = \langle f, x \rangle \quad \textit{для всех} \quad x \in \mathcal{L},\ f \in \mathcal{L}^{*}, \tag{4.2}$$

где определено линейное взаимно однозначное «отображение на»:

$$J:\ \mathcal{L} \to \mathcal{L}^{**}, \tag{4.3}$$

т.е. для каждого $\widehat{x} \in \mathcal{L}^{**}$ найдется единственное $x \in \mathcal{L}$, что справедливо равенство

$$\widehat{x} = Jx. \tag{4.4}$$

Доказательство. *Шаг 1.* Пусть $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — базис в $\mathcal{L}$, $\{\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^n\}$ — взаимный к $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ базис в $\mathcal{L}^{*}$ и, наконец, $\{\widehat{\mathbf{e}}_1, \ldots, \widehat{\mathbf{e}}_n\}$ — взаимный к $\{\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^n\}$ базис в $\mathcal{L}^{**}$. По определению 8 справедливы следующие равенства:

$$\langle \mathbf{e}^j, x \rangle = x^j, \quad x = x^j \cdot \mathbf{e}_j \Rightarrow \langle \mathbf{e}^j, \mathbf{e}_i \rangle = \delta^j_i, \tag{4.5}$$

$$\langle \widehat{\mathbf{e}}_j, f \rangle_{*} = f_j, \quad f = f_j \cdot \mathbf{e}^j \Rightarrow \langle \widehat{\mathbf{e}}_j, \mathbf{e}^i \rangle_{*} = \delta^i_j, \quad i,j = \overline{1,n}. \tag{4.6}$$

В силу леммы 9 взаимный базис $\{\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^n\} \in \mathcal{L}^{*}$ однозначно определяется базисом $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\} \in \mathcal{L}$, а взаимный базис $\{\widehat{\mathbf{e}}_1, \ldots, \widehat{\mathbf{e}}_n\} \in \mathcal{L}^{**}$ однозначно определяется базисом $\{\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^n\} \in \mathcal{L}^{*}$. Таким образом, базис $\{\widehat{\mathbf{e}}_1, \ldots, \widehat{\mathbf{e}}_n\} \in \mathcal{L}^{**}$ однозначно определяется базисом $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\} \in \in \mathcal{L}$. Введем следующее отображение:

$$J:\ \mathcal{L} \to \mathcal{L}^{**},\ \langle Jx, f \rangle_{*} \stackrel{def:}{=} \langle f, x \rangle \quad \text{для всех} \quad x \in \mathcal{L},\ f \in \mathcal{L}^{**}. \tag{4.7}$$

Шаг 2. Прежде всего докажем, что отображение J линейное. Действительно, пусть $x, y \in \mathcal{L}$, $f \in \mathcal{L}^{*}$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ — произвольны. Тогда справедливы следующие равенства:

$$\langle J(\alpha \cdot x + \beta \cdot y), f \rangle_{*} = \langle f, \alpha \cdot x + \beta \cdot y \rangle = \alpha \langle f, x \rangle + \beta \langle f, y \rangle =$$
$$= \alpha \langle Jx, f \rangle_{*} + \beta \langle Jy, f \rangle_{*} = \langle \alpha \cdot Jx + \beta \cdot Jy, f \rangle_{*},$$

из которого вытекает, что

$$\langle J(\alpha \cdot x + \beta \cdot y) - \alpha \cdot Jx - \beta \cdot Jy, f \rangle_{*} = 0 \quad \text{для всех} \quad f \in \mathcal{L}^{*}.$$

Следовательно,

$$J(\alpha \cdot x + \beta \cdot y) - \alpha \cdot Jx - \beta \cdot Jy = \vartheta^{*} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow J(\alpha \cdot x + \beta \cdot y) = \alpha \cdot Jx + \beta \cdot Jy.$$

Значит, *отображение J линейное*.

Шаг 3. Докажем, что

$$\widehat{\mathbf{e}}_i = J\mathbf{e}_i \quad \text{при} \quad i = \overline{1, n}. \tag{4.8}$$

Действительно, в силу (4.5) и (4.6) справедливы следующие равенства:

$$\begin{gathered}\langle J\mathbf{e}_i, \mathbf{e}^j \rangle_* = \langle \mathbf{e}^j, \mathbf{e}_i \rangle = \delta_i^j = \langle \widehat{\mathbf{e}}_i, \mathbf{e}^j \rangle_* \Rightarrow \langle J\mathbf{e}_i - \widehat{\mathbf{e}}_i, \mathbf{e}^j \rangle = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow f_j \langle J\mathbf{e}_i - \widehat{\mathbf{e}}_i, \mathbf{e}^j \rangle = 0 \Rightarrow \langle J\mathbf{e}_i - \widehat{\mathbf{e}}_i, f_j \cdot \mathbf{e}^j \rangle = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \langle J\mathbf{e}_i - \widehat{\mathbf{e}}_i, f \rangle = 0 \quad \text{для всех} \quad f = f_j \cdot \mathbf{e}^j \in \mathcal{L}^* \Rightarrow \\ \Rightarrow J\mathbf{e}_i - \widehat{\mathbf{e}}_i = \widehat{\vartheta} \in \mathcal{L}^{**} \Rightarrow \widehat{\mathbf{e}}_i = J\mathbf{e}_i, \end{gathered} \tag{4.9}$$

где символом $\widehat{\vartheta}$ мы обозначили нулевой вектор из $\mathcal{L}^{**}$.

Шаг 4. Докажем, что $\ker J = \{\vartheta\}$, где символом $\ker J$ мы обозначили *ядро отображения J*:

$$\ker J \stackrel{def:}{=} \{x \in \mathcal{L} : \; Jx = \widehat{\vartheta}\}.$$

Предположим, что $x \in \ker J$ и $x \neq \vartheta$. Тогда имеет место разложение

$$x = \alpha^1 \cdot \mathbf{e}_1 + \dots + \alpha^n \cdot \mathbf{e}_n, \tag{4.10}$$

причем числа $\alpha^1, \dots, \alpha^n$ одновременно в нуль не обращаются. Тогда с учетом (4.8) имеем

$$\alpha^1 \cdot \widehat{\mathbf{e}}_1 + \dots + \alpha^n \cdot \widehat{\mathbf{e}}_n = Jx = \widehat{\vartheta}. \tag{4.11}$$

Но поскольку $\{\widehat{\mathbf{e}}_1, \dots, \widehat{\mathbf{e}}_n\}$ — линейно независимое семейство (базис), то равенство (4.11) возможно тогда и только тогда, когда $\alpha^1 = \dots = \alpha^n = 0$. что противоречит тому, что числа $\alpha^1, \dots, \alpha^n$ одновременно в нуль не обращаются. Поэтому отображение $J : \mathcal{L} \to \mathcal{L}^{**}$ является *инъекцией*.

Шаг 5. Докажем, что $\operatorname{im} J = \mathcal{L}^{**}$, где символом $\operatorname{im} J$ мы обозначили *образ отображения J*:

$$\operatorname{im} J = \{\widehat{x} = Jx : \; \forall\, x \in \mathcal{L}\}.$$

Пусть $\widehat{x} = \widehat{x}^j \cdot \widehat{\mathbf{e}}_j$ — произвольный фиксированный вектор. Тогда в силу (4.8) и линейности отображения J имеем

$$\widehat{x} = \widehat{x}^j \cdot \widehat{\mathbf{e}}_j = \widehat{x}^j \cdot J\mathbf{e}_j = J(\widehat{x}^j \cdot \mathbf{e}_j) = Jx, \quad x = \widehat{x}^j \cdot \mathbf{e}_j \in \mathcal{L}. \tag{4.12}$$

Таким образом, отображение J *сюръекция*.

Шаг 6. Следовательно, линейное в силу шага 2 отображение $J : \mathcal{L} \to \mathcal{L}^{**}$ является изоморфизмом. Поэтому для любого $\widehat{x} \in \mathcal{L}^{**}$ найдется такое единственное $x \in \mathcal{L}$, что для всех $f \in \mathcal{L}$ будут справедливы следующие равенства:

$$\langle \widehat{x}, f \rangle_* = \langle Jx, f \rangle_* = \langle f, x \rangle.$$

Теорема доказана.

Лемма 13. *Для любой линейной формы (ковектора) $f \in \mathcal{L}^*$ справедливо равенство*

$$f = \langle f, \mathbf{e}_j \rangle \cdot \mathbf{e}^j, \tag{4.13}$$

где $\{\mathbf{e}^1, \dots, \mathbf{e}^n\} \in \mathcal{L}^*$ — взаимный базис к базису $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\} \in \mathcal{L}$.

Доказательство. *Первый вариант.* Пусть $\{\mathbf{e}^1, \dots, \mathbf{e}^n\} \in \mathcal{L}^*$ — взаимный базис к базису $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\} \in \mathcal{L}$ и $f \in \mathcal{L}^*$ — произвольная линейная форма, а $\{\widehat{\mathbf{e}}_1, \dots, \widehat{\mathbf{e}}_n\} \in \mathcal{L}^{**}$ взаимный базис к базису $\{\mathbf{e}^1, \dots, \mathbf{e}^n\} \in \mathcal{L}^*$. Напомню, что тогда справедливы следующие равенства:

$$f = f_j \cdot \mathbf{e}^j, \quad \langle \widehat{\mathbf{e}}_j, f \rangle_* = f_j. \tag{4.14}$$

Тогда в силу равенства (4.2) теоремы 3 получаем равенство:

$$\langle \widehat{\mathbf{e}}_j, f \rangle_* = \langle f, \mathbf{e}_j \rangle. \tag{4.15}$$

Стало быть, из (4.14) и (4.15) вытекает равенство (4.13).

Второй вариант. Пусть $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ — базис в $\mathcal{L}$, а $\{\mathbf{e}^1, \dots, \mathbf{e}^n\}$ — взаимный базис в $\mathcal{L}^*$. Тогда справедливы следующие равенства:

$$x = x^j \cdot \mathbf{e}_j, \quad \langle \mathbf{e}^j, x \rangle = x^j,$$

$$\langle f, x \rangle = \langle f, x^j \cdot \mathbf{e}_j \rangle = x^j \langle f, \mathbf{e}_j \rangle = \langle \mathbf{e}^j, x \rangle \langle f, \mathbf{e}_j \rangle = \langle \langle f, \mathbf{e}_j \rangle \cdot \mathbf{e}^j, x \rangle.$$

Поскольку $x \in \mathcal{L}$ — произвольный вектор, то

$$f = \langle f, \mathbf{e}_j \rangle \cdot \mathbf{e}^j.$$

Лемма доказана.

§ 5. Примеры решения задач

Задача 1. На линейном пространстве P^n многочленов с вещественными коэффициентами над полем вещественных чисел заданы линейные формы:

$$\left\langle l^i, p(t) \right\rangle := \int\limits_0^{i+1} p(t)\, dt, \quad i = 0, 1, \dots, n. \tag{5.1}$$

Доказать, что они образуют базис в пространстве $(P^n)^*$.

Решение. Прежде всего понятно, что формы $l^i \in (P^n)^*$ для всех $i = 0, 1, \dots, n$. Этих линейных форм $(n+1)$–штука. Поэтому нам достаточно доказать, что эти линейные формы линейно независимы, поскольку:

$$\dim P^n = \dim (P^n)^* = n + 1.$$

Итак рассмотрим произвольную линейную комбинацию:

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i l^i = \vartheta^*. \tag{5.2}$$

Из (5.2) получаем равенство:

$$\left\langle \sum_{i=0}^{n} \alpha_i l^i, p(t) \right\rangle = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \int_0^{i+1} p(t)\,dt = 0. \tag{5.3}$$

Заметим, что:

$$D_t:\ P^{n+1} \to P^n. \tag{5.4}$$

Поэтому для любого полинома $q(t) \in P^{n+1}$ имеем $q'(t) \in P^n$. Поскольку равенство (5.3) выполнено для любого $p(t) \in P^n$, то получаем равенство:

$$\left\langle \sum_{i=0}^{n} \alpha_i l^i, q'(t) \right\rangle = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i q(i+1) - q(0) \sum_{i=0}^{n} \alpha_i = 0 \tag{5.5}$$

для любого $q(t) \in P^{n+1}$. Рассмотрим сначала такой полином:

$$q_1(t) = t(t-2)(t-3)\cdots(t-n-1) \in P^{n+1}. \tag{5.6}$$

После подстановки в (5.5) получим равенство $\alpha_0 = 0$. Теперь рассмотрим такой полином:

$$q_2(t) = t(t-1)(t-3)\cdots(t-n-1) \in P^{n+1}. \tag{5.7}$$

После подстановки в (5.5) получим равенство $\alpha_1 = 0$. Продолжая таким образом, на последнем шаге рассмотрим такой полином:

$$q_{n+1}(t) = t(t-1)(t-3)\cdots(t-n) \in P^{n+1}. \tag{5.8}$$

После подстановки в (5.5) получим равенство $\alpha_n = 0$. Таким образом, линейная независимость доказана.

Задача 2. Пусть на линейном пространстве P^n заданы линейные формы:

$$\left\langle l^i, p(t) \right\rangle = p(t_i), \quad i = 0, 1, \ldots, n, \tag{5.9}$$

причем точки $t_0, t_1, \ldots, t_n$ лежат на вещественной оси и попарно различные. Доказать, что эти линейные формы образуют базис в $(P^n)^*$ и построить такой базис в P^n, взаимный к которому будет совпадать с этими линейными формами.

Решение. Рассмотрим $(n+1)$–штук полиномов:

$$p_0(t) = \frac{1}{a_0}(t-t_1)\cdots(t-t_n), \tag{5.10}$$

$$a_0 := (t_0-t_1)\cdots(t_0-t_n), \tag{5.11}$$

$$p_1(t) = \frac{1}{a_1}(t-t_0)(t-t_2)\cdots(t-t_n), \tag{5.12}$$

$$a_1 := (t_1-t_0)(t_1-t_2)\cdots(t_1-t_n), \tag{5.13}$$

$$p_2(t) = \frac{1}{a_2}(t-t_0)(t-t_1)(t-t_3)\cdots(t-t_n), \tag{5.14}$$

$$a_2 := (t_2 - t_0)(t_2 - t_3) \cdots (t_2 - t_n), \tag{5.15}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$p_n(t) = \frac{1}{a_n}(t - t_0)(t - t_1) \cdots (t - t_{n-1}), \tag{5.16}$$

$$a_n := (t_n - t_0)(t_n - t_1) \cdots (t_n - t_{n-1}). \tag{5.17}$$

Докажем, что эти полиномы линейно независимые. Действительно, рассмотрим равенство:

$$\alpha^0 p_0(t) + \alpha^1 p_1(t) + \cdots + \alpha^n p_n(t) = \vartheta. \tag{5.18}$$

Если последовательно подставить в равенство (5.18) точки $t = t_0$, $t = t_1, \ldots, t = t_n$ мы получим, что

$$\alpha^0 = \alpha^1 = \cdots = \alpha^n = 0,$$

т.е. семейство полиномов $\{p_0(t), p_1(t), \ldots, p_n(t)\}$ линейно независимо. Поскольку

$$\dim P^n = n + 1$$

мы приходим к выводу о том, что семейство $\{p_0(t), p_1(t), \ldots, p_n(t)\}$ образует базис в P^n. Кроме того, имеем

$$\left\langle l^j, p_i(t) \right\rangle = \delta_i^j \quad \text{для всех} \quad i, j = 0, 1, \ldots, n. \tag{5.19}$$

Таким образом, семейство линейных форм $\{l^0, l^1, \ldots, l^n\}$ образует взаимный базис в $(P^n)^*$ к базису $\{p_0(t), p_1(t), \ldots, p_n(t)\}$.

Задача 3. В линейном пространстве комплексных квадратных матриц $\mathbb{C}^{n\times n}$ заданы линейные формы:

$$\langle l^{pq}, A \rangle := \operatorname{tr}(U^p V^q A), \quad A \in \mathbb{C}^{n\times n}, \tag{5.20}$$

$$U = \begin{pmatrix} e^{2\pi i/n} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{4\pi i/n} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.21}$$

Доказать, что эти функции образуют базис в пространстве линейных форм на $\mathbb{C}^{n\times n}$. Найти базис в $\mathbb{C}^{n\times n}$, двойственным к которому является указанное семейство линейных форм.

Решение. Рассмотрим следующее семейство матриц:

$$A_{kj} := \frac{1}{n} V^{-j} U^{-k}, \quad j, k = \overline{1, n}. \tag{5.22}$$

В силу свойств следа справедливы равенства:

$$\langle l^{pq}, A_{kj} \rangle = \operatorname{tr}\left(U^p V^q \frac{1}{n} V^{-j} U^{-k} \right) = \frac{1}{n} \operatorname{tr}\left(U^p V^{q-j} U^{-k} \right) =$$

$$= \frac{1}{n}\,\mathrm{tr}\left(U^{-1}U^{p}V^{q-j}U^{-k+1}\right) = \dots = \frac{1}{n}\,\mathrm{tr}\left(U^{p-k}V^{q-j}\right). \quad (5.23)$$

Заметим, что справедливо равенство:

$$U^{m} = \begin{pmatrix} e^{2\pi i m/n} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{4\pi i m/n} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad m \in \mathbb{N}, \qquad (5.24)$$

причем $U^{n} = E_{n}$ — единичная матрица порядка $n \in \mathbb{N}$. Введем следующие обозначения:

$$I^{j} = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0), \quad I_{k} = (I^{k})^{T}, \qquad (5.25)$$

где на месте j–го столбца располагается число 1, а на месте остальных столбцов располагается число 0. Тогда матрицу V можно в блочном виде представить в следующем виде:

$$V = \begin{Vmatrix} I^{n} \\ I^{1} \\ \vdots \\ I^{n-1} \end{Vmatrix} = \|I_{2}, I_{3}, \dots, I_{n}, I_{1}\|, \quad I^{j}\cdot I_{k} = \delta^{j}_{k}. \qquad (5.26)$$

Заметим, что справедливы равенства:

$$V^{2} = V\cdot V = \begin{Vmatrix} I^{n} \\ I^{1} \\ \vdots \\ I^{n-1} \end{Vmatrix} \cdot \|I_{2}, I_{3}, \dots, I_{n}, I_{1}\| =$$

$$= \begin{Vmatrix} I^{n-1} \\ I^{n} \\ I^{1} \\ \vdots \\ I^{n-2} \end{Vmatrix} = \|I_{3}, I_{4}, \dots, I_{n}, I_{1}, I_{2}\|. \qquad (5.27)$$

Предположим, что

$$V^k = \left\| \begin{matrix} I^{n-k+1} \\ I^{n-k+2} \\ \vdots \\ I^n \\ I^1 \\ I^2 \\ \vdots \\ I^{n-k} \end{matrix} \right\| = \|I_{k+1}, I_{k+2}, \ldots, I_n, I_1, I_2, \ldots, I_k\| . \tag{5.28}$$

Тогда имеем:

$$V^{k+1} = V \cdot V^k = \left\| \begin{matrix} I^n \\ I^1 \\ \vdots \\ I^{n-1} \end{matrix} \right\| \cdot \|I_{k+1}, I_{k+2}, \ldots, I_n, I_1, I_2, \ldots, I_k\| =$$

$$= \left\| \begin{matrix} I^{n-k} \\ I^{n-k+1} \\ \vdots \\ I^n \\ I^1 \\ I^2 \\ \vdots \\ I^{n-k-1} \end{matrix} \right\| = \|I_{k+2}, I_{k+3}, \ldots, I_n, I_1, I_2, \ldots, I_{k+1}\| . \tag{5.29}$$

По индукции получаем, что для V^k при $k = \overline{1, n}$ справедливы равенства (5.28), причем:

$$V^n = \left\| \begin{matrix} I^1 \\ I^2 \\ \vdots \\ I^n \end{matrix} \right\| = \|I_1, I_2, \ldots, I_n\| = E_n, \tag{5.30}$$

где E_n — единичная матрица порядка $n \in \mathbb{N}$. Кроме того, заметим, что для любого $k = 1, \ldots, n-1$ у матрицы V^k на главной диагонали расположены нули, а матрицы U^k для всех $k = 0, 1, \ldots, n$ являются диагональными. Поэтому для любых $r, s \in \mathbb{N}$ у произведения матриц $U^r V^s$ на главной диагонали тоже расположены нули. Продолжим равенство (5.23) при $p > k$ и $q > j$:

$$\frac{1}{n} \operatorname{tr}\left(U^{p-k} V^{q-j}\right) = \frac{1}{n} \operatorname{tr}\left(U^{p-k} V^{q-j}\right) = 0. \tag{5.31}$$

Рассмотрим теперь случай, когда $p < k$ и $q < j$. Тогда справедливо равенство:

$$\frac{1}{n}\operatorname{tr}\left(U^{p-k}V^{q-j}\right) = \frac{1}{n}\operatorname{tr}\left(E_n U^{p-k}V^{q-j}E_n\right) = \\ = \frac{1}{n}\operatorname{tr}\left(U^n U^{p-k}V^{q-j}V^n\right) = \frac{1}{n}\operatorname{tr}\left(U^{n+p-k}V^{n+q-j}\right) = 0, \quad (5.32)$$

где мы воспользовались равенством (5.31). Теперь рассмотрим случай $p < k$ и $q > j$:

$$\frac{1}{n}\operatorname{tr}\left(U^{p-k}V^{q-j}\right) = \frac{1}{n}\operatorname{tr}\left(E_n U^{p-k}V^{q-j}\right) = \\ = \frac{1}{n}\operatorname{tr}\left(U^n U^{p-k}V^{q-j}\right) = \frac{1}{n}\operatorname{tr}\left(U^{n+p-k}V^{q-j}\right) = 0. \quad (5.33)$$

Наконец, рассмотрим случай $p > k$ и $q < j$:

$$\frac{1}{n}\operatorname{tr}\left(U^{p-k}V^{q-j}\right) = \frac{1}{n}\operatorname{tr}\left(U^{p-k}V^{q-j}E_n\right) = \\ = \frac{1}{n}\operatorname{tr}\left(U^{p-k}V^{q-j}V^n\right) = \frac{1}{n}\operatorname{tr}\left(U^{p-k}V^{n+q-j}\right) = 0. \quad (5.34)$$

Осталось рассмотреть последний случай $p = k$ и $q = j$:

$$\frac{1}{n}\operatorname{tr}\left(U^{p-k}V^{q-j}\right) = \frac{1}{n}\operatorname{tr}\left(E_n E_n\right) = \frac{1}{n}\operatorname{tr} E_n = 1. \quad (5.35)$$

Таким образом, из (5.23) с учетом (5.31)–(5.35) приходим к выводу о том, что:

$$\langle l^{pq}, A_{kj}\rangle = \delta^p_k \delta^q_j. \quad (5.36)$$

Осталось воспользоваться результатом леммы 8.

В целях практики докажем непосредственно, что семейство матриц $\{A_{kj}\}$, определенное равенством (5.22), является линейно независимым. Справедливо равенство:

$$A_{kj} = \frac{1}{n}V^{-j}U^{-k} = \frac{1}{n}E_n V^{-j}E_n U^{-k} = \frac{1}{n}V^n V^{-j}U^n U^{-k} = \\ = \frac{1}{n}V^{n-j}U^{n-k} = \frac{1}{n}V^r U^s, \quad r = n-j,\ s = n-k. \quad (5.37)$$

Поэтому нам необходимо и достаточно доказать, что семейство матриц $\{B_{rs}\}$, где

$$B_{rs} := \frac{1}{n}V^r U^s, \quad r, s = \overline{1, n}, \quad (5.38)$$

линейно независимо. Прежде всего заметим, что

$$U^s = \operatorname{diag}\{\lambda^s, \lambda^{2s}, \ldots, \lambda^{ns}\}, \quad s = \overline{1, n}, \quad \lambda := e^{2\pi i/n}. \quad (5.39)$$

Рассмотрим равенство:

$$\sum_{r,s=1,1}^{n,n} \alpha^{rs} B_{rs} = O \in \mathbb{C}^{n\times n}, \tag{5.40}$$

которое для удобства перепишем в следующем виде:

$$\sum_{r=1}^{n} V^r \left(\sum_{s=1}^{n} \alpha^{rs} U^s \right) = O. \tag{5.41}$$

Отметим, что

$$\sum_{s=1}^{n} \alpha^{rs} U^s = \operatorname{diag} \left\{ \sum_{s=1}^{n} \alpha^{rs} \lambda^s, \sum_{s=1}^{n} \alpha^{rs} \lambda^{2s}, \ldots, \sum_{s=1}^{n} \alpha^{rs} \lambda^{ns} \right\}. \tag{5.42}$$

Можно заметить, поскольку матрицы V^{r_1} и V^{r_2} осуществляют перестановки строк диагональных матриц (5.42) при $r = r_1$ и $r = r_2$, на которые умножаются слева, причем при $r_1 \neq r_2$ у матриц

$$V^{r_1} \left(\sum_{s=1}^{n} \alpha^{r_1 s} U^s \right) \quad \text{и} \quad V^{r_2} \left(\sum_{s=1}^{n} \alpha^{r_2 s} U^s \right)$$

при $r_1 \neq r_2$ и $r_1, r_2 = \overline{1,n}$ ненулевыми являются попарно различные ячейки. Поэтому из (5.42) для каждого $r = \overline{1,n}$ вытекает квадратная однородная система уравнений:

$$\begin{cases} \alpha^{r1}\lambda + \alpha^{r2}\lambda^2 + \cdots + \alpha^{rn}\lambda^n = 0, \\ \alpha^{r1}\lambda^2 + \alpha^{r2}\lambda^4 + \cdots + \alpha^{rn}\lambda^{2n} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha^{r1}\lambda^n + \alpha^{r2}\lambda^{2n} + \cdots + \alpha^{rn}\lambda^{nn} = 0. \end{cases} \tag{5.43}$$

Рассмотрим определитель матрицы этой системы уравнений:

$$\begin{vmatrix} \lambda & \lambda^2 & \cdots & \lambda^n \\ \lambda^2 & \lambda^4 & \cdots & \lambda^{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda^n & \lambda^{2n} & \cdots & \lambda^{nn} \end{vmatrix}. \tag{5.44}$$

Модно проверить, что при $\lambda = e^{2\pi i/n}$ этот определитель отличен от нуля. Следовательно, из (5.43) получим, что

$$\alpha^{r1} = \alpha^{r2} = \cdots = \alpha^{rn} = 0 \quad \text{для всех} \quad r = \overline{1,n}. \tag{5.45}$$

Таким образом, равенство (5.40) выполнено тогда и только тогда, когда выполнены равенства (5.45), т.е. семейство матриц $\{B_{rs}\}$, а вместе с ним и семейство матриц $\{A_{kj}\}$ линейно независимо. Число матриц в семействе $\{A_{kj}\}$ равно $n^2 = \dim \mathbb{C}^{n\times n}$. Следовательно, семейство матриц $\{A_{kj}\}$ образует базис в линейном пространстве $\mathbb{C}^{n\times n}$. Тогда в силу

(5.36) семейство линейных форм $\{l^{pq}\}$ образует базис в сопряженном пространстве $(\mathbb{C}^{n\times n})^*$.

З а д а ч а 4. Доказать, что всякое k–мерное подпространство n–мерного подпространства является пересечением ядер некоторых $n-k$ линейных форм.

Решение. Пусть $\mathcal{P}$ — линейное подпространство линейного пространства $\mathcal{L}$, причем $\dim\mathcal{P} = k$, $\dim\mathcal{L} = n$. Выберем базис $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_{k+1}, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ линейного пространства $\mathcal{L}$ таким образом, чтобы $\mathcal{P} = L(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k)$. Тогда имеем:

$$\mathcal{L} = \mathcal{P} \oplus L(\mathbf{e}_{k+1}, \ldots, \mathbf{e}_n). \tag{5.46}$$

Пусть $\{\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^n\}$ — взаимный базис в $\mathcal{L}^*$ к базису $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$. Тогда если $x \in \mathcal{P}$, то

$$\langle \mathbf{e}^j, x\rangle = \langle \mathbf{e}^j, \sum_{s=1}^{k} x^s \mathbf{e}_s\rangle = \sum_{s=1}^{k} x^s \langle \mathbf{e}^j, \mathbf{e}_s\rangle = \sum_{s=1}^{k} x^s \delta^j_s = 0 \tag{5.47}$$

при $j = \overline{k+1, n}$. Заметим, что если $y \neq \vartheta$ и $y \notin \mathcal{P} = L(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k)$, то найдется такое $j \in \overline{k+1, n}$, что $y^j \neq 0$ и поэтому имеем:

$$\langle \mathbf{e}^j, y\rangle = y^j \neq 0. \tag{5.48}$$

Таким образом, система уравнений:

$$\langle \mathbf{e}^{k+1}, x\rangle = 0, \ldots, \langle \mathbf{e}^n, x\rangle = 0 \tag{5.49}$$

определяет векторы из $\mathcal{P}$ и только их. Отсюда получаем, что

$$\mathcal{P} = \bigcap_{j=k+1}^{n} \ker(\mathbf{e}^j). \tag{5.50}$$

З а д а ч а 5. Пусть f — ненулевая линейная форма на векторном пространстве $\mathcal{L}$ (не обязательно конечномерном) и $\mathcal{P} = \ker f$. Доказать, что:

a) $\mathcal{P}$ — максимальное подпространство в $\mathcal{L}$, т.е. не содержится ни в каком другом подпространстве, отличном от $\mathcal{L}$;

b) справедливо представление: $\mathcal{L} = \mathcal{P} \oplus L(a)$ для любого $a \notin \mathcal{P}$.

Решение. Пусть $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — некоторый фиксированный базис в $\mathcal{L}$, а $\{\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^n\}$ — взаимный базис в $\mathcal{L}^*$. В таком случае справедливо представление:

$$f = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \mathbf{e}^j, \quad (\beta_1, \ldots, \beta_n) \neq (0, \ldots, 0). \tag{5.51}$$

Поэтому справедливо равенство:

$$x \in \ker f \Leftrightarrow \langle f, x\rangle = 0 \Leftrightarrow \beta_1 x^1 + \cdots + \beta_n x^n = 0, \tag{5.52}$$

$$x = \mathbf{E}\cdot X_e, \quad \mathbf{E} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n), \quad X_e = (x^1, \ldots, x^n)^T. \tag{5.53}$$

Пусть $\mathcal{N} \subset \mathbb{K}^{n\times 1}$ — линейное пространство решений однородной системы уравнений (5.52). Поскольку $(\beta_1, \dots, \beta_n) \neq (0, \dots, 0)$, то $\dim \mathcal{N} = n - 1$. Пусть $X_1, \dots, X_n$ — базис в $\mathcal{N}$. Рассмотрим векторы:

$$x_1 = \mathbf{E} \cdots X_1, \dots, x_{n-1} = \mathbf{E} \cdot X_{n-1}. \tag{5.54}$$

Поскольку столбцы $\{X_1, \dots, X_{n-1}\}$ линейно независимы в $\mathbb{K}^{n\times 1}$, то векторы $\{x_1, \dots, x_n\}$ линейно независимы в $\mathcal{L}$ тоже и образуют базис в $\ker f$. Поэтому ответ на вопрос a) очевиден, поскольку другого подпространства в $\mathcal{L}$ размерности меньшей, чем $\dim \mathcal{L}$, которое содержало бы $\ker f$ нет. А поскольку $\dim \ker f = n - 1$, то для любого вектора $a \notin \ker f$ семейство векторов $\{x_, \dots, x_{n-1}, a\}$ линейно независимо и состоит из n векторов. Стало быть, $\mathcal{L} = \ker f \oplus L(a)$. Это ответ на вопрос b).

З а д а ч а 6. Доказать, что если две линейные формы на векторном пространстве $\mathcal{L}$ имеют одинаковые ядра, то они различаются линейным множителем.

Решение. Пусть $f_1, f_2 \in \mathcal{L}^*$. Если:

$$\ker f_1 = \ker f_2 = \mathcal{L}, \tag{5.55}$$

то, очевидно, $f_1 = f_2 = \vartheta^*$. Пусть $\dim \ker f_1 = \dim \ker f_2 < \dim \mathcal{L}$. В силу решения предыдущей задачи имеем:

$$\dim \ker f_1 = \dim \ker f_2 = n - 1, \quad n := \dim \mathcal{L}. \tag{5.56}$$

Пусть $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{n-1}, \mathbf{e}_n\}$ такой базис в $\mathcal{L}$, что $\ker f_1 = \ker f_2 = L(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{n-1})$. Пусть $\{\mathbf{e}^1, \dots, \mathbf{e}^n\}$ — взаимный базис в $\mathcal{L}^*$. Тогда справедливы разложения:

$$f_1 = \alpha_1 \mathbf{e}^1 + \dots + \alpha_n \mathbf{e}^n, \quad f_2 = \beta_1 \mathbf{e}^1 + \dots + \beta_n \mathbf{e}^n. \tag{5.57}$$

Поскольку для $x \in \ker f_1 = \ker f_2$ имеем $\langle f_1, x\rangle = \langle f_2, x\rangle = 0$, то получаем, что $\alpha_1 = \dots = \alpha_{n-1} = 0$ и $\beta_1 = \dots = \beta_{n-1} = 0$. Итак, получаем, что:

$$f_1 = \alpha_n \mathbf{e}^n, \quad f_2 = \beta_n \mathbf{e}^n, \quad \alpha_n \neq 0, \quad \beta_n \neq 0. \tag{5.58}$$

Итак, имеем:

$$f_2 = \frac{\beta_n}{\alpha_n} f_1. \tag{5.59}$$

З а д а ч а 7. Доказать, что n линейных форм на n–мерном линейном пространстве $\mathcal{L}$ линейно независимы тогда и только тогда, когда пересечение их ядер есть нулевое подпространство.

Решение. Необходимость. Пусть линейные формы $\{\mathbf{f}^1, \dots, \mathbf{f}^n\}$ — линейно независимы в $\mathcal{L}^*$. Тогда в $\mathcal{L}^{**}$ существует взаимный базис $\{\widehat{\mathbf{e}}_1, \dots, \widehat{\mathbf{e}}_n\}$:

$$\langle \widehat{\mathbf{e}}_j, \mathbf{f}^k\rangle_* = \delta_j^k. \tag{5.60}$$

Известно, что существует естественный изоморфизм $J : \mathcal{L}^{**} \to \mathcal{L}$ такой, что для любого $\widehat{x} \in \mathcal{L}^{**}$ существует единственный $x \in \mathcal{L}$ такой, что:

$$\langle \widehat{x}, f \rangle_* := \langle f, J\widehat{x} \rangle = \langle f, x \rangle \tag{5.61}$$

для любого $f \in \mathcal{L}^*$. Поэтому существует такой базис $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ в $\mathcal{L}$, что:

$$\delta_k^j = \langle \widehat{\mathbf{e}}_j, \mathbf{f}^k \rangle_* = \langle \mathbf{f}^k, J\widehat{\mathbf{e}}_j \rangle = \langle \mathbf{f}^k, \mathbf{e}_j \rangle. \tag{5.62}$$

Таким образом, базис $\{\mathbf{f}^1, \ldots, \mathbf{f}^n\}$ в $\mathcal{L}^*$ является взаимным к базису $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ в $\mathcal{L}$. Справедливы соотношения:

$$x \in \bigcap_{j=1}^{n} \ker \mathbf{f}^j \Leftrightarrow \langle \mathbf{f}^1, x \rangle = 0, \cdots, \langle \mathbf{f}^n, x \rangle = 0, \tag{5.63}$$

$$x = \mathbf{E} \cdot X_e, \quad \mathbf{E} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n), \quad X_e = (x^1, \ldots, x^n)^T. \tag{5.64}$$

Поэтому система уравнений (5.63) эквивалентна равенствам:

$$x^1 = 0, \cdots, x^n = 0 \Rightarrow x = \mathbf{E} \cdot O = \vartheta. \tag{5.65}$$

Таким образом,

$$\bigcap_{j=1}^{n} \ker \mathbf{f}^j = \{\vartheta\}. \tag{5.66}$$

Достаточность. Пусть теперь:

$$\bigcap_{j=1}^{n} \ker \mathbf{f}^j = \{\vartheta\}. \tag{5.67}$$

И при этом семейство линейных форм $\{\mathbf{f}^1, \ldots, \mathbf{f}^n\}$ линейно зависимо. Пусть, например, $\{\mathbf{f}^1, \ldots, \mathbf{f}^r\}$ при $1 \leqslant r < n$ базис в $L(\mathbf{f}^1, \ldots, \mathbf{f}^n)$. Тогда справедливы соотношения:

$$x \in \bigcap_{j=1}^{n} \ker \mathbf{f}^j \Leftrightarrow \langle \mathbf{f}^1, x \rangle = 0, \cdots, \langle \mathbf{f}^r, x \rangle = 0. \tag{5.68}$$

Дополним семейство векторов $\{\mathbf{f}^1, \ldots, \mathbf{f}^r\}$ векторами $\{\mathbf{g}^{r+1}, \ldots, \mathbf{g}^n\}$ до базиса в $\mathcal{L}^*$. И пусть, наконец, $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ такой базис в $\mathcal{L}$, что семейство векторов $\{\mathbf{f}^1, \ldots, \mathbf{f}^r, \mathbf{g}^{r+1}, \ldots, \mathbf{g}^n\}$ является взаимным базисом в $\mathcal{L}^*$ к $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$, который существует, что было доказано в предыдущем пункте при доказательстве *необходимости*. Но тогда такой вектор:

$$x = x^j \mathbf{e}_j, \quad x^1 = 0, \ldots, x^r = 0, \quad x^{r+1} = \cdots = x^n = 1 \tag{5.69}$$

является решением системы уравнений (5.68), хотя он не нулевой! Значит, семейство линейных форм $\{\mathbf{f}^1, \ldots, \mathbf{f}^n\}$ линейно независимо.

З а д а ч а 8. Доказать, что векторы $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k\}$ конечномерного пространства $\mathcal{L}$ линейно независимы тогда и только тогда, когда существуют линейные формы $\{\mathbf{f}^1, \ldots, \mathbf{f}^k\} \subset \mathcal{L}^*$ такие, что

$$\begin{vmatrix} \langle \mathbf{f}^1, \mathbf{e}_1 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{f}^1, \mathbf{e}_k \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \mathbf{f}^k, \mathbf{e}_1 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{f}^k, \mathbf{e}_k \rangle \end{vmatrix} \neq 0. \tag{5.70}$$

Решение. Необходимость. Пусть семейство векторов $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k\}$ линейно независимо в $\mathcal{L}$. Дополним это семейство до базиса в $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_{k+1}, \ldots, \mathbf{e}_n\}$. Пусть $\{\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^n\}$ — взаимный базис в $\mathcal{L}^*$. Тогда в качестве семейства векторов $\{\mathbf{f}^1, \ldots, \mathbf{f}^k\}$ можно взять семейство $\{\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^k\}$ и тогда определитель (5.70) примет следующий вид:

$$\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 1. \tag{5.71}$$

Достаточность. Пусть существует такое семейство линейных форм $\{\mathbf{f}^1, \ldots, \mathbf{f}^k\} \subset \mathcal{L}^*$, что определитель (5.70) отличен от нуля, но тем не менее семейство векторов $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k\}$ линейно зависимо в $\mathcal{L}$. Поэтому справедливо равенство:

$$\alpha^1 \mathbf{e}_1 + \cdots + \alpha^k \mathbf{e}_k = \mathbf{0}, \quad (\alpha^1, \ldots, \alpha^k) \neq (0, \ldots, 0). \tag{5.72}$$

Применим к равенству (5.72) последовательно линейные формы семейства $\{\mathbf{f}^1, \ldots, \mathbf{f}^k\}$ и получим следующие равенства:

$$\alpha^1 \langle \mathbf{f}^j, \mathbf{e}_1 \rangle + \cdots + \alpha^k \langle \mathbf{f}^j, \mathbf{e}_k \rangle = 0, \quad j = \overline{1, k}, \tag{5.73}$$

из которых вытекает такое равенство:

$$\alpha^1 \begin{pmatrix} \langle \mathbf{f}^1, \mathbf{e}_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle \mathbf{f}^k, \mathbf{e}_1 \rangle \end{pmatrix} + \cdots + \alpha^k \begin{pmatrix} \langle \mathbf{f}^1, \mathbf{e}_k \rangle \\ \vdots \\ \langle \mathbf{f}^k, \mathbf{e}_k \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{5.74}$$

причем $(\alpha^1, \ldots, \alpha^k) \neq (0, \ldots, 0)$ т.е. столбцы определителя (5.70) линейно зависимы. Пришли к противоречию.

З а д а ч а 9. Пусть $l_1, l_2 \in \mathcal{L}^*$, причем

$$\langle l_1, x \rangle \langle l_2, x \rangle = 0 \quad \text{для всех} \quad x \in \mathcal{L}. \tag{5.75}$$

Доказать, что одна из линейных форм $\{l_1, l_2\}$ нулевая.

Решение. Пусть выполнены все условия задачи, но тем не менее обе линейные формы $l_1 \neq \vartheta^*$ и $l_2 \neq \vartheta^*$. Нужно рассмотреть два случая:

Случай 1. Линейные формы $\{l_1, l_2\}$ линейно зависимы. Поэтому найдется такое $\alpha \in \mathbb{K}$, что

$$l_2 = \alpha l_1, \tag{5.76}$$

но тогда из (5.79) получаем равенство:

$$\alpha\left(\langle l_1, x\rangle\right)^2 = 0 \quad \text{для всех} \quad x \in \mathcal{L} \Leftrightarrow l_1 = \vartheta^*. \tag{5.77}$$

Пришли к противоречию.

Случай 2. Линейные формы $\{l_1, l_2\}$ линейно независимы. Дополним, если нужно семейство $\{l_1, l_2\}$ до базиса $\{l_1, l_2, \ldots, l_n\}$ в $\mathcal{L}^*$. Пусть $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — такой базис в $\mathcal{L}$, что семейство $\{l_1, l_2, \ldots, l_n\}$ является взаимным базисом в $\mathcal{L}^*$. Пусть $x \in \mathcal{L}$ — произвольный вектор. Тогда имеем:

$$0 = \langle l_1, x\rangle\langle l_2, x\rangle = x^1 x^2, \quad x = x^j \mathbf{e}_j. \tag{5.78}$$

Пришли к противоречию, поскольку для вектора

$$x = \mathbf{E} \cdot X_e, \quad X_e^T = (1, 1, 1, \ldots, 1), \quad \langle l_1, x\rangle\langle l_2, x\rangle = 1.$$

Таким образом, одна из линейных форм нулевая.

З а д а ч а 10. Пусть $\{l_1, \ldots, l_m\} \subset \mathcal{L}^*$, причем

$$\langle l_1, x\rangle \cdots \langle l_m, x\rangle = 0 \quad \text{для всех} \quad x \in \mathcal{L}. \tag{5.79}$$

Доказать, что одна из линейных форм $\{l_1, \ldots, l_m\}$ нулевая.

Решение. Итак, по условию задачи имеем:

$$\mathcal{L} = \bigcup_{j=1}^{m} \ker l_j. \tag{5.80}$$

Осталось воспользоваться решением задачи 17 первой лекции и получить, что по крайней мере одно ядро $\ker l_k = \mathcal{L}$, т.е. линейная форма $l_k = \vartheta^*$.

Лекция 6

ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

§ 1. Преобразование базисов и координат

Прежде всего введем (или напомним) обозначения, которые мы будем использовать на протяжении всех лекций. Прежде всего укажем, что для матрицы $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, т.е. состоящей из m строк и n столбцов используются три формы записи для элементов матрицы. Первая запись — a^j_k, вторая форма — a_{jk}, и, наконец, третья форма a^{jk}, где $j \in \overline{1,m}$ нумерует строчки матрицы, $k \in \overline{1,n}$ — нумерует столбцы матрицы, на пересечении которых находится соответствующий элемент из поля $\mathbb{K}$.

Пусть $A \in \mathbb{K}^{m\times p}$, $B \in \mathbb{K}^{p\times n}$ — две произвольные матрицы. Произведение $C = A \cdot B \in \mathbb{K}^{m\times n}$ в обозначениях Эйнштейна можно записать следующими шестью способами:

$$c^j_k = a^j_s b^s_k, \quad c_{jk} = a_{js} b_{sk}, \quad c^j_k = a^j_s b_{sk}, \quad c_{jk} = a_{js} b^s_k,$$
$$c^{jk} = a^{js} b^{sk}, \quad c^{jk} = a^{js} b^s_k.$$

Запишем эти суммы произведений в матричных формах записи:

$$c^j_k = a^j_s b^s_k = (a^j_1, \ldots, a^j_p) \begin{pmatrix} b^1_k \\ \vdots \\ b^p_k \end{pmatrix},$$

$$c_{jk} = a_{js} b_{sk} = (a_{j1}, \ldots, a_{jp}) \begin{pmatrix} b_{1k} \\ \vdots \\ b_{pk} \end{pmatrix},$$

$$c^j_k = a^j_s b_{sk} = (a^j_1, \ldots, a^j_p) \begin{pmatrix} b_{1k} \\ \vdots \\ b_{pk} \end{pmatrix},$$

$$c_{jk} = a_{js} b^s_k = (a_{j1}, \ldots a_{jp}) \begin{pmatrix} b^1_k \\ \vdots \\ b^p_k \end{pmatrix},$$

$$c^{jk} = a^{js}b^{sk} = (a^{j1}, \ldots, a^{jp}) \begin{pmatrix} b^{1k} \\ \vdots \\ b^{pk} \end{pmatrix},$$

$$c^{jk} = a^{js}b^{s}_{k} = (a^{j1}, \ldots, a^{jp}) \begin{pmatrix} b^{1}_{k} \\ \vdots \\ b^{p}_{k} \end{pmatrix}.$$

Теперь мы сделаем очень важное замечание об обозначениях. Пусть в линейном пространстве $\mathcal{L}$ задан базис $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$. Тогда для обозначения новых базисов мы будем использовать «штрихованные индексы». Например,

$$\{\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}\}, \ \{\mathbf{e}_{1''}, \ldots, \mathbf{e}_{n''}\} \text{ и так далее.}$$

Отметим, что в вычислениях для обозначения нового базиса лучше использовать другую букву, например, новый базис можно обозначить так: $\{\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n\}$. Мы, кстати говоря, в дальнейшем тоже будем использовать такое обозначение для нового базиса.

Итак, пусть нам заданы старый базис $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ и новый базис $\{\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}\}$ линейного пространства $\mathcal{L}$. Разложим новый базис по старому и для этого разложения будем использовать матрицу $(c^{i}_{i'})^{n}_{n'}$, причем натуральные числа n и n' равны. Справедливы следующие равенства:

$$\mathbf{e}_{1'} = c^{1}_{1'} \cdot \mathbf{e}_1 + \cdots + c^{n}_{1'} \cdot \mathbf{e}_n, \tag{1.1}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \tag{1.2}$$

$$\mathbf{e}_{n'} = c^{1}_{n'} \cdot \mathbf{e}_1 + \cdots + c^{n}_{n'} \cdot \mathbf{e}_n. \tag{1.3}$$

В обозначениях Эйнштейна формулы (1.1)–(1.3) можно переписать в следующем компактном виде:

$$\mathbf{e}_{i'} = c^{i}_{i'} \cdot \mathbf{e}_i. \tag{1.4}$$

Последнее равенство, записанное в координатной форме, можно представить в матричной форме записи:

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} \cdot C, \tag{1.5}$$

$$\mathbf{E}' = (\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}), \quad \mathbf{E} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n), \tag{1.6}$$

$$C = \begin{pmatrix} c^{1}_{1'} & \cdots & c^{1}_{n'} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c^{n}_{1'} & \cdots & c^{n}_{n'} \end{pmatrix}. \tag{1.7}$$

Из формул (1.5)–(1.7), пользуясь правилом умножения матриц «строчка на столбец», легко получаются равенства (1.1)–(1.3). Для квадратной матрицы C справедлива следующая лемма:

Лемма 1. $\det C \neq 0$.

Доказательство. Пусть противное и квадратная матрица C перехода от базиса $\mathbf{E}$ к базису $\mathbf{E}'$ вырождена: $\det C = 0$. Тогда столбцы матрицы C линейно зависимы:

$$\alpha^{1'} C_{1'} + \dots + \alpha^{n'} C_{n'} = O \in \mathbb{K}^{n\times 1}, \quad C = \|C_{1'}, C_{2'}, \dots, C_{n'}\|, \tag{1.8}$$

где числа $\alpha^{1'}, \dots, \alpha^{n'}$ одновременно в нуль не обращаются. Согласно правилу умножения «строчка на столбец» из равенства (1.5) получаем равенство

$$\mathbf{e}_{i'} = \mathbf{E} \cdot C_{i'}, \quad i' \in \overline{1', n'}. \tag{1.9}$$

В обозначениях Эйнштейна справедливы следующие равенства:

$$\alpha^{i'} \cdot \mathbf{e}_{i'} = \alpha^{i'} \cdot (\mathbf{E} \cdot C_{i'}) = \mathbf{E} \cdot \left(\alpha^{i'} C_{i'}\right) = \mathbf{E} \cdot O = \vartheta.$$

Таким образом, семейство $\{\mathbf{e}_{1'}, \dots, \mathbf{e}_{n'}\}$ линейно зависимо, что противоречит тому, что это семейство образует базис. Значит, $\det C \neq 0$.

Лемма доказана.

С одной стороны, из результата леммы 1 и из равенства (1.5) вытекает равенство

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}' \cdot C^{-1}. \tag{1.10}$$

Будем в дальнейшем использовать следующее обозначение:

$$C^{-1} = (c_i^{i'})_n^{n'}.$$

С другой стороны, из равенства (1.4) в наших обозначениях (штрихованные индексы) вытекает обратное равенство

$$\mathbf{e}_i = c_i^{i'} \cdot \mathbf{e}_{i'}. \tag{1.11}$$

Из сравнения (1.10) с (1.11) приходим к выводу о том, что

$$C^{-1} = (c_i^{i'})_n^{n'} = \begin{pmatrix} c_1^{1'} & \cdots & c_n^{1'} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_1^{n'} & \cdots & c_n^{n'} \end{pmatrix}. \tag{1.12}$$

Поэтому справедливы следующие равенства:

$$C \cdot C^{-1} = I, \quad C^{-1} \cdot C = I \Leftrightarrow c_{i'}^i c_j^{i'} = \delta_j^i, \quad c_i^{i'} c_{j'}^i = \delta_{j'}^{i'}.$$

Сделаем еще одно замечание. Если вы захотите записать *транспонированную матрицу* к матрице C, определенной равенством (1.7), то *нельзя* переставлять местами индексы. Транспонированной к матрице C является следующая матрица:

$$\begin{pmatrix} c_{1'}^1 & \cdots & c_{1'}^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n'}^1 & \cdots & c_{n'}^n \end{pmatrix}, \quad \text{а не матрица} \quad \begin{pmatrix} c_1^{1'} & \cdots & c_1^{n'} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_n^{1'} & \cdots & c_n^{n'} \end{pmatrix}.$$

Мы получили формулы (1.4) и (1.11) перехода от одного базиса линейного пространства к другому базису. Теперь наша задача выяснить как при переходе к другому базису преобразуются координаты векторов линейного пространства.

Действительно, пусть $x \in \mathcal{L}$ — это произвольных вектор. Тогда с учетом равенства (1.4) и линейной независимости семейства векторов $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ (базиса в $\mathcal{L}$) справедливы следующие равенства:

$$x = x^k \cdot \mathbf{e}_k = x^{k'} \cdot \mathbf{e}_{k'} = x^{k'} c^k_{k'} \cdot \mathbf{e}_k \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x^k - c^k_{k'} x^{k'}) \cdot \mathbf{e}_k = \vartheta \Leftrightarrow x^k = c^k_{k'} x^{k'}. \quad (1.13)$$

Кроме того, имеем

$$x = x^{k'} \cdot \mathbf{e}_{k'} = x^k \cdot \mathbf{e}_k = x^k c^{k'}_k \cdot \mathbf{e}_{k'} \Rightarrow x^{k'} = c^{k'}_k x^k. \quad (1.14)$$

Аналогичные рассуждения можно провести в матричной форме записи. Действительно, справедливы следующие равенства:

$$x = \mathbf{E} \cdot X_e = \mathbf{E}' \cdot X_{e'}, \quad X_e = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}, \quad X_{e'} = \begin{pmatrix} x^{1'} \\ \vdots \\ x^{n'} \end{pmatrix}. \quad (1.15)$$

Из (1.15) с учетом (1.5) приходим к следующей цепочке выражений:

$$\mathbf{E} \cdot X_e = \mathbf{E} \cdot C \cdot X_{e'} \Leftrightarrow \mathbf{E} \cdot (X_e - C \cdot X_{e'}) = \vartheta \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow X_e = C \cdot X_{e'},\ X_{e'} = C^{-1} \cdot X_e. \quad (1.16)$$

Сравним теперь законы преобразования базисов и координат:

$$\mathbf{e}_{k'} = c^k_{k'} \cdot \mathbf{e}_k, \quad x^{k'} = c^{k'}_k x^k \quad (1.17)$$

или

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} \cdot C, \quad X_{e'} = C^{-1} \cdot X_e. \quad (1.18)$$

Мы видим, что закон преобразования базисов отличается от закона преобразования координат вектора линейного пространства при переходе от старого базиса $\mathbf{E} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ к новому базису $\mathbf{E}' = (\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'})$.

Определение 1. *Закон преобразования базиса линейного пространства $\mathcal{L}$ при переходе от старого базиса к новому базису называется ковариантным, а соответствующий закон преобразования координат вектора линейного пространства называется контравариантным.*

Лемма 2. *Пусть $\{\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^n\}$ взаимный базис в $\mathcal{L}^*$ к базису $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ в $\mathcal{L}$, причем $\{\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}\}$ — новый базис в $\mathcal{L}$, связанный со старым соотношением*:

$$\mathbf{e}_{i'} = c^i_{i'} \cdot \mathbf{e}_i.$$

Тогда:

$$\mathbf{e}^{j'} = c^{j'}_j \cdot \mathbf{e}^j \quad \text{или} \quad \widehat{\mathbf{E}}' = C^{-1} \cdot \widehat{\mathbf{E}} \quad (1.19)$$

— *взаимный базис к новому базису* $\{\mathbf{e}_{1'}, \dots, \mathbf{e}_{n'}\}$, *где*

$$\widehat{\mathbf{E}} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}^1 \\ \vdots \\ \mathbf{e}^n \end{pmatrix}, \quad \widehat{\mathbf{E}}' = \begin{pmatrix} \mathbf{e}^{1'} \\ \vdots \\ \mathbf{e}^{n'} \end{pmatrix}.$$

Кроме того, имеем:

$$\mathbf{e}^j = c^j_{j'} \cdot \mathbf{e}^{j'} \quad \textit{или} \quad \widehat{\mathbf{E}} = C \cdot \widehat{\mathbf{E}}'. \tag{1.20}$$

Доказательство. Пусть $x \in \mathcal{L}$. Тогда имеем:

$$x = x^j \cdot \mathbf{e}_j = x^{j'} \cdot \mathbf{e}_{j'}, \tag{1.21}$$

$$x^{j'} = c^{j'}_j x^j = c^{j'}_j \langle \mathbf{e}^j, x\rangle = \langle c^{j'}_j \cdot \mathbf{e}^j, x\rangle. \tag{1.22}$$

Взаимный базис $\{\mathbf{e}_{1'}, \dots, \mathbf{e}_{n'}\} \subset \mathcal{L}^*$ к базису $\{\mathbf{e}_{1'}, \dots, \mathbf{e}_{n'}\} \subset \mathcal{L}$ однозначно определяется равенствами:

$$\langle \mathbf{e}^{j'}, x\rangle := x^{j'}, \quad x = x^{j'} \cdot \mathbf{e}_{j'}.$$

Значит, отсюда и из (1.22) приходим к выводу о том, что:

$$\mathbf{e}^{j'} = c^{j'}_j \cdot \mathbf{e}^j, \quad j' = \overline{1', n'}$$

— есть взаимный базис к базису $\{\mathbf{e}_{1'}, \dots, \mathbf{e}_{n'}\}$.

Используя наше правило умножения «строчка на столбец» получаем матричную форму записи.

Лемма доказана.

Лемма 3. *Справедливы следующие формулы преобразования координат линейной формы* $f \in \mathcal{L}^*$:

$$f_j = f_{j'} c^{j'}_j, \quad f_{j'} = f_j c^j_{j'}, \quad f = f_j \cdot \mathbf{e}^j, \quad f = f_{j'} \cdot \mathbf{e}^{j'} \tag{1.23}$$

или

$$F_{e'} = F_e \cdot C, \quad F_e = F_{e'} \cdot C^{-1}, \tag{1.24}$$

$$F_e = (f_1, \dots, f_n), \quad F_{e'} = (f_{1'}, \dots, f_{n'}).$$

Доказательство. С учетом (1.19) справедливы следующие равенства:

$$f = f_j \cdot \mathbf{e}^j = f_{j'} \cdot \mathbf{e}^{j'} = f_{j'} c^{j'}_j \cdot \mathbf{e}^j \Rightarrow f_j = f_{j'} c^{j'}_j.$$

Меняя местами j и j', получим равенство

$$f_{j'} = f_j c^j_{j'}.$$

Следовательно, равенства (1.23) доказаны. Докажем теперь равенства (1.24). Действительно, с учетом (1.19) справедливы равенства:

$$f = F_e \cdot \widehat{\mathbf{E}} = F_{e'} \cdot \widehat{\mathbf{E}}' = F_{e'} \cdot C^{-1} \cdot \widehat{\mathbf{E}} \Rightarrow F_e = F_{e'} \cdot C^{-1}.$$

Отсюда сразу же получаем второе равенство: $F_{e'} = F_e \cdot C$. Тем самым, равенства (1.24) доказаны.

Лемма доказана.

Из результатов лемм 2 и 3 вытекает, что взаимный базис при переходе к новому базису преобразуется *контравариантным* образом, а координаты линейной формы при переходе к новому базису преобразуется *ковариантным* образом.

Из полученных формул преобразования координат вектора и координат ковектора вытекает общее правило. Пусть у нас имеется один из этих объектов a_i, $a_{i'}$, a^i и $a^{i'}$, то преобразуются эти объекты следующим образом:

$$a_i = c_i^{i'} a_{i'}, \quad a_{i'} = c_{i'}^{i} a_i, \quad a^i = c_{i'}^{i} a^{i'}, \quad a^{i'} = c_i^{i'} a^i.$$

Это правило позволяет не задумываться над тем как преобразуются эти объекты, а писать «машинально» правильные формулы.

§ 2. Линейные операторы

Определение 2. *Линейным оператором* $A : \mathcal{L} \to \mathcal{M}$ *называется однозначное отображение линейного пространства* $\mathcal{L}$ *в линейное пространство* $\mathcal{M}$, *обладающее свойством линейности*:

$$A(\alpha \cdot x + \beta \cdot y) = \alpha \cdot Ax + \beta \cdot Ay \quad \text{для всех} \quad x, y \in \mathcal{L}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{K}.$$

Определение 3. *Множество* $\{y = Ax : \forall\, x \in \mathcal{L}\} \subset \mathcal{M}$ *называется образом оператора* $A : \mathcal{L} \to \mathcal{M}$ *и обозначается символом* $\operatorname{im} A$.

Определение 4. *Множество* $\{x \in \mathcal{L} : Ax = \vartheta \in \mathcal{M}\} \subset \mathcal{L}$ *называется ядром оператора* $A : \mathcal{L} \to \mathcal{M}$ *и обозначается символом* $\ker A$.

Лемма 4. *Множества* $\operatorname{im} A \subset \mathcal{M}$ *и* $\ker A \subset \mathcal{L}$ *являются линейными подпространствами в соответствующих линейных пространствах.*

Доказательство. *Шаг 1.* $\operatorname{im} A$. Пусть $y_1, y_2 \in \operatorname{im} A$ и $\alpha^1, \alpha^2 \in \mathbb{K}$ — произвольны. Тогда найдутся такие $x_1, x_2 \in \mathcal{L}$, что:

$$y_1 = Ax_1, \quad y_2 = Ax_2.$$

Докажем, что $\alpha^1 \cdot y_1 + \alpha^2 \cdot y_2 \in \operatorname{im} A$. Действительно, справедливы следующие равенства:

$$\alpha^1 \cdot y_1 + \alpha^2 \cdot y_2 = \alpha^1 \cdot Ax_1 + \alpha^2 \cdot Ax_2 = A(\alpha^1 \cdot x_1 + \alpha^2 \cdot x_2) \in \operatorname{im} A,$$

где мы воспользовались линейностью оператора A.

Шаг 2. $\ker A$. Пусть $x_1, x_2 \in \ker A$ и $\alpha^1, \alpha^2 \in \mathbb{K}$ — произвольны. Тогда справедливы следующие равенства:

$$A(\alpha^1 \cdot x_1 + \alpha^2 \cdot x_2) = \alpha^1 \cdot Ax_1 + \alpha^2 \cdot Ax_2 = \alpha^1 \cdot \vartheta + \alpha^2 \cdot \vartheta = \vartheta,$$

где мы воспользовались линейностью оператора A. Следовательно, $\alpha^1 \cdot x_1 + \alpha^2 \cdot x_2 \in \ker A$.

Лемма доказана.

Определение 5. *Линейный оператор $A: \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ называется линейным оператором в пространстве $\mathcal{L}$.*

Лемма 5. *Если $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, то как линейное отображение $A : \mathbb{K}^{n\times 1} \to \mathbb{K}^{n\times 1}$ обладает следующим свойством:*

$$\dim \ker A + \dim \operatorname{im} A = n = \dim \mathbb{K}^{n\times 1}. \tag{2.1}$$

Доказательство. Пусть $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ и $O, X, Y \in \mathbb{K}^{n\times 1}$. Тогда

$$\operatorname{im} A = \{Y = A \cdot X, \quad \forall\, X \in \mathbb{K}^{n\times 1}\},$$
$$\ker A = \{X \in \mathbb{K}^{n\times 1} : \ A \cdot X = O\}.$$

Введем канонический базис в арифметическом пространстве $\mathbb{K}^{n\times 1}$:

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Пусть $Y \in \operatorname{im} A$. Тогда найдется такой столбец $X \in \mathbb{K}^{n\times 1}$:

$$X = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix},$$

что справедливо равенство $Y = A \cdot X$. Заметим, что

$$X = x^1\mathbf{e}_1 + \dots + x^n\mathbf{e}_n.$$

Тогда имеем:

$$Y = A \cdot X = A \cdot (x^k\mathbf{e}_k) = x^k A \cdot \mathbf{e}_k \in L(A \cdot \mathbf{e}_1, \dots, A \cdot \mathbf{e}_n) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \operatorname{im} A \subset L(A \cdot \mathbf{e}_1, \dots, A \cdot \mathbf{e}_n). \tag{2.2}$$

Обратно. Пусть $Y \in L(A \cdot \mathbf{e}_1, \dots, A \cdot \mathbf{e}_n)$. Тогда:

$$Y = c^1 A \cdot \mathbf{e}_1 + \dots + c^n A \cdot \mathbf{e}_n = A \cdot (c^k\mathbf{e}_k) = A \cdot Z, \quad Z = c^k\mathbf{e}_k \Rightarrow Y \in \operatorname{im} A.$$

Итак, $\operatorname{im} A = L(A \cdot \mathbf{e}_1, \dots, A \cdot \mathbf{e}_n)$. Заметим, что

$$A \cdot \mathbf{e}_1 = \|A_1, A_2, \dots, A_n\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = A_1$$

и в общем случае получаем, что

$$A \cdot \mathbf{e}_j = A_j, \quad j = \overline{1, n}.$$

Следовательно,

$$L(A\cdot\mathbf{e}_1,\ldots,A\cdot\mathbf{e}_n)=L(A_1,A_2,\ldots,A_n).$$

Пусть $\operatorname{rang}A=r$. Тогда, с одной стороны,

$$r=\dim L(A_1,A_2,\ldots,A_n)=\dim\operatorname{im}A.$$

С другой стороны, $\ker A$ состоит из всех решений однородной линейной однородной системы уравнений $A\cdot X=O$ и только из них. Базис пространства решений состоит из $n-r$ столбцов. Следовательно, имеем:

$$\dim\operatorname{im}A+\dim\ker A=r+(n-r)=n=\dim\mathbb{K}^{n\times 1}.$$

Лемма доказана.

Определение 6. *Операторы $A,B:\ \mathcal{L}\to\mathcal{M}$ называются равными, если $Ax=Bx$ для всех $x\in\mathcal{L}$.*

Пример 1. Оператор I в пространстве $\mathcal{L}$, определяемый равенством $Ix=x$ для всех $x\in\mathcal{L}$, является линейным оператором.

$\square$ Действительно, для любых $x_1,x_2\in\mathcal{L}$ и $\alpha^1,\alpha^2\in\mathbb{K}$ справедливы равенства:

$$I(\alpha^1\cdot x_1+\alpha^2\cdot x_2)=\alpha^1\cdot x_1+\alpha^2\cdot x_2=\alpha^1\cdot Ix_1+\alpha^2\cdot Ix_2.\quad\boxtimes$$

Определение 7. *Оператор I называется единичным оператором.*

Пример 2. Оператор $O:\ \mathcal{L}\to\mathcal{M}$, определяемый равенством:

$$Ox=\vartheta\quad\text{для всех}\quad x\in\mathcal{L},$$

где ϑ — нулевой элемент линейного пространства $\mathcal{M}$, является линейным оператором.

$\square$ Действительно, для любых $x_1,x_2\in\mathcal{L}$ и $\alpha^1,\alpha^2\in\mathbb{K}$ справедливы равенства:

$$O(\alpha^1\cdot x_1+\alpha^2\cdot x_2)=\vartheta=\alpha^1\cdot\vartheta+\alpha^2\cdot\vartheta=\alpha^1\cdot Ox_1+\alpha^2\cdot Ox_2.\quad\boxtimes$$

Определение 8. *Оператор O называется нулевым оператором.*

Пример 3. В пространстве полиномов P^n степени не выше $n\in\mathbb{N}$ определим дифференцирование $D:\ P^n\to P^{n-1}$ формулой:

$$Dp(t)=\frac{dp(t)}{dt}.$$

Оператор D является линейным оператором.

$\square$ Действительно, для любых $p_1(t),p_2(t)\in P^n$ и $\alpha^1,\alpha^2\in\mathbb{K}$ справедливы следующие равенства:

$$D(\alpha^1p_1(t)+\alpha^2p_2(t))=\frac{d}{dt}\Big(\alpha^1p_1(t)+\alpha^2p_2(t)\Big)=$$
$$=\alpha^1\frac{dp_1(t)}{dt}+\alpha^2\frac{dp_2(t)}{dt}=\alpha^1Dp_1(t)+\alpha^2Dp_2(t).\quad\boxtimes$$

Пример 4. Зададим отображение $A : \mathbb{R}^{n\times 1} \to \mathbb{R}^{m\times 1}$ следующим образом:

$$Y = A \cdot X, \tag{2.3}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^m & \cdots & a_n^m \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^m \end{pmatrix}.$$

Отображение A является линейным.

☐ Действительно, для любых $X_1, X_2 \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ и $\alpha^1, \alpha^2 \in \mathbb{K}$ в силу свойств сложения матриц и умножения матриц на числа справедливы равенства

$$A \cdot (\alpha^1 X_1 + \alpha^2 X_2) = \alpha^1 A \cdot X_1 + \alpha^2 A \cdot X_2. \quad \boxtimes$$

§ 3. Матрица линейного оператора

Пусть линейный оператор A действует в линейном пространстве $\mathcal{L}$, т.е.

$$A : \mathcal{L} \to \mathcal{L}.$$

Для того чтобы задать линейный оператор A нам нужно знать его значение Ax на каждом $x \in \mathcal{L}$. Пусть $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ — базис в $\mathcal{L}$. Тогда справедливо разложение вектора $x \in \mathcal{L}$ по этому базису:

$$x = x^j \cdot \mathbf{e}_j.$$

В силу линейности оператора A имеют место следующие равенства:

$$A(x) = A(x^j \cdot \mathbf{e}_j) = x^j \cdot A(\mathbf{e}_j). \tag{3.1}$$

Отсюда приходим к выводу о том, что для того чтобы задать линейный оператор, необходимо и достаточно, задать его значения на базисе рассматриваемого линейного пространства $\mathcal{L}$.

Разложим теперь $A\mathbf{e}_j$ по базису $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\} \in \mathcal{L}$. Справедливо следующее равенство:

$$A\mathbf{e}_j = a_j^k \cdot \mathbf{e}_k \tag{3.2}$$

или в матричной форме (используя правило умножения матриц «строчка на столбец»):

$$(A\mathbf{e}_1, \dots, A\mathbf{e}_n) = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) \cdot \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

Определение 9. *Матрица*

$$A_e = \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

называется матрицей линейного оператора A в базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ линейного пространства $\mathcal{L}$.

Рассмотрим уравнение:

$$y = Ax, \quad y = y^k \cdot \mathbf{e}_k, \quad x = x^j \cdot \mathbf{e}_j,$$

из которого получаем равенства:

$$y^k \cdot \mathbf{e}_k = A(x^j \cdot \mathbf{e}_j) = x^j \cdot A(\mathbf{e}_j) = x^j a^k_j \cdot \mathbf{e}_k \Rightarrow y^k = a^k_j x^j$$

или в матричной форме

$$Y_e = A_e \cdot X_e, \quad Y_e = \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix}, \quad X_e = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}. \tag{3.5}$$

Пусть $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — старый базис в $\mathcal{L}$, а $\{\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}\}$ — новый базис в $\mathcal{L}$ с матрицей перехода $C = (c^j_{j'})^n_{n'}$ от старого базиса к новому:

$$\mathbf{e}_{j'} = c^j_{j'} \cdot \mathbf{e}_j.$$

Пусть A_e — матрица линейного оператора A в базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$, а $A_{e'}$ — в базисе $\{\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}\}$. Справедлива следующая теорема:
Теорема 1. *Имеют место равенства*

$$A_{e'} = C^{-1} \cdot A_e \cdot C \quad \textit{или} \quad a^{k'}_{j'} = c^j_{j'} c^{k'}_k a^k_j. \tag{3.6}$$

Доказательство. *Первый способ.* Используя формулы связывающие элементы старого и нового базисов, приходим к следующим равенствам:

$$A(\mathbf{e}_{j'}) = a^{k'}_{j'} \cdot \mathbf{e}_{k'} = a^{k'}_{j'} c^k_{k'} \cdot \mathbf{e}_k, \tag{3.7}$$

$$A(\mathbf{e}_{j'}) = A(c^j_{j'} \cdot \mathbf{e}_j) = c^j_{j'} \cdot A(\mathbf{e}_j) = c^j_{j'} a^k_j \cdot \mathbf{e}_k. \tag{3.8}$$

Из (3.7) и (3.8) вытекает равенство:

$$a^{k'}_{j'} c^k_{k'} \cdot \mathbf{e}_k = c^j_{j'} a^k_j \cdot \mathbf{e}_k \Rightarrow a^{k'}_{j'} c^k_{k'} = c^j_{j'} a^k_j \tag{3.9}$$

или переставляя множители, получим равенство:

$$c^k_{k'} a^{k'}_{j'} = a^k_j c^j_{j'} \tag{3.10}$$

или в матричной форме

$$C \cdot A_{e'} = A_e \cdot C \Leftrightarrow A_{e'} = C^{-1} \cdot A_e \cdot C. \tag{3.11}$$

Из полученной формулы (3.11) вытекает следующая цепочка равенств:

$$a^{k'}_{j'} = \{A_{e'}\}^{k'}_{j'} = \{C^{-1}\}^{k'}_k \{A_e \cdot C\}^k_{j'} = c^{k'}_k a^k_j c^j_{j'}.$$

Второй способ. Воспользуемся равенством (3.5) в старом и новом базисах:

$$Y_e = A_e \cdot X_e, \quad Y_{e'} = A_{e'} \cdot X_{e'}, \tag{3.12}$$

где

$$X_e = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}, \; X_{e'} = \begin{pmatrix} x^{1'} \\ \vdots \\ x^{n'} \end{pmatrix}, \; Y_e = \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix}, \; Y_{e'} = \begin{pmatrix} y^{1'} \\ \vdots \\ y^{n'} \end{pmatrix}.$$

Заметим, что имеют место следующие формулы:

$$X_e = C \cdot X_{e'}, \quad Y_e = C \cdot Y_{e'}. \tag{3.13}$$

Из формул (3.12) и (3.13) вытекают следующие равенства:

$$\begin{aligned} C \cdot Y_{e'} = Y_e = A_e \cdot X_e = A_e \cdot C \cdot X_{e'} \Rightarrow C \cdot A_{e'} \cdot X_{e'} = A_e \cdot C \cdot X_{e'} \Rightarrow \\ \Rightarrow (C \cdot A_{e'} - A_e \cdot C) \cdot X_{e'} = O \Rightarrow C \cdot A_{e'} = A_e \cdot C \Rightarrow \\ \Rightarrow A_{e'} = C^{-1} \cdot A_e \cdot C, \end{aligned}$$

где мы воспользовались тем, что столбец $X_{e'}$ произвольный.

Теорема доказана.

Лемма 6. *Для элементов матрицы линейного оператора A, действующего в линейном пространстве $\mathcal{L}$, в базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\} \subset \mathcal{L}$ справедливо следующее выражение*:

$$a_i^k = \langle \mathbf{e}^k, A\mathbf{e}_i \rangle, \tag{3.14}$$

где $\{\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^n\} \subset \mathcal{L}^*$ — взаимный базис к базису $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\} \subset \mathcal{L}$.

Доказательство. Действительно, справедлива следующая цепочка равенств:

$$\langle \mathbf{e}^k, A\mathbf{e}_i \rangle = \langle \mathbf{e}^k, a_i^j \cdot \mathbf{e}_j \rangle = \langle \mathbf{e}^k, \mathbf{e}_j \rangle a_i^j = \delta_j^k a_i^j = a_i^k.$$

Лемма доказана.

Пример 5. Рассмотрим линейное пространство P^n полиномов степени не выше $n \in \mathbb{N}$. Выберем в этом линейном пространстве базис следующим образом:

$$\mathbf{e}_1 = 1, \; \mathbf{e}_2 = t, \; \mathbf{e}_3 = \frac{t^2}{2!}, \; \ldots, \; \mathbf{e}_{n+1} = \frac{t^n}{n!}. \tag{3.15}$$

Оператор дифференцирования $\widehat{D}$ действует следующим образом:

$$\begin{aligned} \widehat{D}\mathbf{e}_1 = \vartheta = 0\mathbf{e}_1 + 0\mathbf{e}_2 + \cdots + 0\mathbf{e}_{n+1}, \\ \widehat{D}\mathbf{e}_2 = 1 = 1\mathbf{e}_1 + 0\mathbf{e}_2 + \cdots + 0\mathbf{e}_{n+1}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \widehat{D}\mathbf{e}_{n+1} = \mathbf{e}_n = 0\mathbf{e}_1 + \cdots + 1\mathbf{e}_n + 0\mathbf{e}_{n+1}. \end{aligned} \tag{3.16}$$

С учетом равенств (3.16) приходим к следующему выражению:

$$\left(\widehat{D}\mathbf{e}_1, \widehat{D}\mathbf{e}_2, \ldots, \widehat{D}\mathbf{e}_{n+1}\right) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_{n+1}) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.17}$$

Таким образом, матрица D линейного оператора

$$\widehat{D}: \ P^n \to P^{n-1} \subset P^n$$

в рассматриваемом базисе имеет следующий вид:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}.$$

§ 4. Линейное пространство линейных операторов

Определение 10. *Множество всех линейных операторов* $A: \ \mathcal{L} \to \mathcal{M}$ *будем обозначать символом* $L(\mathcal{L}; \mathcal{M})$.

Определение 11. *Суммой линейных операторов* $A, B: \ \mathcal{L} \to \mathcal{M}$ *называется оператор* $C: \mathcal{L} \to \mathcal{M}$, *действующий по правилу* $Cx = Ax + Bx$ *для всех* $x \in \mathcal{L}$.

Определение 12. *Произведением оператора* $A: \ \mathcal{L} \to \mathcal{M}$ *на скаляр* $\alpha \in \mathbb{K}$ *называется оператор* $D: \ \mathcal{L} \to \mathcal{M}$, *действующий по правилу* $Dx = \alpha \cdot Ax$ *для всех* $x \in \mathcal{L}$.

Лемма 7. *Сумма линейных операторов и произведение линейного оператора на число являются линейным операторами.*

Доказательство. Пусть $x_1, x_2 \in \mathcal{L}$ и $\alpha, \alpha^1, \alpha^2 \in \mathbb{K}$ — произвольны. Справедливы следующие равенства:

$$\begin{aligned} C(\alpha^1 \cdot x_1 + \alpha^2 \cdot x_2) &= A(\alpha^1 \cdot x_1 + \alpha^2 \cdot x_2) + B(\alpha^1 \cdot x_1 + \alpha^2 \cdot x_2) = \\ &= \alpha^1 \cdot Ax_1 + \alpha^2 \cdot Ax_2 + \alpha^1 \cdot Bx_1 + \alpha^2 \cdot Bx_2 = \\ &= \alpha^1 \cdot (Ax_1 + Bx_1) + \alpha^2 \cdot (Ax_2 + Bx_2) = \alpha^1 \cdot Cx_1 + \alpha^2 \cdot Cx_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D(\alpha^1 \cdot x_1 + \alpha^2 \cdot x_2) &= \alpha \cdot A(\alpha^1 \cdot x_1 + \alpha^2 \cdot x_2) = \alpha\alpha^1 \cdot Ax_1 + \alpha\alpha^2 \cdot Ax_2 = \\ &= \alpha^1\alpha \cdot Ax_1 + \alpha^2\alpha \cdot Ax_2 = \alpha^1 \cdot D(x_1) + \alpha^2 \cdot D(x_2). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Л е м м а 8. *Множество $L(\mathcal{L};\mathcal{M})$ является линейным пространством относительно введенных операций сложения операторов и умножения оператора на число.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $A, B, C \in L(\mathcal{L};\mathcal{M})$ — произвольные линейные операторы и $x \in \mathcal{L}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ — произвольны.

Шаг 1. Коммутативность сложения. Справедливы равенства:

$$(A+B)x = Ax + Bx = Bx + Ax = (B+A)x,$$

поскольку $Ax, Bx \in \mathcal{M}$, а $\mathcal{M}$ — линейное пространство и, следовательно, в нем справедливо свойство коммутативности сложения векторов. В силу произвольности $x \in \mathcal{L}$ справедливо равенство:

$$A + B = B + A.$$

Шаг 2. Ассоциативность сложения. Справедливы равенства:

$$((A+B)+C)x = (Ax+Bx)+Cx = Ax+(Bx+Cx) = \\ = Ax+(B+C)x = (A+(B+C))x,$$

поскольку $\mathcal{M}$ — линейное пространство и поэтому в нем справедлива ассоциативность сложения векторов. В силу произвольности $x \in \mathcal{L}$ справедливо равенство:

$$(A+B)+C = A+(B+C).$$

Шаг 3. Свойство нулевого оператора. Справедливы равенства:

$$(A+O)x = Ax + Ox = Ax + \vartheta = Ax.$$

Здесь мы воспользовались свойством нулевого вектора ϑ линейного пространства $\mathcal{M}$. В силу произвольности $x \in \mathcal{L}$ приходим к следующему равенству:

$$A + O = A.$$

Шаг 4. Существование противоположного оператора. Для линейного оператора A противоположным является линейный оператор $(-1)\cdot A$. Действительно, имеют место равенства:

$$(A+(-1)\cdot A)x = Ax + (-1)\cdot Ax = (1-1)\cdot Ax = 0\cdot Ax = \vartheta = Ox.$$

Здесь мы воспользовались дистрибутивностью сложения векторов в линейном пространстве $\mathcal{M}$. В силу произвольности $x \in \mathcal{L}$ приходим к равенству:

$$A + (-1)\cdot A = O.$$

Шаг 5. Свойство единицы. Действительно, справедливы следующие равенства:

$$(1\cdot A)x = 1\cdot Ax = Ax,$$

где мы воспользовались свойством единицы в линейном пространстве $\mathcal{M}$. В силу произвольности $x \in \mathcal{L}$ приходим к равенству:

$$1 \cdot A = A.$$

Шаг 6. Ассоциативность умножения на число. Справедливы равенства:

$$((\alpha\beta) \cdot A)x = (\alpha\beta) \cdot Ax = \alpha \cdot (\beta \cdot Ax) = (\alpha \cdot (\beta \cdot A))x,$$

где мы воспользовались свойством ассоциативности умножения на числа в линейном пространстве $\mathcal{M}$. В силу произвольности $x \in \mathcal{L}$ приходим к равенству:

$$(\alpha\beta) \cdot A = \alpha \cdot (\beta \cdot A).$$

Шаг 7. Дистрибутивность относительно сложения операторов. Справедливы равенства:

$$(\alpha \cdot (A + B))x = \alpha \cdot (A + B)x = \alpha \cdot Ax + \alpha \cdot Bx = \\ = (\alpha \cdot A)x + (\alpha \cdot B)x = (\alpha \cdot A + \alpha \cdot B)x,$$

где мы воспользовались свойством дистрибутивности операции сложения векторов в $\mathcal{M}$ относительно умножения на числа. В силу произвольности $x \in \mathcal{L}$ приходим к равенству:

$$\alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B.$$

Шаг 8. Дистрибутивность относительно сложения чисел. Имеют место следующие равенства:

$$((\alpha + \beta) \cdot A)x = (\alpha + \beta) \cdot Ax = \alpha \cdot Ax + \beta \cdot Ax = (\alpha \cdot A + \beta \cdot A)x,$$

где мы воспользовались свойством дистрибутивности относительно сложения чисел в линейном пространстве $\mathcal{M}$. В силу произвольности $x \in \mathcal{L}$ приходим к выводу, что

$$(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A.$$

Лемма доказана.

Определение 13. *Матрица $A_{ef} = (\alpha_i^k)_n^m \in \mathbb{K}^{m \times n}$, определенная равенством*

$$A\mathbf{e}_i = \alpha_i^k \cdot \mathbf{f}_k \quad \text{или} \quad (A\mathbf{e}_1, \ldots, A\mathbf{e}_n) = (\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_m) \cdot A_{ef}, \tag{4.1}$$

называется матрицей линейного оператора A, где $A : \mathcal{L} \to \mathcal{M}$ и $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\} \subset \mathcal{L}$, $\{\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_m\} \subset \mathcal{M}$ — базисы соответствующих линейных пространств.

§ 5. Алгебры операторов и матриц

В этом параграфе мы рассмотрим новую операцию — операцию умножения операторов и докажем, что операторы из линейного пространства $L(\mathcal{L};\mathcal{L})$ образуют ассоциативную и некоммутативную *алгебру операторов с единицей*. Учтем результаты предыдущего раздела в случае $\mathcal{M} = \mathcal{L}$ и докажем, что алгебра операторов $L(\mathcal{L};\mathcal{L})$ изоморфна алгебре матриц $\mathbb{K}^{n\times n}$, где $n = \dim\mathcal{L}$ и $\mathbb{K}$ — поле вещественных или комплексных чисел, над которым определено пространство $\mathcal{L}$.

Определение 14. *Произведением линейных операторов*:

$$A, B \in L(\mathcal{L};\mathcal{L})$$

называется оператор $C:\ \mathcal{L} \to \mathcal{L}$, *действующий таким образом*:

$$Cx \overset{def:}{=} B(Ax) \quad \textit{для всех} \quad x \in \mathcal{L}. \tag{5.1}$$

Лемма 9. *Оператор C — линейный, т.е. $C \in L(\mathcal{L};\mathcal{L})$.*

Доказательство. Пусть $x_1, x_2 \in \mathcal{L}$ и $\alpha^1, \alpha^2 \in \mathbb{K}$ — произвольны. Тогда в силу линейности операторов $A, B \in L(\mathcal{L};\mathcal{L})$ справедливы следующие равенства:

$$C(\alpha^1\cdot x_1 + \alpha^2\cdot x_2) = B(A(\alpha^1\cdot x_1 + \alpha^2\cdot x_2)) =$$
$$= B(\alpha^1\cdot Ax_1 + \alpha^2\cdot Ax_2) = \alpha^1\cdot B(Ax_1) + \alpha^2\cdot B(Ax_2) = \alpha^1\cdot Cx_1 + \alpha^2\cdot Cx_2.$$

Лемма доказана.

Замечание 1. Заметим, что, вообще говоря, $AB \neq BA$.

Лемма 10. *Для любых $A, B, C \in L(\mathcal{L};\mathcal{L})$ справедливы свойства дистрибутивности справа и слева*:

$$(A+B)C = AC + BC, \quad A(B+C) = AB + AC, \tag{5.2}$$

а также ассоциативности:

$$(AB)C = A(BC). \tag{5.3}$$

Доказательство. *Шаг 1. Дистрибутивность.* Пусть $x \in \mathcal{L}$ — произвольный вектор. Тогда с учетом определения сложения операторов и произведения операторов справедливы следующие равенства:

$$(A+B)Cx = A(Cx) + B(Cx) = (AC)x + (BC)x = (AC+BC)x.$$

В силу произвольности вектора $x \in \mathcal{L}$ приходим к равенству:

$$(A+B)C = AC + BC.$$

Докажем второе равенство из (5.2). Действительно, справедливы следующие равенства:

$$A(B+C)x = A(Bx) + A(Cx) = (AB)x + (AC)x = (AB+AC)x,$$

из которого в силу произвольности вектора $x \in \mathcal{L}$ приходим к равенству:

$$A(B+C) = AB + AC.$$

Ассоциативность. Справедливы равенства:

$$(AB)Cx = A(B(Cx)) = A((BC)x) = A(BC)x,$$

из которых в силу произвольности вектора $x \in \mathcal{L}$ вытекает (5.3).

Лемма доказана.

Определение 15. *Алгеброй над числовым полем $\mathbb{K}$ называется линейное пространство $\mathcal{A}$, снабженное внутренней операцией умножения $\bullet$:*

$$x \bullet y : \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \to \mathcal{A}, \tag{5.4}$$

обладающее следующим свойствами дистрибутивности слева и справа:

$$(x+y) \bullet z = x \bullet z + y \bullet z, \tag{5.5}$$

$$x \bullet (y+z) = x \bullet y + x \bullet z \tag{5.6}$$

для всех $x, y, z \in \mathcal{A}$. Алгебра $\mathcal{A}$ называется ассоциативной, если для любых $x, y, z \in \mathcal{A}$ выполнено равенство

$$(x \bullet y) \bullet z = x \bullet (y \bullet z), \tag{5.7}$$

и коммутативной, если для любых $x, y \in \mathcal{A}$ справедливо равенство

$$x \bullet y = y \bullet x. \tag{5.8}$$

Также говорят, что у алгебры $\mathcal{A}$ есть единица $\mathbf{e}$, если существует такой вектор $\mathbf{e} \in \mathcal{A}$, что для всех $x \in \mathcal{A}$ справедливы равенства

$$x \bullet \mathbf{e} = \mathbf{e} \bullet x = x. \tag{5.9}$$

Теорема 2. *Линейное пространство линейных операторов $L(\mathcal{L};\mathcal{L})$ является ассоциативной, некоммутативной алгеброй с единицей относительно операции умножения операторов.*

Доказательство. Утверждение является следствием лемм 9, 10. Единицей этой алгебры является единичный оператор.

Теорема доказана.

Посмотрим, что происходит с матрицами линейных операторов при произведении операторов. Пусть $A, B, C \in L(\mathcal{L};\mathcal{L})$ и $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — базис в $\mathcal{L}$. Справедливы следующие равенства:

$$C\mathbf{e}_i = c_i^k \cdot \mathbf{e}_k, \quad A\mathbf{e}_i = a_i^l \cdot \mathbf{e}_l, \quad B\mathbf{e}_l = b_l^k \cdot \mathbf{e}_k. \tag{5.10}$$

С учетом равенств (5.10) при $C = BA$ имеет место следующая цепочка выражений:

$$C\mathbf{e}_i = c_i^k \cdot \mathbf{e}_k = B(A\mathbf{e}_i) = B(a_i^l \cdot \mathbf{e}_l) = \\ = a_i^l \cdot B\mathbf{e}_l = a_i^l b_l^k \cdot \mathbf{e}_k = b_l^k a_i^l \cdot \mathbf{e}_k. \tag{5.11}$$

Поскольку $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — базис, то из (5.11) приходим к следующему равенству:

$$c_i^k = b_l^k a_i^l \Leftrightarrow C_e = B_e \cdot A_e, \tag{5.12}$$

где $C_e = (c_i^k)_n^n$, $A_e = (a_i^l)_n^n$ и $B_e = (b_l^k)_n^n$. Таким образом, доказана следующая лемма:

Лемма 11. *Произведению BA операторов $A, B \in L(\mathcal{L}; \mathcal{L})$ при фиксированном базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ в линейном пространстве $\mathcal{L}$ соответствует произведение матриц операторов в этом базисе $B_e \cdot A_e \in \in \mathbb{K}^{n\times n}$.*

В курсе «Аналитическая геометрия» фактически было доказано следующее утверждение:

Теорема 3. *Линейное пространство квадратных матриц $\mathbb{K}^{n\times n}$ является ассоциативной и некоммутативной алгеброй с единицей (единичная матрица) относительно операции умножения матриц.*

Теорема 4. *Алгебра операторов $L(\mathcal{L}, \mathcal{L})$ изоморфна алгебре матриц $\mathbb{K}^{n\times n}$ при фиксированном базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\} \subset \mathcal{L}$.*

Доказательство. Доказательство утверждения теоремы является следствием результатов теорем 2, 3 и лемм 9–11. Определим искомое отображение в следующем виде:

$$\varphi_{\mathbf{E}}: \ L(\mathcal{L}; \mathcal{L}) \to \mathbb{K}^{n\times n}, \quad n = \dim \mathcal{L}, \tag{5.13}$$
$$\varphi_{\mathbf{E}}(A) = A_e, \quad A \cdot \mathbf{E} := (A\mathbf{e}_1, \cdots, A\mathbf{e}_n) = \mathbf{E} \cdot A_e,$$

где $\mathbf{E} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$. Отметим, что при фиксированном базисе в $\mathcal{L}$ единичный оператор при данном изоморфизме переходит в единичную матрицу.

Теорема доказана.

§ 6. Теорема об обратном операторе

Теорема 5. *Если $A \in L(\mathcal{L}; \mathcal{M})$, то справедливо равенство*:

$$\dim \ker A + \dim \operatorname{im} A = \dim \mathcal{L}, \tag{6.1}$$

где, напомним,

$$\ker A = \{x \in \mathcal{L}: \ Ax = \vartheta\}, \quad \operatorname{im} A = \{y = Ax: \ \forall\, x \in \mathcal{L}\}.$$

Доказательство. Ранее в лемме 4 было доказано, что $\ker A \subset \subset \mathcal{L}$ и $\operatorname{im} A \subset \mathcal{M}$ являются подпространствами в $\mathcal{L}$ и $\mathcal{M}$, соответственно. Пусть $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k\}$ — это базис в $\ker A$, где $\dim \ker A = k$. Дополним это семейство векторов до базиса в $\mathcal{L}$. Пусть

$$\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_{k+1}, \ldots, \mathbf{e}_n\} \tag{6.2}$$

— базис в $\mathcal{L}$. Рассмотрим теперь семейство векторов:

$$\{A\mathbf{e}_{k+1}, \ldots, A\mathbf{e}_n\} \subset \operatorname{im} A \subset \mathcal{M}. \tag{6.3}$$

Докажем, что это семейство линейно независимо в линейном пространстве $\mathcal{M}$. Рассмотрим следующую линейную комбинацию:

$$\sum_{s=k+1}^{n} \alpha^s \cdot A\mathbf{e}_s = \vartheta \Rightarrow A\left(\sum_{s=k+1}^{n} \alpha^s \cdot \mathbf{e}_s\right) = \vartheta \Rightarrow \sum_{s=k+1}^{n} \alpha^s \cdot \mathbf{e}_s \in \ker A.$$

Следовательно, найдутся такие числа β^j, $j = \overline{1,k}$, что

$$\alpha^{k+1} \cdot \mathbf{e}_{k+1} + \cdots + \alpha^n \cdot \mathbf{e}_n = \beta^1 \cdot \mathbf{e}_1 + \cdots + \beta^k \cdot \mathbf{e}_k,$$

а поскольку семейство (6.2) линейно независимо, то все числа:

$$\alpha^{k+1} = \cdots = \alpha^n = \beta^1 = \cdots = \beta^k = 0.$$

Итак, семейство (6.3) линейно независимо. Докажем его полноту в $\operatorname{im} A$. Действительно, для любого $y \in \operatorname{im} A$ найдется такое $x \in \mathcal{L}$, что справедливы следующие равенства:

$$y = Ax = A\left(\sum_{j=1}^{n} \gamma^j \cdot \mathbf{e}_j\right) = A\left(\sum_{j=1}^{k} \gamma^j \cdot \mathbf{e}_j\right) + A\left(\sum_{j=k+1}^{n} \gamma^j \cdot \mathbf{e}_j\right) =$$

$$= \vartheta + A\left(\sum_{j=k+1}^{n} \gamma^j \cdot \mathbf{e}_j\right) = \sum_{j=k+1}^{n} \gamma^j \cdot A\mathbf{e}_j.$$

Итак, полнота семейства (6.3) в $\operatorname{im} A$ доказана. Следовательно, это семейство образует базис в $\operatorname{im} A$. Таким образом, имеют место равенства:

$$\dim \operatorname{im} A = n - k = \dim \mathcal{L} - \dim \ker A \Leftrightarrow \dim \ker A + \dim \operatorname{im} A = \dim \mathcal{L}.$$

Теорема доказана.

Лемма 12. *Справедливы следующие равенства:*

$$\dim \ker A^T + \dim \operatorname{im} A^T = \dim \mathcal{L}^* = \dim \mathcal{L} \text{ [1]}. \tag{6.4}$$

Теорема 6. *Следующие три свойства для оператора $A \in L(\mathcal{L};\mathcal{L})$ эквивалентны*:

1. *Оператор A обратим и $A^{-1} \in L(\mathcal{L};\mathcal{L})$;*
2. $\operatorname{im} A = \mathcal{L}$*;*
3. $\ker A = \{\vartheta\}$.

Доказательство. Докажем, что $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 1$.

Шаг 1. $1 \Rightarrow 2$. Пусть оператор $A \in L(\mathcal{L};\mathcal{L})$ обратим и $A^{-1} \in L(\mathcal{L};\mathcal{L})$. Тогда уравнение $Ax = y$ имеет единственное решение $x \in \mathcal{L}$ для любого $y \in \mathcal{L}$, причем $x = A^{-1}y$. Поэтому $\operatorname{im} A = \mathcal{L}$.

Шаг 2. $2 \Rightarrow 3$. Пусть $\operatorname{im} A = \mathcal{L}$. Тогда $\dim \operatorname{im} A = \dim \mathcal{L}$ и из равенства (6.1) вытекает, что $\dim \ker A = 0$. Следовательно, $\ker A = \{\vartheta\}$.

---

[1] Смотри 11 параграф.

Шаг 3. $3 \Rightarrow 1$. Пусть $\ker A = \{\vartheta\}$. Тогда $\dim\ker A = 0$. В силу равенства (6.1) получаем, что $\dim \operatorname{im} A = \dim \mathcal{L}$. Значит, $\operatorname{im} A = \mathcal{L}$. С одной стороны, из равенства $\operatorname{im} A = \mathcal{L}$ вытекает, что уравнение $Ax = y$ для каждого $y \in \mathcal{L} = \operatorname{im} A$ имеет решение $x \in \mathcal{A}$. С другой стороны, если для некоторого $y_0 \in \mathcal{L}$ существует два решения $x_1, x_2 \in \mathcal{L}$, то имеют место следующие равенства:

$$Ax_1 = y_0 = Ax_2 \Rightarrow A(x_1 - x_2) = \vartheta \Rightarrow x_1 - x_2 \in \ker A = \{\vartheta\} \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Стало быть, для каждого $y \in \mathcal{L}$ существует единственное решение $x \in \in \mathcal{L}$ уравнения $Ax = y$. Поэтому определено однозначное отображение:

$$By = x \Rightarrow ABy = Ax = y \Rightarrow ABy = y \quad \text{для всех} \quad y \in \mathcal{L}, \tag{6.5}$$

$$Ax = y \Rightarrow BAx = By = x \Rightarrow BAx = x \quad \text{для всех} \quad x \in \mathcal{L}. \tag{6.6}$$

Из (6.5) и (6.6) вытекает, что $B = A^{-1}$, т.е. оператор A обратим. Докажем, что $A^{-1} \in L(\mathcal{L}; \mathcal{L})$, т.е. осталось доказать линейность оператора A^{-1}. Пусть $y_1, y_2 \in \mathcal{L}$ и $\alpha^1, \alpha^2 \in \mathbb{K}$ — произвольны. Тогда найдутся такие единственные $x_1, x_2 \in \mathcal{L}$, что справедливы равенства:

$$Ax_1 = y_1, \quad Ax_2 = y_2, \quad x_1 = A^{-1}y_1, \quad x_2 = A^{-1}y_2,$$

$$\begin{aligned} &A^{-1}(\alpha^1 \cdot y_1 + \alpha^2 \cdot y_2) = A^{-1}(\alpha^1 \cdot Ax_1 + \alpha^2 \cdot Ax_2) = \\ &\quad = A^{-1}A(\alpha^1 \cdot x_1 + \alpha^2 \cdot x_2) = \alpha^1 \cdot x_1 + \alpha^2 \cdot x_2 = \alpha^1 \cdot A^{-1}y_1 + \alpha^2 \cdot A^{-1}y_2. \end{aligned}$$

Итак, оператор A^{-1} — линейный.

Теорема доказана.

Лемма 13. *Если $A \in L(\mathcal{L}; \mathcal{L})$ и оператор $A^{-1} \in L(\mathcal{L}; \mathcal{L})$, причем A_e — матрица оператора A в фиксированном базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$. Тогда матрица $(A^{-1})_e$ оператора A^{-1} в том же базисе равна $(A_e)^{-1}$.*

Доказательство. Пусть

$$x = x^k \cdot \mathbf{e}_k = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot X_e, \quad X_e = (x^1, \cdots, x^n)^T,$$

Итак, имеем:

$$\begin{aligned} A(x) &= A(x^k \cdot \mathbf{e}_k) = x^k \cdot A(\mathbf{e}_k) = \\ &= (A(\mathbf{e}_1), A(\mathbf{e}_2), \ldots, A(\mathbf{e}_n)) \cdot X_e = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot A_e \cdot X_e = \\ &= (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot Y_e, \quad Y_e = A_e \cdot X_e, \end{aligned} \tag{6.7}$$

где $Y_e = (y^1, y^2, \ldots, y^n)^T$. Поэтому справедлива следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot X_e &= x = A^{-1}(A(x)) = A^{-1}(y^k \cdot \mathbf{e}_k) = y^k \cdot A^{-1}(\mathbf{e}_k) = \\ &= (A^{-1}(\mathbf{e}_1), A^{-1}(\mathbf{e}_2), \ldots, A^{-1}(\mathbf{e}_n)) \cdot Y_e = \\ &= (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot (A^{-1})_e \cdot A_e \cdot X_e. \end{aligned} \tag{6.8}$$

Отсюда имеем:

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot \left[I_e - (A^{-1})_e \cdot A_e\right] \cdot X_e = \vartheta \in \mathcal{L}.$$

Поскольку семейство $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ линейно независимо, то приходим к равенству:

$$\left[I_e - (A^{-1})_e \cdot A_e\right] \cdot X_e = O \in \mathbb{K}^{n\times 1},$$

а в силу произвольности $X_e \in \mathbb{K}^{n\times 1}$ приходим к равенству:

$$(A^{-1})_e \cdot A_e = I_e \Leftrightarrow (A^{-1})_e = (A_e)^{-1}.$$

Лемма доказана.

§ 7. Инвариантные подпространства линейного оператора

Определение 16. *Линейное подпространство $U \subset \mathcal{L}$ называется инвариантным подпространством относительно линейного оператора $A \in L(\mathcal{L}; \mathcal{L})$, если*

$$AU \subset U,$$

т.е. $Ax \in U$ для всех $x \in U$. Символом $A|_U$ мы обозначаем ограничение оператора A на инвариантное подпространство U.

Лемма 14. *Ограничение $A|_U$ линейного оператора A на инвариантное подпространство U является линейным оператором:*

$$A|_U \in L(U; U).$$

Доказательство. Пусть $x_1, x_2 \in U$ и $\alpha^1, \alpha^2 \in \mathbb{K}$ — произвольны. Тогда, с одной стороны, поскольку U — линейное подпространство в линейном пространстве $\mathcal{L}$, то $\alpha^1 \cdot x_1 + \alpha^2 \cdot x_2 \in U$. С другой стороны, в силу того, что U — инвариантное подпространство оператора A справедливы следующие соотношения:

$$A|_U(\alpha^1 \cdot x_1 + \alpha^2 \cdot x_2) = A(\alpha^1 \cdot x_1 + \alpha^2 \cdot x_2) = \\ = \alpha^1 \cdot Ax_1 + \alpha^2 \cdot Ax_2 = \alpha^1 \cdot A|_U x_1 + \alpha^2 \cdot A|_U x_2.$$

Лемма доказана.

Лемма 15. *Если базис $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ линейного пространства $\mathcal{L}$ выбран таким образом, что инвариантное подпространство $U = L(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k)$, то матрица A_e оператора A в этом базисе имеет следующий блочный вид:*

$$A_e = \begin{pmatrix} B & D \\ O & C \end{pmatrix}, \tag{7.1}$$

где B — матрица оператора $A|_U$ в базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k\}$, C — квадратная матрица порядка $n-k$ и D — какая-то матрица размера $k \times (n-k)$.

Доказательство. Справедливо следующее равенство:

$$A\mathbf{e}_j = a_j^i \cdot \mathbf{e}_i. \tag{7.2}$$

Поскольку $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k\}$ — это базис инвариантного подпространства U, то $A\mathbf{e}_j \in L(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k)$ при $j = \overline{1, k}$ и поэтому $a_j^i = 0$ при $i = \overline{k+1, n}$. Поэтому справедливо следующее выражение:

$$(A\mathbf{e}_1, \ldots, A\mathbf{e}_k, A\mathbf{e}_{k+1}, \ldots, A\mathbf{e}_n) = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_{k+1}, \ldots, \mathbf{e}_n)\cdot$$
$$\cdot \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_k^1 & a_{k+1}^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^k & \cdots & a_k^k & a_{k+1}^k & \cdots & a_n^k \\ 0 & \cdots & 0 & a_{k+1}^{k+1} & \cdots & a_n^{k+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{k+1}^n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} B & D \\ O & C \end{pmatrix} \tag{7.3}$$

Заметим, что $A\mathbf{e}_j = A|_U\mathbf{e}_j$ при $j = \overline{1, k}$. Поэтому из равенства (7.2) получаем равенство:

$$A|_U\mathbf{e}_j = a_j^i \cdot \mathbf{e}_i, \quad j = \overline{1, k}, \quad i = \overline{1, k}. \tag{7.4}$$

Но тогда справедливо равенство:

$$(A|_U\mathbf{e}_1, \ldots, A|_U\mathbf{e}_k) = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k) \cdot \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_k^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^k & \cdots & a_k^k \end{pmatrix} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k) \cdot B.$$

Следовательно, B — матрица оператора $A|_U$ в базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k\}$ линейного подпространства $U \subset \mathcal{L}$.

Лемма доказана.

Лемма 16. *Если $\mathcal{L} = U \oplus V$, где U и V — инвариантные подпространства оператора $A \in L(\mathcal{L}; \mathcal{L})$, то в базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ линейного пространства $\mathcal{L}$ таком, что $U = L(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k)$, $V = L(\mathbf{e}_{k+1}, \ldots, \mathbf{e}_n)$ матрица A_e этого линейного оператора имеет следующий вид:*

$$A_e = \begin{pmatrix} B & O \\ O & C \end{pmatrix}, \tag{7.5}$$

где B — матрица оператора $A|_U$ в базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k\}$, а C — матрица оператора $A|_V$ в базисе $\{\mathbf{e}_{k+1}, \ldots, \mathbf{e}_n\}$.

Доказательство. Пусть $U = L(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k)$ и $V = L(\mathbf{e}_{k+1}, \ldots, \mathbf{e}_n)$. С одной стороны, справедливо равенство (7.2). С другой стороны, $A\mathbf{e}_j \in L(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k)$ при $j \in \overline{1, k}$ и $A\mathbf{e}_j \in L(\mathbf{e}_{k+1}, \ldots, \mathbf{e}_n)$ при $j \in \overline{k+1, n}$. Поэтому в равенстве (7.2) $a_j^i = 0$ при $i = \overline{k+1, n}$, $j = \overline{1, k}$ и $a_j^i = 0$ при $i = \overline{1, k}$, $j = \overline{k+1, n}$. Следовательно, справедливы следующие выражения:

$$(A\mathbf{e}_1, \ldots, A\mathbf{e}_k, A\mathbf{e}_{k+1}, \ldots, A\mathbf{e}_n) = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_{k+1}, \ldots, \mathbf{e}_n)\cdot$$

$$\cdot \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_k^1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^k & \cdots & a_k^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{k+1}^{k+1} & \cdots & a_n^{k+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{k+1}^n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} B & O \\ O & C \end{pmatrix}. \quad (7.6)$$

Заметим, что

$$A|_U \mathbf{e}_j = a_j^i \cdot \mathbf{e}_i, \quad i = \overline{1,k}, \quad j = \overline{1,k}, \quad (7.7)$$

$$A|_V \mathbf{e}_j = a_j^i \cdot \mathbf{e}_i, \quad i = \overline{k+1,n}, \quad j = \overline{k+1,n}. \quad (7.8)$$

Поэтому справедливы следующие равенства:

$$(A|_U\mathbf{e}_1, \ldots, A|_U\mathbf{e}_k) = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k) \cdot \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_k^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^k & \cdots & a_k^k \end{pmatrix} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k) \cdot B,$$

$$(A|_V\mathbf{e}_{k+1}, \ldots, A|_V\mathbf{e}_n) = (\mathbf{e}_{k+1}, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot \begin{pmatrix} a_{k+1}^{k+1} & \cdots & a_n^{k+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k+1}^n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix} = \\ = (\mathbf{e}_{k+1}, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot C.$$

Лемма доказана.

Лемма 17. *Если $\mathcal{L} = U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_m$, то в базисе $\mathcal{L}$, составленном из базисов инвариантных подпространств $U_1, \ldots, U_m$ оператора $A \in L(\mathcal{L};\mathcal{L})$, матрица A_e оператора A примет следующий вид:*

$$A_e = \begin{pmatrix} A_1 & & & O \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & A_m \end{pmatrix},$$

где A_j — матрица оператора $A|_{U_j}$ в соответствующем базисе линейного подпространства U_j.

§ 8. Собственные векторы

Основной задачей теории линейных операторов является нахождение такого базиса, в котором его матрица является наиболее простой. Пределом мечтаний является нахождение базиса, в котором матрица линейного оператора диагональна. Как мы покажем, такой базис может не существовать.

Определение 17. *Ненулевой вектор $e \in \mathcal{L}(\mathbb{K})$ называется собственным вектором оператора $A \in L(\mathcal{L};\mathcal{L})$, если $Ae = \lambda \cdot e$. Число $\lambda \in \mathbb{K}$ называется при этом собственным значением оператора A, отвечающим собственному вектору e.*

Лемма 18. *Ненулевой вектор $e \in \mathcal{L}$ является собственным вектором оператора $A \in L(\mathcal{L};\mathcal{L})$, тогда и только тогда, когда линейное подпространство $L(e)$ инвариантно и $\dim L(e) = 1$.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $e \in \mathcal{L}$ — собственный вектор оператора A. Тогда e — базис в линейной оболочке $L(e)$. Предположим, что $y \in L(e)$. Тогда найдется такое число $\alpha \in \mathbb{K}$, что $y = \alpha \cdot e$. Справедливы следующие равенства:

$$Ay = \alpha \cdot Ae = \alpha\lambda \cdot e \in L(e).$$

Следовательно, $L(e)$ — одномерное инвариантное подпространство.

Достаточность. Пусть $L(e)$ — одномерное инвариантное подпространство. Пусть e — его базис. Тогда справедливо соотношение:

$$Ae \in L(e) \Rightarrow \exists\, \lambda \in \mathbb{K}, \quad Ae = \lambda \cdot e.$$

Следовательно, $e \in \mathcal{L}$ — собственный вектор оператора A.

Лемма доказана.

Лемма 19. *Для того чтобы матрица A_e линейного оператора $A \in L(\mathcal{L};\mathcal{L})$ в некотором базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\} \subset \mathcal{L}$ была диагональной, необходимо и достаточно, чтобы базис $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ состоял из собственных векторов этого линейного оператора A; при этом диагональные элементы матрицы A_e являются собственными значениями оператора A.*

Доказательство. *Шаг 1. Достаточность.* Пусть $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — это такой базис линейного пространства $\mathcal{L}$, что

$$A\mathbf{e}_j = \lambda_j \cdot \mathbf{e}_j, \quad \lambda_j \in \mathbb{K}.$$

Тогда для матрицы A_e оператора A в этом базисе имеет вид:

$$(A\mathbf{e}_1, \ldots, A\mathbf{e}_n) = (\lambda_1 \cdot \mathbf{e}_1, \ldots, \lambda_n \cdot \mathbf{e}_n) =$$

$$= (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \mathrm{O} \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathrm{O} & & & \lambda_n \end{pmatrix} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot A_e.$$

Шаг 2. Необходимость. Пусть в базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\} \subset \mathcal{L}$ матрица A_e оператора $A \in L(\mathcal{L}; \mathcal{L})$ имеет диагональный вид:

$$A_e = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \mathrm{O} \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathrm{O} & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

но тогда по определению матрицы оператора справедливы равенства:

$$(A\mathbf{e}_1, \ldots, A\mathbf{e}_n) = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot A_e = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \mathrm{O} \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathrm{O} & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

из которых получаем, что

$$A\mathbf{e}_j = \lambda_j \cdot \mathbf{e}_j, \quad j = \overline{1, n},$$

причем поскольку $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — базис в $\mathcal{L}$, то $\mathbf{e}_j \neq \vartheta$.

Лемма доказана.

Замечание 2. Собственные значения λ_j, $j = \overline{1, n}$ могут совпадать. Например, у единичного оператора.

Пример 6. Выберем базис в линейном пространстве P^n многочленов степени не выше $n \in \mathbb{N}$ следующим специальным образом:

$$\mathbf{e}_1 = 1, \quad \mathbf{e}_2 = t, \quad \mathbf{e}_3 = \frac{t^2}{2!}, \quad \cdots, \quad \mathbf{e}_{n+1} = \frac{t^n}{n!}. \tag{8.1}$$

Любой полином $p_n(t) \in P^n$ можно разложить по базису (8.1) следующим образом:

$$p_n(t) = a_0 + a_1 t + a_2 \frac{t^2}{2!} + \cdots + a_n \frac{t^n}{n!}. \tag{8.2}$$

Теперь изучим вопрос о существовании собственного вектора оператора дифференцирования $D: P^n \to P^{n-1} \subset P^n$. С этой целью применим оператор дифференцирования D к полиному $p_n(t)$ и получим полином $p_{n-1}(t) \in P^{n-1} \subset P^n$:

$$p_{n-1}(t) \stackrel{def:}{=} Dp_n(t) = a_1 + a_2 t + \cdots + a_n \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}. \tag{8.3}$$

Рассмотрим равенство:

$$Dp_n(t) = \lambda p_n(t) \Rightarrow p_{n-1}(t) = \lambda p_n(t). \tag{8.4}$$

Сначала рассмотрим случай $\lambda \neq 0$. Тогда в равенстве (8.4) в правой части содержится слагаемое с старшей степенью $n \in \mathbb{N}$:

$$\lambda a_n \frac{t^n}{n!},$$

а в левой части слагаемое со старшей степенью — это слагаемое:

$$a_n \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Поскольку равенство (8.4) должно быть выполнено для всех $t \in \mathbb{R}$, то приходим к выводу о том, что $\lambda a_n = 0$, т.е. $a_n = 0$. Далее повторяем все рассуждения и мы получим в итоге равенство $\lambda a_0 = 0$, т.е. $a_0 = 0$. Стало быть, с одной стороны, у оператора дифференцирования $D: P^n \to P^n$ не может быть собственного вектора с собственным значением $\lambda \neq 0$. С другой стороны, $\lambda = 0$ является собственным значением собственного вектора $\mathbf{e}_1$:

$$D\mathbf{e}_1 = \vartheta = 0\mathbf{e}_1$$

и других собственных векторов у оператора дифференцирования нет. Стало быть, у оператора дифференцирования D в линейном пространстве P^n *нет собственного базиса.*

Теорема 7. *Вектор $e \in \mathcal{L}$ является собственным вектором оператора $A \in L(\mathcal{L};\mathcal{L})$, соответствующего собственному значению $\lambda \in \mathbb{K}$, тогда и только тогда, когда в базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ линейного пространства $\mathcal{L}$ справедливо равенство*:

$$e = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot X_e, \tag{8.5}$$

где $X_e \in \mathbb{K}^{n\times 1}$ — нетривиальное решение системы уравнений:

$$A_e \cdot X_e = \lambda X_e, \tag{8.6}$$

а A_e — матрица оператора A в базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $e \in \mathcal{L}$ — собственный вектор оператора $A \in L(\mathcal{L};\mathcal{L})$, соответствующий собственному значению $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$Ae = \lambda \cdot e, \quad e \neq \vartheta. \tag{8.7}$$

Пусть $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — базис в $\mathcal{L}$. Разложим собственный вектор $e \in \mathcal{L}$ по этому базису и получим следующее равенство:

$$e = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot X_e, \quad X_e \in \mathbb{K}^{n\times 1}. \tag{8.8}$$

Тогда справедливы следующие равенства:

$$\begin{aligned} Ae = A((\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot X_e) = A(x_e^k \cdot \mathbf{e}_k) = x_e^k \cdot A(\mathbf{e}_k) = \\ = (A\mathbf{e}_1, \ldots, A\mathbf{e}_n) \cdot X_e = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot A_e \cdot X_e, \quad (8.9) \\ \lambda e = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot \lambda X_e. \quad (8.10) \end{aligned}$$

Следовательно, из равенств (8.7)–(8.10) получаем цепочку равенств:

$$\begin{aligned} (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot A_e \cdot X_e = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot \lambda X_e \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot (A_e \cdot X_e - \lambda X_e) = \vartheta \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow A_e \cdot X_e - \lambda X_e = O \Leftrightarrow A_e \cdot X_e = \lambda X_e, \quad (8.11) \end{aligned}$$

поскольку $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — базис.

Достаточность. Справедливо следующее равенство:

$$e = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot X_e \neq \vartheta,$$

поскольку в противном случае:

$$(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot X_e = \vartheta$$

и в силу линейной независимости системы векторов $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ получим $X_e = O$, что противоречит условию $X_e \neq O$.

Из (8.5), (8.6), поскольку $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — базис, вытекают следующие равенства:

$$(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot A_e \cdot X_e = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot \lambda X_e, \quad e \neq \vartheta,$$

$$A(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) X_e = \lambda \cdot (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot X_e,$$

$$Ae = \lambda \cdot e, \quad e \neq \vartheta.$$

Следовательно, e — собственный вектор оператора $A \in L(\mathcal{L}; \mathcal{L})$, соответствующий собственному значению $\lambda \in \mathbb{K}$.

Теорема доказана.

Таким образом, вопрос о существовании собственного вектора у линейного оператора сводится к изучению однородной системы уравнений (8.6), а именно к изучению вопроса существования нетривиального решения (решений) этой системы уравнений. В частности, из общей теории линейных однородных квадратных систем уравнений вытекает следующее утверждение:

Лемма 20. *Для того чтобы существовало нетривиальное решение уравнения* (8.6)*, необходимо и достаточно, чтобы* $\det(A_e - \lambda I) = 0$.

Определение 18. *Многочлен* $f(\lambda) = \det(A_e - \lambda I)$ *называется характеристическим многочленом.*

Лемма 21. *Характеристический многочлен не зависят от выбора базиса, в котором записана матрица* A_e *линейного оператора* A.

Доказательство. Справедлива следующая цепочка равенств:

$$A_{e'} - \lambda I = C^{-1} \cdot A_e \cdot C - \lambda C^{-1} \cdot C = C^{-1} \cdot (A_e - \lambda I) \cdot C,$$

из которой получаем равенства

$$\begin{aligned} \det(A_{e'} - \lambda I) &= \det(C^{-1} \cdot (A_e - \lambda I) \cdot C) = \\ &= \det C^{-1} \det(A_e - \lambda I) \det C = \frac{1}{\det C} \det(A_e - \lambda I) \det C = \\ &= \det(A_e - \lambda I). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Замечание 3. Отметим, что характеристический многочлен имеет следующий вид:

$$\begin{vmatrix} a_1^1 - \lambda & a_2^1 & \cdots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 - \lambda & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \cdots & a_n^n - \lambda \end{vmatrix}.$$

Из этого явного вида вытекает, в частности, что коэффициент при λ^n равен $(-1)^n$, а коэффициент при λ^0 равен $\det A_e$. Несколько сложнее заметить, что коэффициент при λ^{n-1} равен $-\operatorname{tr} A$, где

$$\operatorname{tr} A = a_1^1 + \cdots + a_n^n.$$

Теорема 8. *Корни характеристического многочлена из поля $\mathbb{K}$, над которым рассматривается линейное пространство $\mathfrak{L}$ ($A \in L(\mathfrak{L}; \mathfrak{L})$) — в точности собственные значения линейного оператора.*

Доказательство. Это следствие теоремы 7, леммы 20.

Теорема доказана.

Лемма 22. *Любой оператор $A \in L(\mathfrak{L}; \mathfrak{L})$ в комплексном линейном пространстве $\mathfrak{L}$ имеет собственный вектор.*

Доказательство. Согласно основной теореме алгебры уравнение $\det(A_e - \lambda I) = 0$ имеет корень $\lambda_0 \in \mathbb{C}$. Поэтому существует нетривиальное решение линейной однородной системы уравнений:

$$A_e \cdot X_e = \lambda_0 X_e.$$

Но тогда $e = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) X_e \neq \vartheta$ в силу результата теоремы 7 является нетривиальным решением уравнения:

$$Ae = \lambda_0 \cdot e,$$

т.е. собственным вектором оператора A, соответствующим собственному значению λ_0.

Лемма доказана.

§ 9. Собственные векторы. Продолжение

Теорема 9. *Любой оператор $A \in L(\mathfrak{L}; \mathfrak{L})$ в линейном пространстве $\mathfrak{L}$ над полем вещественных чисел имеет одномерное или (и) двумерное инвариантное подпространство.*

Доказательство. *Шаг 1. Вещественный корень.* Если существует вещественный корень характеристического многочлена $\det(A_e - \lambda I)$, то существует собственный вектор $e \neq \vartheta$ этого оператора, а следовательно, его линейная оболочка $L(e)$ является одномерным инвариантным подпространством этого оператора.

Шаг 2. Комплексный корень. Пусть $\lambda_0 = l + i\mu \in \mathbb{C}$ при $\mu \neq 0$ — корень характеристического многочлена, который, как мы знаем, существует в силу основной теоремы алгебры, т.е. $\det(A_e - \lambda_0 I) = 0$. В силу этого равенства однородная система уравнений:

$$A_e \cdot Z = (l + i\mu)Z, \quad Z \in \mathbb{C}^{n\times 1}$$

имеет нетривиальное решение $Z = X + iY$, $X, Y \in \mathbb{R}^{n\times 1}$. Справедлива следующая цепочка равенств:

$$A_e \cdot (X + iY) = (l + i\mu)(X + iY) \Leftrightarrow A_e \cdot X + iA_e \cdot Y = lX - \mu Y + i(lY + \mu X),$$

из которой получаем два равенства:

$$A_e \cdot X = lX - \mu Y, \quad A_e \cdot Y = lY + \mu X. \tag{9.1}$$

Рассмотрим элементы линейного пространства $\mathcal{L}$:

$$u = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot X \quad \text{и} \quad v = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot Y. \tag{9.2}$$

Справедливы следующие равенства:

$$\begin{aligned}(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot A_e \cdot X &= (A\mathbf{e}_1, \ldots, A\mathbf{e}_n) \cdot X = \\ &= x^1 \cdot A\mathbf{e}_1 + \cdots + x^n \cdot A\mathbf{e}_n = \\ &= A(x^k \cdot \mathbf{e}_k) = A(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot X = Au, \\ (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot A_e \cdot Y &= A(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot Y = Av.\end{aligned}$$

Тогда из равенств (9.1) с учетом (9.2) получим следующие равенства:

$$Au = l \cdot u - \mu \cdot v, \quad Av = l \cdot v + \mu \cdot u, \quad u, v \in \mathcal{L}. \tag{9.3}$$

Отсюда сразу же в силу линейности оператора A получаем, что линейное вещественное подпространство $L(u, v)$ является инвариантным подпространством для оператора A.

$\square$ Действительно, пусть $z \in L(u, v)$. Значит,

$$\begin{aligned}z = \alpha \cdot u + \beta \cdot v \Rightarrow A(z) &= \alpha \cdot A(u) + \beta \cdot A(v) = \\ &= \alpha \cdot (l \cdot u - \mu \cdot v) + \beta \cdot (l \cdot v + \mu \cdot u) = \\ &= (\alpha l + \beta\mu) \cdot u + (-\alpha\mu + \beta l) \cdot v \in L(u, v). \quad \boxtimes\end{aligned} \tag{9.4}$$

Шаг 4. Размерность. Докажем, что $\det L(u, v) = 2$.

Сначала докажем, что $X \neq O$. Действительно, пусть $X = O$. Тогда из (9.1) вытекает равенство:

$$\mu Y = 0 \Rightarrow Y = O,$$

поскольку $\mu \neq 0$. Следовательно, $Z = X + iY = O$, что противоречит нетривиальности $Z \neq O$. Итак, $X \neq O$.

Теперь докажем, что $Y \neq O$. Пусть $Y = O$. Тогда из (9.1) получаем равенство:

$$\mu X = 0 \Rightarrow X = O,$$

поскольку $\mu \neq 0$. Следовательно, $Z = X + iY = O$, что противоречит нетривиальности $Z \neq O$. Итак, $Y \neq O$.

Предположим, что столбцы X и Y линейно зависимы. Тогда существует такое $\alpha \in \mathbb{R}$ такое, что $X = \alpha Y$, и из равенств (9.1) получаем следующие выражения:

$$\alpha A_e \cdot Y = \alpha\lambda Y - \mu Y, \quad A_e \cdot Y = \lambda Y + \alpha\mu Y, \quad Y \neq O,$$

из которых исключая $A_e Y$ получим равенство:

$$\alpha(\lambda Y + \alpha\mu Y) = \alpha\lambda Y - \mu Y \Rightarrow \mu(1+\alpha^2)Y = O \in \mathbb{R}^{n\times 1} \Rightarrow \mu(1+\alpha^2) = 0,$$

поскольку по доказанному $Y \neq O$. Равенство $\mu\alpha^2 + \mu = 0$ невозможно, поскольку $\mu \neq 0$. Итак, столбцы X и Y линейно независимы, а, стало быть, линейно независимы и элементы (9.2). Значит, $\det L(u,v) = 2$.

Теорема доказана.

Лемма 23. *Множество всех $e \in \mathcal{L}$ таких, что*

$$e = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot X_e, \tag{9.5}$$

где X_e пробегает все множество решений линейной однородной системы уравнений:

$$A_e \cdot X_e = \lambda X_e, \quad X_e \in \mathbb{K}^{n\times 1}, \quad \lambda \in \mathbb{K}, \tag{9.6}$$

а $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — базис в $\mathcal{L}$, образуют линейное подпространство $V_\lambda(A)$, причем:

$$V_\lambda(A) = \ker(A - \lambda I) \subset \mathcal{L}, \tag{9.7}$$

где A_e — матрица оператора $A \in L(\mathcal{L};\mathcal{L})$ в базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ линейного пространства $\mathcal{L}$. Кроме того, линейное подпространство $V_\lambda(A)$ инвариантно относительно оператора A.

Доказательство. *Шаг 0.* Заметим, что $\ker(A - \lambda I)$ — есть линейное подпространство в $\mathcal{L}$, состоящее из линейной оболочки всех собственных векторов оператора A, соответствующих собственному значению $\lambda \in \mathbb{K}$.

Шаг 1. Пусть $e \in V_\lambda(A)$. Тогда имеем:

$$\begin{aligned} Ae = A(x_e^k \cdot \mathbf{e}_k) = x_e^k \cdot A(\mathbf{e}_k) = (A(\mathbf{e}_1), \ldots, A(\mathbf{e}_n)) \cdot X_e = \\ = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot (A_e \cdot X_e) = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot (\lambda X_e) = \\ = \lambda(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot X_e = \lambda e \Rightarrow e \in \ker(A - \lambda I). \end{aligned}$$

Шаг 2. Пусть $e \in \ker(A - \lambda I)$. Тогда имеем:

$$Ae = \lambda \cdot e. \tag{9.8}$$

Разложим e по базису $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$:

$$e = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot X_e. \tag{9.9}$$

Тогда справедливы следующие равенства:

$$\begin{aligned} Ae = A((\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot X_e) = A(x_e^k \cdot \mathbf{e}_k) = x_e^k \cdot A\mathbf{e}_k = \\ = (A\mathbf{e}_1, \ldots, A\mathbf{e}_n) \cdot X_e = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot A_e \cdot X_e, \end{aligned} \tag{9.10}$$

$$\lambda \cdot e = \lambda \cdot (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot X_e = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot \lambda X_e. \tag{9.11}$$

Из равенств (9.8)–(9.11) приходим к равенству:

$$(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot A_e \cdot X_e = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot \lambda X_e \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot [A_e \cdot X_e - \lambda X_e] = \vartheta \Leftrightarrow A_e \cdot X_e = \lambda X_e. \tag{9.12}$$

Следовательно, $e \in V_\lambda(A)$.

Из результатов шагов 1 и 2 имеем:

$$V_\lambda(A) = \ker(A - \lambda I).$$

Шаг 3. Пусть $x \in V_\lambda(A)$. Тогда имеем цепочку соотношений:

$$(A - \lambda I)x = \vartheta \Leftrightarrow A(x) = \lambda \cdot x \Rightarrow A(A(x)) = A(\lambda \cdot x) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow A(A(x)) = \lambda \cdot (A(x)) \Leftrightarrow [A - \lambda I]A(x) = \vartheta \Rightarrow \\ \Rightarrow A(x) \in \ker(A - \lambda I) = V_\lambda(A).$$

Следовательно, $V_\lambda(A)$ — инвариантное подпространство относительно оператора A.

Лемма доказана.

Определение 19. *Подпространство* $V_\lambda(A) := \ker(A - \lambda I)$ *называется собственным подпространством линейного оператора* A.

Теорема 10. *Собственные векторы* $\mathbf{e}_1 \in V_{\lambda_1}(A), \ldots, \mathbf{e}_s \in V_{\lambda_s}(A)$, *соответствующие различным собственным значениям* $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ [1] *оператора* A, *линейно независимы.*

Доказательство. Докажем утверждение теоремы по индукции. При $m = 1$ доказывать нечего. Пусть $m > 1$ и $\vartheta \neq e_k \in V_{\lambda_k} = \ker(A - \lambda_k I)$ и $k = \overline{1, m}$ и утверждение теоремы выполнено для $m - 1$ собственных векторов. Рассмотрим следующую линейную комбинацию:

$$\alpha^1 \cdot e_1 + \cdots + \alpha^{m-1} \cdot e_{m-1} + \alpha^m \cdot e_m = \vartheta. \tag{9.13}$$

Применим оператор A к обеим частям равенства (9.13) и в результате получим равенство:

$$\alpha^1 \cdot Ae_1 + \cdots + \alpha^{m-1} \cdot Ae_{m-1} + \alpha^m \cdot Ae_m = \vartheta \Rightarrow \\ \Rightarrow \lambda_1 \alpha^1 \cdot e_1 + \cdots + \lambda_{m-1}\alpha^{m-1} \cdot e_{m-1} + \lambda_m \alpha^m \cdot e_m = \vartheta. \tag{9.14}$$

Теперь умножим обе части равенства (9.13) на λ_m и вычтем получившееся равенство из (9.14). В результате получим равенство:

$$\alpha^1(\lambda_1 - \lambda_m) \cdot e_1 + \cdots + \alpha^{m-1}(\lambda_{m-1} - \lambda_m) \cdot e_{m-1} = \vartheta. \tag{9.15}$$

Поскольку все собственные числа попарно не совпадают и в силу предположения индукции векторы $e_1, \ldots, e_{m-1}$ линейно независимы получаем, что $\alpha^1 = \cdots = \alpha^{m-1} = 0$. Тогда из равенства (9.13) получаем,

[1] Из поля $\mathbb{K}$.

что $\alpha^m = 0$. Итак, равенство (9.13) возможно тогда и только тогда, когда все числа $\alpha^1 = \dots = \alpha^m = 0$, т.е. соответствующие собственные векторы линейно независимы.

Теорема доказана.

Лемма 24. *Если характеристический многочлен* $\det(A - \lambda I)$ *имеет* $n = \dim \mathcal{L}$ *различных корней из поля* $\mathbb{K}$, *над которым определено линейное пространство* $\mathcal{L}$, *то существует собственный базис этого оператора в линейном пространстве* $\mathcal{L}$.

Доказательство. Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — попарно различные собственные числа из поля $\mathbb{K}$, а e_k при $k = \overline{1,n}$ — это соответствующие собственные векторы. В силу результата теоремы 10 получаем, что они линейно независимы и их число совпадает с размерностью n линейного пространства $\mathcal{L}$. Значит, они образуют базис.

Лемма доказана.

Замечание 4. Результат этого следствия является достаточным условием существования собственного базиса линейного оператора. Например, с одной стороны, характеристический многочлен единичного оператора равен $f(\lambda) = (1 - \lambda)^n$ и имеет n–кратный корень $\lambda = 1$. С другой стороны, любой базис линейного пространства $\mathcal{L}$ является собственным для единичного оператора.

Лемма 25. *Характеристический многочлен ограничения линейного оператора на инвариантное подпространство делит характеристический многочлен самого оператора.*

Доказательство. Пусть $U \subset \mathcal{L}$ — это инвариантное подпространства линейного оператора $A \in L(\mathcal{L}; \mathcal{L})$ и $B = A|_U$ — ограничение линейного оператора A на инвариантном подпространстве U. Рассмотрим следующий базис в $\mathcal{L}$:

$$\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m, \mathbf{e}_{m+1}, \dots, \mathbf{e}_n\}, \quad U = L(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m).$$

В этом базисе, как нами ранее было показано, матрица A_e оператора A имеет следующий вид:

$$A_e = \begin{pmatrix} B_e & * \\ O & C_e \end{pmatrix},$$

где B_e — это матрица оператора $B = A|_U$ в базисе $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m\}$. Заметим, что справедливо следующее равенство:

$$A_e - \lambda I_n = \begin{pmatrix} B_e - \lambda I_m & * \\ O & C_e - \lambda I_{n-m} \end{pmatrix} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \det(A_e - \lambda I_n) = \det(B_e - \lambda I_m) \det(C_e - \lambda I_{n-m}). \quad (9.16)$$

Следовательно, характеристический многочлен $\det(A_e - \lambda I_n)$ оператора A делится на характеристический многочлен $\det(B_e - \lambda I_m)$ оператора $B = A|_U$.

Лемма доказана.

Определение 20. *Алгебраической кратностью* n_{λ_0} *собственного значения* λ_0 *называется его кратность как корня характеристического многочлена.*

Определение 21. *Геометрической кратностью* p_{λ_0} *собственного значения* $\lambda_0 \in \mathbb{K}$ *называется размерность собственного подпространства* $V_{\lambda_0}(A) = \ker(A - \lambda_0 I)$.

Теорема 11. *Алгебраическая кратность* n_{λ_0} *собственного значения* λ_0 *не меньше его геометрической кратности* p_{λ_0} :

$$n_{\lambda_0} \geqslant p_{\lambda_0}.$$

Доказательство. Рассмотрим собственное подпространство:

$$V_{\lambda_0}(A) = \ker(A - \lambda_0 I)$$

оператора $A \in L(\mathcal{L};\mathcal{L})$, соответствующее собственному значению λ_0. Ранее мы доказали, что оно инвариантно относительно оператора A. Сужение оператора A на $V_{\lambda_0}(A)$ равно:

$$B = A|_{V_{\lambda_0}} = \lambda_0 I|_{V_{\lambda_0}},$$

где $I|_{V_{\lambda_0}}$ единичный оператор на $V_{\lambda_0} \subset \mathcal{L}$. Характеристический многочлен введенного оператора B имеет следующий вид:

$$\det(B_e - \lambda I|_{V_{\lambda_0}}) = \det(\lambda_0 I|_{V_{\lambda_0}} - \lambda I|_{V_{\lambda_0}}) =$$
$$= \det(\lambda_0 - \lambda) I|_{V_{\lambda_0}} = (\lambda_0 - \lambda)^{p_{\lambda_0}}, \quad I|_{V_{\lambda_0}} \in \mathbb{K}^{p_{\lambda_0} \times p_{\lambda_0}}, \quad p_{\lambda_0} = \dim V_{\lambda_0}.$$

поскольку размер квадратной матрицы B_e равен размерности подпространства $V_{\lambda_0}(A)$. В силу результата леммы 25 характеристический многочлен $\det(A_e - \lambda I)$ оператора A делится на характеристический многочлен $(\lambda - \lambda_0)^{p_{\lambda_0}}$ оператора B. Но это означает, что алгебраическая кратность n_{λ_0} собственного значения λ_0 как корня характеристического многочлена $\det(A_e - \lambda I)$ не меньше, чем p_{λ_0} — его геометрическая кратность.

Теорема доказана.

Лемма 26. *Для различных собственных значений* $\lambda_1 \neq \lambda_2$ *оператора* $A \in L(\mathcal{L};\mathcal{L})$ *имеем*:

$$V_{\lambda_1}(A) \cap V_{\lambda_2}(A) = \{\vartheta\}.$$

Доказательство. Пусть $x \in V_{\lambda_1}(A) \cap V_{\lambda_2}(A)$. Тогда имеем:

$$Ax = \lambda_1 \cdot x, \quad Ax = \lambda_2 \cdot x \Rightarrow \lambda_1 \cdot x = \lambda_2 \cdot x \Leftrightarrow x = \vartheta,$$

поскольку $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Лемма доказана.

Теорема 12. *Для существования базиса из собственных векторов линейного оператора $A \in L(\mathcal{L};\mathcal{L})$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия*:

1) *характеристический многочлен* $\det(A - \lambda I)$ *разлагается на линейные множители из поля* $\mathbb{K}$, *над которым рассматривается линейное пространство* $\mathcal{L}$;
2) *геометрическая кратность* p_λ *каждого собственного значения* λ *равна алгебраической кратности* n_λ.

Доказательство. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ — все корни характеристического многочлена $\det(A - \lambda I)$ из поля $\mathbb{K}$ и $n_{\lambda_1}, \ldots, n_{\lambda_s}$ — их алгебраические кратности, а V_{λ_i}, $i = \overline{1,s}$ — это соответствующие собственные подпространства, размерности p_{λ_i}. Согласно результату теоремы 11 имеют место следующие соотношения:

$$p_{\lambda_i} := \dim V_{\lambda_i} \leqslant n_{\lambda_i} \tag{9.17}$$

и, значит, имеют место следующие неравенства:

$$\sum_{i=1}^{s} \dim V_{\lambda_i} = \sum_{i=1}^{s} p_{\lambda_i} \leqslant \sum_{i=1}^{s} n_{\lambda_i} \leqslant n. \tag{9.18}$$

Однако единственный способ получить базис из собственных векторов — взять объединение базисов собственных подпространств. Для того чтобы при этом действительно получился базис пространства $\mathcal{L}$ в силу результата леммы 26, необходимо и достаточно, чтобы:

$$\sum_{i=1}^{s} \dim V_{\lambda_i} = n.$$

Отсюда и с учетом (9.17) и (9.18) приходим к двум условиям:

$$\sum_{i=1}^{s} n_{\lambda_i} = n \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{s} p_{\lambda_i} = \sum_{i=1}^{s} n_{\lambda_i}. \tag{9.19}$$

Первое из этих условий означает, что характеристический многочлен разлагается на линейные множители из поля $\mathbb{K}$. Докажем, что второе условие означает, что $p_{\lambda_i} = n_{\lambda_i}$ для всех $i = \overline{1,s}$.

□ Действительно, в силу результата теоремы 11 всегда выполнено неравенство $p_{\lambda_i} \leqslant n_{\lambda_i}$ для всех $i = \overline{1,s}$. Пусть, например, $p_{\lambda_1} < n_{\lambda_1}$. Тогда справедливы неравенства:

$$\sum_{i=1}^{s} p_{\lambda_i} = p_{\lambda_1} + \sum_{i=2}^{s} p_{\lambda_i} < n_{\lambda_1} + \sum_{i=2}^{s} n_{\lambda_i} = \sum_{i=1}^{s} n_{\lambda_i}.$$

Пришли к противоречию со вторым равенством из (9.19). ⊠

Теорема доказана.

Замечание 5. *Спектральное разложение.* Пусть выполнены условия теоремы 12 и $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ — все различные собственные значения оператора $A \in L(\mathcal{L}; \mathcal{L})$ из поля $\mathbb{K}$, над которым определено линейное пространство $\mathcal{L}$. Тогда справедливо разложение линейного пространства $\mathcal{L}$ в прямую сумму:

$$\mathcal{L} = V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_s}, \quad V_{\lambda_j} = \ker(A - \lambda_j I), \quad j = \overline{1, s}.$$

Отметим, что

$$A|_{V_{\lambda_j}} = \lambda_j I|_{V_{\lambda_j}},$$

где $I|_{V_{\lambda_j}}$ — единичный оператор на V_{λ_j}. Символом P_j обозначим проектор на собственное подпространство V_{λ_j}. Отметим, что тогда:

$$P_j|_{V_{\lambda_j}} = I|_{V_{\lambda_j}}, \quad j = \overline{1, s}.$$

Тогда справедливо следующее спектральное разложение линейного оператора A:

$$A = \sum_{j=1}^{s} \lambda_j P_j.$$

§ 10. Базис линейного пространства операторов

Определение 22. *Одномерным линейным оператором* $A : \mathcal{L} \to \mathcal{M}$ *называется такой линейный оператор, что* $\dim \operatorname{im} A = 1$.

Лемма 27. *Для того чтобы линейный оператор* $A : \mathcal{L} \to \mathcal{M}$ *был одномерным, необходимо и достаточно, чтобы существовали такие* $f \in \mathcal{M}$, $f \neq \vartheta$ *и* $l \in \mathcal{L}^*$, *что было справедливо равенство*:

$$Ax = \langle l, x \rangle \cdot f \quad \text{для всех} \quad x \in \mathcal{L}. \tag{10.1}$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть линейный оператор $A : \mathcal{L} \to \mathcal{M}$ одномерный, т.е. $\dim \operatorname{im} A = 1$. Ввиду одномерности оператора A он представим в следующем виде:

$$Ax = l(x) \cdot f \subset \{\alpha \cdot f, \ \alpha \in \mathbb{K}\}, \quad f \in \mathcal{M}, \ f \neq \vartheta, \tag{10.2}$$

поскольку

$$\dim\{\alpha \cdot f, \ \alpha \in \mathbb{K}\} = 1, \quad \text{если} \quad f \neq \vartheta^*,$$

где функция $l(x)$ — скалярная функция. В силу линейности оператора A для всех $x_1, x_2 \in \mathcal{L}$ и $\alpha^1, \alpha^2 \in \mathbb{K}$ справедливо равенство:

$$A(\alpha^1 \cdot x_1 + \alpha^2 \cdot x_2) = \alpha^1 \cdot Ax_1 + \alpha^2 \cdot Ax_2,$$

из которого с учетом (10.2) справедливо равенство:

$$l(\alpha^1 \cdot x_1 + \alpha^2 \cdot x_2) f = \alpha^1 l(x_1) \cdot f + \alpha^2 l(x_2) \cdot f \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \Big[l(\alpha^1 \cdot x_1 + \alpha^2 \cdot x_2) - \alpha^1 l(x_1) - \alpha^2 l(x_2) \Big] \cdot f = \vartheta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow l(\alpha^1 \cdot x_1 + \alpha^2 \cdot x_2) - \alpha^1 l(x_1) - \alpha^2 l(x_2) = 0,$$

поскольку $f \neq \vartheta$. Значит, форма $l \in \mathcal{L}^*$, т.е. является линейной формой. Стало быть, справедливо равенство (10.1).

Достаточность. Пусть отображение $A:\ \mathcal{L} \to \mathcal{M}$ задано формулой (10.1). Тогда для любых $x_1, x_2 \in \mathcal{L}$ и $\alpha^1, \alpha^2 \in \mathbb{K}$ в силу линейности f справедливы следующие равенства:

$$A(\alpha^1 \cdot x_1 + \alpha^2 \cdot x_2) = \langle l, \alpha^1 \cdot x_1 + \alpha^2 \cdot x_2 \rangle \cdot f =$$
$$= \alpha^1 \langle l, x_1 \rangle \cdot f + \alpha^2 \langle l, x_2 \rangle \cdot f = \alpha^1 \cdot Ax_1 + \alpha^2 \cdot Ax_2.$$

Значит, оператор A линейный, а поскольку $f \neq \vartheta$, то $\dim \operatorname{im} A = 1$.

Лемма доказана.

Пусть $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — базис линейного пространства $\mathcal{L}$, а $\{\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_m\}$ — базис линейного пространства $\mathcal{M}$. Рассмотрим следующие одномерные операторы:

$$A_k^i x \stackrel{def:}{=} \langle \mathbf{e}^i, x \rangle \cdot \mathbf{f}_k :\ \mathcal{L} \to \mathcal{M}, \tag{10.3}$$

где $\{\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^n\} \subset \mathcal{L}^*$ — взаимный базис к базису $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\} \subset \mathcal{L}$. Справедлива следующая теорема:

Теорема 13. *Одномерные операторы* $A_k^i \in L(\mathcal{L}; \mathcal{M})$, *определенные равенством* (10.3) *образуют базис пространства* $L(\mathcal{L}; \mathcal{M})$.

Доказательство. *Линейная независимость.* Прежде всего заметим, что

$$A_k^i \mathbf{e}_j = \langle \mathbf{e}^i, \mathbf{e}_j \rangle \cdot \mathbf{f}_k = \delta_j^i \cdot \mathbf{f}_k. \tag{10.4}$$

Рассмотрим линейную комбинацию:

$$\beta_i^k \cdot A_k^i = O. \tag{10.5}$$

Применим обе части этого равенства ко всем векторам базиса $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\} \subset \mathcal{L}$ и с учетом (10.4) получим равенства:

$$\beta_i^k \cdot A_k^i \mathbf{e}_j = \beta_i^k \delta_j^i \cdot \mathbf{f}_k = \beta_j^k \cdot \mathbf{f}_k = \vartheta \quad \text{для всех} \quad j = \overline{1, n}. \tag{10.6}$$

Из (10.6) в силу линейной независимости базиса $\{\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_m\} \subset \mathcal{M}$ приходим к равенствам:

$$\beta_j^k = 0 \quad \text{для всех} \quad j = \overline{1, n}, \quad k = \overline{1, m}.$$

Значит, семейство $\{A_k^i\}_m^n$ является линейно независимым в линейном пространстве $L(\mathcal{L}; \mathcal{M})$.

Полнота. Пусть

$$x = x^i \cdot \mathbf{e}_i \in \mathcal{L}, \quad A\mathbf{e}_i = \alpha_i^k \cdot \mathbf{f}_k. \tag{10.7}$$

Тогда справедливы следующие равенства:

$$Ax = x^i \cdot A\mathbf{e}_i = x^i \alpha_i^k \cdot \mathbf{f}_k = \langle \mathbf{e}^i, x \rangle \alpha_i^k \cdot \mathbf{f}_k =$$
$$= \alpha_i^k \langle \mathbf{e}^i, x \rangle \cdot \mathbf{f}_k = \alpha_i^k \cdot A_k^i x, \tag{10.8}$$

из которого в силу произвольности $x \in \mathcal{L}$ приходим к следующему равенству:

$$A = \alpha_i^k A_k^i. \tag{10.9}$$

Теорема доказана.

Лемма 28. *Для элементов матрицы линейного оператора* $A : \mathcal{L} \to \to \mathcal{M}$ *справедливо следующее выражение:*

$$\alpha_i^k = \langle \mathbf{f}^k, A\mathbf{e}_i \rangle, \tag{10.10}$$

где $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\} \subset \mathcal{L}$ *— базис, а* $\{\mathbf{f}^1, \dots, \mathbf{f}^m\} \in \mathcal{M}^*$ *— взаимный базис к базису* $\{\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_m\} \subset \mathcal{M}$.

Доказательство. Из (4.1) вытекает следующее равенство:

$$\langle \mathbf{f}^k, A\mathbf{e}_i \rangle = \langle \mathbf{f}^k, \alpha_i^j \cdot \mathbf{f}_j \rangle = \alpha_i^j \langle \mathbf{f}^k, \mathbf{f}_j \rangle = \alpha_i^j \delta_j^k = \alpha_i^k. \tag{10.11}$$

Лемма доказана.

Лемма 29. *Матрица одномерного оператора* A_k^i, *определенного равенством* (10.3), *равна*:

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \tag{10.12}$$

где 1 *расположена на пересечении* k*–ой строчки и* i*–го столбца.*

Доказательство. Доказательство следует из равенства (10.4). Действительно, используя правило умножения матриц «строчка на столбец», получим следующее равенство:

$$(A_k^i \mathbf{e}_1, \dots, A_k^i \mathbf{e}_n) = (\delta_1^i \mathbf{f}_k, \dots, \delta_n^i \mathbf{f}_k) =$$

$$= (\vartheta, \dots, \vartheta, \delta_i^i \mathbf{f}_k, \vartheta, \dots, \vartheta) = (\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_m) \cdot \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Лемма доказана.

Лемма 30. *Справедливо равенство*:

$$\dim L(\mathcal{L}; \mathcal{M}) = \dim \mathcal{L} \cdot \dim \mathcal{M}.$$

Доказательство. Равенство является следствием теоремы 13, из которой вытекает, что число элементов в базисе линейного пространства $L(\mathcal{L}; \mathcal{M})$ равно $m \cdot n$, где $m = \dim \mathcal{M}$ и $n = \dim \mathcal{L}$.

Лемма доказана.

Лемма 31. *Матрица линейной комбинации $\alpha \cdot A + \beta \cdot B$ линейных операторов $A, B \in L(\mathcal{L}; \mathcal{M})$ с числами $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ получается следующим образом:*

$$\{\alpha \cdot A + \beta \cdot B\}_i^k = \alpha\{A\}_i^k + \beta\{B\}_i^k. \tag{10.13}$$

Доказательство. Справедливы следующие равенства:

$$(\alpha \cdot A + \beta \cdot B)\mathbf{e}_i = \{\alpha \cdot A + \beta \cdot B\}_i^k \cdot \mathbf{f}_k, \tag{10.14}$$

$$(\alpha \cdot A + \beta \cdot B)\mathbf{e}_i = \alpha \cdot A\mathbf{e}_i + \beta \cdot B\mathbf{e}_i, \tag{10.15}$$

$$\alpha \cdot A\mathbf{e}_i = \alpha\{A\}_i^k \cdot \mathbf{f}_k, \quad \beta \cdot B\mathbf{e}_i = \beta\{B\}_i^k \cdot \mathbf{f}_k. \tag{10.16}$$

Из (10.14) и (10.16) вытекает следующее равенство:

$$\{\alpha \cdot A + \beta \cdot B\}_i^k \cdot \mathbf{f}_k = \alpha\{A\}_i^k \cdot \mathbf{f}_k + \beta\{B\}_i^k \cdot \mathbf{f}_k = (\alpha\{A\}_i^k + \beta\{B\}_i^k) \cdot \mathbf{f}_k. \tag{10.17}$$

Поскольку $\{\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_m\} \in \mathcal{M}$ — базис, то из (10.17) вытекает искомое равенство (10.13).

Лемма доказана.

Лемма 32. *Линейное пространство $L(\mathcal{L}; \mathcal{M})$ изоморфно линейному пространству матриц $\mathbb{K}^{m \times n}$ при фиксированных базисах $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\} \subset \mathcal{L}$ и $\{\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_m\} \subset \mathcal{M}$, где $m = \dim \mathcal{M}$, $n = \dim \mathcal{L}$, базис которого образуют матрицы E_i^k, у которых все элементы равны нулю за исключением элемента, расположенного на пересечении k–ой строчки и i–го столбца и равного* 1.

Доказательство. Докажем, что матрицы E_i^k образуют базис в линейном пространстве $\mathbb{K}^{m \times n}$. Заметим, что

$$\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^k E_i^k = O \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \cdots & \alpha_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1^n & \cdots & \alpha_m^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha_i^k = 0 \quad \text{для всех} \quad i \in \overline{1,n},\ k \in \overline{1,m}.$$

Значит, матрицы E_i^k линейно независимы и их количество равно $m \cdot n$. Кроме того, любую матрицу $A = (a_i^k)_n^m \in \mathbb{K}^{m \times n}$ можно представить в следующем виде:

$$A = \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_i^k E_i^k.$$

Значит, семейство матриц $\{E_i^k\}$ образуют базис в $\mathbb{K}^{m \times n}$.

С учетом результата леммы 31 приходим к результату о изоморфизме линейного пространства $L(\mathcal{L}; \mathcal{M})$ и линейного пространства $\mathbb{K}^{m \times n}$.

Лемма доказана.

§ 11. Транспонированный оператор

Теорема 14. *Для каждого линейного оператора $A \in L(\mathcal{L};\mathcal{L})$ найдется единственный оператор $A^T \in L(\mathcal{L}^*;\mathcal{L}^*)$ такой, что*

$$\langle A^T f, x\rangle = \langle f, Ax\rangle \quad \textit{для всех} \quad x \in \mathcal{L}, \quad f \in \mathcal{L}^*. \tag{11.1}$$

Доказательство. Рассмотрим следующую функцию от векторов из $\mathcal{L}$ при фиксированном $f \in \mathcal{L}^*$:

$$l(x) := \langle f, Ax\rangle. \tag{11.2}$$

Докажем, что это линейная функция. Действительно, справедливы равенства:

$$l(\alpha^1 \cdot x_1 + \alpha^2 \cdot x_2) = \langle f, A(\alpha^1 \cdot x_1 + \alpha^2 \cdot x_2)\rangle = \langle f, \alpha^1 \cdot Ax_1 + \alpha^2 \cdot Ax_2\rangle = \\ = \alpha^1\langle f, Ax_1\rangle + \alpha^2\langle f, Ax_2\rangle = \alpha^1 l(x_1) + \alpha^2 l(x_2).$$

Значит, найдется такая линейна форма $l \in \mathcal{L}^*$, что будет для всех $x \in \mathcal{L}$ справедливо равенство:

$$\langle f, Ax\rangle = \langle l, x\rangle. \tag{11.3}$$

Отметим, что для каждого $f \in \mathcal{L}^*$ форма $l \in \mathcal{L}^*$ единственная. Действительно, пусть $f \in \mathcal{L}^*$ соответствуют две линейный формы $l^1, l^2 \in \mathcal{L}^*$ такие, что справедливы равенства:

$$\langle f, Ax\rangle = \langle l_1, x\rangle = \langle l_2, x\rangle \Rightarrow \langle l_1 - l_2, x\rangle = 0 \quad \text{для всех} \quad x \in \mathcal{L} \Rightarrow \\ \Rightarrow l_1 - l_2 = \vartheta^* \in \mathcal{L}^* \Rightarrow l_1 = l_2.$$

Итак, определено однозначное отображение:

$$A^T(f) = l, \quad A^T : \mathcal{L}^* \to \mathcal{L}^*, \tag{11.4}$$
$$\langle A^T(f), x\rangle = \langle l, x\rangle = \langle f, Ax\rangle.$$

Докажем линейность оператора A^T. Действительно, справедливы следующие равенства:

$$\langle A^T(\alpha_1 \cdot f^1 + \alpha_2 \cdot f^2), x\rangle = \langle \alpha_1 \cdot f^1 + \alpha_2 \cdot f^2, Ax\rangle = \\ = \alpha_1\langle f^1, Ax\rangle + \alpha_2\langle f^2, Ax\rangle = \alpha^1\langle A^T f^1, x\rangle + \alpha_2\langle A^T f^2, x\rangle = \\ = \langle \alpha^1 \cdot A^T f^1, x\rangle + \langle \alpha^2 \cdot A^T f^2, x\rangle \Rightarrow \\ \Rightarrow \langle A^T(\alpha_1 \cdot f^1 + \alpha_2 \cdot f^2) - \alpha^1 \cdot A^T f^1 - \alpha^2 \cdot A^T f^2, x\rangle = 0.$$

В силу произвольности $x \in \mathcal{L}$ приходим к равенству:

$$A^T(\alpha_1 \cdot f^1 + \alpha_2 \cdot f^2) = \alpha^1 \cdot A^T f^1 + \alpha^2 \cdot A^T f^2.$$

Значит, оператор A^T линейный и поэтому $A^T \in L(\mathcal{L}^*;\mathcal{L}^*)$. Отсюда с учетом (11.3) и (11.4) приходим к существованию единственного отоб-

ражения $A^T \in L(\mathcal{L}^*; \mathcal{L}^*)$, что для всех $x \in \mathcal{L}$ и всех $f \in \mathcal{L}^*$ справедливо равенство:
$$\langle f, Ax\rangle = \langle A^T f, x\rangle.$$

Теорема доказана.

Определение 23. *Оператор $A^T \in L(\mathcal{L}^*; \mathcal{L}^*)$ называется транспонированным оператором.*

Обсудим связь матриц $(A^T)_e$ и A_e транспонированного и исходного операторов. Пусть $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ базис в $\mathcal{L}$, а $\{\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^n\}$ взаимный базис в $\mathcal{L}^*$. Пусть $x, y \in \mathcal{L}$ и $f, g \in \mathcal{L}^*$ таковы, что имеют место равенства:
$$y = Ax, \quad y = y^i \cdot \mathbf{e}_i, \quad x = x^k \cdot \mathbf{e}_k, \quad A\mathbf{e}_j = \alpha_j^k \cdot \mathbf{e}_k, \tag{11.5}$$
$$f = A^T g, \quad f = f_i \cdot \mathbf{e}^i, \quad g = g_k \cdot \mathbf{e}^k, \quad A^T \mathbf{e}^j = (\alpha^T)_k^j \cdot \mathbf{e}^k. \tag{11.6}$$
Из (11.5) вытекают равенства:
$$y^i \cdot \mathbf{e}_i = A(x^k \cdot \mathbf{e}_k) = x^k \alpha_k^i \cdot \mathbf{e}_i \Leftrightarrow y^i = \alpha_k^i x^k \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow Y_e = A_e \cdot X_e, \quad X_e = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}, \quad Y_e = \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix}, \tag{11.7}$$
а из (11.6) вытекают следующие равенства:
$$f_i \cdot \mathbf{e}^i = A^T(g_k \cdot \mathbf{e}^k) = g_k (\alpha^T)_i^k \cdot \mathbf{e}^i \Rightarrow f_i = g_k (\alpha^T)_i^k \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow F_e = G_e \cdot (A^T)_e, \quad F_e = (f_1, \ldots, f_n), \quad G_e = (g_1, \ldots, g_n). \tag{11.8}$$
В силу (11.1) и в силу (11.5), (11.6) справедливы равенства:
$$(\alpha^T)_i^k = \langle A^T \mathbf{e}^k, \mathbf{e}_i\rangle = \langle \mathbf{e}^k, A\mathbf{e}_i\rangle = \alpha_i^k \Leftrightarrow (A^T)_e = A_e.$$
Теперь мы видим, что матрицы исходного и транспонированного оператора совпадают, однако если в формуле (11.7) матрица A_e умножается справа на столбец, то в формуле (11.8) матрица $(A^T)_e$ матрица слева умножается на строчку. Вот такое отличие.

§ 12. Дважды транспонированный оператор

Лемма 33. *Справедливо равенство*:
$$A^{TT} = JAJ^{-1}, \tag{12.1}$$
где J — линейный оператор взаимно однозначного отображения $\mathcal{L}$ на $\mathcal{L}^{**}$, введенный в пятой лекции.

Доказательство. *Шаг 1. Транспонированный оператор к A^T.* Для любых $\widehat{x} \in \mathcal{L}^{**}$ и $f \in \mathcal{L}^*$ справедливо равенство
$$\langle \widehat{x}, A^T f\rangle_* = \langle A^{TT} \widehat{x}, f\rangle_*, \tag{12.2}$$

где $A^{TT} = (A^T)^T \in L(\mathcal{L}^{**}; \mathcal{L}^{**})$. Доказательство равенства (12.2) в точности повторяет доказательство теоремы 14 с точностью до обозначений.

Шаг 2. Равенство (12.1). Для доказательства равенства (12.1) воспользуемся результатом теоремы 3 из 5-ой лекции. С учетом результата теоремы 14 справедлива следующая цепочка равенств:

$$\langle f, Ax \rangle = \langle A^T f, x \rangle = \langle Jx, A^T f \rangle_* = \langle A^{TT} Jx, f \rangle_* = \langle f, J^{-1} A^{TT} Jx \rangle,$$

которые выполнены для всех $x \in \mathcal{L}$ и $f \in \mathcal{L}^*$. Поэтому справедливы равенства для всех $x \in \mathcal{L}$ и $f \in \mathcal{L}^*$:

$$\langle f, Ax - J^{-1} A^{TT} Jx \rangle = 0 \Leftrightarrow Ax - J^{-1} A^{TT} Jx = \vartheta \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow A = J^{-1} A^{TT} J \Leftrightarrow A^{TT} = JAJ^{-1}.$$

Лемма доказана.

Замечание 6. Иногда авторы называют транспонированный оператор сопряженным и утверждают, что $A^{TT} = A$. Из результата леммы 33 вытекает, что это равенство неверно.

Определение 24. *Оператор* $A^{TT} \in L(\mathcal{L}^{**}; \mathcal{L}^{**})$ *называется дважды транспонированным оператором.*

§ 13. Комплексификация

Пусть линейное пространство $\mathcal{L}$ определено над полем вещественных чисел и оператор A линейный относительно линейных комбинаций с вещественными числами. Нам нужно построить такое продолжение A_C этого оператора, чтобы он был тоже линейным, но уже относительно линейных комбинаций с комплексными чиселами, причем сужение A_C на векторы исходного линейного пространства совпадало с исходным оператором A. С этой целью нам нужно воспользоваться процедурой «комплексификации». Эта процедура аналогичны построению множества комплексных чисел из множества вещественных чисел.

Определим линейное пространство $\mathcal{L}_C$ как множество упорядоченных пар (x, y), где $x, y \in \mathcal{L}$. Определим операции сложения и умножения на комплексные числа векторов из $\mathcal{L}_C$ следующим образом:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2),$$
$$(\lambda + i\mu)(x, y) := (\lambda \cdot x - \mu \cdot y, \mu \cdot x + \lambda \cdot y).$$

Отождествим каждую пару вида (x, ϑ) с вектором $x \in \mathcal{L}$. Тогда линейное пространство $\mathcal{L}$ окажется вложенным подпространством в $\mathcal{L}_C$ в виде *вещественного* подпространства.

Пусть теперь $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ базис в $\mathcal{L}$. Тогда семейство:

$$\{(\mathbf{e}_1, \vartheta), \ldots, (\mathbf{e}_n, \vartheta)\}$$

образует «вещественный» базис построенного пространства $\mathcal{L}_C$. Действительно, с одной стороны, заметим, что

$$i(\mathbf{e}_k, \vartheta) = (\vartheta, \mathbf{e}_k), \quad k = \overline{1, n}.$$

С другой стороны, справедлива следующая цепочка равенств:

$$(x, y) = (x, \vartheta) + (\vartheta, y) = \sum_{j=1}^{n} x^j (\mathbf{e}_j, \vartheta) + \sum_{k=1}^{n} y^k (\vartheta, \mathbf{e}_k) =$$
$$= \sum_{j=1}^{n} x^j (\mathbf{e}_j, \vartheta) + i \sum_{k=1}^{n} y^k (\mathbf{e}_k, \vartheta) = \sum_{s=1}^{n} (x^s + iy^s)(\mathbf{e}_j, \vartheta),$$

где

$$x = \sum_{j=1}^{n} x^j \cdot \mathbf{e}_j, \quad y = \sum_{k=1}^{n} y^k \cdot \mathbf{e}_k.$$

Введем оператор A_C следующим образом:

$$A_C(x, y) \stackrel{def:}{=} (Ax, Ay) \quad \text{для всех} \quad x, y \in \mathcal{L}.$$

Докажем, что оператор $A_C \in L(\mathcal{L}_C, \mathcal{L}_C)$. Действительно, пусть

$$\alpha^1 = \lambda^1 + i\mu^1, \quad \alpha^2 = \lambda^2 + i\mu^2.$$

Тогда справедливы следующие равенства:

$$\begin{aligned}
&A_C(\alpha^1(x_1, y_1) + \alpha^2(x_2, y_2)) = \\
&\quad = A_C\Big((\lambda^1 \cdot x_1 - \mu^1 \cdot y_1, \mu^1 \cdot x_1 + \lambda^1 \cdot y_1) + \\
&\quad + (\lambda^2 \cdot x_2 - \mu^2 \cdot y_2, \mu^2 \cdot x_2 + \lambda^2 \cdot y_2)\Big) = \\
&\quad = A_C\Big(\lambda^1 \cdot x_1 - \mu^1 \cdot y_1 + \lambda^2 \cdot x_2 - \mu^2 \cdot y_2, \\
&\quad \mu^1 \cdot x_1 + \lambda^1 \cdot y_1 + \mu^2 \cdot x_2 + \lambda^2 \cdot y_2\Big) = \\
&\quad = \Big(A(\lambda^1 \cdot x_1 - \mu^1 \cdot y_1 + \lambda^2 \cdot x_2 - \mu^2 \cdot y_2), \\
&\quad A(\mu^1 \cdot x_1 + \lambda^1 \cdot y_1 + \mu^2 \cdot x_2 + \lambda^2 \cdot y_2)\Big) = \\
&\quad = (\lambda^1 \cdot Ax_1 - \mu^1 \cdot Ay_1, \mu^1 \cdot Ax_1 + \lambda^1 \cdot Ay_1) + \\
&\quad + (\lambda^2 \cdot Ax_2 - \mu^2 \cdot Ay_2, \mu^2 \cdot Ax_2 + \lambda^2 \cdot Ay_2) = \\
&\quad = \alpha^1 A_C(x_1, y_1) + \alpha^2 A_C(x_2, y_2). \qquad (13.1)
\end{aligned}$$

В «вещественном» базисе $\{(\mathbf{e}_1, \vartheta), \ldots, (\mathbf{e}_n, \vartheta)\}$ матрица A_{Ce} оператора A_C определяется следующим образом:

$$(A_C(\mathbf{e}_1, \vartheta), \ldots A_C(\mathbf{e}_n, \vartheta)) = ((A\mathbf{e}_1, \vartheta), \ldots, (A\mathbf{e}_n, \vartheta)) =$$

$$= ((\mathbf{e}_1, \vartheta), \ldots (\mathbf{e}_n, \vartheta)) \cdot A_{Ce},$$

где
$$A_{Ce} = \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix},$$
причем, как нетрудно заметить, что
$$(A\mathbf{e}_1, \ldots, A\mathbf{e}_n) = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot A_e,$$
где
$$A_e = \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix},$$
т.е. матрицы $A_{Ce} = A_e$ в «вещественном» базисе. Хотя в $\mathcal{L}_C$ существуют другие базисы.

Лемма 34. *Если $\mathcal{L}$ — вещественное линейное пространство и элемент $(x, y) \in \mathcal{L}_C$ является собственным вектором оператора A_C с мнимым собственным значением $\lambda + i\mu$, $\mu \neq 0$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, то $U = L(x, y) \subset \mathcal{L}$ — двумерное инвариантное подпространство для оператора A, причем*:
$$Ax = \lambda \cdot x - \mu \cdot y, \quad Ay = \mu \cdot x + \lambda \cdot y. \tag{13.2}$$

Доказательство. Пусть
$$A_C(x, y) = (\lambda + i\mu)(x, y), \quad \mu \neq 0, \quad x, y \in \mathcal{L}, \quad (x, y) \neq (\vartheta, \vartheta).$$
Отсюда получаем равенство:
$$(Ax, Ay) = (\lambda \cdot x - \mu \cdot y, \mu \cdot x + \lambda \cdot y),$$
которое равносильно двум равенствам из (13.2). Теперь докажем, что $x \neq \vartheta$. Действительно, пусть $x = \vartheta$. Тогда из (13.2) получаем, что $\mu y = \vartheta$. Поскольку по условию $\mu \neq 0$, то приходим к выводу о том, что $y = \vartheta$, но тогда $(x, y) = (\vartheta, \vartheta)$. Противоречие. Точно также доказываем, что $y \neq \vartheta$.

Теперь докажем, что векторы x и y линейно независимы. Пусть они линейно зависимы. Тогда найдется такое $\mathbb{R} \ni \alpha \neq 0$, что
$$y = \alpha \cdot x.$$
Подставляя это равенство в (13.2), получим равенства:
$$Ax = \lambda \cdot x - \mu\alpha \cdot x, \quad \alpha \cdot Ax = \mu \cdot x + \lambda\alpha \cdot x.$$
Исключая Ax, с одной стороны, приходим к следующему равенству:
$$\mu(1 + \alpha^2) \cdot x = \vartheta \Rightarrow \mu(1 + \alpha^2) = 0,$$

поскольку по доказанному $x \neq \vartheta$. С другой стороны, $\mu \neq 0$ по условию. Следовательно, $1 + \alpha^2 = 0$ и $\alpha \in \mathbb{R}$. Противоречие. Значит, $\dim L(x, y) = 2$.

Лемма доказана.

Пример 7. Пусть $\mathcal{L} = U \oplus W$. Тогда для любого $x \in \mathcal{L}$ найдутся такие единственные $y \in U$ и $z \in W$, что справедливо равенство $x = y + z$. Определим следующее отображение:

$$Px = y. \tag{13.3}$$

Сначала докажем, что это отображение $P \in L(\mathcal{L}; \mathcal{L})$. Действительно, пусть:

$$x_1 = y_1 + z_1, \quad x_2 = y_2 + z_2, \quad y_1, y_2 \in U, \quad z_1, z_2 \in W, \quad \alpha^1, \alpha^2 \in \mathbb{K}.$$

Тогда имеем:

$$\alpha^1 \cdot x_1 + \alpha^2 \cdot x_2 = (\alpha^1 \cdot y_1 + \alpha^2 \cdot y_2) + (\alpha^1 \cdot z_1 + \alpha^2 \cdot z_2),$$

причем $\alpha^1 \cdot y_1 + \alpha^2 \cdot y_2 \in U$ и $\alpha^1 \cdot z_1 + \alpha^2 \cdot z_2 \in W$ и справедлива следующая цепочка равенств:

$$P(\alpha^1 \cdot x_1 + \alpha^2 \cdot x_2) = \alpha^1 \cdot y_1 + \alpha^2 \cdot y_2 = \alpha^1 \cdot P(x_1) + \alpha^2 \cdot P(x_2).$$

Введенный *оператор P называется проектором на подпространство U параллельно подпространству W*. Отметим, что подпространства U и W являются инвариантными подпространствами проектора P. Действительно, справедливы следующие равенства:

$$Px = x = 1 \cdot x \quad \text{для всех} \quad x \in U, \tag{13.4}$$

$$Px = \vartheta = 0 \cdot x \quad \text{для всех} \quad x \in W, \quad (\vartheta \in W). \tag{13.5}$$

Значит, $U = V_1(P) = \ker(P - 1 \cdot I)$ и $W = V_0(P) = \ker(P - 0 \cdot I)$. И у оператора P существует собственный базис $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m, \mathbf{e}_{m+1}, \ldots, \mathbf{e}_n\}$, где $L(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m) = U$ и $L(\mathbf{e}_{m+1}, \ldots, \mathbf{e}_n) = W$, т. е. $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m\}$ — какой–либо базис в U, а $\{\mathbf{e}_{m+1}, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — какой–либо базис в W.

В этом базисе матрица оператора P имеет следующий диагональный вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \text{O} \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ \text{O} & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Теорема 15. *Оператор $P \in L(\mathcal{L}; \mathcal{L})$ является проектором для каких–то линейных подпространств U и W, $\mathcal{L} = U \oplus W$, тогда и только тогда, когда справедливо равенство $P^2 = P$.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $P \in L(\mathcal{L};\mathcal{L})$, $\mathcal{L} = U \oplus W$ и P — проектор на U параллельно W. Тогда для каждого $x \in \mathcal{L}$ найдутся такие единственные $y \in U$ и $z \in W$, что

$$x = y + z \Rightarrow P^2x = P(Px) = Py = y = Px \Rightarrow P^2 = P.$$

Достаточность. Пусть $P^2 = P$. Ранее нами было доказано равенство:

$$\dim\ker A + \dim\operatorname{im} A = \dim\mathcal{L}.$$

Отсюда вытекает, что $\ker A \oplus \operatorname{im} A = \mathcal{L}$ точно тогда, когда:

$$\ker A \cap \operatorname{im} A = \{\vartheta\}.$$

Докажем теперь, что $\mathcal{L} = \ker P \oplus \operatorname{im} P$. Для этого нам нужно доказать, что $\ker P \cap \operatorname{im} P = \{\vartheta\}$. Действительно, пусть $x \in \operatorname{im} P$, т.е. найдется такое $y \in \mathcal{L}$, что $x = Py$. Тогда справедливы равенства:

$$P(x) = P^2(y) = P(y) = x.$$

Поэтому если $x \in \ker P \cap \operatorname{im} P$, то $x = P(x) = \vartheta$. Следовательно,

$$\ker P \cap \operatorname{im} P = \{\vartheta\} \Rightarrow \mathcal{L} = \ker P \oplus \operatorname{im} P$$

и поэтому разложение любого элемента $x \in \mathcal{L}$ вида:

$$x = y + z, \quad y \in \ker P, \quad z \in \operatorname{im} P$$

единственно. Рассмотрим следующее разложение:

$$x = (x - P(x)) + P(x).$$

Заметим, что $P(x - P(x)) = P(x) - P^2(x) = P(x) - P(x) = \vartheta$. Следовательно, имеем $x - P(x) \in \ker P$, а $P(x) \in \operatorname{im} P$. Итак, P — проектор на $U = \operatorname{im} P$ параллельно $W = \ker P$.

Теорема доказана.

§ 14. Примеры решения задач

Задача 1. Рассмотрим линейное пространство всех сходящихся числовых последовательностей $\{a_n\}$. Доказать, что отображение:

$$\{a_n\} \mapsto \sup_n a_n \tag{14.1}$$

не является линейным.

Решение. Предположим, что линейное. Тогда, в частности, должно быть выполнено равенство:

$$\sup_n(-a_n) = -\sup_n a_n, \tag{14.2}$$

но нетрудно проверить, что

$$-\sup_n(-a_n) = \inf_n a_n. \tag{14.3}$$

Следовательно, из (14.2) и (14.3) получаем равенство:

$$\sup_n a_n = \inf_n a_n, \tag{14.4}$$

которое для произвольной сходящейся последовательности, вообще говоря, не выполняется.

Задача 2. Рассмотрим линейное пространство квадратных матриц $\mathbb{K}^{n\times n}$ над полем $\mathbb{K}$. Является ли операция вычисления определителя линейной?

Решение. Нет. Поскольку имеет место равенство:

$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det A. \tag{14.5}$$

Задача 3. *Оператор поворота на угол.* Пусть $\mathbf{e}$ — произвольный вектор в пространстве. Рассмотрим цилиндрическую систему координат с осью Oz, совпадающей с направлением вектора $\mathbf{e}$. Рассмотрим отображение, которое сопоставляет каждому радиус–вектору $\mathbf{r}$ с концом в точке (ρ, φ, h) радиус–вектор $\mathbf{r}'$, конец которого имеет координаты $(\rho, \varphi + \alpha, h)$:

$$A_\alpha(\mathbf{r}) = \mathbf{r}'. \tag{14.6}$$

Найти явное выражение для этого оператора, доказать, что он линейный, найти все инвариантные собственные подпространства, записать его матрицу в ортонормированном базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ таком, что $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}$ при условии, что $|\mathbf{e}| = 1$.

Решение. Без ограничения общности будем считать, что $|\mathbf{e}| = 1$. Совершенно понятно, что если радиус–вектор $\mathbf{r}$ лежит на оси Oz, то

$$A_\alpha(\mathbf{r}) = \mathbf{r}. \tag{14.7}$$

В этом случае оператор A_α является линейным для таких радиус–векторов. Действительно,

$$A_\alpha(\beta^1\mathbf{r}_1 + \beta^2\mathbf{r}_2) = \beta^1\mathbf{r}_1 + \beta^2\mathbf{r}_2 = \beta^1 A_\alpha(\mathbf{r}_1) + \beta^2 A_\alpha(\mathbf{r}_2). \tag{14.8}$$

Пусть теперь радиус–вектор $\mathbf{r}$ не лежит на оси Oz. Тогда однозначно определена плоскость π, в которой лежат вектора $\mathbf{e}$ и $\mathbf{r}$. Для радиус–вектора $\mathbf{r}$ справедливо разложение:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_\parallel + \mathbf{r}_\perp, \quad \mathbf{r}_\perp \perp \mathbf{e}, \quad \mathbf{r}_\parallel \parallel \mathbf{e}. \tag{14.9}$$

Рассмотрим правую прямоугольную декартову систему координат $\{O, \mathbf{r}_\perp, [\mathbf{e}, \mathbf{r}_\perp], \mathbf{e}\}$. Заметим, что

$$[\mathbf{e}, \mathbf{r}_\perp] = [\mathbf{e}, \mathbf{r}]. \tag{14.10}$$

Для искомого повернутого на угол в указанном выше смысле вектора $\mathbf{r}'$ справедливо разложение:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r}'_\parallel + \mathbf{r}'_\perp, \quad \mathbf{r}'_\perp \perp \mathbf{e}, \quad \mathbf{r}'_\parallel \| \mathbf{e}, \tag{14.11}$$

причем:

$$\mathbf{r}'_\parallel = \mathbf{r}_\parallel = (\mathbf{e}, \mathbf{r})\mathbf{e}, \quad \mathbf{r}_\perp = \mathbf{r} - (\mathbf{e}, \mathbf{r})\mathbf{e}. \tag{14.12}$$

Рассмотрим теперь в плоскости π прямоугольную декартову систему координат $\{O, \mathbf{r}_\perp, [\mathbf{e}, \mathbf{r}_\perp]\}$. Заметим также, что

$$|\mathbf{r}'_\perp| = |\mathbf{r}_\perp| \neq 0$$

для поворотов. Но тогда справедливо равенство:

$$\frac{\mathbf{r}'_\perp}{|\mathbf{r}'_\perp|} = \frac{\mathbf{r}_\perp}{|\mathbf{r}_\perp|}\cos\alpha + \left[\mathbf{e}, \frac{\mathbf{r}_\perp}{|\mathbf{r}_\perp|}\right]\sin\alpha, \quad |\mathbf{e}| = 1 \tag{14.13}$$

или равносильно:

$$\mathbf{r}'_\perp = \mathbf{r}_\perp\cos\alpha + [\mathbf{e}, \mathbf{r}_\perp]\sin\alpha. \tag{14.14}$$

из которого с учетом (14.10)–(14.12) получим цепочку равенств:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' = \mathbf{r}'_\perp + \mathbf{r}'_\parallel &= \mathbf{r}_\perp\cos\alpha + [\mathbf{e}, \mathbf{r}_\perp]\sin\alpha + (\mathbf{e}, \mathbf{r})\mathbf{e} = \\ &= (\mathbf{r} - (\mathbf{e}, \mathbf{r})\mathbf{e})\cos\alpha + [\mathbf{e}, \mathbf{r}]\sin\alpha + (\mathbf{e}, \mathbf{r})\mathbf{e} = \\ &= \mathbf{r}\cos\alpha + [\mathbf{e}, \mathbf{r}]\sin\alpha + (\mathbf{e}, \mathbf{r})(1 - \cos\alpha)\mathbf{e} := \\ &:= A_{1\alpha}(\mathbf{r}) + A_{2\alpha}(\mathbf{r}) + A_{3\alpha}(\mathbf{r}). \end{aligned} \tag{14.15}$$

Итак, из (14.15) вытекает, что

$$A_\alpha(\mathbf{r}) = A_{1\alpha}(\mathbf{r}) + A_{2\alpha}(\mathbf{r}) + A_{3\alpha}(\mathbf{r}). \tag{14.16}$$

Поскольку сумма линейных операторов — есть линейный оператор, то нам достаточно доказать, что операторы $A_{j\alpha}(\mathbf{r})$ при $j = 1, 2, 3$ являются линейными. Действительно, это есть следствие следующих цепочек равенств:

$$\begin{aligned} A_{1\alpha}(\beta^1\mathbf{r}_1 + \beta^2\mathbf{r}_2) &= (\beta^1\mathbf{r}_1 + \beta^2\mathbf{r}_2)\cos\alpha = \\ &= \beta^1\mathbf{r}_1\cos\alpha + \beta^2\mathbf{r}_2\cos\alpha = \beta^1 A_{1\alpha}(\mathbf{r}_1) + \beta^2 A_{1\alpha}(\mathbf{r}), \end{aligned} \tag{14.17}$$

$$\begin{aligned} A_{2\alpha}(\beta^1\mathbf{r}_1 + \beta^2\mathbf{r}_2) &= [\mathbf{e}, \beta^1\mathbf{r}_1 + \beta^2\mathbf{r}_2]\sin\alpha = \\ &= (\beta_1[\mathbf{e}, \mathbf{r}_1] + \beta^2[\mathbf{e}, \mathbf{r}_2])\sin\alpha = \beta^1[\mathbf{e}, \mathbf{r}_1]\sin\alpha + \beta^2[\mathbf{e}, \mathbf{r}_2]\sin\alpha = \\ &= \beta^1 A_{2\alpha}(\mathbf{r}_1) + \beta^2 A_{2\alpha}(\mathbf{r}_2), \end{aligned} \tag{14.18}$$

$$\begin{aligned} A_{3\alpha}(\beta^1\mathbf{r}_1 + \beta^2\mathbf{r}_2) &= (\mathbf{e}, \beta^1\mathbf{r}_1 + \beta^2\mathbf{r}_2)(1 - \cos\alpha)\mathbf{e} = \\ &= \beta^1(\mathbf{e}, \mathbf{r}_1)(1 - \cos\alpha)\mathbf{e} + \beta^2(\mathbf{e}, \mathbf{r}_2)(1 - \cos\alpha)\mathbf{e} = \\ &= \beta^1 A_{3\alpha}(\mathbf{r}_1) + \beta^2 A_{3\alpha}(\mathbf{r}_2). \end{aligned} \tag{14.19}$$

Таким образом, если радиус–вектор $\mathbf{r}$ не лежит на оси с направляющим вектором $\mathbf{e}$, то оператор A_α поворота является линейным.

Заметим, что если $\mathbf{r} = \lambda\mathbf{e}$, то для выражения (14.15) справедливы равенства:

$$A_\alpha(\mathbf{r}) = \mathbf{r}\cos\alpha + [\mathbf{e}, \mathbf{r}]\sin\alpha + (\mathbf{e}, \mathbf{r})(1 - \cos\alpha)\mathbf{e} =$$

$$= \mathbf{r}\cos\alpha + \lambda(1-\cos\alpha)\mathbf{e} = \mathbf{r}\cos\alpha + (1-\cos\alpha)\mathbf{r} = \mathbf{r}. \quad (14.20)$$

Таким образом, для произвольных радиус–векторов $\mathbf{r}$ отображение A_α является линейным.

Пусть $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ — ортонормированный базис в пространстве, причем такой, что $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}$. Рассмотрим следующее разложение на прямую сумму подпространств трехмерного линейного пространства радиус-векторов с началом в точке O :

$$V_3 = U \oplus W, \quad U = L(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2), \quad W = L(\mathbf{e}_3) \qquad (14.21)$$

В силу (14.7) имеем

$$A_\alpha(\mathbf{e}) = \mathbf{e}, \qquad (14.22)$$

т.е. вектор $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}$ — собственный вектор оператора A_α, соответствующий собственному значению $\lambda = 1$. Но тогда, очевидно, что

$$A_\alpha W \subset W, \qquad (14.23)$$

т.е. линейное подпространство W является инвариантным одномерным подпространством для оператора поворота A_α. Пусть теперь вектор $\mathbf{g} \in U = L(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$. Значит, найдутся такие вещественные числа $\beta^1, \beta^2 \in \in \mathbb{R}$, что справедливо равенство:

$$\mathbf{g} = \beta^1\mathbf{e}_1 + \beta^2\mathbf{e}_2, \quad A_\alpha(\mathbf{g}) = \beta^1 A_\alpha(\mathbf{e}_1) + \beta^2 A_\alpha(\mathbf{e}_2), \qquad (14.24)$$

поскольку оператор A_α — линейный. Непосредственным вычислением убеждаемся, что

$$A_\alpha(\mathbf{e}_1) = \cos\alpha\mathbf{e}_1 + \sin\alpha\mathbf{e}_2 \in L(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = U, \qquad (14.25)$$

$$A_\alpha(\mathbf{e}_2) = -\sin\alpha\mathbf{e}_1 + \cos\alpha\mathbf{e}_2 \in L(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = U. \qquad (14.26)$$

Из (14.24) с учетом (14.25) и (14.26) приходим к выводу о том, что

$$A_\alpha U \subset U, \qquad (14.27)$$

т.е. $U = L(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ — это двумерное инвариантное линейное подпространство относительно оператора поворота A_α. Значит, выражение (14.21) — есть прямая сумма одномерного и двумерного линейных подпространств инвариантных относительно оператора поворота A_α.

Наконец, из (14.22) и (14.25), (14.26) получаем равенство:

$$(A_\alpha(\mathbf{e}_1), A_\alpha(\mathbf{e}_2), A_\alpha(\mathbf{e}_3)) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (14.28)$$

Отметим, что операторы поворота A_α при $\alpha \in (-\pi, \pi]$ обладают следующими полезными свойствами:

$$A_\alpha A_\beta = A_{\alpha+\beta} = A_{\beta+\alpha} = A_\beta A_\alpha, \quad A_0 = I, \quad \alpha, \beta \in (-\pi, \pi], \quad (14.29)$$

которые означают, что поворот на нулевой угол совпадает с единичным оператором, а повороты A_α, A_β коммутативны и их произведение равно оператору $A_{\alpha+\beta}$ суммарного поворота на угол $\alpha+\beta$. Соответствующие равенства могут быть получены непосредственно алгебраически, но лучше их доказать исходя из геометрических соображений.

Задача 4. *Матрица линейного оператора.* Найти матрицы линейного оператора в трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3$ со стандартным скалярным произведением, заданного формулой:

$$A(x) = (x,a)a, \quad a = (3,2,1)^T, \tag{14.30}$$

в стандартном базисе в $\mathbb{R}^3$ и в базисе:

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}. \tag{14.31}$$

Решение. Сначала найдем матрицу этого оператора в стандартном базисе линейного пространства столбцов $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Справедливы следующие равенства:

$$A(\mathbf{e}_1) = 3a = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)\begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}, \tag{14.32}$$

$$A(\mathbf{e}_2) = 2a = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \tag{14.33}$$

$$A(\mathbf{e}_3) = a = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{14.34}$$

Таким образом, из (14.32)–(14.34) получаем искомое выражение для матрицы линейного оператора (14.30) в стандартном базисе:

$$(A(\mathbf{e}_1), A(\mathbf{e}_2), A(\mathbf{e}_3)) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)\begin{pmatrix} 9 & 6 & 3 \\ 6 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}. \tag{14.35}$$

Теперь найдем матрицу линейного оператора (14.30) в базисе (14.31). Действительно, имеем:

$$A(b_1) = 6a, \quad A(b_2) = 3a, \quad A(b_3) = -a. \tag{14.36}$$

Найдем разложение столбца a по базису $\{b_1, b_2, b_3\}$. Действительно, имеем:

$$xb_1 + yb_2 + zb_3 = a, \tag{14.37}$$

$$x\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}. \tag{14.38}$$

Откуда легко находим, что

$$x=3,\quad y=-1,\quad z=1. \tag{14.39}$$

Следовательно, из (14.37) и (14.39) получаем искомое разложение:

$$a=3b_1-b_2+b_3. \tag{14.40}$$

Из (14.36) и (14.40) получаем следующие равенства:

$$A(b_1)=18b_1-6b_2+6b_3=(b_1,b_2,b_3)\begin{pmatrix}18\\-6\\6\end{pmatrix}, \tag{14.41}$$

$$A(b_2)=9b_1-3b_2+3b_3=(b_1,b_2,b_3)\begin{pmatrix}9\\-3\\3\end{pmatrix}, \tag{14.42}$$

$$A(b_2)=-3b_1+b_2-b_3=(b_1,b_2,b_3)\begin{pmatrix}-3\\1\\-1\end{pmatrix}. \tag{14.43}$$

Таким образом, из (14.41)–(14.43) вытекает искомое выражение для матрицы линейного оператора (14.30) в базисе (14.31):

$$(A(b_1),A(b_2),A(b_3))=(b_1,b_2,b_3)\begin{pmatrix}18&9&-3\\-6&-3&1\\6&3&-1\end{pmatrix}. \tag{14.44}$$

Задача 5. *Матрица линейного оператора.* Найти матрицу линейного оператора:

$$A(\mathbf{x})=[\mathbf{a},\mathbf{x}]:\ V_3\to V_3,\quad \mathbf{a}=a_1\mathbf{e}_1+a_2\mathbf{e}_2+a_3\mathbf{e}_3 \tag{14.45}$$

в правом ортонормированном базисе $\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$, где вектор $\mathbf{a}$ — фиксированный.

Решение. Справедливы следующие равенства:

$$A(\mathbf{e}_1)=[\mathbf{a},\mathbf{e}_1]=\begin{vmatrix}\mathbf{e}_1&\mathbf{e}_2&\mathbf{e}_3\\a_1&a_2&a_3\\1&0&0\end{vmatrix}=$$

$$=a_3\mathbf{e}_2-a_2\mathbf{e}_3=(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3)\begin{pmatrix}0\\a_3\\-a_2\end{pmatrix}, \tag{14.46}$$

$$A(\mathbf{e}_2)=[\mathbf{a},\mathbf{e}_2]=\begin{vmatrix}\mathbf{e}_1&\mathbf{e}_2&\mathbf{e}_3\\a_1&a_2&a_3\\0&1&0\end{vmatrix}=$$

$$= a_1\mathbf{e}_3 - a_3\mathbf{e}_1 = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)\begin{pmatrix} -a_3 \\ 0 \\ a_1 \end{pmatrix}, \quad (14.47)$$

$$A(\mathbf{e}_3) = [\mathbf{a}, \mathbf{e}_3] = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= a_2\mathbf{e}_1 - a_1\mathbf{e}_2 = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)\begin{pmatrix} a_2 \\ -a_1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (14.48)$$

Таким образом, из (14.46)–(14.48) вытекает выражение для матрицы оператора (14.45):

$$(A(\mathbf{e}_1), A(\mathbf{e}_2), A(\mathbf{e}_3)) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)\begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (14.49)$$

З а д а ч а 6. В линейном пространстве $\mathbb{K}^{2\times 2}$ при $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ задано отображение:

$$L_A : \mathbb{K}^{2\times 2} \to \mathbb{K}^{2\times 2}, \quad L_A(X) = A \cdot X, \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{2\times 2}. \quad (14.50)$$

Проверить, что отображение L_A — линейный оператор и найти его матрицу в базисе:

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (14.51)$$

$$\mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (14.52)$$

Решение. Справедливы следующие равенства:

$$L_A(\mathbf{e}_1) = A \cdot \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} = a\mathbf{e}_1 + c\mathbf{e}_3, \quad (14.53)$$

$$L_A(\mathbf{e}_2) = A \cdot \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix} = a\mathbf{e}_2 + c\mathbf{e}_4, \quad (14.54)$$

$$L_A(\mathbf{e}_3) = A \cdot \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix} = b\mathbf{e}_1 + d\mathbf{e}_3, \quad (14.55)$$

$$L_A(\mathbf{e}_4) = A \cdot \mathbf{e}_4 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = b\mathbf{e}_2 + d\mathbf{e}_4. \quad (14.56)$$

Из равенств (14.53)–(14.56) вытекает равенство:

$$(L_A(\mathbf{e}_1), L_A(\mathbf{e}_2), L_A(\mathbf{e}_3), L_A(\mathbf{e}_4)) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4) \cdot A_e, \quad (14.57)$$

$$A_e = \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{pmatrix}. \qquad (14.58)$$

Задача 7. Найти ядро и образ оператора сдвига:

$$T: \; p(x) \to p(x+1) \quad \text{для любого} \quad p(x) \in P^n. \qquad (14.59)$$

Решение. Прежде всего заметим, что семейство векторов:

$$\mathbf{e}_1 = 1, \; \mathbf{e}_2 = x+1, \ldots, \mathbf{e}_{n+1} = (x+1)^n \qquad (14.60)$$

образует базис в P^n. Тогда для любого

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \in P^n,$$

$$Tp(x) = p(x+1) = a_0\mathbf{e}_1 + a_1\mathbf{e}_2 + \cdots + a_n\mathbf{e}_{n+1}.$$

Рассмотрим уравнение:

$$Tp(x) = \vartheta(x) \Leftrightarrow a_0\mathbf{e}_1 + a_1\mathbf{e}_2 + \cdots + a_n\mathbf{e}_{n+1} = \vartheta(x). \qquad (14.61)$$

В силу линейной независимости семейства (14.60) получим, что $a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 0$ и поэтому $\ker T = \{\vartheta(x)\}$. Следовательно,

$$\ker T = \{\vartheta(x)\}, \quad \operatorname{im} T = P^n.$$

Задача 8. *Ядро и образ линейного оператора.* Найти базисы ядра и образа линейного оператора A, действующего в линейном пространстве столбцов $\mathbb{R}^4$ по правилу умножения матрицы на столбец:

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 3 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} X, \quad X \in \mathbb{R}^4. \qquad (14.62)$$

Решение. Шаг 1. Ядро. Для того чтобы найти базис в ядре оператора A нужно найти ФСР следующей системы уравнений:

$$A \cdot X = O \in \mathbb{R}^4, \quad X \in \mathbb{R}^4. \qquad (14.63)$$

Найдем ФСР методом Гаусса. Действительно, имеем:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 3 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \sim C^3 - C^4 \sim \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \\ 3 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \sim \frac{1}{3}C^3 \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \sim C^1 \leftrightarrow C^4 \sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim C^4 - C^3 - C^2 \sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim C^4 \ominus \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim C^3 - C^2 \sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim C^2 + 2C^3 \sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim C^1 - 2C^3 \sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \frac{1}{3}C^1 \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}. \quad (14.64)$$

Таким образом, система уравнений (14.63) эквивалентна следующей системе:

$$x^1 = 2x^4, \quad x^2 = -3x^4, \quad x^3 = -2x^4. \quad (14.65)$$

Следовательно, базис ядро оператора A состоит из одного столбца:

$$\ker A = \{c^1 X_1, \quad c^1 \in \mathbb{R}\}, \quad X_1 = (2, -3, -2, 1)^T. \quad (14.66)$$

Шаг 2. Образ. Здесь мы сделаем небольшое теоретическое отступление. Пусть $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — базис линейного пространства $\mathcal{L}$ и $A \in L(\mathcal{L}; \mathcal{L})$. Докажем, что семейство векторов:

$$\{A(\mathbf{e}_1), \ldots, A(\mathbf{e}_n)\} \in \operatorname{Im} A$$

полно в $\operatorname{Im} A$. Действительно, пусть $y \in \operatorname{Im} A$. Тогда найдется такое $x \in \mathcal{L}$, что $y = A(x)$. Пусть:

$$x = x^j \cdot \mathbf{e}_j \Rightarrow y = A(x) = A(x^j \cdot \mathbf{e}_j) = x^j \cdot A(\mathbf{e}_j).$$

Отсюда вытекает полнота.

Теперь вернемся к нашей задаче. Рассмотрим стандартный базис линейного пространства столбцов $\mathbb{R}^4$:

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда имеем:

$$A(\mathbf{e}_1) = A \cdot \mathbf{e}_1 = \|A_1, \ldots, A_n\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = A_1, \quad (14.67)$$

$$A(\mathbf{e}_j) = A_j, \quad j = \overline{1, 4}. \quad (14.68)$$

Таким образом, нам осталось выделить из семейства столбцов $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ максимальное линейно независимое подсемейство. Но мы этот вопрос фактически изучили в цепочке эквивалентных преобразований (14.64). И поэтому максимальное линейно независимое семейство столбцов матрицы A состоит из первого, второго и третьего столбцов матрицы A. Значит,

$$\operatorname{Im} A = \{Y = c^1 A_1 + c^2 A_2 + c^3 A_3,\ c^1, c^2, c^3 \in \mathbb{R}\},$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что как и должно быть:

$$\dim \ker A + \dim \operatorname{Im} A = 4.$$

Задача 9. *Задача на собственные векторы и собственные значения.* Найти собственные значения, их кратности и собственные подпространства линейного оператора $A \in L(\mathcal{L}; \mathcal{L})$, заданного в некотором базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ в $\mathcal{L}$ матрицей:

$$A_e = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 8 & -4 & 1 \end{pmatrix}. \tag{14.69}$$

Решение. Рассмотрим характеристический многочлен:

$$\det(A_e - \lambda I) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 & 0 \\ 4 & -1-\lambda & 0 \\ 8 & -4 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$
$$= (1-\lambda) \begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 \\ 4 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 1)^2(\lambda - 3). \tag{14.70}$$

Таким образом, характеристический многочлен имеет два корня $\lambda = 1$ и $\lambda = 3$ алгебраических кратностей 2 и 1, соответственно. Построим базисы в соответствующих собственных подпространствах $V_1(A)$ и $V_3(A)$. Начнем с $V_1(A)$. Справедливы равенства:

$$A_e - I = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ 8 & -4 & 0 \end{pmatrix} \sim (2, -1, 0). \tag{14.71}$$

Поэтому система линейных однородных уравнений:

$$(A_e - I) \cdot X_e = O \tag{14.72}$$

эквивалентна одному уравнению:

$$2x^1 - x^2 + 0x^3 = 0. \tag{14.73}$$

ФСР этой системы уравнений состоит из двух векторов:

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{14.74}$$

Поэтому:

$$V_1(A) = \{c^1 X_1 + c^2 X_2,\ c^1, c^2 \in \mathbb{R}\}.$$

Теперь найдем базис в $V_3(A)$. Действительно,

$$A_e - 3I = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 4 & -4 & 0 \\ 8 & -4 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}. \tag{14.75}$$

Поэтому система уравнений:

$$(A_e - 3I) \cdot X_e = O$$

эквивалентна следующей системе уравнений:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{14.76}$$

ФСР которой состоит из оного вектора, например, следующего:

$$X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}. \tag{14.77}$$

Поэтому:

$$V_3(A) = \{c^3 X_3,\ c^3 \in \mathbb{R}\}. \tag{14.78}$$

З а д а ч а 10. Найти собственные значения и собственные подпространства оператора транспонирования:

$$\mathbf{T}:\ X \to X^T, \quad X \in \mathbb{K}^{n\times n}. \tag{14.79}$$

Решение. Прежде всего запишем произвольную матрицу $X \in \mathbb{K}^{n\times n}$ в блочных видах:

$$X = \|X_1, \ldots, X_n\| = \left\| \begin{matrix} X^1 \\ \vdots \\ X^n \end{matrix} \right\|, \tag{14.80}$$

$$X^T = \left\|(X^1)^T, \ldots, (X^n)^T\right\| = \left\| \begin{matrix} (X_1)^T \\ \vdots \\ (X_n)^T \end{matrix} \right\|. \tag{14.81}$$

Теперь рассмотрим задачу на собственные значения и собственные векторы:

$$\mathbf{T}X = \lambda X \Leftrightarrow X^T = \lambda X \tag{14.82}$$

Отсюда с учетом (14.80) и (14.81) получим равенства:

$$(X^j)^T = \lambda X_j, \quad (X_k)^T = \lambda X^k, \quad j, k = \overline{1, n}. \tag{14.83}$$

Из (14.83) мы получаем следующее равенство:

$$X_j = \lambda^2 X_j \quad \text{для всех} \quad j = \overline{1, n}, \tag{14.84}$$

т.е. приходим к выводу о том, что $\lambda^2 = 1$. Следовательно, собственных чисел всего два: $\lambda = 1$ и $\lambda = -1$. Если $\lambda = 1$, то из (14.83) получим, что

$$(X^j)^T = X_j, \quad j = \overline{1, n} \Leftrightarrow X^T = X. \tag{14.85}$$

Если $\lambda = -1$, то из (14.83) получим, что

$$(X^j)^T = -X_j, \quad j = \overline{1, n} \Leftrightarrow X^T = -X. \tag{14.86}$$

Итак, есть два собственных подпространства — линейные подпространства симметричных и антисимметричных матриц:

$$\mathbb{K}_s^{n\times n} \quad \text{и} \quad \mathbb{K}_{as}^{n\times n}$$

Задача 11. *Экзаменационная задача.* Рассматривается евклидово пространство $\mathcal{E}$. Пусть $A \in L(\mathcal{E}; \mathcal{E})$. Доказать, что оператор A ортогонален, т. е.

$$(Ax, Ay) = (x, y) \quad \text{для всех} \quad x, y \in \mathcal{E}, \tag{14.87}$$

тогда и только тогда, когда:

$$\|Ax\| = \|x\| \quad \text{для всех} \quad x \in \mathcal{E}. \tag{14.88}$$

Решение. Шаг 1. Прежде всего заметим, что справедливы следующие равенства:

$$\begin{aligned}\|B(x+y)\|^2 = (B(x+y), B(x+y)) = \\ = (B(x), B(x)) + (B(y), B(y)) - 2(B(x), B(y)) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (B(x), B(y)) = \frac{1}{2}\left[\|B(x+y)\|^2 - \|B(x)\|^2 - \|B(y)\|^2\right]\end{aligned} \tag{14.89}$$

для любого $B \in L(\mathcal{E}; \mathcal{E})$.

Шаг 2. Необходимость. Пусть оператор A — ортогональный, тогда из (14.87) при $x = y \in \mathcal{E}$ получим равенство (14.88).

Шаг 3. Достаточность. Пусть выполнено равенство (14.88) тогда при $B = A$ и при $A = I$ в (14.89) справедлива следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned}(Ax, Ay) = \frac{1}{2}\left[\|A(x+y)\|^2 - \|Ax\|^2 - \|Ay\|^2\right] = \\ = \frac{1}{2}\left[\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right] = (x, y) \quad \text{для всех} \quad x, y \in \mathcal{E}.\end{aligned} \tag{14.90}$$

З а д а ч а 12. *Экзаменационная задача.* Рассматривается линейное пространство $\mathcal{L}$. Пусть $A \in L(\mathcal{L};\mathcal{L})$. Доказать, что сумма двух различных собственных подпространств оператора A является инвариантным подпространством оператора A. Является ли эта сумма собственным подпространством оператора A?

Решение. Пусть

$$H = \ker(A - \lambda_1 I) + \ker(A - \lambda_2 I) \subset \mathcal{L}, \quad \lambda_1 \neq \lambda_2.$$

Как сумма линейных подпространств H является линейным подпространством в $\mathcal{L}$. Докажем, что H — инвариантное относительно A подпространство.

$\square$ Действительно, пусть $z \in H$. Тогда:

$$z = x + y, \quad x \in \ker(A - \lambda_1 I), \quad y \in \ker(A - \lambda_2 I).$$

Имеем:

$$Az = Ax + Ay = \lambda_1 x + \lambda_2 y \in \ker(A - \lambda_1 I) + \ker(A - \lambda_2 I) = H. \quad \boxtimes$$

Однако, поскольку $\lambda_1 \neq \lambda_2$ собственным подпространством H не будет.

$\square$ Действительно, пусть от противного:

$$\forall z \in H = \ker(A - \lambda I) \quad \text{и} \quad Az = \lambda z. \tag{14.91}$$

Тогда возьмем:

$$z = x + y, \quad \vartheta \neq x \in \ker(A - \lambda_1 I), \quad \vartheta \neq y \in \ker(A - \lambda_2 I), \tag{14.92}$$

$$Az = Ax + Ay = \lambda_1 x + \lambda_2 y. \tag{14.93}$$

Из (14.91)–(14.93) получаем равенство:

$$\lambda x + \lambda y = \lambda_1 x + \lambda_2 y \Leftrightarrow (\lambda - \lambda_1)x + (\lambda - \lambda_2)y = \vartheta,$$

т.е. векторы x и y ненулевые и линейно зависимы. Значит,

$$x, y \in \ker(A - \lambda_1 I) \cap \ker(A - \lambda_2 I) = \{\vartheta\}.$$

Пришли к противоречию. $\boxtimes$

З а д а ч а 13. *Экзаменационная задача.* Рассматривается линейное пространство $\mathcal{L}$ над числовым полем $\mathbb{K}$, $\dim \mathcal{L} \in \mathbb{N}$. Пусть $A \in L(\mathcal{L};\mathcal{L})$. Найти все числа $\lambda \in \mathbb{K}$, для которых $\operatorname{Im}(A - \lambda I) = \mathcal{L}$.

Решение. Как было доказано ранее, справедливо равенство:

$$\dim \ker(A - \lambda I) + \dim \operatorname{Im}(A - \lambda I) = \dim \mathcal{L}.$$

Поэтому для того, чтобы $\operatorname{Im}(A - \lambda I) = \mathcal{L}$, необходимо и достаточно, чтобы $\dim \ker(A - \lambda I) = 0$, т.е. чтобы:

$$\ker(A - \lambda I) = \{\vartheta\}.$$

Таким образом, вывод такой числа λ не должны быть собственными значениями оператора A.

Задача 14. *Экзаменационная задача.* Рассматривается линейное пространство $\mathcal{L}$ над числовым полем $\mathbb{K}$, $\dim \mathcal{L} \in \mathbb{N}$. Пусть $A \in L(\mathcal{L}; \mathcal{L})$. Найти все числа $\lambda \in \mathbb{K}$, для которых $\operatorname{Im}(A - \lambda I) \neq \mathcal{L}$.

Решение. В силу решения предыдущей задачи ответ такой: когда λ — собственное значение оператора A.

Задача 15. *Вычислительная задача.* В линейном пространстве $\mathbb{R}^2$ заданы элементы:

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \ \mathbf{e}_{1'} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{e}_{2'} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}. \tag{14.94}$$

Доказать, что: элементы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ образуют базис в $\mathbb{R}^2$; элементы $\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'}$ образуют базис в $\mathbb{R}^2$. Найти: матрицу перехода от базиса $\mathbf{E} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ к базису $\mathbf{E}' = (\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'})$.

Решение. Пусть $\mathbf{F} = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)$ — канонический базис в $\mathbb{R}^2$, т. е.

$$\mathbf{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{14.95}$$

Тогда имеем:

$$\mathbf{E} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2) \cdot A_1, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, \tag{14.96}$$

$$\mathbf{E}' = (\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'}) = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2) \cdot A_2, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}. \tag{14.97}$$

Из (14.96) и (14.97) имеем:

$$\mathbf{E}' = (\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'}) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \cdot A, \quad A = A_1^{-1} \cdot A_2 = \begin{pmatrix} 8 & -11 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}. \tag{14.98}$$

Задача 16. *Вычислительная задача.* В линейном вещественном пространстве $P_1[0,2]$ (пространстве всех полиномов на сегменте $[0,2]$ степени не выше 1) задан оператор, действующий по правилу:

$$A(x)(t) = \int\limits_0^2 (t - \tau) x(\tau)\, d\tau. \tag{14.99}$$

Найти матрицу оператора A в базисе $\mathbf{e}_1(t) = 1$, $\mathbf{e}_2(t) = t$.

Решение. Справедливы равенства:

$$A(\mathbf{e}_1)(t) = \int\limits_0^2 (t - \tau)\, d\tau = 2t - 2 = -2\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2, \tag{14.100}$$

$$A(\mathbf{e}_2)(t) = \int\limits_0^2 (t - \tau)\tau\, d\tau = 2t - \frac{8}{3} = -\frac{8}{3}\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2. \tag{14.101}$$

Из (14.100), (14.101) получаем:

$$(A(\mathbf{e}_1), A(\mathbf{e}_2)) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)A_e, \quad A_e = \begin{pmatrix} -2 & -8/3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Задача 17. Пусть D_x — оператор дифференцирования, а X — оператор умножения на x в линейном бесконечномерном пространстве $C^\infty(\mathbb{R})$. Доказать следующие равенства:

$$D_x X^n - X^n D_x = nX^{n-1}, \tag{14.102}$$

$$A_- A_+ - A_+ A_- = 2\,\mathrm{id}, \quad A_- = X + D_x, \quad A_+ = X - D_x, \tag{14.103}$$

$$A_+ A_- + \mathrm{id} = A_- A_+ - \mathrm{id} = H, \quad H = -D_x^2 + X^2, \tag{14.104}$$

$$HA_+ - A_+ H = 2A_+, \quad HA_- - A_- H = -2A_-. \tag{14.105}$$

Решение. Для функции $f(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$ справедливы равенства:

$$(D_x X^n - X^n D_x)\, f(x) = \\ = \frac{d}{dx}\,(x^n f(x)) - x^n \frac{df(x)}{dx} = nx^{n-1} f(x), \tag{14.106}$$

$$A_- A_+ f(x) = (X + D_x)(X - D_x) f(x) = \\ = (X + D_x)\left(x f(x) - \frac{df(x)}{dx}\right) = \\ = x^2 f(x) - x\frac{df(x)}{dx} + \frac{d}{dx}\,(x f(x)) - \frac{d^2 f(x)}{dx^2} = \\ = x^2 f(x) + f(x) - \frac{d^2 f(x)}{dx^2}, \tag{14.107}$$

$$A_+ A_- f(x) = (X - D_x)(X + D_x) f(x) = \\ = (X - D_x)\left(x f(x) + \frac{df(x)}{dx}\right) = \\ = x^2 f(x) + x\frac{df(x)}{dx} - \frac{d}{dx}\,(x f(x)) - \frac{d^2 f(x)}{dx^2} = \\ = x^2 f(x) - f(x) - \frac{d^2 f(x)}{dx^2}, \tag{14.108}$$

$$[A_- A_+ - A_+ A_-]\, f(x) = 2f(x) = 2\,\mathrm{id}\, f(x), \tag{14.109}$$

$$A_+ A_- f(x) + f(x) = A_- A_+ f(x) - f(x) = Hf(x). \tag{14.110}$$

Теперь можно доказать равенства (14.105). Действительно, имеем:

$$HA_+ = (A_+ A_- + \mathrm{id})\, A_+ = A_+ A_- A_+ + A_+, \tag{14.111}$$

$$A_+ H = A_+\,(A_+ A_- - \mathrm{id})\, A_+ = A_+ A_- A_+ - A_+. \tag{14.112}$$

Из равенств (14.111) и (14.112) вытекает первое равенство из (14.105). Второе равенство из (14.105) доказывается аналогичным образом.

Задача 18. В условиях предыдущей задачи доказать, что если функция $\psi(x)$ является собственным вектором оператора H с собственным значением λ, то $A_+\psi$ и $A_-\psi$ также будут собственными векторами (если они ненулевые) для оператора H с собственными значениями $\lambda+2$ и $\lambda-2$ соответственно.

Решение. Итак, пусть:

$$H\psi = \lambda\psi, \quad \lambda \in \mathbb{K}, \quad \psi(x) \in C^\infty(\mathbb{K}). \tag{14.113}$$

Тогда из равенств (14.105) имеем:

$$HA_+\psi = A_+H\psi + 2A_+\psi = \lambda A_+\psi + 2A_+\psi = (\lambda+2)A_+\psi, \tag{14.114}$$

$$HA_-\psi = A_+H\psi - 2A_-\psi = \lambda A_-\psi - 2A_-\psi = (\lambda-2)A_-\psi. \tag{14.115}$$

Задача 19. В условиях предыдущих двух задач доказать, что если $\psi_0(x) \in \ker A_-$, то векторы $\psi_k(x) = A_+^k\psi_0(x)$ являются собственными для оператора H. Вычислить собственные значения λ_k.

Решение. Итак, пусть $\psi_0(x) \in \ker A_-$. Тогда из первого равенства в (14.104) получим равенство:

$$H\psi_0 = 1 \cdot \psi_0, \tag{14.116}$$

т. е. вектор $\psi_0(x)$ — собственные вектор оператора H, соответствующий собственному значению $\lambda_0 = 1$. Из первого равенства в (14.105) получим равенство:

$$HA_+\psi_0 = A_+H\psi_0 + 2A_+\psi_0 = (\lambda_0+2)A_+\psi_0 = \lambda_1 A_+\psi_0, \tag{14.117}$$

где $\lambda_1 = \lambda_0 + 2 = 3$. Предположим теперь, что вектор $\psi_k(x) := A_+$ $+^k\psi_0(x)$ — собственный вектор оператора H :

$$H\psi_k = \lambda_k\psi_k, \tag{14.118}$$

соответствующий собственному значению λ_k. Тогда имеем из первого равенства в (14.105) получим равенство:

$$HA_+\psi_k = A_+H\psi_k + 2A_+\psi_k = (\lambda_k+2)A_+\psi_k = \lambda_{k+1}A_+\psi_k, \tag{14.119}$$

где $\lambda_{k+1} = \lambda_k + 2$, т. е. вектор $\psi_{k+1} := A_+\psi_k$ — есть собственный вектор оператора H, соответствующий собственному значению $\lambda_{k+1} = \lambda_k + 2$. По индукции получаем, что

$$H\psi_k = \lambda_k\psi_k, \quad \psi_k := A_+^k\psi_0, \quad \lambda_k = 2k+1, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{14.120}$$

Задача 20. Рассмотрим многочлены Эрмита:

$$p_k(x) := \exp\left(\frac{x^2}{2}\right) A_+{}^k \left(\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\right), \quad k \in \mathbb{N}\cup\{0\}, \tag{14.121}$$

$$A_+ = x\,\mathrm{id} - D_x. \tag{14.122}$$

Доказать следующие равенства:

$$p_k'' - 2xp_k' + 2kp_k = 0, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \tag{14.123}$$

Решение. В обозначениях предыдущих задач имеем:

$$A_- \psi_0(x) = (x \operatorname{id} + D_x)\, \psi_0(x) = 0, \quad \psi_0(x) := \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right), \tag{14.124}$$

т.е. $\psi_0(x) \in \ker A_-$. Поэтому функции:

$$\psi_k(x) := {A_+}^k \psi_0(x), \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \tag{14.125}$$

являются собственными функциями оператора H :

$$H\psi_k(x) = (2k+1)\psi_k(x), \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \tag{14.126}$$

Тогда имеем:

$$\psi_k(x) = \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) p_k(x), \tag{14.127}$$

$$\begin{aligned} H\psi_k(x) = \left(-\frac{d^2}{dx^2} + x^2\right) \left(\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) p_k(x)\right) = \\ = \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \left[-p_k''(x) + 2xp_k'(x) + p_k(x)\right]. \end{aligned} \tag{14.128}$$

Тогда из (14.126) с учетом (14.127) и (14.128) имеем:

$$p_k''(x) - 2xp_k'(x) + 2kp_k(x) = 0, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \tag{14.129}$$

Задача 21. Пусть:

$$V_0 \xrightarrow{A_1} V_1 \xrightarrow{A_2} \cdots \xrightarrow{A_m} V_m \tag{14.130}$$

— последовательность линейных отображений линейных пространств. Доказать, что

$$\sum_{i=1}^{m} \dim \ker A_i - \sum_{i=1}^{m} \dim\left(V_i / \operatorname{im} A_i\right) = \dim V_0 - \dim V_m, \tag{14.131}$$

где $V_i / \operatorname{im} A_i$ — это факторпространство.

Решение. При $m = 1$ справедливо равенство:

$$\dim \ker A_1 + \dim \operatorname{im} A_1 = \dim V_0, \tag{14.132}$$

$$\dim V_1 = \dim(V_1 / \operatorname{im} A_1) + \dim \operatorname{im} A_1, \tag{14.133}$$

$$\dim \ker A_1 - \dim\left(V_1 / \operatorname{im} A_1\right) = \dim V_0 - \dim V_1. \tag{14.134}$$

Теперь предположим, что равенство (14.131) выполнено. Заметим, что точно также как при выводе (14.134) можно доказать равенство:

$$\dim \ker A_{m+1} - \dim\left(V_{m+1} / \operatorname{im} A_{m+1}\right) = \dim V_m - \dim V_{m+1}. \tag{14.135}$$

Теперь сложим равенства (14.131) с (14.135) и получим равенство:

$$\sum_{i=1}^{m+1} \dim\ker A_i - \sum_{i=1}^{m+1} \dim\left(V_i/\operatorname{im} A_i\right) = \dim V_0 - \dim V_{m+1}. \quad (14.136)$$

Равенство (14.131) по индукции доказано.

З а д а ч а 22. Пусть $\mathcal{L} = P^1$. Найти матрицу отображения:

$$A: \mathcal{L} \ni f(x) \to f(S) \in \mathbb{K}^{2\times 2}, \quad S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad (14.137)$$

если в $\mathcal{L}$ выбран базис $\{1, x\}$, а в $\mathbb{K}^{2\times 2}$ выбран базис из матричных единиц:

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (14.138)$$

$$\mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (14.139)$$

Решение. Справедливы равенства:

$$A\cdot 1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1\mathbf{e}_1 + 0\mathbf{e}_2 + 0\mathbf{e}_3 + 1\mathbf{e}_4, \quad (14.140)$$

$$A\cdot x = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2 + c\mathbf{e}_3 + d\mathbf{e}_4. \quad (14.141)$$

Искомая матрица имеет вид:

$$A_e = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \\ 0 & c \\ 1 & d \end{pmatrix}. \quad (14.142)$$

З а д а ч а 23. Доказать, что линейный оператор $A \in L(\mathcal{L}; \mathcal{M})$ переводит линейно зависимое семейство векторов в линейно зависимое.

Решение. Пусть $\{x_1, \ldots, x_n\}$ — линейно зависимое семейство векторов в линейном пространстве $\mathcal{L}$. Это означает, что существует такая линейная комбинация:

$$\alpha^1 x_1 + \cdots + \alpha^n x_n = \vartheta_1, \quad (14.143)$$

причем $(\alpha^1, \ldots, \alpha^n) \neq (0, \ldots, 0)$. Но тогда в силу линейности оператора имеем:

$$\alpha^1 A(x_1) + \cdots + \alpha^n A(x_n) = \vartheta_2, \quad (14.144)$$

т.е. семейство векторов $\{A(x_1), \ldots, A(x_n)\}$ тоже линейно зависимо в линейном пространстве $\mathcal{M}$.

З а д а ч а 24. Доказать, что в n–мерном линейном пространстве для любой линейно независимой системы векторов $\{a_1, \ldots, a_n\}$ и произвольной системы векторов $\{b_1, \ldots, b_n\}$ найдется единственный линейный оператор, переводящий a_i в b_i для всех $i = \overline{1, n}$.

Решение. Определим отображение A следующим образом:

$$A(a_i) := b_i, \quad i = \overline{1, n}. \tag{14.145}$$

Заметим, что семейство векторов $\{a_1, \ldots, a_n\}$ образует базис в рассматриваемом линейном пространстве $\mathcal{L}$. Определим отображение:

$$A(x) := x^j A(a_j), \quad x = x^j a_j. \tag{14.146}$$

Это однозначное отображение. Его линейность следует из ранее доказанного равенства:

$$(\alpha^1 x_1 + \alpha^2 x_2)^j = \alpha^1 x_1^j + \alpha^2 x_2^j. \tag{14.147}$$

Поскольку два линейных оператора равны, если они действуют одинаковым образом на элементах базиса, то линейный оператор A единственный.

Задача 25. Доказать, что если два линейных оператора $A_1, A_2 \in$ $\in L(\mathcal{L}; \mathcal{L})$ ранга 1 имеют равные ядра и равные образы, то они перестановочны.

Решение. В силу условий теоремы существует такой базис $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ в линейном пространстве $\mathcal{L}$, что

$$\ker A_1 = \ker A_2 = L(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{n-1}), \quad \operatorname{im} A_1 = \operatorname{im} A_2 = L(\mathbf{e}_n). \tag{14.148}$$

Тогда для любого $x \in \mathcal{L}$ справедливы равенства:

$$x = x^j \mathbf{e}_j, \quad A_1(x) = x^j a_{1j} \mathbf{e}_n, \quad A_2(x) = x^j a_{2j} \mathbf{e}_n, \tag{14.149}$$

$$A_2 A_1(x) = A_2(x^j a_{1j} \mathbf{e}_n) = x^j a_{1j} A_2(\mathbf{e}_n) = x^j a_{1j} a_{2n} \mathbf{e}_n, \tag{14.150}$$

$$A_1 A_2(x) = A_1(x^j a_{2j} \mathbf{e}_n) = x^j a_{2j} A_1(\mathbf{e}_n) = x^j a_{2j} a_{1n} \mathbf{e}_n. \tag{14.151}$$

Заметим, что, с одной стороны, если $x = \mathbf{e}_n$, то из (14.150) и (14.151) получаем равенство:

$$A_2 A_1(\mathbf{e}_n) = A_1 A_2(\mathbf{e}_n). \tag{14.152}$$

С другой стороны, имеем:

$$A_2 A_1(\mathbf{e}_k) = \vartheta = A_1 A_2(\mathbf{e}_k) \quad \text{для всех} \quad k = \overline{1, n-1}. \tag{14.153}$$

Поскольку на векторах базиса $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ операторы A_1 и A_2 коммутируют, то они коммутируют на всем линейном пространстве $\mathcal{L}$.

Задача 26. Пусть $A \in L(\mathcal{L}; \mathcal{L})$ и $\mathcal{P} \subset \mathcal{L}$ — линейное подпространство, причем $\ker A \cap \mathcal{P} = \{\vartheta\}$. Доказать, что всякую линейно независимую систему векторов из $\mathcal{P}$ оператор A переводит в линейно независимую.

Решение. Пусть $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m\}$ — это произвольная линейно независимая система векторов из $\mathcal{P}$. Предположим, что система векторов $\{A(\mathbf{e}_1), \ldots, A(\mathbf{e}_m)\}$ линейно зависимая:

$$\alpha^1 A(\mathbf{e}_1) + \cdots + \alpha^m A(\mathbf{e}_m) = \vartheta \Rightarrow A(\alpha^1 \mathbf{e}_1 + \cdots + \alpha^m \mathbf{e}_m) = \vartheta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha^1\mathbf{e}_1 + \dots + \alpha^m\mathbf{e}_m \in \ker A \cap \mathcal{P} = \vartheta, \quad (14.154)$$

хотя $(\alpha^1, \dots, \alpha^m) \neq (0, \dots, 0)$. Противоречие.

З а д а ч а 27. Доказать, что для линейного оператора $A \in L(\mathcal{L}; \mathcal{L})$, $\dim \mathcal{L} = n$ множество линейных операторов $\mathfrak{X}$ таких, что $A\mathfrak{X} = O$, является линейным пространством, и найти его размерность.

Решение. То, что указанное множество является линейным пространством — очевидно. Указанное линейное пространство операторов совпадает с линейным пространством $L(\mathcal{L}; \ker A)$. Размерность этого линейного пространства равна:

$$\dim \mathcal{L} \cdot \dim \ker A = n(n-r), \quad r = \dim \operatorname{im} A.$$

З а д а ч а 28. Пусть линейный оператор $C \in L(\mathcal{L}; \mathcal{L})$, $\dim \mathcal{L} = n$ переводит линейно независимые векторы $\{a_1, \dots, a_n\}$ в векторы $\{b_1, \dots, b_n\}$ соответственно. Доказать, что матрица C_e этого оператора в некотором базисе $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ равна BA^{-1}, где столбцы матриц A и B состоят из координат заданных векторов $\{a_1, \dots, a_n\}$ и $\{b_1, \dots, b_n\}$ в базисе $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$.

Решение. Итак, справедливы равенства:

$$C(a_i) = b_i, \quad a_i = \alpha_i^k \mathbf{e}_k, \quad b_i = \beta_i^m \mathbf{e}_m, \quad i = \overline{1, n}, \quad (14.155)$$

$$\alpha_i^k C(\mathbf{e}_k) = \beta_i^m \mathbf{e}_m \Leftrightarrow \alpha_i^k c_k^m \mathbf{e}_m = \beta_i^m \mathbf{e}_m \Leftrightarrow \alpha_i^k c_k^m = \beta_i^m, \quad (14.156)$$

$$c_k^m \alpha_i^k = \beta_i^m \Leftrightarrow \{C_e\}_k^m \{A\}_i^k = \{B\}_i^m \Leftrightarrow \{C_e \cdot A\}_i^m = \{B\}_i^m \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow C_e \cdot A = B \Leftrightarrow C_e = B \cdot A^{-1}, \quad (14.157)$$

поскольку $\det A \neq 0$.

З а д а ч а 29. Найти общий вид матрицы линейного оператора $A \in L(\mathcal{L}; \mathcal{L})$ в базисе, первые k векторов которого составляют:

1) базис ядра оператора A;

2) базис образа оператора A.

Решение. Шаг 1. Заметим, что тогда семейство векторов $\{A(\mathbf{e}_{k+1}), \dots, A(\mathbf{e}_n)\}$ — линейно независимо, поскольку если справедливо равенство:

$$\alpha^{k+1}A(\mathbf{e}_{k+1}) + \dots + \alpha^n A(\mathbf{e}_n) = \vartheta \Leftrightarrow A\left(\alpha^{k+1}\mathbf{e}_{k+1} + \dots + \alpha^n\mathbf{e}_n\right) = \vartheta \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \alpha^{k+1}\mathbf{e}_{k+1} + \dots + \alpha^n\mathbf{e}_n \in \ker A = L(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \alpha^{k+1} = \dots = \alpha^n = 0. \quad (14.158)$$

Следовательно, первые k столбцов матрицы A_e оператора A нулевые, а оставшиеся $n-k$ линейно независимые.

Шаг 2. В этом случае имеют место равенства:

$$A(\mathbf{e}_j) = a_j^1\mathbf{e}_1 + \dots + a_j^k\mathbf{e}_k + 0\mathbf{e}_{k+1} + \dots + 0\mathbf{e}_n, \quad j = \overline{1, n}. \quad (14.159)$$

Поэтому у матрицы A_e последние $n-k$ строк нулевые. Поэтому справедливо равенство:

$$(A(\mathbf{e}_1),\dots,A(\mathbf{e}_n)) = (\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_k)\begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^k & \cdots & a_n^k \end{pmatrix}. \tag{14.160}$$

При этом заметим, что $\operatorname{im} A = L(A(\mathbf{e}_1),\dots,A(\mathbf{e}_n))$. Предположим, что

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^k & \cdots & a_n^k \end{pmatrix} < k. \tag{14.161}$$

Но тогда и $\operatorname{rang} L(A(\mathbf{e}_1),\dots,A(\mathbf{e}_n)) < k$, что противоречит тому, что по условию задачи $\operatorname{rang} L(A(\mathbf{e}_1),\dots,A(\mathbf{e}_n)) = k$. Таким образом, первые k строк матрицы A_e линейно независимые.

Задача 30. Доказать, что подпространство $V_\lambda(A)$, состоящее из всех собственных векторов оператора A с собственным значением λ и нулевого вектора, инвариантно относительно любого линейного оператора B, перестановочного с A.

Решение. Пусть $\{\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_m\}$ — собственный базис оператора A в линейном подпространстве $V_\lambda(A)$:

$$A\mathbf{e}_j = \lambda\mathbf{e}_j, \quad j=\overline{1,m}. \tag{14.162}$$

Тогда справедливо равенство:

$$AB\mathbf{e}_j = BA\mathbf{e}_j = \lambda B\mathbf{e}_j, \quad j=\overline{1,m}. \tag{14.163}$$

Отсюда получаем, что

$$B\mathbf{e}_j \in V_\lambda(A) \Rightarrow Bx = x^j B(\mathbf{e}_j) \in V_\lambda(A), \quad \forall\, x \in V_\lambda(A). \tag{14.164}$$

Итак, $BV_\lambda(A) \subset V_\lambda(A)$.

Задача 31. Доказать, что для любой конечной совокупности перестановочных линейных операторов конечномерного комплексного пространства существует общий собственный вектор.

Решение. Пусть $\{A_1,\dots,A_m\} \subset L(\mathcal{L};\mathcal{L})$, причем $\mathcal{L}$ — линейное пространство над полем $\mathbb{C}$. Тогда у оператора A_1 существует хотя бы один собственный вектор:

$$A_1 f_1 = \lambda_1 f_1, \quad f_1 \neq \vartheta. \tag{14.165}$$

Пусть $V_{\lambda_1}(A_1)$ — соответствующее собственное подпространство. Тогда в силу предыдущей задачи имеем: $A_k V_{\lambda_1}(A_1) \subset V_{\lambda_1}(A_1)$ для всех $k = \overline{1,m}$. Существует собственный вектор $f_2 \in V_{\lambda_1}(A_1)$ оператора A_2 :

$$A_2 f_2 = \lambda_2 f_2, \quad f_2 \neq \vartheta. \tag{14.166}$$

Пусть $V_{\lambda_2}(A_2)$ — соответствующее собственное подпространство. Тогда в силу предыдущей задачи имеем: $A_k V_{\lambda_2}(A_2) \subset V_{\lambda_2}(A_2)$ для всех $k =$

$= \overline{1,m}$. Рассмотрим линейное подпространство: $V_{\lambda_1}(A_1) \cap V_{\lambda_2}(A_2)$. Существует собственный вектор $f_3 \in V_{\lambda_1}(A_1) \cap V_{\lambda_2}(A_2)$ оператора A_3 :

$$A_3 f_3 = \lambda_3 f_3, \quad f_3 \neq \vartheta. \tag{14.167}$$

Далее продолжаем аналогичным образом. В результате получим линейное подпространство:

$$V_{\lambda_1}(A_1) \cap \cdots \cap V_{\lambda_m}(A_m) \neq \{\vartheta\}. \tag{14.168}$$

Причем для любого $f \in V_{\lambda_1}(A_1) \cap \cdots \cap V_{\lambda_m}(A_m)$ справедливо равенство:

$$A_j f = \lambda_j f, \quad j = \overline{1,m}. \tag{14.169}$$

Задача 32. Доказать, что если $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ и матрица A обратима, то матрицы AB и BA имеют совпадающие характеристические многочлены.

Решение. Справедливы равенства:

$$\begin{aligned} AB = ABAA^{-1} \Leftrightarrow \det(AB - \lambda I) = \det(ABAA^{-1} - \lambda AA^{-1}) = \\ = \det(A[BA - \lambda I]A^{-1}) = \det A \det(BA - \lambda I) \det A^{-1} = \\ = \det(BA - \lambda I). \end{aligned} \tag{14.170}$$

Задача 33. Найти характеристические числа матрицы $A^T \cdot A$, где $A = (a_1, \ldots, a_n)$.

Решение. Прежде всего имеем:

$$B := A^T \cdot A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \cdot (a_1, \ldots, a_n) = \begin{pmatrix} a_1^2 & \cdots & a_1 a_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n a_1 & \cdots & a_n^2 \end{pmatrix}. \tag{14.171}$$

Заметим, что $B^T = B$. Поэтому существует такое ортогональное преобразование $C^T = C^{-1}$, что

$$C^T \cdot B \cdot C = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}, \quad \lambda_j \in \mathbb{R}^1, \quad j = \overline{1,n}, \tag{14.172}$$

где λ_j — характеристические числа матрицы B. Но тогда, взяв след от обеих частей равенства (14.172), получим равенство:

$$\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = a_1^2 + \cdots + a_n^2. \tag{14.173}$$

Если теперь вычислить определитель от обеих частей равенства (14.172) получим равенство:

$$\lambda_1 \cdot \cdots \cdot \lambda_n = \det B = 0, \tag{14.174}$$

поскольку столбцы (строки) матрицы B линейно зависимы:

$$B = \|B_1, \ldots, B_n\|, \quad B_j = a_j\,(a_1, \ldots, a_n)^T, \quad j = \overline{1,n}. \tag{14.175}$$

Поэтому хотя бы одно характеристическое число матрицы B равно нулю. Докажем, что $\lambda_j \geqslant 0$ для всех $j = \overline{1,n}$.

□ Действительно, рассмотрим соответствующую квадратичную форму:

$$Q(X) = X^T \cdot B \cdot X = X^T \cdot A^T \cdot A \cdot X = (a_1 x^1 + \dots + a_n x^n)^2, \quad (14.176)$$

где $X = (x^1, \dots, x^n)^T$. Таким образом, квадратичная форма $Q(X)$ является неотрицательно определенной. Значит, в любом базисе, в котором $Q(X)$ имеет канонический вид, она имеет такой вид:

$$Q(X) = \mu_1 (x^1)^2 + \dots + \mu_n (x^n)^2, \quad \mu_j \geqslant 0, \quad j = \overline{1, n}. \quad (14.177)$$

Таким образом, $\lambda_j \geqslant 0$ для всех $j = \overline{1, n}$. ⊠

Заметим, что в силу (14.175) справедливо равенство:

$$\operatorname{rang} B = 1, \quad \text{если} \quad (a_1, \dots, a_n) \neq (0, \dots, 0) \quad (14.178)$$

и поэтому размерность пространства решений однородной системы уравнений $B \cdot X = 0$ равна $n - 1$. Это означает, что размерность собственного подпространства $V_0(B)$ оператора B, соответствующего характеристическому числу $\lambda = 0$, равна $\dim V_0(B) = n - 1$. Стало быть, поскольку в данном случае геометрическая кратность $p_0 = n - 1$ совпадает с алгебраической кратностью $n_0 = p_0 = n - 1$, то из (14.173) получаем, что

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_{n-1} = 0, \quad \lambda_n = a_1^2 + \dots + a_n^2. \quad (14.179)$$

Задача 34. Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — корни характеристического многочлена матрицы A в поле $\mathbb{R}$. Найти собственные значения линейного оператора:

$$F(X) := A \cdot X^T \cdot A^T, \quad X \in \mathbb{R}^{n \times n}. \quad (14.180)$$

Решение. Пусть:

$$A \cdot X_k = \lambda_k X_k, \quad X_k \in \mathbb{R}^{n \times 1}, \quad X_k \neq O, \quad k = \overline{1, n}. \quad (14.181)$$

Рассмотрим матрицу:

$$B_{jk} := X_j \cdot X_k^T \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad j, k = \overline{1, n}. \quad (14.182)$$

Тогда справедлива цепочка равенств:

$$F(B_{jk}) = A \cdot (B_{jk})^T \cdot A^T = (A \cdot X_k) \cdot (X_j^T \cdot A^T) = \\ = \lambda_k \lambda_j X_k \cdot X_j^T = \lambda_k \lambda_j X_j \cdot X_k^T = \lambda_k \lambda_j B_{jk}, \quad (14.183)$$

где мы воспользовались очевидным равенством $B_{jk}^T = B_{jk}$. Таким образом, собственные значения оператора F равны $\lambda_j \lambda_k$ при $j, k = \overline{1, n}$.

Задача 35. Доказать, что в n-мерном линейном комплексном пространстве всякий линейный оператор имеет инвариантное подпространство размерности $n - 1$.

Решение. Пусть $A \in L(\mathcal{L};\mathcal{L})$, где $\mathcal{L}$ — линейное пространство над полем $\mathbb{C}$. Тогда существует хотя бы одно собственное значение $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ и один собственный вектор $f_0 \in \mathcal{L}$:

$$Af_0 = \lambda_0 f_0, \quad f_0 \neq \vartheta. \tag{14.184}$$

Рассмотрим оператор $B_0 := A - \lambda_0 I$. В силу (14.184) имеем:

$$\dim\ker B_0 \geqslant 1 \Rightarrow \dim\operatorname{im} B_0 \leqslant n-1. \tag{14.185}$$

Если $\dim\operatorname{im} B_0 = n-1$, то, поскольку $\operatorname{im} B_0$ — инвариантное подпространство относительно B_0 и, очевидно, оператор $\lambda_0 I$ — тоже инвариантен, то оператор A инвариантен на $\operatorname{im} B_0$. Если же $\dim\operatorname{im} B_0 < n-1$, то очевидно можно добавить линейно независимые векторы $\{f_1, \ldots, f_m\} \notin \operatorname{im} B_0$ таким образом, чтобы:

$$\mathcal{P} = \operatorname{im} B_0 \oplus L(f_1, \ldots, f_m), \quad \dim\mathcal{P} = n-1. \tag{14.186}$$

Поскольку $\operatorname{im} B_0 \subset \mathcal{P}$, то оператор B_0 инвариантен на $\mathcal{P}$, но тогда как и ранее получаем, что оператор A инвариантен на $\mathcal{P}$.

Лекция 7

БИЛИНЕЙНЫЕ И КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ

§ 1. Матрица билинейной формы

Определение 1. *Функция* $B : x, y \to B(x, y) \in \mathbb{K}$ *двух векторных аргументов* $x, y \in \mathcal{L}$ *называется билинейной формой на* $\mathcal{L}$, *если при каждом фиксированном значении одного аргумента она является линейной формой от другого, т.е. если*

$$B(\alpha^1 \cdot x_1 + \alpha^2 \cdot x_2, y) = \alpha^1 B(x_1, y) + \alpha^2 B(x_2, y), \tag{1.1}$$

$$B(x, \beta^1 \cdot y_1 + \beta^2 \cdot y_2) = \beta^1 B(x, y_1) + \beta^2 B(x, y_2) \tag{1.2}$$

для любых $x, y, x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathcal{L}$ *и* $\alpha^1, \alpha^2, \beta^1, \beta^2 \in \mathbb{K}$.

Пример 1. Пусть $X, Y \in \mathbb{K}^{2\times 1}$. Тогда определитель 2×2 является билинейной формой относительно двух столбцов:

$$B(X, Y) = |X, Y| = \begin{vmatrix} x^1 & y^1 \\ x^2 & y^2 \end{vmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix}.$$

Пусть $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ — произвольный базис пространства $\mathcal{L}$. Тогда справедливы следующие равенства:

$$B(x, y) = B(x^i \cdot \mathbf{e}_i, y^j \cdot \mathbf{e}_j) = B(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) x^i y^j = b_{ij} x^i y^j, \quad b_{ij} = B(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j).$$

Определение 2. *Матрица* $(b_{ij})_{n,n}$ *называется матрицей билинейной формы.*

Замечание 1. *Матричная запись билинейной формы.* Рассмотрим отдельно выражение

$$b_{ij} x^i y^j. \tag{1.3}$$

Наша задача переписать это выражение в матричной форме. С этой целью введем следующие обозначения:

$$B_e = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} = \left\| \begin{matrix} B_1 \\ \vdots \\ B_n \end{matrix} \right\|, \quad B_j = (b_{j1}, \ldots, b_{jn}), \quad j = \overline{1, n},$$

$$X = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix}.$$

Матрица $B_e \in \mathbb{K}^{n\times n}$, $Y \in \mathbb{K}^{n\times 1}$. Поэтому $B_e \cdot Y \in \mathbb{K}^{n\times 1}$ — это столбец, причем:

$$B_e \cdot Y = \begin{Vmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_n \end{Vmatrix} \cdot Y = \begin{pmatrix} B_1 \cdot Y \\ \vdots \\ B_n \cdot Y \end{pmatrix}. \tag{1.4}$$

Теперь заметим, что

$$b_{ij}y^j = (b_{i1}, \cdots, b_{in}) \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix} = B_i \cdot Y \tag{1.5}$$

и из (1.3), (1.4) получаем равенство:

$$\begin{aligned} b_{ij}x^iy^j = x^ib_{ij}y^j = x^iB_i \cdot Y = \\ = x^1B_1 \cdot Y + \cdots + x^nB_n \cdot Y = (x^1, \ldots, x^n) \begin{pmatrix} B_1 \cdot Y \\ \vdots \\ B_n \cdot Y \end{pmatrix} = \\ = X^T \cdot B_e \cdot Y, \quad X^T = (x^1, \ldots, x^n), \end{aligned} \tag{1.6}$$

где мы воспользовались нашим правилом умножения матриц «строчка на столбец». Таким образом, в координатах билинейная форма записывается следующим образом:

$$B(x,y) = X^T \cdot B_e \cdot Y,\ x = \mathbf{E} \cdot X,\ y = \mathbf{E} \cdot Y,\ \mathbf{E} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n). \tag{1.7}$$

З а м е ч а н и е 2. *Закон преобразования матрицы билинейной формы.* Пусть $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — старый базис, а $\{\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}\}$ — новый базис и

$$\mathbf{e}_{i'} = c^i_{i'} \cdot \mathbf{e}_i. \tag{1.8}$$

Тогда справедлива следующая цепочка равенств:

$$b_{i'j'} = B(\mathbf{e}_{i'}, \mathbf{e}_{j'}) = B(c^i_{i'} \cdot \mathbf{e}_i, c^j_{j'} \cdot \mathbf{e}_j) = c^i_{i'}c^j_{j'}B(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = c^i_{i'}c^j_{j'}b_{ij}. \tag{1.9}$$

Наша задача переписать полученный закон преобразования матрицы билинейной формы:

$$b_{i'j'} = c^i_{i'}c^j_{j'}b_{ij} \tag{1.10}$$

в матричной форме. С одной стороны, заметим, что в силу нашего правила умножения «строчка на столбец»:

$$c^j_{j'}b_{ij} = b_{ij}c^j_{j'} = \{B_e\}^i_j\{C\}^j_{j'} = \{B_e \cdot C\}^i_{j'}, \tag{1.11}$$

$$B_e = (b_{ij})_{n,n}, \quad C = (c^j_{j'})^n_{n'}.$$

С другой стороны, имеем:

$$b_{i'j'} = c^i_{i'} b_{ij} c^j_{j'} = \sum_{i=1}^{n} c^i_{i'} \{B_e \cdot C\}^i_{j'} = \sum_{i=1}^{n} \{C\}^i_{i'} \{B_e \cdot C\}^i_{j'} =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \{C^T\}^{i'}_i \{B_e \cdot C\}^i_{j'} = \{C^T\}^{i'}_i \{B_e \cdot C\}^i_{j'} =$$
$$= \{C^T \cdot B_e \cdot C\}^{i'}_{j'} = \{C^T \cdot B_e \cdot C\}_{i'j'}. \quad (1.12)$$

Из равенств (1.10)–(1.12) получаем равенство:

$$\{B_{e'}\}_{i'j'} = \{C^T \cdot B_e \cdot C\}_{i'j'} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow B_{e'} = C^T \cdot B_e \cdot C, \quad B_{e'} = (b_{i'j'})_{n',n'}. \quad (1.13)$$

Предложим другой способ вывода матричного равенства (1.13). С этой целью воспользуемся матричным равенством (1.7). Кроме того, пусть:

$$x = x^j \cdot \mathbf{e}_j = \mathbf{E} \cdot X_e = x^{j'} \cdot \mathbf{e}_{j'} = \mathbf{E}' \cdot X_{e'}, \quad (1.14)$$

$$y = y^j \cdot \mathbf{e}_j = \mathbf{E} \cdot Y_e = y^{j'} \cdot \mathbf{e}_{j'} = \mathbf{E}' \cdot Y_{e'}, \quad (1.15)$$

где $\mathbf{E} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$, $\mathbf{E}' = (\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'})$. Тогда, как мы установили ранее, имеют место следующие равенства:

$$X_e = C \cdot X_{e'}, \quad Y_e = C \cdot Y_{e'}. \quad (1.16)$$

Справедливы следующие равенства:

$$X_e^T \cdot B_e \cdot Y_e = B(x, y) = X_{e'}^T \cdot B_{e'} \cdot Y_{e'}, \quad (1.17)$$

где B_e и $B_{e'}$ — матрицы билинейной формы в старом и новом базисах, из которых с учетом (1.16) получаем следующие равенства:

$$X_{e'}^T \cdot B_{e'} \cdot Y_{e'} = X_e^T \cdot B_e \cdot Y_e = X_{e'}^T \cdot C^T \cdot B_e \cdot C \cdot Y_{e'} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow X_{e'}^T \cdot (B_{e'} - C^T \cdot B_e \cdot C) \cdot Y_{e'} = 0. \quad (1.18)$$

Последнее равенство выполнено для любых столбцов $X_{e'}$ и $Y_{e'}$, поскольку равенства (1.17) справедливо для любых $x, y \in \mathcal{L}$, а значит в силу формул (1.14) и (1.15) для любых столбцов $X_e, Y_e, X_{e'}, Y_{e'}$. Поэтому из (1.18) с учетом ниже доказанной леммы 1 вытекает искомое равенство:

$$B_{e'} = C^T \cdot B_e \cdot C.$$

Лемма 1. *Если $X^T \cdot A \cdot Y = 0$ для любых $X, Y \in \mathbb{K}^{n\times 1}$ и для некоторой матрице $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, то $A = O$.*

Доказательство. Пусть $Y_k \in \mathbb{K}^{n\times 1}$ — столбец, у которого все ячейки заполнены нулями за исключением k–ой строчки, где расположена 1. Кроме того, пусть $X_j \in \mathbb{K}^{n\times 1}$ — столбец заполненный нулями за исключением j–ой строчки, где расположено число 1. Справедливы следующие равенства:

$$A \cdot Y_k = \|A_1, \dots, A_n\| \cdot Y_k = A_k, \quad 0 = (X_j)^T \cdot A \cdot Y_k = (X_j)^T \cdot A_k = a_{jk}$$

для всех $j, k \in \overline{1, n}$. Следовательно, $A = O \in \mathbb{K}^{n \times n}$.

Лемма доказана.

§ 2. Линейное пространство билинейных форм

Определение 3. *Суммой билинейных форм $B_1(x, y)$ и $B_2(x, y)$ называется форма*:

$$(B_1 + B_2)(x, y) \overset{def:}{=} B_1(x, y) + B_2(x, y),$$

а произведением билинейной формы $B(x, y)$ на число $\alpha \in \mathbb{K}$ называется следующая форма:

$$(\alpha B)(x, y) \overset{def:}{=} \alpha B(x, y).$$

Определение 4. *Две билинейные формы $B_1(x, y)$ и $B_2(x, y)$ равны, если $B_1(x, y) = B_2(x, y)$ для всех $x, y \in \mathcal{L}$.*

Лемма 2. *Сумма билинейных форм и умножение билинейной формы на число — билинейные формы.*

Доказательство. Пусть $x, x_1, x_2, y, y_1, y_2 \in \mathcal{L}$ и $\alpha, \alpha^1, \alpha^2, \beta^1, \beta^2 \in \mathbb{K}$ — произвольны.

Шаг 1. Справедливы следующие цепочки равенств:

$$\begin{aligned}
&(B_1 + B_2)(\alpha^1 \cdot x_1 + \alpha^2 \cdot x_2, y) = \\
&\qquad = B_1(\alpha^1 \cdot x_1 + \alpha^2 \cdot x_2, y) + B_2(\alpha^1 \cdot x_1 + \alpha^2 \cdot x_2, y) = \\
&\qquad = \alpha^1 B_1(x_1, y) + \alpha^2 B_1(x_2, y) + \alpha^1 B_2(x_1, y) + \alpha^2 B_2(x_2, y) = \\
&\qquad = \alpha^1 (B_1(x_1, y) + B_2(x_1, y)) + \alpha^2 (B_1(x_2, y) + B_2(x_2, y)) = \\
&\qquad\qquad = \alpha^1 (B_1 + B_2)(x_1, y) + \alpha^2 (B_1 + B_2)(x_2, y).
\end{aligned}$$

Аналогичным образом получаем равенство:

$$(B_1 + B_2)(x, \beta^1 \cdot y_1 + \beta^2 \cdot y_2) = \beta^1 (B_1 + B_2)(x, y_1) + \beta^2 (B_1 + B_2)(x, y_2).$$

Итак, сумма билинейных форм — билинейная форма.

Шаг 2. Справедливы следующие цепочки равенств:

$$\begin{aligned}
&(\alpha B)(\alpha^1 \cdot x_1 + \alpha^2 \cdot x_2, y) = \alpha B(\alpha^1 \cdot x_1 + \alpha^2 \cdot x_2, y) = \\
&\qquad = \alpha \alpha^1 B(x_1, y) + \alpha \alpha^2 B(x_2, y) = \alpha^1 (\alpha B)(x_1, y) + \alpha^2 (\alpha B)(x_2, y).
\end{aligned}$$

Аналогичным образом получаем равенство:

$$(\alpha B)(x, \beta^1 \cdot y_1 + \beta^2 \cdot y_2) = \beta^1 (\alpha B)(x, y_1) + \beta^2 (\alpha B)(x, y_2).$$

Следовательно, произведение билинейной формы на число — билинейная форма.

Лемма доказана.

Теорема 1. *Множество* $\mathrm{T}_2(\mathcal{L})$ *всех билинейных форм на линейном пространстве* $\mathcal{L}$ *образует линейное пространство относительно операций сложения билинейных форм и умножения билинейной формы на число.*

Доказательство. Доказательство всех 8 аксиом линейного пространства проводится на основе того, что числовое поле $\mathbb{K}$ является линейным пространством относительно операций сложения чисел и умножения чисел.

Теорема доказана.

Замечание 3. *Инварианты билинейных форм.* Пусть B_e — матрица билинейной формы в некотором базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$, а $B_{e'}$ — матрица билинейной формы в базисе $\{\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}\}$, причем:

$$(\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}) = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot C.$$

Тогда справедливы равенства:

$$B_{e'} = C^T \cdot B_e \cdot C \Leftrightarrow B_e = (C^{-1})^T \cdot B_{e'} \cdot C^{-1}. \tag{2.1}$$

Лемма 3. *Ранг матрицы* B_e *и знак определителя матрицы* B_e *являются инвариантами, т.е. не зависят от выбора базиса.*

Доказательство. Поскольку $\det C \neq 0$, то из равенств (2.1) получаем:

$$\operatorname{rang} B_{e'} \leqslant \operatorname{rang}(B_e \cdot C) \leqslant \operatorname{rang} B_e,$$

$$\operatorname{rang} B_e \leqslant \operatorname{rang}(B_{e'} \cdot C^{-1}) \leqslant \operatorname{rang} B_{e'} \Rightarrow \operatorname{rang} B_{e'} = \operatorname{rang} B_e.$$

Кроме того, имеем:

$$\det B_{e'} = \det C^T \det B_e \det C = (\det C)^2 \det B_e.$$

Лемма доказана.

Определение 5. *Билинейная форма* $B(x, y)$ *называется симметричной, если* $B(x, y) = B(y, x)$, *и называется кососимметричной, если* $B(x, y) = -B(y, x)$, *для всех* $x, y \in \mathcal{L}$.

Теорема 2. *Любую билинейную форму можно единственным образом представить в виде суммы симметричной билинейной формы и кососимметричной билинейной формы.*

Доказательство. Справедливо равенство:

$$B(x, y) = \frac{1}{2}(B(x, y) + B(y, x)) + \frac{1}{2}(B(x, y) - B(y, x)) :=$$
$$:= B_S(x, y) + B_A(x, y).$$

Докажем теперь единственность разложения. Действительно, пусть имеют место два разложения:

$$B_{S1}(x,y)+B_{A1}(x,y)=B(x,y)=B_{S2}(x,y)+B_{A2}(x,y)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow B_{S1}(x,y)-B_{S2}(x,y)=B_{A2}(x,y)-B_{A1}(x,y). \quad (2.2)$$

В левой части равенства (2.2) расположена симметричная билинейная форма,а в левой части кососимметричная билинейная форма. Докажем, что равенство:

$$B_S(x,y)=B_A(x,y) \quad \text{для всех} \quad x,y\in\mathcal{L} \quad (2.3)$$

возможно тогда и только тогда, когда $B_S(x,y)=B_A(x,y)=0$. Действительно, с одной стороны, поскольку равенство (2.3) выполнено для всех $x,y\in\mathcal{L}$, то имеем:

$$B_S(x,y)=B_A(x,y) \quad \text{и} \quad B_S(y,x)=B_A(y,x) \quad (2.4)$$

С другой стороны, переставляя местами аргументы в равенстве (2.3), получим равенство:

$$B_S(y,x)=-B_A(y,x) \quad \text{для всех} \quad x,y\in\mathcal{L}. \quad (2.5)$$

Следовательно, из (2.4) и (2.5) вытекает, что

$$B_S(x,y)=B_A(x,y)=0 \quad \text{для всех} \quad x,y\in\mathcal{L}.$$

Отсюда и из (2.2) получаем равенства:

$$B_{S1}(x,y)=B_{S2}(x,y) \quad \text{и} \quad B_{A2}(x,y)=B_{A1}(x,y) \quad \forall\, x,y\in\mathcal{L}.$$

Теорема доказана.

§ 3. Квадратичные формы

Определение 6. *Форма $Q:\mathcal{L}\to\mathbb{K}$ называется квадратичной, если существует такая билинейная форма $B(x,y)$ на $\mathcal{L}$, что $Q(x)=B(x,x)$. Такая билинейная форма B называется полярной к квадратичной форме $Q(x)$.*

Замечание 4. *Матрица квадратичной формы.* Пусть $\{\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n\}$ — базис в линейном пространстве $\mathcal{L}$. Пусть B_e — матрица билинейной формы $B(x,y)$ в этом базисе. Тогда, как мы доказали ранее, билинейная формы примет следующий вид:

$$B(x,y)=X_e^T\cdot B_e\cdot Y_e\Rightarrow Q(x)=X_e^T\cdot B_e\cdot X_e=b_{ik}x^ix^k, \quad (3.1)$$

где $x=(\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n)\cdot X_e$ и $y=(\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n)\cdot Y_e$. Заметим, что в силу теоремы 2 билинейная форма $B(x,y)$ единственным образом представима в виде:

$$B(x,y)=B_S(x,y)+B_A(x,y) \quad \text{для всех} \quad x,y\in\mathcal{L}.$$

В частности, справедливо аналогичное утверждение для квадратных матриц:

$$B_e=B_{eS}+B_{eA}.$$

Поэтому справедливы равенства:

$$Q(x) = X_e^T \cdot B_e \cdot X_e = X_e^T \cdot (B_{eS} + B_{eA}) \cdot X_e = \\ = X_e^T \cdot B_{eS} \cdot X_e + X_e^T \cdot B_{eA} \cdot X_e, \quad (3.2)$$

$$X_e^T \cdot B_{eA} \cdot X_e = (X_e^T \cdot B_{eA} \cdot X_e)^T = X_e^T \cdot B_{eA}^T \cdot X_e = -X_e^T \cdot B_{eA} \cdot X_e \Rightarrow \\ \Rightarrow 2X_e^T \cdot B_{eA} \cdot X_e = 0 \Rightarrow X_e^T \cdot B_{eA} \cdot X_e = 0, \quad (3.3)$$

поскольку $X_e^T \cdot B_{eA} \cdot X_e$ — число. Таким образом,

$$Q(x) = X_e^T \cdot B_e \cdot X_e = X_e^T \cdot B_{eS} \cdot X_e. \quad (3.4)$$

Замечание 5. *Канонический вид квадратичной формы.* Пусть $Q(x)$ — квадратичная форма на линейном пространстве $\mathcal{L}$, которая в некотором базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\} \subset \mathcal{L}$ имеет вид:

$$Q(x) = X_e^T \cdot Q_e \cdot X_e = q_{jk} x^j x^k.$$

Определение 7. *Базис $\{\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}\}$ называется каноническим для квадратичной формы $Q(x)$, если в этом базисе матрица $Q_{e'}$ этой квадратичной формы имеет диагональный вид, на главной диагонали которой расположены числа* 1, 0, -1.

Замечание 6. Матрица $Q_{e'}$ в каноническом базисе имеет вид:

$$q_{jk} = \lambda_k \delta_{jk}, \quad \lambda_k \in \{1, 0, -1\}.$$

Тогда справедливы равенства:

$$Q(x) = q_{jk} x^j x^k = \lambda_k \delta_{jk} x^j x^k = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k (x^k)^2.$$

Лемма 4. *Если квадратичная форма $Q(x)$ порождена симметричной билинейной формой $B(x, y)$, то билинейная форма имеет следующий вид:*

$$B(x, y) = \frac{1}{2} \left[Q(x + y) - Q(x) - Q(y) \right]. \quad (3.5)$$

Доказательство. Действительно, справедлива следующая цепочка равенств:

$$Q(x + y) = B(x + y, x + y) = B(x, x) + B(x, y) + B(y, x) + B(y, y) = \\ = Q(x) + 2B(x, y) + Q(y) \Rightarrow B(x, y) = \frac{1}{2} \left[Q(x + y) - Q(x) - Q(y) \right].$$

Лемма доказана.

§ 4. Приведение квадратичной формы к каноническому виду методом Лагранжа

Определение 8. *Рангом квадратичной формы* $Q = X_e^T \cdot Q_e \times \times X_e$, *записанной в произвольном базисе* $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$, *называется ранг ее матрицы* Q_e *в этом базисе.*

Замечание 7. Поскольку матрицы $Q_{e'}$ и Q_e в двух различных базисах связаны равенством $Q_{e'} = C^T \cdot Q_e \cdot C$, $\det C \neq 0$, то $\operatorname{rang} Q_{e'} = = \operatorname{rang} Q_e$. Поэтому матрица $Q_{e'}$ квадратичной формы в некотором каноническом базисе в случае когда $\operatorname{rang} Q_e = n = \dim \mathcal{L}$ имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} q_{1'1'} & & & \text{O} \\ & q_{2'2'} & & \\ & & \ddots & \\ \text{O} & & & q_{n'n'} \end{pmatrix}, \quad q_{j'j'} \in \{1, -1\}, \quad j' = \overline{1, n},$$

а в случае, когда $\operatorname{rang} Q_e = r' \in [1, n)$ матрица $Q_{e'}$ квадратичной формы в некотором каноническом базисе имеет следующие вид:

$$\begin{pmatrix} q_{1'1'} & & & & & \text{O} \\ & \ddots & & & & \\ & & q_{r'r'} & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ \text{O} & & & & & 0 \end{pmatrix}, \quad q_{j'j'} \in \{1, -1\}, \quad j' = \overline{1, r'}.$$

Теорема 3. *Любую квадратичную форму линейным невырожденным преобразованием можно привести к каноническому виду.*

Доказательство. Прежде всего заметим, что произвольную квадратичную форму можно записать в следующем виде:

$$Q(x) = q_{11}(x^1)^2 + 2q_{12}x^1x^2 + \cdots + 2q_{1n}x^1x^n + G(x^2, \ldots, x^n). \tag{4.1}$$

Доказательство теоремы проведем по индукции. Квадратичная форма от одного аргумента всегда имеет канонический вид $q_{11}(x^1)^2$. Предположим, что любую квадратичную форму от $n-1$ аргумента всегда можно привести к каноническому виду. Рассмотрим произвольную квадратичную форму от n аргументов:

$$Q(x) = q_{ij}x^ix^j, \quad i, j = \overline{1, n}. \tag{4.2}$$

Случай 1. Предположим, что в квадратичной форме $Q(x)$ хотя бы один из коэффициентов q_{jj} при квадрате $(x^j)^2$ отличен от нуля. Без ограничения общности, можно считать, что $q_{11} \neq 0$. Составим следующее преобразование переменных:

$$y^1 = q_{11}x^1 + \cdots + q_{1n}x^n, \tag{4.3}$$

$$y^2 = x^2, \ldots, y^n = x^n. \tag{4.4}$$

Преобразование (4.3), (4.4) можно записать в следующей форме:

$$Y = \widetilde{C}_1 \cdot X, \tag{4.5}$$

$$\widetilde{C}_1 = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \; X = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}, \; Y = \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix}. \tag{4.6}$$

Заметим, что $\det \widetilde{C} = q_{11} \neq 0$, т.е. преобразование (4.5) не вырожденное. Возведем выражение (4.3) для y^1 в квадрат и разделим на $q_{11} \neq 0$. Справедлива следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} \frac{1}{q_{11}}(y^1)^2 = \frac{1}{q_{11}}(q_{11}x^1 + \cdots + q_{1n}x^n)^2 = \\ = q_{11}(x^1)^2 + 2q_{12}x^1x^2 + \cdots + 2q_{1n}x^1x^n + \Phi(x^2, \ldots, x^n), \end{aligned} \tag{4.7}$$

где $\Phi(x^2, \ldots, x^n)$ — некоторая квадратичная форма относительно $n-1$ аргумента $x^2, \ldots, x^n$. Определим новую квадратичную форму относительно аргументов $x^2, \ldots, x^n$:

$$\Psi(x^2, \ldots, x^n) \overset{def:}{=} G(x^2, \ldots, x^n) - \Phi(x^2, \ldots, x^n). \tag{4.8}$$

Из равенств (4.1) и (4.7) с учетом (4.8), (4.4) приходим к выражению:

$$Q(x) = \frac{1}{q_{11}}(y^1)^2 + \Psi(x^2, \ldots, x^n) = \frac{1}{q_{11}}(y^1)^2 + \Psi(y^2, \ldots, y^n). \tag{4.9}$$

По предположению индукции существует такое невырожденное преобразование:

$$\begin{pmatrix} z^2 \\ \vdots \\ z^n \end{pmatrix} = \widetilde{C}_2 \cdot \begin{pmatrix} y^2 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix}, \quad \det \widetilde{C}_2 \neq 0, \quad \widetilde{C}_2 \in \mathbb{K}^{(n-1)\times(n-1)}, \tag{4.10}$$

которое приводит квадратичную форму $\Psi(y^2, \ldots, y^n)$ к виду:

$$\Psi(y^2, \ldots, y^n) = \lambda_2(z^2)^2 + \cdots + \lambda_n(z^n)^2. \tag{4.11}$$

Дополним преобразование (4.10) так чтобы в нем участвовали все n переменных. Именно, положим:

$$\begin{pmatrix} z^1 \\ z^2 \\ \vdots \\ z^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & \widetilde{C}_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix}. \tag{4.12}$$

В частности, при этом преобразовании $z^1 = y^1$. Рассмотрим последовательно преобразования (4.5) и (4.12) и получим преобразование:

$$\begin{pmatrix} z^1 \\ z^2 \\ \vdots \\ z^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & \widetilde{C}_2 \end{pmatrix} \cdot \widetilde{C}_1 \cdot \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = C_2 \cdot \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}, \tag{4.13}$$

причем $\det C_2 = \det \widetilde{C}_2 \det \widetilde{C}_1 \neq 0$ и в результате преобразования (4.13) квадратичная форма $Q(x)$ примет следующий вид:

$$Q(x) = \frac{1}{q_{11}}(z^1)^2 + \lambda_2 (z^2)^2 + \cdots + \lambda_n (z^n)^2. \tag{4.14}$$

Случай 2. Рассмотрим теперь случай, когда у квадратичной формы $Q(x)$ все диагональные коэффициенты $q_{jj} = 0$, $j = \overline{1, n}$, но какой–то вне диагональный элемент отличен от нуля. Например, $q_{12} \neq 0$. Тогда квадратичная форма $Q(x)$ имеет следующий вид:

$$Q(x) = 2q_{12}x^1x^2 + \cdots . \tag{4.15}$$

Сделаем преобразование:

$$x^1 = \widetilde{x}^1 + \widetilde{x}^2, \tag{4.16}$$

$$x^2 = \widetilde{x}^1 - \widetilde{x}^2, \tag{4.17}$$

$$x^3 = \widetilde{x}^3, \ldots, x^n = \widetilde{x}^n, \tag{4.18}$$

которое можно записать в матричной форме следующим образом:

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{x}^1 \\ \widetilde{x}^2 \\ \widetilde{x}^3 \\ \vdots \\ \widetilde{x}^n \end{pmatrix} = \widetilde{C}_3 \cdot \begin{pmatrix} \widetilde{x}^1 \\ \widetilde{x}^2 \\ \widetilde{x}^3 \\ \vdots \\ \widetilde{x}^n \end{pmatrix}, \tag{4.19}$$

причем $\det \widetilde{C}_3 = -2$, т.е. преобразование $\widetilde{C}_3$ не вырожденное. Подставим равенства (4.16)–(4.18) в выражение (4.15) и получим равенство

$$Q(x) = 2q_{12}(\widetilde{x}^1)^2 - 2q_{12}(\widetilde{x}^2)^2 + \cdots . \tag{4.20}$$

Слагаемое $2q_{12}(\widetilde{x}^1)^2$ не может исчезнуть при приведении подобных слагаемых, так как все слагаемые квадратичной формы, которые не выписаны в выражении (4.15), не содержат произведение x^1x^2 и поэтому не могут в результате преобразования (4.16)–(4.18) дать величину $(\widetilde{x}^1)^2$. Далее нужно воспользоваться рассуждениями, как и в случае 1.

В заключение, в выражении (4.14) нужно сделать завершающее невырожденное преобразование:

$$w^1 = \frac{z^1}{|q_{11}|^{1/2}},$$

$$w^j = \begin{cases} |\lambda_j|^{1/2} z_j, & \text{если} \quad \lambda_j \neq 0; \\ z_j, & \text{если} \quad \text{если} \quad \lambda_j = 0, \end{cases} \quad j = \overline{2, n}$$

и в результате получить следующее каноническое уравнение квадратичной формы:

$$Q(x) = \widetilde{\lambda}_1 (w^1)^2 + \widetilde{\lambda}_2 (w^2)^2 + \dots + \widetilde{\lambda}_n (w^n)^2, \tag{4.21}$$

где $\widetilde{\lambda}_1 = \operatorname{sign}(q_{11})$,

$$\widetilde{\lambda}_j = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad \lambda_j = 0; \\ \operatorname{sign}(\lambda_j), & \text{если} \quad \lambda_j \neq 0, \end{cases} \quad j = \overline{2, n}.$$

Таким образом, невырожденным линейным преобразованием мы привели квадратичную форму к каноническому виду (4.21).

Теорема доказана.

Замечание 8. *Нормальный вид квадратичной формы.* Пусть $r = \operatorname{rang} Q$ — ранг квадратичной формы. Тогда нормальным видом квадратичной формы $Q(x)$ называется следующая квадратичная форма:

$$Q(x) = (y^1)^2 + \dots + (y^k)^2 - (y^{k+1})^2 - \dots - (y^r)^2.$$

Используя метод Лагранжа, а также переобозначение переменных, любую квадратичную форму невырожденным линейным преобразованием можно привести к нормальному виду.

§ 5. Закон инерции квадратичных форм

Пусть на вещественном линейном пространстве $\mathcal{L}$ задана квадратичная форма ранга r :

$$Q(x) = q_{jk} x^j x^k, \quad x = \mathbf{E} \cdot X, \quad X^T = (x^1, \dots, x^n), \quad \mathbf{E} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n),$$

где $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ — базис в $\mathcal{L}$. Пусть $\{\widetilde{\mathbf{e}_1}, \dots, \widetilde{\mathbf{e}_n}\}$ — некоторый новый базис, в котором квадратичная форма имеет нормальный вид:

$$Q(x) = (y^1)^2 + \dots + (y^k)^2 - (y^{k+1})^2 - \dots - (y^r)^2, \tag{5.1}$$
$$x = \widetilde{\mathbf{E}} \cdot Y, \quad Y^T = (y^1, \dots, y^n), \quad \widetilde{\mathbf{E}} = (\widetilde{\mathbf{e}_1}, \dots, \widetilde{\mathbf{e}_n}).$$

Определение 9. *Число положительных и число отрицательных членов в формуле* (5.1) *называется соответственно положительным и отрицательным индексом формы.*

Теорема 4. *Положительный и отрицательный индексы являются инвариантами квадратичной формы, т.е. не зависят от выбора базиса, в котором она имеет нормальный вид.*

Доказательство. Предположим, что помимо вида (5.1) существует такой базис $\{\widehat{\mathbf{e}}_1, \dots, \widehat{\mathbf{e}}_n\}$, в котором квадратичная форма имеет следующий вид:

$$Q(x) = (z^1)^2 + \dots + (z^m)^2 - (z^{m+1})^2 - \dots - (z^r)^2, \tag{5.2}$$
$$x = \widehat{\mathbf{E}} \cdot Z, \quad Z^T = (z^1, \dots, z^n), \quad \widehat{\mathbf{E}} = (\widehat{\mathbf{e}}_1, \dots, \widehat{\mathbf{e}}_n),$$

где $\{\widehat{\mathbf{e}}_1, \dots, \widehat{\mathbf{e}}_n\}$ — базис в $\mathcal{L}$. Нужно доказать, что $k = m$. Предположим, что $k \neq m$, например, $k > m$. Пусть координаты $Z^T = (z^1, \dots, z^n)$ вектора x в базисе $\{\widehat{\mathbf{e}}_1, \dots, \widehat{\mathbf{e}}_n\}$ связаны с координатами $Y^T = (y^1, \dots, y^n)$ вектора x в базисе $\{\widetilde{\mathbf{e}_1}, \dots, \widetilde{\mathbf{e}_n}\}$ следующим образом:

$$Z = D \cdot Y, \quad Z = \begin{pmatrix} z^1 \\ \vdots \\ z^n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix}, \tag{5.3}$$

или

$$z^i = D^i_j y^j, \quad i, j = \overline{1, n}. \tag{5.4}$$

Отметим, что $\det D \neq 0$, поскольку справедливы следующие равенства:

$$\widehat{\mathbf{E}} = (\widehat{\mathbf{e}}_1, \dots, \widehat{\mathbf{e}}_n), \quad \widetilde{\mathbf{E}} = (\widetilde{\mathbf{e}_1}, \dots, \widetilde{\mathbf{e}_n}), \quad \widetilde{\mathbf{E}} = \widehat{\mathbf{E}} \cdot D \Rightarrow \det D \neq 0.$$

Подставив выражения (5.4) в (5.2) мы должны получить выражение (5.1). Стало быть, имеет место следующее тождество:

$$(z^1)^2 + \dots + (z^m)^2 - (z^{m+1})^2 - \dots - (z^r)^2 \equiv$$
$$\equiv (y^1)^2 + \dots + (y^k)^2 - (y^{k+1})^2 - \dots - (y^r)^2, \tag{5.5}$$

которое справедливо для любых $Y^T = (y^1, \dots, y^n)$ и всех $Z^T = (z^1, \dots, z^n)$, которые связаны с $Y^T = (y^1, \dots, y^n)$ равенством (5.4).

Составим вспомогательную однородную систему уравнений:

$$\begin{cases} D^1_1 y^1 + \dots + D^1_k y^k = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots , \\ D^m_1 y^1 + \dots + D^m_k y^k = 0. \end{cases} \tag{5.6}$$

Поскольку число переменных k больше числа уравнений в системе (5.6), то у этой системы уравнений существует нетривиальное решение:

$$y^1 = y^1_0, \dots, y^k = y^k_0.$$

Пусть

$$y^{k+1}_0 = \dots = y^r_0 = y^{r+1}_0 = \dots = y^n_0 = 0.$$

Таким образом, получим столбец:

$$Y_0 = \begin{pmatrix} y_0^1 \\ \vdots \\ y_0^k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{5.7}$$

Но тогда из (5.6) получаем равенства:

$$\begin{aligned} z_0^1 &= D_1^1 y_0^1 + \cdots + D_k^1 y_0^k + D_{k+1}^1 0 + \cdots + D_n^1 0 = 0, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots . \\ z_0^m &= D_1^m y_0^1 + \cdots + D_k^m y_0^k + D_{k+1}^m 0 + \cdots + D_n^m 0 = 0. \end{aligned} \tag{5.8}$$

Таким образом, из (5.3) имеем:

$$Z_0 = D \cdot Y_0, \quad Z_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ z_0^{m+1} \\ \vdots \\ z_0^n \end{pmatrix}, \quad Y_0 = \begin{pmatrix} y_0^1 \\ \vdots \\ y_0^k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{5.9}$$

Подставляя столбцы Y_0 и Z_0 в равенство (5.5) получим равенство:

$$-(z_0^{m+1})^2 - \cdots - (z_0^r)^2 = (y_0^1)^2 + \cdots + (y_0^k)^2 > 0, \tag{5.10}$$

поскольку по построению числа $y_0^1, \ldots, y_0^k$ одновременно в нуль не обращаются. При этом левая часть равенства неположительна. Пришли к противоречию. Значит, $k \leqslant m$. В точности точно также рассматривается случай $m > k$ с заменой $Y \leftrightarrow Z$. В результате снова придем к противоречию. Следовательно, $k = m$.

Теорема доказана.

§ 6. Знакоопределенные квадратичные формы. Критерий Сильвестра

Определение 10. *Квадратичная форма $Q(x)$ называется положительно определенной, если $Q(x) > 0$ для всех $x \neq \vartheta$ из линейного пространства $\mathcal{L}$.*

Определение 11. *Квадратичная форма $Q(x)$ называется отрицательно определенной, если $Q(x) < 0$ для всех $x \neq \vartheta$ из линейного пространства $\mathcal{L}$.*

Пример Квадратичная форма $Q(x) = (x^1)^2 + (x^2)^2$ на двумерном линейном пространстве $\mathcal{L}$ положительно определена, а квадратичная форма $Q(x) = -(x^1)^2 - (x^2)^2$ является отрицательно определенной. А форма $Q(x) = (x^1)^2$ на двумерном линейном пространстве не является положительно определенной, поскольку $Q(x) = 0$ для всех $x = 0 \cdot \mathbf{e}_1 + x^2 \cdot \mathbf{e}_2$, где $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ — базис в $\mathcal{L}$.

Теорема 5. *Квадратичная форма является положительно определенной тогда и только тогда, когда ее ранг r и положительный индекс инерции p равны размерности пространства n: $r = p = n$.*

Доказательство. *Достаточность.* Если $p = r = n$, то в каноническом базисе квадратичная форма имеет следующий вид:

$$Q(x) = (x^1)^2 + \dots + (x^n)^2 \geqslant 0 \quad \text{для всех} \quad x \in \mathcal{L}.$$

Кроме того, эта квадратичная форма обращается в нуль тогда и только тогда, когда:

$$x^1 = \dots = x^n = 0 \Leftrightarrow x = x^i \cdot \mathbf{e}_i = \vartheta.$$

Необходимость. Пусть или $p < n$ или $r < n$. Тогда в каноническом базисе $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ квадратичная форма принимает следующий вид:

$$Q(x) = Q'(x^1, \dots, x^{n-1}) + \lambda_n (x^n)^2, \quad \lambda_n \leqslant 0.$$

При этом:

$$Q(\mathbf{e}_n) = Q'(0, ..., 0) + \lambda_n = \lambda_n \leqslant 0.$$

Следовательно, $Q(x)$ не является положительно определенной квадратичной формой. Поэтому если $Q(x)$ — положительно определенная квадратичная форма, то $p = r = n$.

Теорема доказана.

Определение 12. *Главным минором порядка $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ матрицы A размера $n \times n$ называется определитель матрицы, полученной из матрицы A вычеркиванием последних $n - k$ строк и $n - k$ столбцов.*

Справедлива следующая *теорема Якоби*:

Теорема 6. *Пусть $Q(x)$ — квадратичная форма на линейном пространстве $\mathcal{L}$ с матрицей Q_e в некотором базисе $\mathbf{E} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$:*

$$Q_e = \begin{pmatrix} q_{11} & \cdots & q_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{n1} & \cdots & q_{nn} \end{pmatrix},$$

все главные миноры которой отличны от нуля. Тогда существует такой базис $\mathbf{E}' = (\mathbf{e}_{1'}, \dots, \mathbf{e}_{n'})$ линейного пространства $\mathcal{L}$, в котором:

$$Q(x) = \frac{\Delta_0}{\Delta_1} \left(x^{1'}\right)^2 + \dots + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} \left(x^{n'}\right)^2, \tag{6.1}$$

$$x = x^{1'} \cdot \mathbf{e}_{1'} + \dots + x^{n'} \cdot \mathbf{e}_{n'},$$

$$\Delta_0 = 1, \quad \Delta_1 = q_{11}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_n = \begin{vmatrix} q_{11} & \cdots & q_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{n1} & \cdots & q_{nn} \end{vmatrix}.$$

Доказательство. *Шаг 1.* Справедлива следующая цепочка строгих вложений:

$$L(\mathbf{e}_1) \subset L(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \subset \cdots \subset L(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n) = \mathcal{L}.$$

На линейном подпространстве $L(\mathbf{e}_1)$ квадратичная форма Q имеет следующий вид:

$$Q(x) = q_{11} \left(x^1\right)^2, \quad x = x^1 \cdot \mathbf{e}_1 + 0 \cdot \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_n, \tag{6.2}$$
$$q_{11} = B(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) \neq 0.$$

Рассмотрим в линейном подпространстве $L(\mathbf{e}_1)$ вектор:

$$\mathbf{e}_{1'} = \frac{1}{q_{11}} \mathbf{e}_1. \tag{6.3}$$

Этот вектор образует базис в $L(\mathbf{e}_1)$ и при этом

$$B(\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{1'}) = \frac{1}{q_{11}^2} B(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) = \frac{1}{q_{11}} = \frac{\Delta_0}{\Delta_1}. \tag{6.4}$$

Следовательно, в базисе $\{\mathbf{e}_{1'}\}$ линейного подпространства $L(\mathbf{e}_1)$ квадратичная форма $Q(x)$ при $x \in L(\mathbf{e}_1)$ примет следующий вид:

$$Q(x) = \frac{\Delta_0}{\Delta_1} \left(x^{1'}\right)^2, \quad x = x^{1'} \cdot \mathbf{e}_{1'} + 0 \cdot \mathbf{e}_2 + \cdots + 0 \cdot \mathbf{e}_n. \tag{6.5}$$

Шаг 2. Предположим, что при $m \in \overline{1, n-1}$ в линейном подпространстве $L(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m) \subset \mathcal{L}$ искомый базис $\{\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{m'}\}$ [1]) построен. Тогда в базисе $\{\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{m'}\}$ линейного подпространства $L(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m) \subset \mathcal{L}$ для $x \in L(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m)$ имеем:

$$Q(x) = \frac{\Delta_0}{\Delta_1} \left(x^{1'}\right)^2 + \cdots + \frac{\Delta_{m-1}}{\Delta_m} \left(x^{m'}\right)^2, \tag{6.6}$$
$$x = x^{1'} \cdot \mathbf{e}_{1'} + \cdots + x^{m'} \cdot \mathbf{e}_{m'} + 0 \cdot \mathbf{e}_{m+1} + \cdots + 0 \cdot \mathbf{e}_n.$$

Из вида квадратичной формы (6.6) имеем:

$$B(\mathbf{e}_{i'}, \mathbf{e}_{j'}) = \frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i} \delta_{i'j'}, \quad i', j' \in \overline{1, m'}, \quad i = i'. \tag{6.7}$$

Теперь рассмотрим следующую систему уравнений:

$$B(x, \mathbf{e}_{1'}) = 0, \ldots, B(x, \mathbf{e}_{m'}) = 0, \quad x \in L(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m, \mathbf{e}_{m+1}). \tag{6.8}$$

[1]) При этом $m' = m$.

Заметим, что

$$x = \sum_{i=1}^{m+1} x^i \cdot \mathbf{e}_i. \tag{6.9}$$

Тогда из (6.8) и (6.9) получим, следующую систему m уравнений относительно $m+1$ переменных $x^1, \ldots, x^{m+1}$:

$$\sum_{i=1}^{m+1} B(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_{1'})x^i = 0, \ldots, \sum_{i=1}^{m+1} B(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_{m'})x^i = 0. \tag{6.10}$$

Очевидно, что такая система линейных однородных уравнений имеет нетривиальное решение, которое обозначим через $x_0 \in \in L(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m, \mathbf{e}_{m+1})$. Пусть:

$$\mathbf{e}_{m'+1} := \lambda_0 \cdot x_0, \tag{6.11}$$

где $\lambda_0 \neq 0$ выберем таким образом, чтобы:

$$(\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{m'}, \mathbf{e}_{m'+1}) = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m, \mathbf{e}_{m+1}) \cdot C, \tag{6.12}$$

$$\det C = \frac{1}{\Delta_{m+1}}, \quad \Delta_{m+1} = \det Q_{m+1,e}, \tag{6.13}$$

где $Q_{m+1,e}$ — это матрица квадратичной формы $Q(x)$, рассматриваемой на линейном подпространстве $L(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m, \mathbf{e}_{m+1})$ в базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m, \mathbf{e}_{m+1}\}$. Отметим, что $\mathbf{e}_{m'+1}$ тоже решение системы уравнений (6.8). Семейство векторов $\{\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{m'}, \mathbf{e}_{m'+1}\}$ образует базис в $L(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m, \mathbf{e}_{m+1})$.

☐ Действительно, по построению семейство векторов $\{\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{m'}\}$ линейно независимо в $L(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m, \mathbf{e}_{m+1})$. Поэтому если семейство векторов $\{\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{m'}, \mathbf{e}_{m'+1}\}$ линейно зависимо в $L(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m, \mathbf{e}_{m+1})$, то имеет место равенство:

$$\mathbf{e}_{m'+1} = \sum_{i'=1}^{m'} \alpha^{i'} \cdot \mathbf{e}_{i'}. \tag{6.14}$$

Поскольку $\mathbf{e}_{m'+1}$ по построению — решение системы уравнений (6.8), то справедливо равенство:

$$\sum_{i'=1}^{m'} \alpha^{i'} B(\mathbf{e}_{i'}, \mathbf{e}_{j'}) = 0, \quad j' = \overline{1, m'}, \tag{6.15}$$

из которого в силу (6.7) получаем равенства:

$$\alpha^{j'} \frac{\Delta_{j'-1}}{\Delta_{j'}} = 0 \Rightarrow \alpha^{j'} = 0, \quad j' = \overline{1, m'}. \tag{6.16}$$

Отсюда приходим к выводу о линейной независимости семейства векторов $\{\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{m'}, \mathbf{e}_{m'+1}\}$ в $L(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m, \mathbf{e}_{m+1})$, а поскольку их число равно размерности этого линейного подпространства, то они образуют базис в этом линейном подпространстве. ⊠

Шаг 3. Заметим, что справедлива следующая цепочка равенств:

$$\frac{B(\mathbf{e}_{m'+1},\mathbf{e}_{m'+1})}{\Delta_m}=\frac{\Delta_0}{\Delta_1}\frac{\Delta_1}{\Delta_2}\cdots\frac{\Delta_{m-1}}{\Delta_m}B(\mathbf{e}_{m'+1},\mathbf{e}_{m'+1})=$$
$$=\prod_{k'=1}^{m'+1}B(\mathbf{e}_{k'},\mathbf{e}_{k'})=\det Q_{m+1,e'}=\det\left(C^T\cdot Q_{m+1,e}\cdot C\right)=$$
$$=(\det C)^2\det Q_{m+1,e}=\frac{1}{\Delta_{m+1}}, \quad (6.17)$$

где мы воспользовались равенством (6.13) и $Q_{m+1,e'}$ — это матрица квадратичной формы $Q(x)$ в базисе $\{\mathbf{e}_{1'},\ldots,\mathbf{e}_{m'},\mathbf{e}_{m'+1}\}$ линейного подпространства $L(\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_m,\mathbf{e}_{m+1})$. Поэтому из (6.17) получаем следующее равенство:

$$B(\mathbf{e}_{m'+1},\mathbf{e}_{m'+1})=\frac{\Delta_m}{\Delta_{m+1}}. \quad (6.18)$$

Следовательно, из (6.7), (6.8) и (6.18) приходим к выводу о том, что в базисе $\{\mathbf{e}_{1'},\ldots,\mathbf{e}_{m'},\mathbf{e}_{m'+1}\}$ линейного подпространства $L(\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_m,\mathbf{e}_{m+1})$ квадратичная форма $Q(x)$ примет следующий вид:

$$Q(x)=\frac{\Delta_0}{\Delta_1}\left(x^{1'}\right)^2+\cdots+\frac{\Delta_{m-1}}{\Delta_m}\left(x^{m'}\right)^2+\frac{\Delta_m}{\Delta_{m+1}}\left(x^{m'+1}\right)^2, \quad (6.19)$$

$$x=x^{1'}\cdot\mathbf{e}_{1'}+\cdots+x^{m'}\cdot\mathbf{e}_{m'}+x^{m'+1}\cdot\mathbf{e}_{m'+1}+0\cdot\mathbf{e}_{m+2}+\cdots+0\cdot\mathbf{e}_n. \quad (6.20)$$

В силу результатов шагов 1 и 3 приходим к утверждению теоремы.

Теорема доказана.

Определение 13. *Матрица $Q=(q_{ij})\in\mathbb{R}^{n\times n}$ называется положительно определенной, если квадратичная форма*:

$$Q(x)=\sum_{i,j=1,1}^{n}q_{ij}x^ix^j$$

является положительно определенной.

Справедлив следующий *критерий Сильвестра*:

Теорема 7. *Матрица Q является положительно определенной тогда и только тогда, когда все ее главные миноры положительны*:

$$q_{11}>0,\quad \begin{vmatrix} q_{11} & q_{12}\\ q_{21} & q_{22}\end{vmatrix}>0,\ldots,\begin{vmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n}\\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ q_{n1} & q_{n2} & \cdots & q_{nn}\end{vmatrix}>0.$$

Доказательство. *Необходимость.* Доказательство проведем по индукции.

Предположение индукции. Матрица $Q \in \mathbb{R}^{k \times k}$ положительно определенная, тогда все ее главные миноры положительны.

Шаг индукции. Пусть матрица $Q \in \mathbb{R}^{(k+1)\times(k+1)}$ положительно определенная. Докажем, что все ее главные миноры положительны. Рассмотрим положительно определенную квадратичную форму:

$$Q(x) = \sum_{i,j=1,1}^{k+1} q_{ij} x^i x^j = \sum_{i,j=1,1}^{k} q_{ij} x^i x^j + \\ + 2\sum_{i=1}^{k} q_{ik+1} x^i x^{k+1} + q_{k+1k+1}(x^{k+1})^2.$$

Заметим, что

$$0 \leqslant Q(x^1, \ldots, x^k, 0) = \sum_{i,j=1,1}^{k} q_{ij} x^i x^j$$

и $Q(x^1, \ldots, x^k, 0) = 0$ тогда и только тогда когда, $x^1 = \cdots = x^k = 0$. Следовательно, по предположению индукции все главные миноры матрицы Q до порядка k включительно положительны. Сделаем переход к каноническому базису, в котором квадратичная форма примет нормальный вид с матрицей $Q' = C^T Q C$. Поскольку матрица Q положительно определенная, то матрица Q' имеет следующий вид:

$$Q' = \begin{pmatrix} 1 & & \text{O} \\ & \ddots & \\ \text{O} & & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det Q' = 1.$$

Тогда имеем:

$$1 = \det Q' = (\det C)^2 \det Q \Rightarrow \det Q > 0.$$

Необходимость условий доказана.

Достаточность. Следует из теоремы 6.

Теорема доказана.

§ 7. Тензорное произведение линейных форм

Рассмотрим отображение $\xi \otimes \eta$ при $\xi, \eta \in \mathcal{L}^*$, которое действует на упорядоченные пары (x, y), $x, y \in \mathcal{L}$ следующим образом:

$$(\xi \otimes \eta)(x, y) \stackrel{def:}{=} \langle \xi, x \rangle \langle \eta, y \rangle, \tag{7.1}$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скобки двойственности между $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}^*$. Заметим, что выражение $\langle \xi, x \rangle \langle \eta, y \rangle$ является билинейной формой на $\mathcal{L}$ при фиксированных $\xi, \eta \in \mathcal{L}^*$. Действительно, справедливы следующие равенства:

$$\langle \xi, \alpha^1 \cdot x_1 + \alpha^2 \cdot x_2 \rangle \langle \eta, y \rangle = (\alpha^1 \langle \xi, x_1 \rangle + \alpha^2 \langle \xi, x_2 \rangle) \langle \eta, y \rangle =$$

$$= \alpha^1 \langle \xi, x_1 \rangle \langle \eta, y \rangle + \alpha^2 \langle \xi, x_2 \rangle \langle \eta, y \rangle,$$

и аналогичным образом получаем равенство:

$$\langle \xi, x \rangle \langle \eta, \beta^1 \cdot y_1 + \beta^2 \cdot y_2 \rangle = \beta^1 \langle \xi, x \rangle \langle \eta, y_1 \rangle + \beta^2 \langle \xi, x \rangle \langle \eta, y_2 \rangle.$$

Определение 14. *Выражение $\xi \otimes \eta$ называется тензорным произведением линейных форм ξ и η из $\mathcal{L}^*$.*

Определение 15. *Говорят, что $\xi^1 \otimes \eta^1 = \xi^2 \otimes \eta^2$, если для любых $x, y \in \mathcal{L}$ справедливо равенство*:

$$(\xi^1 \otimes \eta^1)(x, y) = (\xi^2 \otimes \eta^2)(x, y). \tag{7.2}$$

Лемма 5. *Для того чтобы тензорные произведения $\xi^1 \otimes \eta^1$ и $\xi^2 \otimes \eta^2$ не нулевых линейных форм $\xi^1, \xi^2, \eta^1, \eta^2 \in \mathcal{L}^*$ были равны, необходимо и достаточно, чтобы $\xi^1 = \alpha \xi^2$ и $\eta^2 = \alpha \eta^1$ при некотором $\alpha \in \mathbb{K} \backslash \{0\}$.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть отображения:

$$\xi^1 \otimes \eta^1 = \xi^2 \otimes \eta^2$$

и $\xi^1, \xi^2, \eta^1, \eta^2$ — ненулевые линейные формы. Согласно определению 15 имеем:

$$\langle \xi^1, x \rangle \langle \eta^1, y \rangle = \langle \xi^2, x \rangle \langle \eta^2, y \rangle \quad \text{для всех} \quad x, y \in \mathcal{L}. \tag{7.3}$$

Из равенства (7.3) вытекают следующие два равенства:

$$\langle \langle \eta^1, y \rangle \xi^1, x \rangle = \langle \langle \eta^2, y \rangle \xi^2, x \rangle, \tag{7.4}$$

$$\langle \langle \xi^1, x \rangle \eta^1, y \rangle = \langle \langle \xi^2, x \rangle \eta^2, y \rangle, \tag{7.5}$$

из которых в силу произвольности $x, y \in \mathcal{L}$ получаем, что справедливы следующие два равенства:

$$\langle \eta^1, y \rangle \xi^1 = \langle \eta^2, y \rangle \xi^2, \tag{7.6}$$

$$\langle \xi^1, x \rangle \eta^1 = \langle \xi^2, x \rangle \eta^2. \tag{7.7}$$

Выражая из (7.6) ξ^1 и подставляя в (7.7), мы получим равенство:

$$\langle \eta_2, y \rangle \eta_1 = \langle \eta_1, y \rangle \eta_2. \tag{7.8}$$

Значит, существует такое $\alpha \neq 0$, что справедливо равенство $\eta^2 = \alpha \eta^1$. Но тогда из (7.7) получаем равенство $\xi^1 = \alpha \xi^2$.

Достаточность. Равенство (7.2) проверяется непосредственно подстановкой соответствующих равенств.

Лемма доказана.

Определение 16. *Суммой двух тензорных произведений $\xi^1 \otimes \eta^1$ и $\xi^2 \otimes \eta^2$ соответствующих линейных форм определяется следующим образом:*

$$(\xi^1 \otimes \eta^1 + \xi^2 \otimes \eta^2)(x, y) := (\xi^1 \otimes \eta^1)(x, y) + (\xi^2 \otimes \eta^2)(x, y)$$

для любых $x, y \in \mathcal{L}$. *Произведением тензорного произведения* $\xi \otimes \eta$ *на число* $\alpha \in \mathbb{K}$ *определяется следующим образом:*

$$(\alpha\xi \otimes \eta)(x, y) := \alpha(\xi \otimes \eta)(x, y).$$

Лемма 6. *Тензорное произведение линейных форм из* $\mathcal{L}^*$ *обладает следующими свойствами линейности по каждому множителю:*

$$(\alpha_1 \cdot \xi^1 + \alpha_2 \cdot \xi^2) \otimes \eta = \alpha_1 \xi^1 \otimes \eta + \alpha_2 \xi^2 \otimes \eta, \tag{7.9}$$

$$\xi \otimes (\beta_1 \cdot \eta^1 + \beta_2 \cdot \eta^2) = \beta^1 \xi \otimes \eta^1 + \beta_2 \xi \otimes \eta^2. \tag{7.10}$$

Доказательство. Справедливы следующие цепочки равенств:

$$\begin{aligned}((\alpha_1 \cdot \xi^1 + \alpha_2 \cdot \xi^2) \otimes \eta)(x, y) &= \langle \alpha_1 \cdot \xi^1 + \alpha_2 \cdot \xi^2, x\rangle\langle \eta, y\rangle = \\ = \alpha_1 \langle \xi^1, x\rangle\langle \eta, y\rangle + \alpha_2 \langle \xi^2, x\rangle\langle \eta, y\rangle &= \alpha_1 \langle \xi^1, x\rangle\langle \eta, y\rangle + \alpha_2 \langle \xi^2, x\rangle\langle \eta, y\rangle = \\ = (\alpha^1 \xi^1 \otimes \eta)(x, y) + (\alpha^2 \xi^2 \otimes \eta)(x, y) &= (\alpha^1 \xi^1 \otimes \eta + \alpha^2 \xi^2 \otimes \eta)(x, y)\end{aligned}$$

для любых $x, y \in \mathcal{L}$. Отсюда вытекает равенство (7.9). Аналогичным образом доказывается равенство (7.10).

Лемма доказана.

Замечание 9. *Базис в линейном пространстве билинейных форм.* Рассмотрим линейное пространство $\mathrm{T}_2(\mathcal{L})$ билинейных форм на линейном пространстве $\mathcal{L}$. Пусть $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — базис в $\mathcal{L}$, а $\{\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^n\}$ — это взаимный базис в $\mathcal{L}^*$. Рассмотрим n^2 различных тензорных произведений из семейства линейных форм $\{\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^n\}$:

$$\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j, \quad i, j = \overline{1, n}. \tag{7.11}$$

По определению тензорного произведения линейных форм получаем, что $\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j$ является билинейной формой. Действительно,

$$(\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j)(x, y) = \langle \mathbf{e}^i, x\rangle\langle \mathbf{e}^j, y\rangle = x^i y^j,$$

где $x = x^i \cdot \mathbf{e}_i$, $y = y^j \cdot \mathbf{e}_j$. Несложно доказать равенства:

$$(\alpha^1 \cdot x_1 + \alpha^2 \cdot x_2)^i = \alpha^1 x_1^i + \alpha^2 x_2^i,$$

$$(\beta^1 \cdot y_1 + \beta^2 \cdot y_2)^j = \beta^1 y_1^j + \beta^2 y_2^j,$$

из которых и вытекает линейность выражения $(\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j)(x, y)$ по каждому аргументу при фиксированном другом.

Теорема 8. *Семейство из* n^2 *билинейных форм* $\{\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j\}$ *при* $i, j = \overline{1, n}$ *образуют базис в линейном пространстве* $\mathrm{T}_2(\mathcal{L})$ *всех билинейных форм на линейном пространстве* $\mathcal{L}$.

Доказательство. *Полнота.* Пусть $B \in \mathrm{T}_2(\mathcal{L})$. Тогда для любых $x, y \in \mathcal{L}$ справедлива следующая цепочка равенств:

$$B(x, y) = b_{ij} x^i y^j = b_{ij} \langle \mathbf{e}^i, x\rangle\langle \mathbf{e}^j, y\rangle = (b_{ij} \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j)(x, y). \tag{7.12}$$

Согласно определению равенства билинейных форм получаем, что

$$B = b_{ij}\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j.$$

Линейная независимость. Рассмотрим линейную комбинацию:

$$\alpha_{ij}\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j = O, \tag{7.13}$$

где $O \in \mathrm{T}_2(\mathcal{L})$ — нулевая билинейная форма. Применим обе части равенства (7.13) к упорядоченной паре $(\mathbf{e}_{i_1}, \mathbf{e}_{j_1})$ при $i_1, j_1 = \overline{1, n}$. В результате получим цепочку равенств

$$0 = (\alpha_{ij}\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j)(\mathbf{e}_{i_1}, \mathbf{e}_{j_1}) = \alpha_{ij}\langle \mathbf{e}^i, \mathbf{e}_{i_1}\rangle\langle \mathbf{e}^j, \mathbf{e}_{j_1}\rangle = \\ = \alpha_{ij}\delta^i_{i_1}\delta^j_{j_1} = \alpha_{i_1 j_1} \quad \text{для} \quad i_1, j_1 = \overline{1, n}. \tag{7.14}$$

Значит, равенство (7.13) возможно тогда и только тогда, когда все $\alpha_{ij} = 0$. Линейная независимость семейства $\{\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j\}$ доказана.

Следовательно, семейство $\{\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j\}$ — базис в $\mathrm{T}_2(\mathcal{L})$

Теорема доказана.

§ 8. Примеры решения задач

Задача 1. Пусть на линейном пространстве $\mathcal{L}$ задана невырожденная билинейная форма φ и $\mathcal{P} \subset \mathcal{L}$ — линейное подпространство, на котором билинейная форма тождественно обращается в нуль. Доказать, что

$$\dim \mathcal{P} \leqslant \frac{1}{2}\dim \mathcal{L}. \tag{8.1}$$

Решение. Пусть $\dim \mathcal{P} = r$ и $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_r\}$ базис в $\mathcal{P}$. Дополним его до базиса во всем $\mathcal{L}$:

$$\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_{r+1}, \ldots, \mathbf{e}_n\}. \tag{8.2}$$

Итак, имеем

$$\mathcal{P} = L(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_r), \quad \mathcal{L} = L(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_{r+1}, \ldots, \mathbf{e}_n). \tag{8.3}$$

Тогда билинейная форма в базисе (8.2) примет следующий вид:

$$\varphi(x, y) = X_e^T \cdot \Phi_e \cdot Y_e, \quad X_e = (x^1, \ldots, x^n)^T, \quad Y_e = (y^1, \ldots, y^n), \tag{8.4}$$

$$x = \mathbf{E} \cdot X_e, \quad y = \mathbf{E} \cdot Y_e, \quad \mathbf{E} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n).$$

Причем в силу условия вырожденности на $\mathcal{P}$ матрица билинейной формы Φ_e имеет следующий вид:

$$\Phi_e = \left\| \begin{array}{c|c} O & B \\ \hline A & C \end{array} \right\|, \tag{8.5}$$

$$O \in \mathbb{K}^{r\times r}, \quad A \in \mathbb{K}^{(n-r)\times r}, \quad B \in \mathbb{K}^{r\times(n-r)}, \quad C \in \mathbb{K}^{(n-r)\times(n-r)}, \tag{8.6}$$

причем O — нулевая матрица. Пусть теперь столбец X_e имеет следующий вид:

$$X_e^T = \left\| (X_e^r)^T | O^T \right\|^T, \tag{8.7}$$

$$(X_e^r)^T = (x^1, \ldots, x^r), \quad O^T = (0, \ldots, 0) \in \mathbb{K}^{1\times(n-r)}. \tag{8.8}$$

Тогда равенство (8.4) можно переписать в следующем виде:

$$X_e^T \cdot \Phi_e \cdot Y_e = \left\|(X^r)^T, O^T\right\| \left\| \begin{array}{c|c} O & B \\ \hline A & C \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} Y^r \\ Y^{n-r} \end{array} \right\| =$$

$$= \left\| O | (X^r)^T B \right\| \left\| \begin{array}{c} Y^r \\ Y^{n-r} \end{array} \right\| = (X^r)^T \cdot B \cdot Y^{n-r}, \tag{8.9}$$

$$Y^r = (y^1, \ldots, y^r)^T, \quad Y^{n-r} = (y^{r+1}, \ldots, y^n)^T.$$

Рассмотрим следующую однородную систему линейных уравнений:

$$(X^r)^T \cdot B = O \in \mathbb{K}^{(n-r)\times 1}. \tag{8.10}$$

Эта однородная система $n-r$ линейных уравнений относительно r неизвестных. Если $n-r<r$, то у этой системы уравнений существует нетривиальное решение:

$$X_0^r = (x_0^1, \ldots, x_0^r)^T \neq (0, \ldots, 0)^T. \tag{8.11}$$

Но тогда столбец:

$$X_{0e} = (x_0^1, \ldots, x_0^r, 0, \ldots, 0)^T \neq (0, \ldots, 0, 0, \ldots, 0)^T$$

и обладает по построению свойством, что

$$X_{0e}^T \cdot \Phi_e \cdot Y_e = 0 \quad \text{для всех} \quad Y_e \in \mathbb{K}^{n\times 1},$$

что противоречит условию невырожденности билинейной формы φ. Поэтому с необходимостью должно быть выполнено неравенство:

$$n - r \geqslant r \Leftrightarrow 2r \leqslant n,$$

т.е. выполнено неравенство (8.1).

Задача 2. *Приведение квадратичной формы невырожденным линейным преобразованием к каноническому виду.* Рассмотрим в некотором базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ линейного пространства $\mathcal{L}$ квадратичную форму:

$$Q(x) = (x^1)^2 + 2(x^2)^2 - 8(x^3)^2 + 4x^1x^2 - 2x^1x^3 - 16x^2x^3, \tag{8.12}$$

$$x = x^j \cdot \mathbf{e}_j.$$

Нужно найти какой–либо базис $\{\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'}, \mathbf{e}_{3'}\}$ линейного пространства $\mathcal{L}$, в котором квадратичная форма примет нормальный вид.

Решение. Сначала рассмотрим все слагаемые в (8.12), которые содержат переменную x^1. Действительно, справедливы равенства:

$$(x^1)^2 + 4x^1x^2 - 2x^1x^3 =$$

$$= (x^1 + 2x^2 - x^3)^2 - 4(x^2)^2 - (x^3)^2 + 4x^2x^3 =$$
$$= (y^1)^2 - 4(x^2)^2 - (x^3)^2 + 4x^2x^3, \quad y^1 = x^1 + 2x^2 - x^3. \tag{8.13}$$

С учетом (8.13) из (8.12) получим следующее равенство:

$$Q = (y^1)^2 - 2(x^2)^2 - 9(x^3)^2 - 12x^2x^3. \tag{8.14}$$

Рассмотрим все слагаемые в (8.14), содержащие переменную x^2. Действительно, справедливы следующие равенства:

$$-2(x^2)^2 - 12x^2x^3 = -2(x^2 + 3x^3)^2 + 18(x^3)^2 =$$
$$= -(y^2)^2 + 18(x^3)^2, \quad y^2 = \sqrt{2}\,(x^2 + 3x^3). \tag{8.15}$$

Из (8.14) с учетом (8.15) приходим к следующим равенствам:

$$Q = (y^1)^2 - (y^2)^2 + 9(x^3)^2 = (y^1)^2 - (y^2)^2 + (y^3)^2, \tag{8.16}$$

где

$$y^1 = x^1 + 2x^2 - x^3, \quad y^2 = \sqrt{2}\,(x^2 + 3x^3), \quad y^3 = 3x^3. \tag{8.17}$$

В матричной форме имеем:

$$\begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 3\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}. \tag{8.18}$$

Таким образом, новый базис $\{\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'}, \mathbf{e}_{3'}\}$, в котором квадратичная форма Q имеет нормальный вид связан со старым базисом соотношением:

$$(\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'}, \mathbf{e}_{3'}) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 3\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1}. \tag{8.19}$$

Задача 3. *Приведение кососимметрической билинейной формы к каноническому виду.* Привести кососимметрическую билинейную форму

$$B(x,y) = x^1y^2 - x^2y^1 + 2x^1y^3 - 2x^3y^1 + 2x^1y^4 - 2x^4y^1 +$$
$$+ x^2y^3 - x^3y^2 + x^3y^4 - x^4y^3, \tag{8.20}$$

заданную в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ линейного пространства $\mathcal{L}$:

$$x = x^j \cdot \mathbf{e}_j, \quad y = y^k \cdot \mathbf{e}_k.$$

Решение. Пусть $\mathcal{L}^*$ — сопряженное линейное пространство к линейному пространству $\mathcal{L}$, а $\{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3\}$ базис в $\mathcal{L}^*$, двойственный к базису $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. Поэтому имеем:

$$x^iy^j - x^jy^i = \langle \mathbf{e}^i, x\rangle\langle \mathbf{e}^j, y\rangle - \langle \mathbf{e}^j, x\rangle\langle \mathbf{e}^i, y\rangle =$$
$$= (\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j - \mathbf{e}^j \otimes \mathbf{e}^i)(x,y) = (\mathbf{e}^i \wedge \mathbf{e}^j)(x,y), \tag{8.21}$$

где мы ввели внешнее произведение ковекторов:

$$\mathbf{e}^i \wedge \mathbf{e}^j := \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j - \mathbf{e}^j \otimes \mathbf{e}^i. \tag{8.22}$$

С помощью операции внешнего произведения ковекторов билинейную форму (8.20) можно переписать в следующем виде:

$$B(x,y) = \Big[\mathbf{e}^1 \wedge \mathbf{e}^2 + 2\mathbf{e}^1 \wedge \mathbf{e}^3 + 2\mathbf{e}^1 \wedge \mathbf{e}^4 + \\ + \mathbf{e}^2 \wedge \mathbf{e}^3 + \mathbf{e}^3 \wedge \mathbf{e}^4\Big](x,y) \tag{8.23}$$

или в еще более компактной форме:

$$B = \mathbf{e}^1 \wedge \mathbf{e}^2 + 2\mathbf{e}^1 \wedge \mathbf{e}^3 + 2\mathbf{e}^1 \wedge \mathbf{e}^4 + \mathbf{e}^2 \wedge \mathbf{e}^3 + \mathbf{e}^3 \wedge \mathbf{e}^4. \tag{8.24}$$

Для дальнейшего нужно заметить, что операция внешнего умножения ковекторов обладает свойством билинейности и кососимметричности. В частности,

$$\mathbf{e}^j \wedge \mathbf{e}^j = \vartheta^* \otimes \vartheta^*,$$

где $\vartheta^* \in \mathcal{L}^*$ — нулевой ковектор. Приведение билинейной формы B к каноническому виду осуществляется следующим образом. Сначала сгруппируем все слагаемые, содержащие ковектор $\mathbf{e}^1$:

$$B = \mathbf{e}^1 \wedge \Big(\mathbf{e}^2 + 2\mathbf{e}^3 + 2\mathbf{e}^4\Big) + \mathbf{e}^2 \wedge \mathbf{e}^3 + \mathbf{e}^3 \wedge \mathbf{e}^4. \tag{8.25}$$

Рассмотрим новый базис $\{\mathbf{e}^{1'}, \mathbf{e}^{2'}, \mathbf{e}^{3'}, \mathbf{e}^{4'}\}$, связанный с базисом $\{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3, \mathbf{e}^4\}$ равенствами:

$$\mathbf{e}^{1'} = \mathbf{e}^1, \quad \mathbf{e}^{2'} = \mathbf{e}^2 + 2\mathbf{e}^3 + 2\mathbf{e}^4, \quad \mathbf{e}^{3'} = \mathbf{e}^3, \quad \mathbf{e}^{4'} = \mathbf{e}^4 \tag{8.26}$$

или обратная связь:

$$\mathbf{e}^1 = \mathbf{e}^{1'}, \quad \mathbf{e}^2 = \mathbf{e}^{2'} - 2\mathbf{e}^{3'} - 2\mathbf{e}^{4'}, \quad \mathbf{e}^3 = \mathbf{e}^{3'}, \quad \mathbf{e}^4 = \mathbf{e}^{4'}. \tag{8.27}$$

Из (8.25) с учетом (8.26) и (8.27) вытекают равенства:

$$B = \mathbf{e}^{1'} \wedge \mathbf{e}^{2'} + (\mathbf{e}^{2'} - 2\mathbf{e}^{3'} - 2\mathbf{e}^{4'}) \wedge \mathbf{e}^{3'} + \mathbf{e}^{3'} \wedge \mathbf{e}^{4'} = \\ = \mathbf{e}^{1'} \wedge \mathbf{e}^{2'} + \mathbf{e}^{2'} \wedge \mathbf{e}^{3'} + 3\mathbf{e}^{3'} \wedge \mathbf{e}^{4'}. \tag{8.28}$$

Теперь соберем все слагаемые, содержащие $\mathbf{e}^{2'}$. Действительно,

$$B = (\mathbf{e}^{1'} - \mathbf{e}^{3'}) \wedge \mathbf{e}^{2'} + 3\mathbf{e}^{3'} \wedge \mathbf{e}^{4'}. \tag{8.29}$$

Перейдем к новому базису:

$$\mathbf{e}^{1''} = \mathbf{e}^{1'} - \mathbf{e}^{3'}, \quad \mathbf{e}^{2''} = \mathbf{e}^{2'}, \quad \mathbf{e}^{3''} = \mathbf{e}^{3'}, \quad \mathbf{e}^{4''} = \mathbf{e}^{4'} \tag{8.30}$$

или обратная связь:

$$\mathbf{e}^{1'} = \mathbf{e}^{1''} + \mathbf{e}^{3''}, \quad \mathbf{e}^{2'} = \mathbf{e}^{2''}, \quad \mathbf{e}^{3'} = \mathbf{e}^{3''}, \quad \mathbf{e}^{4'} = \mathbf{e}^{4''}. \tag{8.31}$$

Из (8.29) с учетом (8.30) и (8.31) приходим к выражению:

$$B = \mathbf{e}^{1''} \wedge \mathbf{e}^{2''} + 3\mathbf{e}^{3''} \wedge \mathbf{e}^{4''}. \tag{8.32}$$

Перейдем к новому базису:

$$\mathbf{e}^{1'''} = \mathbf{e}^{1''}, \quad \mathbf{e}^{2'''} = \mathbf{e}^{2''}, \quad \mathbf{e}^{3'''} = \mathbf{e}^{3''}, \quad \mathbf{e}^{4'''} = \frac{1}{3}\mathbf{e}^{4''}. \tag{8.33}$$

Тогда из (8.32) и (8.33) получим выражение:

$$B = \mathbf{e}^{1'''} \wedge \mathbf{e}^{2'''} + \mathbf{e}^{3'''} \wedge \mathbf{e}^{4'''}, \tag{8.34}$$

причем из (8.27), (8.31) и (8.33) получаем:

$$\mathbf{e}^1 = \mathbf{e}^{1'''} + \mathbf{e}^{3'''}, \quad \mathbf{e}^2 = \mathbf{e}^{2'''} - 2\mathbf{e}^{3'''} - \frac{2}{3}\mathbf{e}^{4'''}, \tag{8.35}$$

$$\mathbf{e}^3 = \mathbf{e}^{3'''}, \quad \mathbf{e}^4 = \frac{1}{3}\mathbf{e}^{4'''}. \tag{8.36}$$

Отметим, что мы ниже в лекции, посвященной тензорам, докажем не очень сложное утверждение, что

$$\langle \mathbf{e}^{j'''}, x\rangle = x^{j'''} \tag{8.37}$$

и поэтому из (8.34) с учетом (8.37) получим канонический вид:

$$B(x,y) = x^{1'''}y^{2'''} - x^{2'''}y^{1'''} + x^{3'''}y^{4'''} - x^{4'''}y^{3'''}, \tag{8.38}$$

где в силу (8.35) и (8.36) имеем:

$$x^1 = x^{1'''} + x^{3'''}, \quad x^2 = x^{2'''} - 2x^{3'''} - \frac{2}{3}x^{4'''}, \tag{8.39}$$

$$x^3 = x^{3'''}, \quad x^4 = \frac{1}{3}x^{4'''}. \tag{8.40}$$

Задача 4. Напомним, что ядром симметричной или кососимметричной билинейной формы называется множество:

$$\ker\varphi := \{x \in \mathcal{L} : \ \varphi(x,y) = 0 \quad \text{для всех} \quad y \in \mathcal{L}\}. \tag{8.41}$$

Пусть $\mathcal{P} \subset \mathcal{L}$ — линейное подпространство в $\mathcal{L}$. Тогда символом $\mathcal{P}^{\perp}$ мы обозначаем следующее множество:

$$\mathcal{P}^{\perp} := \{x \in \mathcal{L} : \ \varphi(x,y) = 0 \quad \text{для всех} \quad x \in \mathcal{P}\}. \tag{8.42}$$

Но тогда из (8.41) и (8.42) имеем:

$$\mathcal{P} \cap \mathcal{P}^{\perp} = \{x \in \mathcal{P} : \ \varphi(x,y) = 0 \quad \text{для всех} \quad y \in \mathcal{P}\} = \ker\varphi|_{\mathcal{P}}, \tag{8.43}$$

где символом $\varphi|_{\mathcal{P}}$ мы обозначили ограничение φ на линейное подпространство $\mathcal{P}$. Доказать, что если φ — билинейная или полуторалинейная симметричная или кососимметричная форма на линейном пространстве $\mathcal{L}$ над полем $\mathbb{K}$, то

$$\mathcal{L} = \mathcal{P} \oplus \mathcal{P}^{\perp}, \tag{8.44}$$

тогда и только тогда, когда билинейная форма φ не вырожденная на $\mathcal{P}$.

Решение. Первый способ. Важное свойство: *если билинейная или полуторалинейная форма φ невырожденная на $\mathcal{P}$, то в $\mathcal{P}$ существует φ–ортонормированный базис $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m\}$ в $\mathcal{P}$, т. е.*

$$\varphi(e_j, e_k) = \delta_{jk}, \quad j, k = \overline{1, m}, \quad \mathcal{P} = L(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m). \tag{8.45}$$

Этот результат получается ровно также как процедура ортогонализации Грамма–Шмидта.

Пусть билинейная форма φ невырожденна на $\mathcal{P}$, т.е.

$$\ker \varphi|_{\mathcal{P}} = \{\vartheta\} \Leftrightarrow \mathcal{P} \cap \mathcal{P}^{\perp} = \{\vartheta\}. \tag{8.46}$$

Докажем, что для любого $x \in \mathcal{L}$ найдутся такие $x_{\|} \in \mathcal{P}$ и $x_{\perp} \in \mathcal{P}$, что

$$x = x_{\|} + x_{\perp}. \tag{8.47}$$

Пусть $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m\}$ — это φ–ортонормированный базис в $\mathcal{P}$. Рассмотрим выражение:

$$y := x - x_{\|}, \quad x_{\|} := \sum_{j=1}^{m} \varphi(x, \mathbf{e}_j)\mathbf{e}_j. \tag{8.48}$$

Справедливы равенства:

$$\varphi(y, \mathbf{e}_k) = \varphi(x, \mathbf{e}_k) - \sum_{j=1}^{m} \varphi(x, \mathbf{e}_j)\varphi(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k) =$$
$$= \varphi(x, \mathbf{e}_k) - \varphi(x, \mathbf{e}_k) = 0, \quad k = \overline{1, m}. \tag{8.49}$$

Заметим, что справедливо равенство:

$$\mathcal{P}^{\perp} := \left\{x \in \mathcal{L} : \ \varphi(x, \mathbf{e}_k) = 0, \quad k = \overline{1, m}\right\}. \tag{8.50}$$

Поэтому из (8.48)–(8.50) получаем, что $y \in \mathcal{P}^{\perp}$, т.е. $x_{\perp} = y$. Итак, из (8.47) с учетом (8.46) получаем равенство:

$$\mathcal{L} = \mathcal{P} \oplus \mathcal{P}^{\perp}. \tag{8.51}$$

Пусть теперь выполнено равенство (8.51). Тогда получаем, что

$$\mathcal{P} \cap \mathcal{P}^{\perp} = \{\vartheta\} \Rightarrow \ker \varphi|_{\mathcal{P}} = \{\vartheta\}, \tag{8.52}$$

т.е. форма φ не вырожденная на $\mathcal{P}$.

Второй способ. Смотри решение задачи 5. Получаем неравенство:

$$\dim \mathcal{L} \leqslant \dim \mathcal{P} + \dim \mathcal{P}^{\perp}. \tag{8.53}$$

Если при этом $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}^{\perp} = \{\vartheta\}$, то получаем, что

$$\dim \mathcal{L} \geqslant \dim \mathcal{P} + \dim \mathcal{P}^{\perp}. \tag{8.54}$$

Стало быть, из (8.53) и (8.54) получаем равенство:

$$\dim \mathcal{P} + \dim \mathcal{P}^{\perp} = \dim \mathcal{L} \quad \text{и} \quad \mathcal{P} \cap \mathcal{P}^{\perp} = \{\vartheta\}. \tag{8.55}$$

Поэтому получаем, что

$$\mathcal{L} = \mathcal{P} \oplus \mathcal{P}^{\perp}. \tag{8.56}$$

З а д а ч а 5. Пусть φ — симметрическая или кососимметрическая билинейная или полуторалинейная форма. Пусть $\mathcal{P}$ — линейное подпространство линейного пространства $\mathcal{L}$, а $\mathcal{P}^{\perp}$ — φ–ортогональное дополнение. Доказать неравенство:

$$\dim \mathcal{L} \leqslant \dim \mathcal{P} + \dim \mathcal{P}^{\perp}. \tag{8.57}$$

Решение. Пусть $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m\}$ — базис в $\mathcal{P}$ и $x \in \mathcal{P}^{\perp}$. Тогда, в частности, выполнена система уравнений m однородных линейных уравнений относительно n переменных:

$$\varphi(x, \mathbf{e}_1) = 0, \ldots, \varphi(x, \mathbf{e}_m) = 0. \tag{8.58}$$

Эта система уравнений имеет $0 \leqslant r \leqslant m$ линейно независимых решений, т.е., в частности, базис в $\mathcal{P}^{\perp}$ состоит по меньшей мере из $n - r$ векторов. Поэтому имеем:

$$\dim \mathcal{P}^{\perp} \geqslant n - r \geqslant n - m = \dim \mathcal{L} - \dim \mathcal{P}.$$

З а д а ч а 6. Пусть φ — квадратичная форма на вещественном линейном пространстве $\mathcal{L}$ и $a, b \in \mathcal{L}$ — такие векторы, что

$$\varphi(a) < 0 \quad \text{и} \quad \varphi(b) > 0. \tag{8.59}$$

Доказать, что векторы a, b линейно независимы.

Решение. Пусть тем не менее векторы a, b линейно зависимы:

$$\alpha \cdot a + \beta \cdot b = \vartheta, \quad (\alpha, \beta) \neq (0, 0). \tag{8.60}$$

Пусть, например, $\beta \neq 0$. Тогда имеем:

$$b = \gamma \cdot a, \quad \gamma := -\frac{\alpha}{\beta}. \tag{8.61}$$

Согласно определению квадратичной формы имеем:

$$0 < \varphi(b) = \gamma^2 \varphi(a) \leqslant 0. \tag{8.62}$$

Противоречие.

З а д а ч а 7. В линейном пространстве P^1 — многочленов степени не выше 1 дана квадратичная форма:

$$\varphi(p) := \int\limits_1^a p^2(t)(t-1)\,dt, \quad a > 1. \tag{8.63}$$

Найти положительный и отрицательный индексы инерции этой квадратичной формы в зависимости от параметра a.

Решение. Заметим, что многочлены:

$$\mathbf{e}_1 = 1, \mathbf{e}_2 = t - 1 \tag{8.64}$$

образуют базис в P^1. Рассмотрим разложение по этому базису произвольного многочлена $p(t) \in P^1$:

$$p(t) = x^1\mathbf{e}_1 + x^2\mathbf{e}_2 = x^1 1 + x^2(t-1). \tag{8.65}$$

Подставим (8.65) в (8.64). Тогда справедлива следующая цепочка равенств:

$$\varphi(p) := \int\limits_0^{a-1} \Big((x^1)^2 + 2x^1x^2x + (x^2)^2\Big)\, x\, dx =$$

$$= \frac{(a-1)^2}{2}(x^1)^2 + 2\frac{1}{3}(a-1)^3x^1x^2 + \frac{(a-1)^4}{4}(x^2)^2. \tag{8.66}$$

Рассмотрим матрицу квадратичной формы:

$$\Phi_e := \frac{(a-1)^2}{2}\begin{pmatrix} 1 & 2(a-1)/3 \\ 2(a-1)/3 & (a-1)^2/2 \end{pmatrix}. \tag{8.67}$$

Рассмотрим угловые миноры этой матрицы:

$$\Delta_1 = \frac{(a-1)^2}{2}, \quad \Delta_2 = \frac{(a-1)^6}{72}. \tag{8.68}$$

Если $a > 1$, то положительный индекс инерции равен 2, а отрицательный индекс инерции равен 0.

Задача 8. Пусть F_e — матрица невырожденной билинейной формы f на вещественном пространстве размерности n. Доказать, что при нечетном n матрица $(-1)\cdot F_e$ не является матрицей формы ни в каком базисе пространства $\mathcal{L}$.

Решение. Пусть $\mathbf{E} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ — строчка векторов базиса, в котором билинейная форма f имеет матрицу F_e, а $\mathbf{E}' = (\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'})$ — новый базис, в котором форма f имеет матрицу $(-1)\cdot F_e$. Тогда имеем:

$$(-1)\cdot F_e = C^T \cdot F_e \cdot C, \quad \mathbf{E}' = \mathbf{E}\cdot C, \quad \det C \neq 0, \tag{8.69}$$

$$(-1)^n \det F_e = (\det C)^2 \det F_e, \quad \det F_e \neq 0 \Rightarrow (\det C)^2 = (-1)^n. \tag{8.70}$$

Получили противоречивое равенство при нечетном $n \in \mathbb{N}$.

Задача 9. Пусть $\{f_1, \ldots, f_{r+s}\} \subset \mathcal{L}^*$, где $\mathcal{L}$ — вещественное линейное пространство. Доказать, что положительный индекс инерции функции:

$$q(x) = \langle f_1, x\rangle^2 + \cdots + \langle f_r, x\rangle^2 - \langle f_{r+1}, x\rangle^2 - \cdots - \langle f_{r+s}, x\rangle^2 \tag{8.71}$$

не превосходит r, а отрицательный индекс инерции не превосходит s.

Решение. Докажем, что положительный индекс инерции не превосходит r. После этого нужно рассмотреть квадратичную форму $-q(x)$ и, тем самым, доказать, что отрицательный индекс инерции не превосходит s. Кроме того, предположим, что все линейные формы ненулевые и число $r \leqslant n := \dim\mathcal{L}$.

Используя по необходимости перестановки, будем считать, что $\{f_1, \ldots, f_d\}$, $1 \leqslant d \leqslant r$ — базис в линейно оболочке $L(f_1, \ldots, f_r)$. Дополним семейство векторов $\{f_1, \ldots, f_d\}$ до базиса $\{f_1, \ldots, f_d, g_{d+1}, \ldots, g_n\}$ в $\mathcal{L}^*$. Пусть $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — базис в $\mathcal{L}$, взаимным к которому является базис $\{f_1, \ldots, f_d, g_{d+1}, \ldots, g_n\}$. Заметим, что имеют место равенства:

$$f_{d+1} = \sum_{j=1}^{d} \beta^j_{d+1} f_j, \cdots, f_r = \sum_{j=1}^{d} \beta^j_r f_j. \tag{8.72}$$

Пусть:

$$x = \mathbf{E} \cdot X_e, \quad \mathbf{E} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n), \quad X_e^T = (x^1, \ldots, x^n). \tag{8.73}$$

Тогда в базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ квадратичная форма $q(x)$ примет вид:

$$q(x) = (x^1)^2 + \cdots + (x^d)^2 + \left(\sum_{j=1}^{d} \beta^j_{d+1} x^j\right)^2 + \cdots + \left(\sum_{j=1}^{d} \beta^j_r x^j\right)^2 - \\ - \langle f_{r+1}, x\rangle^2 - \cdots - \langle f_{r+s}, x\rangle^2. \tag{8.74}$$

Предположим, что существует такой базис $\{\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}\}$, в котором квадратичная форма $q(x)$ имеет такой канонический вид:

$$q(x) = (y^1)^2 + \cdots + (y^m)^2 - (y^{m+1})^2 - \cdots - (y^p)^2, \quad m > r, \tag{8.75}$$
$$x = \mathbf{E}' \cdot Y_e, \quad \mathbf{E}' = (\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}), \quad Y_e^T = (y^1, \ldots, y^n).$$

Пусть переменные $(x^1, \ldots, x^n)$ и $(z^1, \ldots, z^n)$ связаны невырожденным преобразованием:

$$X_e = C \cdot Y_e, \quad \det C \neq 0, \quad \mathbf{E}' = \mathbf{E} \cdot C, \quad C = (c_{jk})_{n,n}. \tag{8.76}$$

Рассмотрим следующую систему однородных уравнений:

$$\begin{cases} c^1_1 y^1 + \cdots + c^1_m y^m = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ c^d_1 y^1 + \cdots + c^d_m y^m = 0. \end{cases} \tag{8.77}$$

Поскольку число переменных $m > r$ больше числа уравнений $d \leqslant r$, то система уравнений (8.77) имеет нетривиальное решение $(y^1_0, \ldots, y^m_0) \neq \neq (0, \ldots, 0)$. Но тогда имеет место равенство:

$$X_{e0} = C \cdot Y_{e0}, \tag{8.78}$$

$$Y^T_{e0} = (y^1_0, \ldots, y^m_0, 0, \ldots, 0), \quad X^T_{e0} = (0, \ldots, 0, x^{d+1}_0, \ldots, x^n_0). \tag{8.79}$$

Тогда из равенств (8.74) и (8.75) с учетом (8.78), (8.79) получим равенство:

$$0 < (y^1_0)^2 + \cdots + (y^m_0)^2 = -\langle f_{r+1}, x_0\rangle^2 - \cdots - \langle f_{r+s}, x_0\rangle^2 \leqslant 0, \tag{8.80}$$

где $x_0 = \mathbf{E} \cdot X_{e0}$. Получили противоречие. Значит, $m \leqslant r$.

Задача 10. Найти положительный и отрицательный индексы инерции квадратичной формы:

$$q(X) = \operatorname{tr} X^2 \quad \text{на} \quad \mathbb{R}^{n\times n}. \tag{8.81}$$

Решение. Прежде всего заметим, что имеет место разложение в прямую сумму линейных подпространств *симметричных* и *антисимметричных* матриц:

$$\mathbb{R}^{n\times n} = \mathbb{R}_s^{n\times n} \oplus \mathbb{R}_{as}^{n\times n}, \tag{8.82}$$

$$A = A_s + A_{as}, \quad A_s = \frac{1}{2}\left(A + A^T\right), \quad A_{as} = \frac{1}{2}\left(A - A^T\right). \tag{8.83}$$

Пусть:

$$A = \|A_1, \ldots, A_n\| = \left\| \begin{matrix} A^1 \\ \vdots \\ A^n \end{matrix} \right\|. \tag{8.84}$$

Выберем базис в $\mathbb{R}^{n\times n}$ как объединение базисов в $\mathbb{R}_s^{n\times n}$ и $\mathbb{R}_{as}^{n\times n}$. Заметим, что

$$\dim \mathbb{R}_s^{n\times n} = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \dim \mathbb{R}_{as}^{n\times n} = \frac{n(n-1)}{2}. \tag{8.85}$$

Справедливы равенства:

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} A^2 = \sum_{j=1}^n A^j \cdot A_j = \sum_{j=1}^n (A_s + A_{as})^j \cdot (A_s + A_{as})_j = \\ = \sum_{j=1}^n ((A_s)^j + (A_{as})^j) \cdot ((A_s)_j + (A_{as})_j) = \\ = \sum_{j=1}^n (A_s)^j \cdot (A_s)_j + \sum_{j=1}^n (A_{as})^j \cdot (A_{as})_j + \\ + \sum_{j=1}^n \left[(A_s)^j \cdot (A_{as})_j + (A_{as})^j \cdot (A_s)_j\right], \end{aligned} \tag{8.86}$$

причем справедливы равенства:

$$((A_s)^j)^T = (A_s)_j, \quad ((A_{as})^j)^T = -(A_{as})_j. \tag{8.87}$$

Заметим, что, с одной стороны, справедливы соотношения:

$$(A_s)^j \cdot (A_{as})_j \in \mathbb{R}^{1\times 1} \Rightarrow \left[(A_s)^j \cdot (A_{as})_j\right]^T = (A_s)^j \cdot (A_{as})_j, \tag{8.88}$$

а с другой стороны, имеем:

$$\left[(A_s)^j \cdot (A_{as})_j\right]^T = [(A_{as})_j]^T \cdot [(A_s)^j]^T = -(A_{as})^j \cdot (A_s)_j. \tag{8.89}$$

Из равенств (8.88) и (8.89) получаем равенство:

$$(A_s)^j \cdot (A_{as})_j + (A_{as})^j \cdot (A_s)_j = 0 \quad \text{для любого} \quad j = \overline{1, n}. \tag{8.90}$$

Итак, из (8.86) и (8.90) получаем равенство:

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} A^2 = \sum_{j=1}^{n} (A_s)^j \cdot (A_s)_j + \sum_{j=1}^{n} (A_{as})^j \cdot (A_{as})_j = \\ = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\{A_s\}_k^j \right)^2 - \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\{A_{as}\}_k^j \right)^2 = \\ = 2 \sum_{1 \leqslant j \leqslant k \leqslant n} \left(\{A_s\}_k^j \right)^2 - 2 \sum_{1 \leqslant j < k \leqslant n} \left(\{A_{as}\}_k^j \right)^2, \end{aligned} \tag{8.91}$$

где мы воспользовались равенствами (8.87). Таким образом, мы пришли к каноническому виду квадратичной формы в указанном ранее базисе. Число квадратов с положительными коэффициентами равно размерности $\dim \mathbb{R}_s^{n \times n} = n(n+1)/2$, а число квадратов с отрицательными коэффициентами равно $\dim \mathbb{R}_{as}^{n \times n} = n(n-1)/2$.

Лекция 8

ЕВКЛИДОВЫ И УНИТАРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

§ 1. Евклидово пространство

Определение 1. *Евклидово пространство $\mathcal{E}$ — это вещественное линейное пространство, в котором зафиксирована симметричная билинейная форма $G(x, y)$, причем соответствующая квадратичная форма $Q(x) = B(x, x)$ является положительно определенной. Значение билинейной формы на паре элементов x, y называется скалярным произведением этих векторов и обозначается (x, y), т.е.*

$$(x, y) := G(x, y).$$

Лемма 1. *Скалярное произведение обладает следующими свойствами:*

1. *$(x, y) = (y, x)$ для всех $x, y \in \mathcal{E}$;*
2. *$(\alpha^1 \cdot x_1 + \alpha^2 \cdot x_2, y) = \alpha^1(x_1, y) + \alpha^2(x_2, y)$ для всех $x_1, x_2 \in \mathcal{E}$ и $\alpha^1, \alpha^2 \in \mathbb{R}$;*
3. *$(x, x) > 0$ для всех $x \neq \vartheta$.*

Доказательство. Первое свойство — следствие симметричности билинейной формы $G(x, y)$, второе свойство — следствие билинейности формы $G(x, y)$ и третье свойство — следствие положительной определенности соответствующей квадратичной формы $Q(x) = G(x, x)$.

Лемма доказана.

Пусть $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — базис в евклидовом пространстве $\mathcal{E}$. Тогда справедливы следующие равенства:

$$(x, y) = G(x, y) = G(x^i \cdot \mathbf{e}_i, y^j \cdot \mathbf{e}_j) = \\ = x^i y^j G(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = g_{ij} x^i y^j = X_e^T \cdot G_e \cdot Y_e,$$

где матрица $G_e = (g_{ij})$ — положительно определенная матрица.

Определение 2. *Матрица $G_e = (g_{ij})$ называется матрицей Грама или метрическим тензором.*

Элементы матрицы Грама представляют собой скалярное произведение элементов базиса:

$$g_{ij} = (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = (\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_i) = g_{ji}.$$

При переходе к новому базису с помощью матрицы перехода C матрица Грама преобразуется по тому же закону, что и любая матрица билинейной формы:

$$G_{e'} = C^T \cdot G_e \cdot C, \quad g_{i'j'} = c^i_{i'} c^j_{j'} g_{ij}.$$

Лемма 2. $\det G_e \neq 0$.

Доказательство. Это следствие критерия Сильвестра положительной определенности матрицы. Хотя можно доказать непосредственно.

□ Действительно, пусть

$$\det G_e = \begin{vmatrix} (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) & \cdots & (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_1) & \cdots & (\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_n) \end{vmatrix} = 0, \tag{1.1}$$

но тогда столбцы матрицы Грамма линейно зависимы:

$$\alpha^1 \begin{pmatrix} (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) \\ \vdots \\ (\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_1) \end{pmatrix} + \cdots + \alpha^n \begin{pmatrix} (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_n) \\ \vdots \\ (\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{1.2}$$

причем $(\alpha^1, \ldots, \alpha^n) \neq (0, \ldots, 0)$. Из (1.2) получаем равенство:

$$\begin{pmatrix} (\mathbf{e}_1, x) \\ \vdots \\ (\mathbf{e}_n, x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x = \alpha^1 \cdot \mathbf{e}_1 + \cdots + \alpha^n \cdot \mathbf{e}_n, \tag{1.3}$$

из которого получаем, что

$$(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = \vartheta \Leftrightarrow \alpha^1 \cdot \mathbf{e}_1 + \cdots + \alpha^n \cdot \mathbf{e}_n = \vartheta \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (\alpha^1, \ldots, \alpha^n) = (0, \ldots, 0). \tag{1.4}$$

Пришли к противоречию.

Лемма доказана.

В силу результата леммы 2 матрица Грама G_e обратима. Элементы обратной матрицы G_e^{-1} обозначаются g^{ij}. Тогда справедливы равенства

$$G_e \cdot G_e^{-1} = I \Leftrightarrow \{G_e \cdot G_e^{-1}\}^l_j = \{G_e\}^l_k \{G_e^{-1}\}^k_j = \\ = \{G_e\}_{lk} \{G_e^{-1}\}^{kj} = g_{lk} g^{kj}, \quad \{I\}^l_j = \{I\}^j_l = \delta^j_l \Rightarrow g_{lk} g^{kj} = \delta^j_l, \tag{1.5}$$

$$G_e^{-1} \cdot G_e = I \Rightarrow \{G_e^{-1} \cdot G_e\}^l_j = \{G_e^{-1}\}^l_k \{G_e\}^k_j = \\ = \{G_e^{-1}\}^{lk} \{G_e\}^{kj} = g^{lk} g_{kj} \Rightarrow g^{lk} g_{kj} = \delta^l_j. \tag{1.6}$$

Заметим, что мы используем на протяжении книги следующие три обозначения:

$$\{A\}_{jk}, \quad \{A\}^j_k, \quad \{A\}^{jk},$$

где индекс j нумерует строчку, а индекс k столбец. Операции $\{A\}_{jk}, \{A\}_k^j, \{A\}^{jk}$ заключаются в извлечении элемента из матрицы A, расположенного на пересечении j–ой строчки и k–го столбца. Например, если $A = (a^{jk})_m^n$, то

$$\{A\}_{jk} = a^{jk}.$$

Отметим, что справедлива

Теорема 1. *Справедливо неравенство Коши–Буняковского*:

$$(x, y)^2 \leqslant (x, x)(y, y) \quad \text{для всех} \quad x, y \in \mathcal{E}. \tag{1.7}$$

Доказательство. Для любых $x, y \in \mathcal{E}$ и любого $\alpha \in \mathbb{R}$ справедливы соотношения:

$$(\alpha \cdot x + y, \alpha \cdot x + y) \geqslant 0 \Leftrightarrow f(\alpha) := (x, x)\alpha^2 + 2(x, y)\alpha + (y, y) \geqslant 0. \tag{1.8}$$

Для того чтобы функция $f(\alpha)$ принимала только неотрицательные значения, необходимо и достаточно, чтобы его дискриминант был неположителен:

$$(x, y)^2 - (x, x)(y, y) \leqslant 0.$$

Теорема доказана.

Лемма 3. *Для того чтобы было выполнено равенство*:

$$(x, y)^2 = (x, x)(y, y), \tag{1.9}$$

необходимо и достаточно, чтобы векторы $x, y \in \mathcal{E}$ были линейно зависимы.

Доказательство. *Достаточность.* Пусть векторы x и y линейно зависимы. Если один из векторов или оба равны нулю, то равенство (1.9) очевидно. Пусть $x \neq \vartheta$ и $y \neq \vartheta$. Тогда $y = \alpha x$ при $\alpha \neq 0$ и справедливо равенство (1.9).

Необходимость. Пусть теперь выполнено равенство (1.9). Если один вектор или оба вектора из семейства $\{x, y\}$ равны нулю, то они, очевидно, линейно зависимы. Поэтому пусть $x \neq \vartheta$ и $y \neq \vartheta$. Рассмотрим функцию:

$$f(\alpha) := (\alpha x + y, \alpha x + y). \tag{1.10}$$

Рассмотрим квадратное уравнение:

$$f(\alpha_0) = (x, x)\alpha_0^2 + 2(x, y)\alpha_0 + (y, y) = 0. \tag{1.11}$$

Поскольку выполнено равенство (1.9), то дискриминант этого квадратного уравнения равен нулю:

$$\mathcal{D} := 4(x, y)^2 - 4(x, x)(y, y) = 0. \tag{1.12}$$

Поэтому $f(\alpha_0) = 0$ при

$$\alpha_0 = -\frac{(x, y)}{(x, x)} \Rightarrow f(\alpha_0) = (\alpha_0 x + y, \alpha_0 x + y) = 0 \Rightarrow y = -\alpha_0 x,$$

т.е. векторы x и y линейно зависимы.

Лемма доказана.

Пример 1. Линейное пространство столбцов $\mathbb{R}^{n\times 1}$ становится евклидовым пространством, если для столбцов:

$$X = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix}$$

определить скалярное произведение по формуле:

$$(X, Y) = X^T \cdot G \cdot Y, \tag{1.13}$$

где $G \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — положительно определенная, симметричная матрица. Действительно, справедливы следующие равенства:

$$(Y, X) = Y^T \cdot G \cdot X = (Y^T \cdot G \cdot X)^T = \\ = X^T \cdot G^T \cdot Y^{TT} = X^T \cdot G \cdot Y = (X, Y) \quad \text{для всех} \quad X, Y \in \mathbb{R}^{n\times 1},$$

поскольку $G^T = G$,

$$(\alpha^1 X_1 + \alpha^2 X_2, Y) = (\alpha^1 X_1 + \alpha^2 X_2)^T \cdot G \cdot Y = (\alpha^1 X_1^T + \alpha^2 X_2^T) \cdot G \cdot Y = \\ = \alpha^1 X_1^T \cdot G \cdot Y + \alpha^2 X_2^T \cdot G \cdot Y = \\ = \alpha^1 (X_1, Y) + \alpha^2 (X_2, Y) \quad \text{для всех} \quad X_1, X_2, Y \in \mathbb{R}^{n\times 1}, \quad \alpha^1, \alpha^2 \in \mathbb{R},$$

$$(X, X) = X^T \cdot G \cdot X > 0 \quad \text{для всех} \quad X^T \neq (0, \ldots, 0),$$

поскольку G — положительно определенная матрица.

Пример 2. Скалярное произведение в пространстве матриц $\mathbb{R}^{n\times m}$ можно ввести по формуле:

$$(X, Y) = \operatorname{tr}(X^T \cdot Y), \quad X, Y \in \mathbb{R}^{n\times m}.$$

Действительно, в курсе аналитической геометрии нами были доказаны следующие свойства следа квадратной матрицы:

$$\operatorname{tr} A^T = \operatorname{tr} A, \quad \operatorname{tr}(\alpha^1 A_1 + \alpha^2 A_2) = \alpha^1 \operatorname{tr} A_1 + \alpha^2 \operatorname{tr} A_2$$

для любых матриц $A, A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{p\times p}$ и произвольных чисел $\alpha^1, \alpha^2 \in \mathbb{R}$. Тогда справедливы следующие равенства:

$$(Y, X) = \operatorname{tr}(Y^T \cdot X) = \operatorname{tr}((Y^T \cdot X)^T) = \\ = \operatorname{tr}(X^T \cdot Y) = (X, Y) \quad \text{для любых} \quad X, Y \in \mathbb{R}^{n\times m},$$

$$(\alpha^1 X_1 + \alpha^2 X_2, Y) = \operatorname{tr}((\alpha^1 X_1 + \alpha^2 X_2)^T \cdot Y) = \\ = \operatorname{tr}(\alpha^1 X_1^T \cdot Y + \alpha^2 X_2^T \cdot Y) = \alpha^1 \operatorname{tr}(X_1^T \cdot Y) + \alpha^2 \operatorname{tr}(X_2^T \cdot Y) = \\ = \alpha^1 (X_1, Y) + \alpha^2 (X_2, Y) \quad \text{для всех} \quad Y, X_1, X_2 \in \mathbb{R}^{n\times m}, \quad \alpha^1, \alpha^2 \in \mathbb{R},$$

$$(X,X) = \operatorname{tr}(X^T \cdot X) = \sum_{j=1}^{m} \{X^T \cdot X\}_j^j = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \{X^T\}_k^j \{X\}_j^k =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \left(\{X\}_j^k\right)^2 \Rightarrow (X,X) > 0 \quad \text{для всех} \quad X \neq O \in \mathbb{R}^{n\times m}.$$

Пример 3. На бесконечномерном линейном пространстве $C[0,1]$ непрерывных на отрезке $[0,1]$ вещественных функций можно ввести скалярное произведение следующим образом:

$$(f,g) = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt.$$

Действительно, справедливы следующие равенства:

$$(f,g) = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt =$$

$$= \int_0^1 g(t)f(t)\,dt = (g,f) \quad \text{для любых} \quad f(t), g(t) \in C[0,1],$$

$$(\alpha^1 f_1 + \alpha^2 f_2, g) = \int_0^1 (\alpha^1 f_1(t) + \alpha^2 f_2(t))g(t)\,dt =$$

$$= \alpha^1 \int_0^1 f_1(t)g(t)\,dt + \alpha^2 \int_0^1 f_2(t)g(t)\,dt =$$

$$= \alpha^1 (f_1, g) + \alpha^2 (f_2, g) \quad \forall\ f_1(t), f_2(t), g(t) \in C[0,1],\ \alpha^1, \alpha^2 \in \mathbb{R},$$

$$(f,f) = \int_0^1 f^2(t)\,dt = 0 \Leftrightarrow f(t) = 0.$$

§ 2. Длины и углы в евклидовом пространстве

Определение 3. *Нормой вектора* $x \in \mathcal{E}$ *называется число*:

$$\|x\| \stackrel{def:}{=} \sqrt{(x,x)}\,.$$

Теорема 2. *Имеют место соотношения*:

1. $\|x\| \geqslant 0$ *для всех* $x \in \mathcal{E}$, *причем* $\|x\| = 0$ *тогда и только тогда, когда* $x = \vartheta$*;*
2. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$ *для всех* $x \in \mathcal{E}$ *и всех* $\alpha \in \mathbb{R}$*;*
3. $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ *для всех* $x, y \in \mathcal{E}$.

Доказательство. Первое утверждение очевидно. Для доказательства второго утверждения заметим, что

$$\|\alpha x\| = \sqrt{(\alpha x, \alpha x)} = \sqrt{\alpha^2 (x, x)} = |\alpha|\sqrt{(x, x)} = |\alpha|\|x\|.$$

Для доказательства третьего утверждения заметим, что справедлива следующая цепочка соотношений:

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= (x + y, x + y) = (x, x) + (x, y) + (y, x) + (y, y) = \\ &= (x, x) + 2(x, y) + (y, y) \leqslant \|x\|^2 + 2(x, x)^{1/2}(y, y)^{1/2} + \|y\|^2 = \\ &= \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2 \Leftrightarrow \|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\| \end{aligned}$$

для всех $x, y \in \mathcal{E}$.

Теорема доказана.

Определение 4. *Угол между векторами* x, y *— это число* $\varphi \in \in [0, \pi]$, *определяемый из уравнения*:

$$\cos\varphi = \frac{(x, y)}{\|x\|\|y\|}.$$

Замечание 1. Из неравенства Коши–Буняковского вытекает, что угол определен для любых двух ненулевых векторов.

§ 3. Унитарные пространства

Определение 5. *Полуторалинейной формой на комплексном линейном пространстве* $\mathcal{L}$ *называется скалярная функция* $G(x, y)$ *двух переменных, удовлетворяющая следующим свойствам*:

1. $G(x, y) = \overline{G(y, x)}$ *для всех* $x, y \in \mathcal{L}$*;*
2. $G(\alpha^1 \cdot x_1 + \alpha^2 \cdot x_2, y) = \alpha^1 G(x_1, y) + \alpha^2 G(x_2, y)$ *для всех* $x_1, x_2, y \in \in \mathcal{L}$ *и всех* $\alpha^1, \alpha^2 \in \mathbb{C}$.

Лемма 4. *Полуторалинейная форма* $G(x, y)$ *обладает следующими свойствами*:

1. $G(x, \beta^1 \cdot y_1 + \beta^2 \cdot y_2) = \overline{\beta^1} G(x, y_1) + \overline{\beta^2} G(x, y_2)$ *для всех* $x, y_1, y_2 \in \in \mathcal{L}$ *и всех* $\beta^1, \beta^2 \in \mathbb{C}$*;*
2. $G(x, x) \in \mathbb{R}$ *для всех* $x \in \mathcal{L}$.

Доказательство. Справедлива следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} G(x, \beta^1 \cdot y_1 + \beta^2 \cdot y_2) &= \overline{G(\beta^1 \cdot y_1 + \beta^2 \cdot y_2, x)} = \\ &= \overline{\beta^1 G(y_1, x) + \beta^2 G(y_2, x)} = \\ &= \overline{\beta_1}\,\overline{G(y_1, x)} + \overline{\beta^2}\,\overline{G(y_2, x)} = \overline{\beta_1} G(x, y_1) + \overline{\beta^2} G(x, y_2), \end{aligned}$$

$$G(x,x) = \overline{G(x,x)} \quad \text{для всех} \quad x \in \mathcal{L} \Leftrightarrow G(x,x) \in \mathbb{R}.$$

Лемма доказана.

Замечание 2. Из за первого свойства антилинейности форму $G(x,y)$ называют полуторалинейной.

Определение 6. *Полуторалинейная форма $G(x,y)$ называется положительно определенной, если*:

$$G(x,x) > 0 \quad \textit{для всех} \quad x \in \mathcal{L}, \quad x \neq \vartheta.$$

Определение 7. *Унитарное пространство $\mathfrak{U}$ — это комплексное линейное пространство, на котором задана полуторалинейная, положительно определенная форма $G(x,y)$. Обычно пишут (x,y) вместо $G(x,y)$ и называют выражение (x,y) скалярным произведением.*

Пример 4. Например, на линейном пространстве $\mathbb{C}[0,1]$ комплекснозначных непрерывных функций можно задать следующую полуторалинейную положительно определенную форму:

$$G(f,g) = \int\limits_0^1 f(t)\overline{g(t)}\,dt.$$

Пусть в унитарном пространстве $\mathfrak{U}$ выбран базис $\{\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n\}$. Тогда справедливы следующие равенства:

$$(x,y) = G(x,y) = G(x^j \cdot \mathbf{e}_j, y^k \cdot \mathbf{e}_k) = \\ = x^j\overline{y^k}G(\mathbf{e}_j,\mathbf{e}_k) = x^j g_{jk}\overline{y^k} = X_e^T \cdot G_e \cdot \overline{Y_e}. \tag{3.1}$$

Пусть:

$$X_e = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}, \quad \overline{Y}_e = \begin{pmatrix} \overline{y^1} \\ \vdots \\ \overline{y^n} \end{pmatrix}.$$

Тогда справедливы следующие равенства:

$$G_e \in \mathbb{C}^{n\times n},\ X_e, Y_e \in \mathbb{C}^{n\times 1},$$

$$\{G_e \cdot \overline{Y}_e\}^j = \sum_{l=1}^n \{G_e\}^j_l \{\overline{Y}_e\}^l = \sum_{l=1}^n \{G_e\}_{jl}\{\overline{Y}_e\}^l = g_{jl}\overline{y}^l \in \mathbb{C}^{n\times 1},$$

$$X_e^T = (x^1,\ldots,x^n) \in \mathbb{C}^{1\times n},$$

$$X_e^T \cdot G_e \cdot \overline{Y_e} = \sum_{j=1}^n \{X_e^T\}_j \{G_e \cdot \overline{Y}_e\}^j = x^j g_{jl}\overline{y}^l.$$

Здесь мы воспользовались еще двумя операциями:

$$\{X\}^j \quad \text{и} \quad \{X^T\}_k, \quad X \in \mathbb{K}^{n\times 1},$$

где первая операция — операция извлечения из столбца X элемента, расположенного на j–ой строчке, а вторая операция — операция извлечения из строчки X^T элемента, расположенного на месте k–ого столбца строчки X^T.

Теперь найдем закон преобразования матрицы полуторалинейной формы. Справедливы следующие равенства:

$$g_{j'k'} = G(\mathbf{e}_{j'}, \mathbf{e}_{k'}) = G(c^j_{j'} \cdot \mathbf{e}_j, c^k_{k'} \cdot \mathbf{e}_k) = c^j_{j'}\overline{c^k_{k'}}G(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k) = \\ = c^j_{j'}\overline{c^k_{k'}}g_{jk} = c^j_{j'}g_{jk}\overline{c^k_{k'}} \Leftrightarrow G_{e'} = C^T \cdot G_e \cdot \overline{C}. \quad (3.2)$$

☐ Действительно, с одной стороны, имеют место следующее равенство:

$$g_{jk}\overline{c}^k_{k'} = \{G_e \cdot \overline{C}\}_{jk'},$$

в котором индекс k' нумерует столбцы, а индекс j нумерует строчки. Справедлива следующая цепочка равенств:

$$c^j_{j'}g_{jk}\overline{c}^k_{k'} = (c^1_{j'}, \ldots, c^n_{j'}) \begin{pmatrix} \{G_e \cdot \overline{C}\}_{1k'} \\ \vdots \\ \{G_e \cdot \overline{C}\}_{nk'} \end{pmatrix} = \\ = \sum_{j=1}^{n} \{C^T\}^{j'}_j \{G_e \cdot \overline{C}\}_{jk'} = \{C^T \cdot G_e \cdot \overline{C}\}^{j'}_{k'} = \\ = \{C^T \cdot G_e \cdot \overline{C}\}_{j'k'}, \quad (3.3)$$

поскольку как мы уже отмечали операции:

$$\{A\}^j_k = \{A\}^{jk} = \{A\}_{jk} \quad \text{для любой матрицы} \quad A \in \mathbb{K}^{m\times n}. \quad \boxtimes$$

Т е о р е м а 3. *Справедливо следующее неравенство Коши–Буняковского*:

$$|(x,y)|^2 \leqslant (x,x)(y,y) \quad \textit{для всех} \quad x, y \in \mathcal{U}. \quad (3.4)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $x = \vartheta$, то неравенство (3.4) выполнено. Пусть $x \neq \vartheta$. Справедлива следующая цепочка равенств:

$$0 \leqslant (\alpha \cdot x + y, \alpha \cdot x + y) = \alpha(x, \alpha \cdot x + y) + (y, \alpha \cdot x + y) = \\ = |\alpha|^2(x,x) + \alpha(x,y) + \overline{\alpha}(y,x) + (y,y) = \\ = |\alpha|^2(x,x) + \alpha(x,y) + \overline{\alpha}\overline{(x,y)} + (y,y). \quad (3.5)$$

Теперь положим в (3.5)

$$\alpha = -\frac{\overline{(x,y)}}{(x,x)}$$

и получим следующее неравенство:

$$\frac{|(x,y)|^2}{(x,x)} - \frac{|(x,y)|^2}{(x,x)} - \frac{|(x,y)|^2}{(x,x)} + (y,y) \geqslant 0 \Rightarrow |(x,y)|^2 \leqslant (x,x)(y,y).$$

Теорема доказана.

Точно также как и в случае евклидова пространства вводится норма вектора унитарного пространства, а вот угол между векторами унитарного пространства ввести нельзя, поскольку $(x, y) \in \mathbb{C}$.

§ 4. Ортогональность

Определение 8. *Векторы x, y либо евклидова пространства $\mathcal{E}$ либо унитарного пространства $\mathcal{U}$ называются ортогональными, если $(x, y) = 0$. При этом используется обозначение $x \perp y$. Если x ортогонально каждому вектору линейного подпространства $\mathcal{P}$, то используется обозначение $x \perp \mathcal{P}$. Множество всех векторов, которые ортогональны линейному подпространству $\mathcal{P}$ обозначается символом $\mathcal{P}^{\perp}$.*

Лемма 5. *Вектор x ортогонален самому себе $(x, x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = \vartheta$.*

Доказательство. Поскольку скалярное произведение и в евклидовом и в унитарном пространствах является положительно определенной билинейной или полуторалинейной формами, то $(x, x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = \vartheta$.

Лемма доказана.

Лемма 6. *Если $y \perp x_1, \dots, y \perp x_m$, то $y \perp L(x_1, \dots, x_m)$.*

Доказательство. Пусть $x \in L(x_1, \dots, x_m)$. Тогда:

$$x = \sum_{j=1}^{m} \alpha^j \cdot x_j \Rightarrow (x, y) = \sum_{j=1}^{m} \alpha^j (x_j, y) = 0.$$

Лемма доказана.

Лемма 7. *Если $x \perp \mathbf{e}_j$ для всех $j = \overline{1, n}$, где $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ — базис в $\mathcal{E}(\mathcal{U})$, то $x = \vartheta$.*

Доказательство. Согласно результату леммы 6 имеем $x \perp \mathcal{E}(\mathcal{U})$ и $x \in \mathcal{E}(\mathcal{U})$. Тогда, в частности, $(x, x) = 0$. Отсюда сразу же получаем, что $x = \vartheta$.

Лемма доказана.

Лемма 8. *Справедливо неравенство* $\det G_e \neq 0$.

Доказательство. Пусть G_e — матрица Грама в некотором базисе $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ в унитарном (евклидовом) пространстве $\mathcal{E}(\mathcal{U})$. Справедливы следующие соотношения:

$$\det G_e = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) & \cdots & (\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_n) & \cdots & (\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_n) \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha^1 \begin{pmatrix} (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) \\ \vdots \\ (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_n) \end{pmatrix} + \cdots + \alpha^n \begin{pmatrix} (\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_1) \\ \vdots \\ (\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} (\alpha^1 \cdot \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) \\ \vdots \\ (\alpha^1 \cdot \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_n) \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} (\alpha^n \cdot \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_1) \\ \vdots \\ (\alpha^n \cdot \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} (y, \mathbf{e}_1) \\ \vdots \\ (y, \mathbf{e}_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad y = \alpha^j \cdot \mathbf{e}_j \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (y, \mathbf{e}_k) = 0, \quad k = \overline{1, n}, \quad (4.1)$$

причем $(\alpha^1, \ldots, \alpha^n) \neq (0, \ldots, 0)$. Осталось воспользоваться результатом леммы (7) и получить, что $y = \vartheta$. Следовательно,

$$\alpha^1 \cdot \mathbf{e}_1 + \cdots + \alpha^n \cdot \mathbf{e}_n = \vartheta, \quad (\alpha^1, \ldots, \alpha^n) \neq (0, \ldots, 0).$$

Пришли к противоречию с тем, что $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — базис. Таким образом, $\det G_e \neq 0$.

Лемма доказана.

Лемма 9. *Если $x \perp y$, то $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.*

Доказательство. Справедлива цепочка равенств:

$$\|x + y\|^2 = (x + y, x + y) = (x, x) + (y, x) + (x, y) + (y, y) = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Лемма доказана.

Лемма 10. *Если ненулевые векторы $x_1, \ldots, x_m$ попарно ортогональны, то они линейно независимы.*

Доказательство. Пусть $(x_j, x_k) = 0$ при $j \neq k$ и $x_j \neq \vartheta$ для всех $j = \overline{1, m}$. Теперь рассмотрим следующую линейную комбинацию:

$$\alpha^1 \cdot x_1 + \cdots + \alpha^m \cdot x_m = \vartheta$$

Умножим обе части этого равенства на x_k при $k \in \overline{1, m}$. Тогда справедлива следующая цепочка равенств:

$$(\alpha^1 \cdot x_1 + \cdots + \alpha^m \cdot x_m, x_k) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \alpha^1 (x_1, x_k) + \cdots + \alpha^m (x_m, x_k) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \alpha^k (x_k, x_k) = 0 \Rightarrow \alpha^k = 0.$$

Значит, это семейство векторов является линейно независимым.

Лемма доказана.

Поскольку и евклидово пространство $\mathcal{E}$ и унитарное пространство $\mathcal{U}$ являются линейными пространствами над числами из $\mathbb{R}$ и из $\mathbb{C}$, соответственно, то над этими линейными пространствами определены сопряженные пространства $\mathcal{E}^*$ и $\mathcal{U}^*$ соответственно. Однако, для евклидовых и унитарных линейных пространств справедливо следующая важная *теорема Рисса–Фреше*:

Теорема 4. *Всякая линейная форма $f \in \mathcal{E}^*(f \in \mathcal{U}^*)$ представима в следующем виде*:

$$\langle f, x\rangle = (x, y_f) \quad \text{для всех} \quad x \in \mathcal{E}(\in \mathcal{U}), \tag{4.2}$$

где вектор $y_f \in \mathcal{E}(\in \mathcal{U})$ определяется формой f однозначным образом.

Доказательство. *Существование.* Пусть $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — базис в $\mathcal{E}(\mathcal{U})$ и $\{\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^n\}$ — соответствующий взаимный базис в $\mathcal{E}^*(\mathcal{U}^*)$. Тогда для векторов $x, y_f \in \mathcal{E}(\mathcal{U})$ и линейной формы $f \in \mathcal{E}^*(\mathcal{U}^*)$ справедливы следующие разложения:

$$x = x^i \cdot \mathbf{e}_i, \quad y_f = \eta_f^k \cdot \mathbf{e}_k, \quad f = f_j \cdot \mathbf{e}^j, \quad g_{ij} = G(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j). \tag{4.3}$$

Справедливы следующие равенства:

$$\langle f, x\rangle = \langle f_j \cdot \mathbf{e}^j, x^i \mathbf{e}_i\rangle = f_j x^i \langle \mathbf{e}^j, \mathbf{e}_i\rangle = f_j x^i \delta_i^j = f_i x^i, \tag{4.4}$$

$$(x, y_f) = (x^i \cdot \mathbf{e}_i, \eta_f^k \cdot \mathbf{e}_k) = x^i \overline{\eta_f^k} G(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k) = g_{ik} x^i \overline{\eta_f^k}. \tag{4.5}$$

Тогда искомое представление (4.2) в координатах при фиксированном базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ эквивалентно равенству:

$$f_i x^i = g_{ik} x^i \overline{\eta_f^k} \Leftrightarrow (f_i - g_{ik} \overline{\eta_f^k}) x^i = 0. \tag{4.6}$$

Равенство (4.2) должно быть выполнено для любых векторов $x \in \mathcal{E}(\mathcal{U})$ и поэтому эквивалентное ему равенство (4.6) (в заданном базисе) должно быть выполнено для всех $x^i \in \mathbb{R}(\in \mathbb{C})$ для всех $i = \overline{1, n}$. Пусть $X^T = (x^1, \ldots, x^n) = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$, где 1 расположена на p–ом месте, тогда из (4.6) получим следующие равенства:

$$g_{pk} \overline{\eta_f^k} = f_p, \quad p = \overline{1, n}. \tag{4.7}$$

Это неоднородная, вообще говоря, квадратная линейная система уравнений. Рассмотрим соответствующую однородную систему уравнений

$$g_{pk} \overline{\eta_f^k} = 0, \quad p = \overline{1, n}, \tag{4.8}$$

которую несложно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned} 0 = g_{pk} \overline{\eta_f^k} = G(\mathbf{e}_p, \mathbf{e}_k) \overline{\eta_f^k} = G\left(\mathbf{e}_p, \eta_f^k \cdot \mathbf{e}_k\right) = \\ = G(\mathbf{e}_p, y_f) = (\mathbf{e}_p, y_f) \quad \text{для всех} \quad p = \overline{1, n}. \end{aligned} \tag{4.9}$$

В силу результата леммы 7 получаем, что $y_f = \vartheta$. Следовательно, $\eta_f^k = 0$ для всех $k = \overline{1, n}$. Значит, однородная квадратная система линейных уравнений (4.8) имеет только тривиальное решение. Таким образом, в силу альтернатив Фредгольма неоднородная система линейных уравнений (4.8) имеет единственное решение $\{\eta_f^k\}_{k=1}^n$. «Прокручивая» в обратном порядке формулы (4.7) $\mapsto$ (4.2) для вектора $y_f = \eta_f^k \cdot \mathbf{e}_k$

получим, что для каждой линейной формы $f \in \mathcal{E}^*(\in \mathcal{U}^*)$ существует элемент $y_f \in \mathcal{E}(\in \mathcal{E})$ такой, что справедливо равенство (4.2), причем

$$y_f = \eta_f^k \cdot \mathbf{e}_k,$$

а числа η_f^k определяются из неоднородной системы уравнений (4.7).

Единственность. Единственность найденного вектора y_f следует из следующих соображений. Пусть векторов два y_f и z_f. Тогда для всех $x \in \mathcal{E}(\mathcal{U})$ справедливы следующие соотношения:

$$\langle f, x\rangle = (x, y_f) = (x, z_f) \Leftrightarrow (x, y_f - z_f) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (y_f - z_f, y_f - z_f) = 0 \Rightarrow y_f - z_f = \vartheta \Rightarrow y_f = z_f.$$

Теорема доказана.

Лемма 11. *Отображение $J: f \to y_f$ является линейным в случае евклидова пространства и антилинейным в случае унитарного пространства, т.е.*

$$J(\alpha_1 \cdot f^1 + \alpha_2 \cdot f^2) = y_{\alpha_1 \cdot f^1 + \alpha_2 \cdot f^2} =$$
$$= \overline{\alpha_1} \cdot y_{f^1} + \overline{\alpha_2} \cdot y_{f^2} = \overline{\alpha_1} \cdot J(f^1) + \overline{\alpha_2} \cdot J(f^2) \quad (4.10)$$

для любых $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}(\in \mathbb{C})$ и всех $f^1, f^2 \in \mathcal{E}^*(\in \mathcal{U}^*)$.

Доказательство. Действительно, справедливы следующие равенства:

$$\langle \alpha_1 \cdot f^1 + \alpha_2 \cdot f^2, x\rangle = \left(x, y_{\alpha_1 \cdot f^1 + \alpha_2 \cdot f^2}\right), \quad (4.11)$$

$$\langle \alpha_1 \cdot f^1 + \alpha_2 \cdot f^2, x\rangle = \alpha_1 \langle f^1, x\rangle + \alpha^2 \langle f^2, x\rangle =$$
$$= \alpha_1 (x, y_{f_1}) + \alpha_2 (x, y_{f_2}) = (x, \overline{\alpha_1} \cdot y_{f_1} + \overline{\alpha_2} \cdot y_{f_2}). \quad (4.12)$$

Таким образом, из (4.11) и (4.12) вытекает следующее равенство:

$$(x, y_{\alpha_1 \cdot f^1 + \alpha_2 \cdot f^2} - \overline{\alpha_1} \cdot y_{f_1} - \overline{\alpha_2} \cdot y_{f_2}) = 0 \quad \text{для всех} \quad x \in \mathcal{E}(\in \mathcal{U}).$$

Следовательно,

$$y_{\alpha_1 \cdot f^1 + \alpha_2 \cdot f^2} = \overline{\alpha_1} \cdot y_{f_1} + \overline{\alpha_2} \cdot y_{f_2}$$

или

$$J(\alpha_1 \cdot f^1 + \alpha_2 \cdot f^2) = \overline{\alpha_1} \cdot J(f_1) + \overline{\alpha_2} \cdot J(f_2).$$

Лемма доказана.

Определение 9. *Базис $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ в евклидовом пространстве $\mathcal{E}$ или в унитарном пространстве $\mathcal{U}$ называется ортонормированным, если справедливы следующие равенства*:

$$(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k) = \delta_{jk}, \quad j, k = \overline{1, n}.$$

Теорема 5. *Если* $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — *ортонормированный базис в евклидовом пространстве* $\mathcal{E}$ *или в унитарном пространстве* $\mathcal{U}$, *тогда имеют место следующие равенства*:

$$x = \sum_{i=1}^{n} (x, \mathbf{e}_i) \cdot \mathbf{e}_i, \quad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |(x, \mathbf{e}_i)|^2 \text{ для всех } x \in \mathcal{E}(\in \mathcal{U}), \tag{4.13}$$

где второе равенство носит название равенства Парсеваля.

Доказательство. Представим произвольный вектор $x \in \mathcal{E}(\in \mathcal{U})$ в виде разложения по базису:

$$x = x^k \cdot \mathbf{e}_k \Rightarrow (x, \mathbf{e}_j) = (x^k \cdot \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_j) = x^k (\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_j) = \\ = x^k \delta_{kj} = x^j \Rightarrow x = \sum_{j=1}^{n} (x, \mathbf{e}_j) \cdot \mathbf{e}_j,$$

$$\|x\|^2 = (x, x) = \left(\sum_{j=1}^{n} (x, \mathbf{e}_j) \cdot \mathbf{e}_j, \sum_{k=1}^{n} (x, \mathbf{e}_k) \cdot \mathbf{e}_k \right) = \\ = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} (x, \mathbf{e}_j) \overline{(x, \mathbf{e}_k)} (\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} (x, \mathbf{e}_j) \overline{(x, \mathbf{e}_k)} \delta_{kj} = \\ = \sum_{j=1}^{n} |(x, \mathbf{e}_j)|^2 .$$

Теорема доказана.

§ 5. Метод ортогонализации Грама–Шмидта

Пусть $\mathcal{L}$ — это либо евклидово пространство $\mathcal{E}$ либо унитарное пространство $\mathcal{U}$, $\{\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_k\}$ — ортогональный базис в $L(\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_k) \subset \mathcal{L}$:

$$(\mathbf{f}_j, \mathbf{f}_i) = 0, \quad i \neq j, \quad \mathbf{f}_j \neq \vartheta, \quad j = \overline{1, n}, \tag{5.1}$$

причем $\dim \mathcal{L} = n$ и $1 \leqslant k \leqslant n - 1$. Пусть $x \in \mathcal{L}$, но $x \notin L(\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_k)$.

Задача об ортогональной проекции заключается в том, чтобы найти ортогональную проекцию вектора x на линейную оболочку $L(\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_k)$, т. е. представить x в следующем виде:

$$x = y + z, \quad y \in L(\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_k), \quad z \perp L(\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_k). \tag{5.2}$$

□ Действительно, для решения этой задачи заметим, что с одной стороны, $y \in L(\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_k)$, то имеет место равенство:

$$y = \lambda^1 \cdot \mathbf{f}_1 + \cdots + \lambda^k \cdot \mathbf{f}_k. \tag{5.3}$$

С другой стороны, $z \perp L(\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_k)$ и поэтому:

$$(z, \mathbf{f}_1) = \cdots = (z, \mathbf{f}_k) = 0. \tag{5.4}$$

Из (5.2)–(5.4) с учетом (5.1) получаем, что:

$$(x, \mathbf{f}_1) = \lambda^1(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_1), \ldots, (x, \mathbf{f}_k) = \lambda^k(\mathbf{f}_k, \mathbf{f}_k). \tag{5.5}$$

Следовательно,

$$\lambda^j = \frac{(x, \mathbf{f}_j)}{(\mathbf{f}_j, \mathbf{f}_j)}, \quad j = \overline{1, k}. \tag{5.6}$$

Из (5.2), (5.3) и (5.6) получаем, что:

$$y = \sum_{j=1}^{k} \frac{(x, \mathbf{f}_j)}{(\mathbf{f}_j, \mathbf{f}_j)} \mathbf{f}_j, \quad z = x - \sum_{j=1}^{k} \frac{(x, \mathbf{f}_j)}{(\mathbf{f}_j, \mathbf{f}_j)} \mathbf{f}_j. \tag{5.7}$$

Непосредственно можно убедиться, что:

$$y \in L(\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_k), \quad z \perp L(\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_k).$$

Проверим второе утверждение. Очевидно, что достаточно проверить свойства (5.4). Действительно, имеем:

$$\begin{aligned}(z, \mathbf{f}_m) = (x, \mathbf{f}_m) - \left(\sum_{j=1}^{k} \frac{(x, \mathbf{f}_j)}{(\mathbf{f}_j, \mathbf{f}_j)} \mathbf{f}_j, \mathbf{f}_m \right) &= \\ = (x, \mathbf{f}_m) - \sum_{j=1}^{k} \frac{(x, \mathbf{f}_j)}{(\mathbf{f}_j, \mathbf{f}_j)} (\mathbf{f}_j, \mathbf{f}_m) &= \\ = (x, \mathbf{f}_m) - (x, \mathbf{f}_m) = 0, \quad m = \overline{1, k}.\end{aligned} \tag{5.8}$$

По своему смыслу вектор z, определенный равенством из (5.7) — это «перпендикуляр» к линейной оболочке $L(\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_k)$. Наконец, представление (5.2) можно записать так:

$$x = \sum_{j=1}^{k} \frac{(x, \mathbf{f}_j)}{(\mathbf{f}_j, \mathbf{f}_j)} \mathbf{f}_j + \left(x - \sum_{j=1}^{k} \frac{(x, \mathbf{f}_j)}{(\mathbf{f}_j, \mathbf{f}_j)} \mathbf{f}_j \right). \tag{5.9}$$

Решение задачи об ортогональной проекции завершено. ⊠

Возникает вопрос: а всегда ли существует ортонормированный базис в евклидовом и унитарном пространствах? Ответ на этот вопрос дает следующая *теорема Грама–Шмидта*.

Т е о р е м а 6. *В любом нетривиальном евклидовом (в унитарном) пространстве* $\mathcal{E}(\mathcal{U})$ *существует ортонормированный базис.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — это базис в $\mathcal{E}(\mathcal{U})$. По нему будем строить ортонормированный базис.

Шаг 1. Первый вектор будущего базиса возьмем равным первому вектору исходного базиса:

$$\mathbf{e}_{1'} = \mathbf{e}_1 \Rightarrow L(\mathbf{e}_1) = L(\mathbf{e}_{1'}). \tag{5.10}$$

Шаг 2. Предположим, что мы построили ортогональный базис $\{\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{k'}\}$ в линейной оболочке $L(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k)$ при $1 \leqslant k \leqslant n-1$. В частности, имеем:

$$L(\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{k'}) = L(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k), \quad k' = k.$$

Теперь по вектору $\mathbf{e}_{k+1} \in L(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_{k+1})$ согласно разложению (5.9) построим перпендикуляр $\mathbf{e}_{k'+1}$ к линейной оболочке $L(\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{k'})$. Действительно, справедливо разложение:

$$\mathbf{e}_{k+1} = \sum_{j'=1}^{k'} \frac{(\mathbf{e}_{k+1}, \mathbf{e}_{j'})}{(\mathbf{e}_{j'}, \mathbf{e}_{j'})}\mathbf{e}_{j'} + \left(\mathbf{e}_{k+1} - \sum_{j'=1}^{k'} \frac{(\mathbf{e}_{k+1}, \mathbf{e}_{j'})}{(\mathbf{e}_{j'}, \mathbf{e}_{j'})}\mathbf{e}_{j'}\right), \tag{5.11}$$

причем вектор:

$$\mathbf{e}_{k'+1} = \mathbf{e}_{k+1} - \sum_{j'=1}^{k'} \frac{(\mathbf{e}_{k+1}, \mathbf{e}_{j'})}{(\mathbf{e}_{j'}, \mathbf{e}_{j'})}\mathbf{e}_{j'} \tag{5.12}$$

— есть перпендикуляр к линейной оболочке:

$$L(\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{k'}) = L(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k).$$

Заметим, что:

$$\mathbf{e}_{j'} \in L(\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{k'}) = L(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k) \subset L(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_{k+1}) \quad j' = \overline{1, k'},$$

а из вида (5.12) вытекает, что и вектор $\mathbf{e}_{k'+1} \in L(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_{k+1})$. Итак, семейство ненулевых векторов $\{\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{k'}, \mathbf{e}_{k'+1}\}$ попарно ортогональны. В силу результата леммы 10 это семейство линейно независимо, причем по построению принадлежат линейной оболочке $L(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_{k+1})$, размерность которой, очевидно, равна $k+1$, т.е. совпадает с числом векторов семейства $\{\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{k'}, \mathbf{e}_{k'+1}\}$. Значит это семейство образует базис в линейной оболочке $L(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_{k+1})$.

Таким образом, мы построили ортогональный базис:

$$\{\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{k'}, \mathbf{e}_{k'+1}\}$$

в линейной оболочке $L(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_{k+1})$.

В силу метода математической индукции мы приходим к выводу о существовании ортогонального базиса в евклидовом $\mathcal{E}$ (унитарном $\mathcal{U}$) пространстве. Осталось провести его нормировку:

$$\mathbf{e}_{1''} = \frac{\mathbf{e}_{1'}}{\|\mathbf{e}_{1'}\|}, \ldots, \mathbf{e}_{n''} = \frac{\mathbf{e}_{n'}}{\|\mathbf{e}_{n'}\|}, \quad n'' = n.$$

Теорема доказана.

Замечание 3. *Многочлены Лежандра.* В пространстве вещественных непрерывных на отрезке $[-1,1]$ функций $C[-1,1]$ вводится скалярное умножение следующим образом:

$$(f,g)=\int\limits_{-1}^{1} f(t)g(t)\,dt. \tag{5.13}$$

Соответственно:

$$\|f\|^2=\int\limits_{-1}^{1} f^2(t)\,dt. \tag{5.14}$$

Возьмем линейно независимое семейство одночленов:

$$1,t,t^2,t^3,\ldots,t^k,\ldots \tag{5.15}$$

и применим к нему процесс ортогонализации. В результате получим последовательность многочленов:

$$f_0(t)=1,\quad f_1(t)=t,\quad f_2(t)=t^2-\frac{1}{3},\quad f_3(t)=t^3-\frac{3}{5}t,\quad \ldots. \tag{5.16}$$

После специальной подстановки вида:

$$p_k(t)=\lambda_k f_k(t), \tag{5.17}$$

где λ_k выбираются из условия:

$$p_k(1)=1. \tag{5.18}$$

Можно доказать, что:

$$p_k(t)=\frac{1}{2^k k!}\frac{d^k}{dt^k}\left\{(t^2-1)\right\},\quad \|p_k(t)\|^2=\frac{2}{2k+1}. \tag{5.19}$$

Многочлены (5.19) носят название многочленов Лежандра.

§ 6. Ортогональные проекторы

Определение 10. *Ортогональной проекцией вектора x на линейное подпространство $\mathcal{P}$ евклидова $\mathcal{E}$ или унитарного пространства $\mathcal{U}$ называется такой вектор $y\in\mathcal{P}$, что разность $x-y$ ортогональна $\mathcal{P}$.*

Лемма 12. *Ортогональная проекция произвольного вектора x на любое заданное нетривиальное линейное подпространство $\mathcal{P}$ определяется единственным образом и является линейной функцией от вектора x.*

Доказательство. *Существование проекции.* Для этого в евклидовом $\mathcal{E}$ (в унитарном пространстве $\mathcal{U}$) выберем какой–либо ортонормированный базис $\{\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n\}$ таким образом, чтобы набор векторов

$\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m\}$, $m = \dim \mathcal{P}$, образовывал базис линейного подпространства $\mathcal{P}$ и построим вектор y по правилу:

$$y = \sum_{j=1}^{m} (x, \mathbf{e}_i) \cdot \mathbf{e}_i. \tag{6.1}$$

Тогда с учетом результата теоремы 5 имеем:

$$x = \sum_{j=1}^{n} (x, \mathbf{e}_i) \cdot \mathbf{e}_i \tag{6.2}$$

и поэтому:

$$x - y = \sum_{j=m+1}^{n} (x, \mathbf{e}_i) \cdot \mathbf{e}_i \perp \mathcal{P} = L(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m) \tag{6.3}$$

Единственность проекции. Пусть существует две ортогональные проекции $y_1, y_2 \in \mathcal{P}$. Тогда, с одной стороны, имеем:

$$y_1 - y_2 \in \mathcal{P}. \tag{6.4}$$

С другой стороны,

$$x - y_1 \quad \text{и} \quad x - y_2 \quad \perp \ \mathcal{P}.$$

Поэтому если $z \in \mathcal{P}$, то имеем:

$$((x - y_1) - (x - y_2), z) = (x - y_1, z) - (x - y_2, z) = 0 \quad \text{для всех} \quad z \in \mathcal{P}.$$

Следовательно, справедлива следующая цепочка соотношений:

$$y_1 - y_2 = (y_1 - x) - (y_2 - x) \perp \mathcal{P} \Rightarrow y_1 - y_2 \in \mathcal{P}^{\perp}. \tag{6.5}$$

Поскольку $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}^{\perp} = \{\vartheta\}$, то $y_1 = y_2$.

Линейная зависимость от x. Из формулы (6.1) в силу линейности скалярного произведения по первому аргументу вытекает линейная зависимость $y = y(x)$.

Лемма доказана.

Определение 11. *Оператор P, сопоставляющий всякому вектору x его ортогональную проекцию на линейное подпространство $\mathcal{P}$, называется ортогональным проектором на подпространство $\mathcal{P}$.*

Лемма 13. *Если $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m\}$ при $m = \dim \mathcal{P}$ — какой–либо ортонормированный базис в линейном подпространстве $\mathcal{P}$, то ортогональный проектор на $\mathcal{P}$ задается формулой:*

$$Px = \sum_{j=1}^{m} (x, \mathbf{e}_j) \cdot \mathbf{e}_j \tag{6.6}$$

и, в частности, является линейным оператором.

Доказательство. Достроим ортонормированный базис $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m\}$ до ортонормированного базиса $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ во всем евклидовом пространстве $\mathcal{E}$ (унитарного пространства $\mathcal{U}$). С этой целью сначала просто достраиваем базис $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m\}$ до базиса во всем линейной пространстве, а затем используем процедуру ортогонализации Грама–Шмидта. После этого достаточно воспользоваться доказательством леммы 12.

Лемма доказана.

Лемма 14. *Оператор P удовлетворяет равенству $P^2 = P$.*

Доказательство. Пусть $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m\}$ — какой–то ортонормированный базис в линейном подпространстве $\mathcal{P}$. Тогда согласно результату леммы 13 ортогональный проектор имеет вид (6.6) и, в частности,

$$P\mathbf{e}_k = \sum_{j=1}^{m} (\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_j) \cdot \mathbf{e}_j = \sum_{j=1}^{m} \delta_{jk} \cdot \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_k \quad \text{при} \quad k = \overline{1, m}.$$

Поэтому для любого $x \in \mathcal{E}(\in \mathcal{U})$ имеем:

$$P^2 x = \sum_{j=1}^{m} (x, \mathbf{e}_j) \cdot P\mathbf{e}_j = \sum_{j=1}^{m} (x, \mathbf{e}_j) \cdot \mathbf{e}_j = Px.$$

Лемма доказана.

Теорема 7. *Если P — оператор ортогонального проектирования на линейное подпространство $\mathcal{P}$ евклидова пространства $\mathcal{E}$ либо унитарного пространства $\mathcal{U}$, то справедливы равенства*:

$$\mathcal{E}(\mathcal{U}) = \operatorname{im} P \oplus \ker P, \quad \operatorname{im} P = \mathcal{P}, \quad \ker P = \mathcal{P}^{\perp}. \tag{6.7}$$

Доказательство. В силу результата леммы 14 и ранее доказанного свойства проекторов вытекает равенство $\mathcal{E}(\mathcal{U}) = \operatorname{im} P \oplus \ker P$. При доказательстве леммы 12 было доказано, что $\operatorname{im} P = \mathcal{P}$. Заметим, что по определению $\mathcal{P} = \operatorname{im} P$. Докажем теперь, что $\ker P = \mathcal{P}^{\perp}$. Действительно, справедлива следующая цепочка соотношений:

$$y \in \ker P \Leftrightarrow z = P(y) = \vartheta \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow z = \vartheta \in \mathcal{P}, \quad y - z \perp \mathcal{P} \Leftrightarrow y \perp \mathcal{P} \Leftrightarrow y \in \mathcal{P}^{\perp}.$$

Теорема доказана.

§ 7. Матрица перехода между ортонормированными базисами

Лемма 15. *Если два ортонормированных базиса* $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ *и* $\{\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}\}$ *унитарного пространства* $\mathcal{U}$ *связаны матрицей* C :

$$(\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}) = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot C, \tag{7.1}$$

то справедливо равенство:

$$C^T \cdot \overline{C} = I. \tag{7.2}$$

Доказательство. Действительно, пусть:

$$\mathbf{E} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \quad \text{и} \quad \mathbf{E}' = (\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}).$$

Тогда:

$$x = \mathbf{E} \cdot X_e = \mathbf{E}' \cdot X_{e'}, \quad y = \mathbf{E} \cdot Y_e = \mathbf{E}' \cdot Y_{e'},$$
$$X_e = C \cdot X_{e'}, \quad Y_e = C \cdot Y_{e'} \tag{7.3}$$

и справедливы следующие равенства:

$$X_e^T \cdot G_e \cdot \overline{Y_e} = (x, y) = X_{e'}^T \cdot G_{e'} \cdot \overline{Y_{e'}}. \tag{7.4}$$

Поскольку базисы $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ и $\{\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}\}$ являются ортонормированными, то $G_e = G_{e'} = I$. Поэтому имеет место равенство:

$$X_e^T \cdot \overline{Y_e} = (x, y) = X_{e'}^T \cdot \overline{Y_{e'}}. \tag{7.5}$$

Из (7.3) и (7.5) вытекает равенство:

$$X_{e'}^T \cdot C^T \cdot \overline{C} \cdot \overline{Y_{e'}} = X_{e'}^T \cdot \overline{Y_{e'}},$$

которое должно быть выполнено для всех столбцов $X_{e'}, Y_{e'} \in \mathbb{C}^{n\times 1}$. Поэтому приходим к равенству:

$$C^T \cdot \overline{C} = I.$$

Лемма доказана.

Лемма 16. *Если два ортонормированных базиса* $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ *и* $\{\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}\}$ *евклидова пространства* $\mathcal{E}$ *связаны матрицей* C :

$$(\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}) = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot C, \tag{7.6}$$

то справедливо равенство:

$$C^T \cdot C = I. \tag{7.7}$$

Доказательство. Доказывается аналогично доказательству равенству (7.2) леммы 15.

Лемма доказана.

§ 8. Примеры решения задач

Задача 1. *Ортогональное проецирование 1.* Найти ортогональную проекцию $x^{\|}$ и ортогональную составляющую $x^{\perp}$ вектора $x = (2, -5, 4, -3)$ при проекции на подпространство:

$$U = L(a_1, a_2) \subset \mathbb{R}_4, \quad a_1 = (1, 2, 1, 0), \quad a_2 = (2, 1, 4, -5). \tag{8.1}$$

Решение. Вектор $x^{\|} \in U$. Поэтому для некоторых $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ справедливо равенство:

$$x^{\|} = \lambda a_1 + \mu a_2. \tag{8.2}$$

Тогда имеем:

$$x^{\perp} = x - x^{\|} = (2 - \lambda - 2\mu, -5 - 2\lambda - \mu, 4 - \lambda - 4\mu, -3 + 5\mu). \tag{8.3}$$

Числа λ и μ находим из условия ортогональности вектора $x^{\perp}$ линейному подпространству $U = L(a_1, a_2)$. Заметим, что векторы a_1 и a_2 являются линейно независимыми в $\mathbb{R}_4$. Поэтому справедливы следующие равенства:

$$(x^{\perp}, a_1) = (x^{\perp}, a_2) = 0. \tag{8.4}$$

Из (8.1), (8.3) и (8.4) получаем следующую систему уравнений:

$$6\lambda + 8\mu + 4 = 0, \quad 8\lambda + 46\mu - 30 = 0, \tag{8.5}$$

которая имеет единственное решение $\lambda = -2$, $\mu = 1$. Отсюда и из (8.2) получаем:

$$x^{\|} = -2a_1 + a_2 = (0, -3, 2, -5),$$
$$x^{\perp} = x - x^{\|} = (2, -2, 2, 2).$$

Задача 2. *Ортогональное проецирование 2.* В пространстве $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ вещественных матриц размера 2×2 задано скалярное произведение:

$$(A, B) = \mathrm{tr}(A^T \cdot B). \tag{8.6}$$

Найти ортогональную проекцию $X^{\|}$ и ортогональную составляющую $X^{\perp}$ матрицы:

$$X = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \tag{8.7}$$

при проекции на линейное подпространство U, заданное системой линейных уравнений:

$$\mathrm{tr}\, A = O, \quad \mathrm{tr}(J \cdot A) = O, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{8.8}$$

Решение. Пусть:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in U. \tag{8.9}$$

Тогда имеем:

$$\mathrm{tr}\, A = 0 \Leftrightarrow a_{11} + a_{22} = 0, \tag{8.10}$$

$$\operatorname{tr}(J\cdot A)=0=\operatorname{tr}\left[\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\right]=$$
$$=\operatorname{tr}\left[\begin{pmatrix}a_{21} & a_{22}\\ -a_{11} & -a_{12}\end{pmatrix}\right]=a_{21}-a_{12}=0. \quad (8.11)$$

Поэтому $A\in U$ тогда и только тогда, когда:

$$a_{11}+a_{22}=0,\quad a_{21}-a_{12}=0. \quad (8.12)$$

Несложно найти ФСР этой системы уравнений:

$$A_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},\quad A_2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\quad U=L(A_1,A_2). \quad (8.13)$$

Заметим, что

$$(A_1,A_2)=\operatorname{tr}(A_1^T\cdot A_2)=$$
$$=\operatorname{tr}\left[\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right]=\operatorname{tr}\left[\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\right]=0. \quad (8.14)$$

Отметим, что

$$X=X^{\parallel}+X^{\perp},\quad X^{\parallel}\in U,\quad X^{\perp}\perp U. \quad (8.15)$$

Поэтому имеем:

$$X^{\parallel}=\lambda A_1+\mu A_2,\quad A_1\perp A_2. \quad (8.16)$$

Из равенства (8.16) сразу же находим:

$$\lambda=\frac{(X^{\parallel},A_1)}{(A_1,A_1)}=\frac{(X,A_1)}{(A_1,A_1)},\quad \mu=\frac{(X^{\parallel},A_2)}{(A_2,A_2)}=\frac{(X,A_2)}{(A_2,A_2)}. \quad (8.17)$$

Следовательно,

$$X^{\parallel}=\frac{(X,A_1)}{(A_1,A_1)}A_1+\frac{(X,A_2)}{(A_2,A_2)}A_2, \quad (8.18)$$

причем:

$$(A_1,A_1)=\operatorname{tr}\left[\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\right]=\operatorname{tr}\left[\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right]=2, \quad (8.19)$$

$$(X,A_1)=\operatorname{tr}\left[\begin{pmatrix}3 & -2\\ 4 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\right]=\operatorname{tr}\left[\begin{pmatrix}3 & 2\\ 4 & -5\end{pmatrix}\right]=-2, \quad (8.20)$$

$$(A_2,A_2)=\operatorname{tr}\left[\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right]=\operatorname{tr}\left[\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right]=2, \quad (8.21)$$

$$(X,A_2)=\operatorname{tr}\left[\begin{pmatrix}3 & -2\\ 4 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right]=\operatorname{tr}\left[\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 5 & 4\end{pmatrix}\right]=2. \quad (8.22)$$

Поэтому из (8.18) с учетом (8.19)–(8.22) имеем:

$$X^{\parallel}=-A_1+A_2=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}, \quad (8.23)$$

$$X^{\perp} = X - X^{\parallel} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}. \tag{8.24}$$

З а д а ч а 3. *Экзаменационная задача.* Пусть f — линейная форма в линейном вещественном пространстве $\mathcal{L}$, $\dim \mathcal{L} \geqslant 2$. Рассмотрим выражение:

$$A(x, y) = \langle f, x\rangle\langle f, y\rangle \quad \text{для всех} \quad x, y \in \mathcal{L}. \tag{8.25}$$

Является ли $A(x, y)$ билинейной формой? Если является, может ли эта билинейная форма задавать скалярное произведение в $\mathcal{L}$?

Решение. Шаг 1. В силу свойств линейности линейной формы (ковектора) приходим к выводу о том, что форма (8.25) является билинейной.

Шаг 2. Но скалярное произведение билинейная форма (8.25) не задает. Вот почему. Рассмотрим соответствующую квадратичную форму:

$$Q(x) = A(x, x) = (\langle f, x\rangle)^2 \geqslant 0.$$

Однако, равенство $Q(x) = 0$ может быть выполнено не только при $x = \vartheta$, а вообще для любого $x \in \mathcal{L}$ такого, что $\langle f, x\rangle = 0$.

З а д а ч а 4. *Вычислительная задача.* В линейном вещественном пространстве $P_2(\mathbb{R})$ (пространство всех полиномов на вещественной оси степени не выше 2) заданы элементы:

$$x_1(t) = 1 + t^2, \quad x_2(t) = 5 + 2t + 3t^2, \tag{8.26}$$

$$x_3(t) = 2 + t + t^2, \quad x_4(t) = 4 + t + 3t^2. \tag{8.27}$$

Используя метод Гаусса, выполнить задания: найти базис линейной оболочки $L(x_1, x_2, x_3, x_4)$; найти размерность линейной оболочки $L(x_1, x_2, x_3, x_4)$; достроить найденный базис линейной оболочки $L(x_1, x_2, x_3, x_4)$ до базиса пространство $P_2(\mathbb{R})$.

Решение. Базис в $P_2(\mathbb{R})$ образуют следующие элементы:

$$\mathbf{e}_1 = 1, \quad \mathbf{e}_2 = t, \quad \mathbf{e}_3 = t^2. \tag{8.28}$$

Справедливы равенства для элементов (8.26), (8.27):

$$x_1(t) = \mathbf{E} \cdot X_1,\ x_2(t) = \mathbf{E} \cdot X_2,\ x_3(t) = \mathbf{E} \cdot X_3,\ x_4(t) = \mathbf{E} \cdot X_4, \tag{8.29}$$

где $\mathbf{E} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ и

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ X_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},\ X_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ X_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}. \tag{8.30}$$

Составим матрицу:

$$A = \begin{Vmatrix} X_1^T \\ X_2^T \\ X_3^T \\ X_4^T \end{Vmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}. \tag{8.31}$$

Из второй строчки вычтем первую, умноженную на 3; из третьей строчки вычтем первую; из четвертой строчки вычтем первую, умноженную на три и получим эквивалентную матрицу:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \backsim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

В качестве базисного минора можно выбрать минор, расположенный на пересечении первой и третьей строчках, и первого и второго столбца. Поэтому базис в линейной оболочке $L(x_1, x_2, x_3, x_4)$ образуют, например, элементы $x_1(t)$ и $x_3(t)$. Теперь построим следующее ортогональное дополнение:

$$(L(X_1, X_2, X_3, X_4))^{\perp} = (L(X_1, X_3))^{\perp}$$

относительно стандартного скалярного произведения $(\cdot, \cdot)$ в $\mathbb{R}^3$. Пусть

$$y(t) = \mathbf{E} \cdot Y, \quad Y^T = (\alpha, \beta, \gamma) \in (L(X_1, X_3))^{\perp}. \tag{8.32}$$

Поэтому для Y справедливы равенства:

$$0 = (X_1, Y) = \alpha + \gamma = 0, \quad 0 = (X_3, Y) = 2\alpha + \beta + \gamma \Rightarrow \\ \Rightarrow \alpha = -\beta = -\gamma. \tag{8.33}$$

Значит, базис в $(L(X_1, X_3))^{\perp}$ образует, например, столбец:

$$Y = (1, -1, -1)^T. \tag{8.34}$$

Поскольку:

$$\mathbb{R}^3 = L(X_1, X_3) \oplus (L(X_1, X_3))^{\perp},$$

то столбцы X_1, X_3, Y линейно независимы. Тогда линейно независимы и элементы $x_1(t)$, $x_3(t)$, $y(t)$, причем элементы $x_1(t)$ и $x_3(t)$ образуют базис в $L(x_1, x_2, x_3, x_4)$, а элемент $y(t)$ дополняет семейство $x_1(t)$, $x_3(t)$ до базиса в $P_2(\mathbb{R})$. Очевидно, что $\dim L(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2$.

Задача 5. *Вычислительная задача.* В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ (скалярное произведение определяется формулой $(x, y) = x^1y^1 + x^2y^2 + x^3y^3$ заданы элементы:

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{8.35}$$

Доказать, что элементы x_1, x_2, x_3 линейно независимы. Применить к последовательности x_1, x_2, x_3 процесс ортогонализации Грама–Шмидта (без нормировки).

Решение. Запишем матрицу:

$$A = \begin{Vmatrix} x_1^T \\ x_2^T \\ x_3^T \end{Vmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вычтем из первой строчки сумму второй и третьей. В результате получим эквивалентную матрицу:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \backsim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{rang} A = 3.$$

Следовательно, элементы x_1, x_2, x_3 линейно независимы.

Переходим к процессу ортогонализации Грама–Шмидта. Справедливы следующие равенства:

$$y_1 = x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{8.36}$$

$$y_2 = x_2 - \frac{(x_2, y_1)}{(y_1, y_1)} y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}, \tag{8.37}$$

$$\begin{gathered} y_3 = x_3 - \frac{(x_3, y_1)}{(y_1, y_1)} y_1 - \frac{(x_3, y_2)}{(y_2, y_2)} y_2 = \\ = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}. \end{gathered} \tag{8.38}$$

Задача 6. *Вычислительная задача.* В линейном пространстве $P_2[-1, 1]$ (пространство всех полиномов на сегменте $[-1, 1]$) скалярное произведение определяется формулой:

$$(x, y) = \int\limits_{-1}^{1} x(t) y(t)\, dt.$$

В этом евклидовом пространстве заданы элементы:

$$x_1(t) = 1, \quad x_2(t) = t, \quad x_3(t) = t^3. \tag{8.39}$$

Доказать, что элементы x_1, x_2, x_3 линейно независимы. Применить к последовательности x_1, x_2, x_3 процесс ортогонализации Грама–Шмидта (без нормировки).

Решение. Линейная независимость этого семейства была доказана ранее в лекциях. Приступим к процессу ортогонализации Грама–Шмидта. Справедливы равенства:

$$y_1 = x_1 = 1, \tag{8.40}$$

$$y_2 = x_2 - \frac{(x_2, y_1)}{(y_1, y_1)} y_1 = x_2 = t, \quad (x_2, y_1) = \int\limits_{-1}^{1} t\, dt = 0, \tag{8.41}$$

$$y_3 = x_3 - \frac{(x_3, y_1)}{(y_1, y_1)} y_1 - \frac{(x_3, y_2)}{(y_2, y_2)} y_2 = t^2 - \frac{1}{3}, \tag{8.42}$$

поскольку:

$$(x_3, y_1) = \frac{2}{3}, \quad (y_1, y_1) = 2, \quad (x_3, y_2) = \int\limits_{-1}^{1} t^3\, dt = 0.$$

Задача 7. *Вычислительная задача.* Рассматривается евклидово пространство $\mathcal{E}$ с ортонормированным базисом $\mathbf{E} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4)$. Заданы столбцы координат элементов x_1, x_2, x в этом базисе:

$$x_1 = \mathbf{E} \cdot X_1, \quad x_2 = \mathbf{E} \cdot X_2, \quad x = \mathbf{E} \cdot X, \tag{8.43}$$

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{8.44}$$

Найти ортогональную проекцию элемента x на $L(x_1, x_2)$ и перпендикуляр элемента x к $L(x_1, x_2)$.

Решение. Поскольку базис E в евклидовом пространстве ортонормированный, то можно все вычисления провести в координатном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^4$ относительно стандартного скалярного произведения. Справедливы следующие равенства:

$$X = X_\parallel + X_\perp, \tag{8.45}$$

$$X_\parallel = \alpha X_1 + \beta X_2 = \begin{pmatrix} \alpha + \beta \\ \beta \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix}, \tag{8.46}$$

$$X_\perp = X - X_\parallel = \begin{pmatrix} 1 - \alpha - \beta \\ -\beta \\ 0 \\ -\alpha \end{pmatrix}, \tag{8.47}$$

причем:

$$(X_\perp, X_1) = 0 \Leftrightarrow 2\alpha + \beta = 1, \tag{8.48}$$

$$(X_\perp, X_2) = 0 \Leftrightarrow \alpha + 2\beta = 1. \tag{8.49}$$

Из (8.48) и (8.49) получаем:

$$\alpha = \beta = \frac{1}{3}.$$

Из (8.46) и (8.47) получаем, что:

$$X_\parallel = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 0 \\ 1/3 \end{pmatrix}, \quad X_\perp = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -1/3 \\ 0 \\ -1/3 \end{pmatrix}.$$

Задача 8. *Вычислительная задача.* Рассматривается евклидово пространство $\mathcal{E}$ с ортонормированным базисом $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$. Линейное подпространство Q задано уравнением $x^1 - 2x^2 + 3x^3 = 0$. Найти базис ортогонального дополнения к подпространству Q.

Решение. Итак, согласно условию задачи (в силу ортонормированности рассматриваемого базиса) имеем:

$$Q = \{x \in \mathcal{E} : (x, a) = 0\}, \quad a = \mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3. \tag{8.50}$$

Значит, Q — плоскость, проходящая через нулевой элемент евклидова пространства $\mathcal{E}$. Справедливо разложение:

$$\mathcal{E} = Q \oplus Q^{\perp}, \tag{8.51}$$

т.е. для любого $x \in \mathcal{E}$ найдутся единственные $y \in Q$ и $z \in Q^{\perp}$, что справедливо равенство:

$$x = y + z, \quad y \in Q, \quad z \perp Q. \tag{8.52}$$

Это означает, что $Q^{\perp}$ — прямая, проходящая через нулевой вектор евклидова пространства $\mathcal{E}$ и перпендикулярная плоскости Q. Следовательно,

$$Q^{\perp} = \{x = t \cdot a, \quad t \in \mathbb{R}\}. \tag{8.53}$$

Базис в $Q^{\perp}$ — это, например, вектор a.

Задача 9. *Вычислительная задача.* Рассматривается линейное вещественное пространство $\mathcal{L}$ с базисом $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$. Для каждого $\lambda \in \mathbb{R}$ задана матрица билинейной формы B_λ в базисе $\mathbf{E} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$:

$$B_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & -2\lambda \\ -2\lambda & 4 \end{pmatrix}. \tag{8.54}$$

При каких $\lambda \in \mathbb{R}$ рассматриваемую билинейную форму $B(x, y)$ можно принять за скалярное произведение в линейном пространстве $\mathcal{L}$? При каких $\lambda \in \mathbb{R}$ рассматриваемую билинейную форму $B(x, y)$ можно принять за псевдоскалярное произведение в линейном пространстве $\mathcal{L}$?

Решение. Шаг 1. Симметричность. Пусть $x, y \in \mathcal{L}$. Тогда имеем:

$$x = x^1 \cdot \mathbf{e}_1 + x^2 \cdot \mathbf{e}_2, \quad y = y^1 \cdot \mathbf{e}_1 + y^2 \cdot \mathbf{e}_2, \tag{8.55}$$

$$B(x, y) = (x^1, x^2) \cdot B_\lambda \cdot \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix} = \\ = \lambda x^1 y^1 - 2\lambda x^1 y^2 - 2\lambda x^2 y^1 + 4x^2 y^2. \tag{8.56}$$

Из равенства (8.56) видно, что $B(x, y) = B(y, x)$.

Шаг 2. Невырожденность. Рассмотрим теперь квадратичную форму $Q(x) = B(x, x)$ и методом Лагранжа приведем ее к каноническому виду. Справедливы равенства:

$$Q(x) = B(x, x) = \lambda (x^1)^2 - 4\lambda x^1 x^2 + 4(x^2)^2 =$$

$$= \lambda(x^1 - 2x^2)^2 + 4(1-\lambda)(x^2)^2. \quad (8.57)$$

Из явного вида (8.57) и в силу инвариантности положительного и отрицательного индексов инерции квадратичных форм приходим к выводу о том, что квадратичная форма $Q(x)$ вырожденная при $\lambda = 0$ или при $\lambda = 1$.

Шаг 3. Скалярное и псевдоскалярное произведения. Из равенства (8.57) получаем, что при $\lambda \in (0,1)$ рассматриваемая билинейная форма $B(x,y)$ является скалярным произведением, а при $\lambda \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ билинейная форма $B(x,y)$ является псевдоскалярным произведением.

Задача 10. *Вычислительная задача.* Рассматривается линейное вещественное пространство $\mathcal{L}$ с базисом $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$. Для каждого $\lambda \in \mathbb{R}$ задана матрица квадратичной формы Q_λ в базисе $\mathbf{E} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$:

$$Q_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & -2\lambda \\ -2\lambda & 4 \end{pmatrix}. \quad (8.58)$$

Для каждого $\lambda \in \mathbb{R}$ исследовать квадратичную форму Q на знакоопределенность и записать ее канонический вид.

Решение. С учетом (8.57) канонический вид квадратичной формы $Q(x)$ имеет следующий вид:

$$Q(x) = \lambda(y^1)^2 + 4(1-\lambda)(y^2)^2, \quad (8.59)$$

$$x = x^1 \cdot \mathbf{e}_1 + x^2 \cdot \mathbf{e}_2, \quad \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}. \quad (8.60)$$

Из (8.59) приходим к выводу о том, что при $\lambda \in (0,1)$ квадратичная форма $Q(x)$ является положительно определенной; при $\lambda = 0$ или при $\lambda = 1$ квадратичная форма $Q(x)$ вырожденная; при $\lambda \in (-\infty, 0) \cup (1 + +\infty)$ не является знакоопределенной.

Задача 11. *Вычислительная задача.* Рассматривается линейное вещественное пространство $\mathcal{L}$ с базисом $\mathbf{E} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4)$. Задано выражение для квадратичной формы Q в базисе $\mathbf{E}$:

$$Q(x) = x^1x^2 + x^1x^3 + x^2x^3. \quad (8.61)$$

Найти матрицу квадратичной формы Q в базисе $\mathbf{E}$. Используя метод Лагранжа, привести квадратичную форму Q к каноническому виду: найти матрицу квадратичной формы Q в каноническом базисе $\mathbf{G} = (\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3, \mathbf{g}_4)$; найти матрицу перехода от базиса $\mathbf{E}$ к базису $\mathbf{G}$ и наоборот.

Решение. Полярная билинейная форма $B(x,y)$ к квадратичной форме $Q(x) = B(x,x)$ имеет, очевидно, следующий вид:

$$B(x,y) = \frac{1}{2}(x^1y^2 + x^2y^1) + \frac{1}{2}(x^1y^3 + x^3y^1) + \frac{1}{2}(x^2y^3 + x^3y^2) =$$

$$= (x^1, x^2, x^3, x^4) \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{pmatrix}. \quad (8.62)$$

Поскольку матрица квадратичной формы и матрица соответствующей полярной билинейной формы совпадают, то имеем:

$$Q_e = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (8.63)$$

В выражении (8.61) сделаем замену переменных:

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \end{pmatrix} = C_1 \cdot \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{pmatrix}, \quad C_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (8.64)$$

При этом новый базис $\mathbf{F} = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3, \mathbf{f}_4)$ связан со старым базисом $\mathbf{E} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4)$ выражением:

$$\mathbf{F} = \mathbf{E} \cdot C_1. \quad (8.65)$$

После преобразования (8.64) квадратичная форма $Q(x)$ примет следующий вид:

$$\begin{aligned} Q(x) = (y^1)^2 - (y^2)^2 + (y^1 - y^2)y^3 + (y^1 + y^2)y^3 = \\ = (y^1)^2 - (y^2)^2 + 2y^1y^3 = \\ = ((y^1)^2 + 2y^1y^3 + (y^3)^2) - (y^2)^2 - (y^3)^2 = \\ = (y^1 + y^3)^2 - (y^2)^2 - (y^3)^2 = (z^1)^2 - (z^2)^2 - (z^3)^2, \end{aligned} \quad (8.66)$$

где

$$\begin{pmatrix} z^1 \\ z^2 \\ z^3 \\ z^4 \end{pmatrix} = C_2 \cdot \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (8.67)$$

При этом канонический базис $\mathbf{G} = (\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3, \mathbf{g}_4)$ связан с промежуточным базисом $\mathbf{F} = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3, \mathbf{f}_4)$ соотношением:

$$\mathbf{F} = \mathbf{G} \cdot C_2. \quad (8.68)$$

Из (8.65) и (8.68) получаем равенство:

$$\mathbf{G} = \mathbf{E} \cdot C_3, \quad C_3 = C_1 \cdot C_2^{-1}. \quad (8.69)$$

Методом Гаусса вычисления обратной матрицы находим, что:

$$C_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{8.70}$$

Поэтому из (8.70) получаем, что

$$C_3 = C_1 \cdot C_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{8.71}$$

Итак, имеем:

$$\mathbf{g}_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{g}_2 = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{g}_3 = -\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{g}_4 = \mathbf{e}_4.$$

В базисе $\mathbf{G} = (\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3, \mathbf{g}_4)$ матрица Q_g квадратичной формы Q имеет следующий вид:

$$Q_g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

З а д а ч а 12. *Неравенство Адамара.* Доказать, что для определителя $\det G_a$ матрицы Грама семейства векторов $\{a_1, \ldots, a_n\}$ евклидова пространства $\mathcal{E}$ справедливо неравенство:

$$\det G_n \leqslant \|a_1\|^2 \cdots \|a_n\|^2, \tag{8.72}$$

причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда векторы $\{a_1, \ldots, a_n\}$ попарно ортогональны или хотя бы один из них равен нулю.

Решение. При $n = 1$ утверждение очевидно. Пусть мы доказали неравенство (8.72) при $n = m$. Докажем это неравенство для $n = m + 1$, т.е. выполнено неравенство:

$$\det G_m := \begin{vmatrix} (a_1, a_1) & \cdots & (a_1, a_m) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_m, a_1) & \cdots & (a_m, a_m) \end{vmatrix} \leqslant \|a_1\|^2 \cdots \|a_m\|^2. \tag{8.73}$$

Для вектора a_{m+1} справедливо представление:

$$a_{m+1} = x + y, \quad x \in L(a_1, \ldots, a_m), \quad y \in L^{\perp}(a_1, \ldots, a_m). \tag{8.74}$$

В частности, если $a_{m+1} \in L(a_1, \ldots, a_m)$, то $y = \vartheta$. Справедливо следующее равенство:

$$x = \sum_{j=1}^{m} \alpha^j a_j. \tag{8.75}$$

Рассмотрим определитель:

$$\det G_{m+1} := \begin{vmatrix} (a_1, a_1) & \cdots & (a_1, a_m) & (a_1, a_{m+1}) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (a_m, a_1) & \cdots & (a_m, a_m) & (a_m, a_{m+1}) \\ (a_{m+1}, a_1) & \cdots & (a_{m+1}, a_m) & (a_{m+1}, a_{m+1}) \end{vmatrix}. \tag{8.76}$$

Из последнего столбца определителя (8.77) вычтем линейную комбинацию первых m столбцов с соответствующими коэффициентами $\alpha^1, \ldots, \alpha^m$. В результате получим равенство:

$$\det G_{m+1} = \begin{vmatrix} (a_1, a_1) & \cdots & (a_1, a_m) & (a_1, a_{m+1}) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (a_m, a_1) & \cdots & (a_m, a_m) & (a_m, a_{m+1}) \\ (a_{m+1}, a_1) & \cdots & (a_{m+1}, a_m) & (a_{m+1}, a_{m+1}) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} (a_1, a_1) & \cdots & (a_1, a_m) & (a_1, y) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (a_m, a_1) & \cdots & (a_m, a_m) & (a_m, y) \\ (a_{m+1}, a_1) & \cdots & (a_{m+1}, y) & (a_{m+1}, y) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} (a_1, a_1) & \cdots & (a_1, a_m) & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (a_m, a_1) & \cdots & (a_m, a_m) & 0 \\ (a_{m+1}, a_1) & \cdots & (a_{m+1}, a_m) & (y, y) \end{vmatrix} = \|y\|^2 \det G_m, \tag{8.77}$$

где мы воспользовались тем, что

$$y \perp a_j \quad \text{при} \quad j = \overline{1, m}.$$

Из определения y имеют место неравенства:

$$\|a_{m+1}\|^2 = \|y\|^2 + \|x\|^2 \geqslant \|y\|^2,$$

причем равенство:

$$\|a_{m+1}\|^2 = \|y\|^2$$

имеет место тогда и только тогда, когда $a_{m+1} \perp L(a_1, \ldots, a_m)$. Итак, отсюда и из (8.77) в предположении индукции имеем:

$$\det G_{m+1} \leqslant \det G_m \|a_{m+1}\|^2 \leqslant \|a_1\|^2 \cdots \|a_m\|^2 \|a_{m+1}\|^2, \tag{8.78}$$

причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда либо векторы $\{a_1, \ldots, a_n\}$ ненулевые и попарно ортогональны либо в этом семействе есть нулевой вектор.

Задача 13. *Обобщенное неравенство Адамара.* Доказать неравенство:

$$\det G_n(a_1, \dots, a_n) \leqslant \det G_p(a_1, \dots, a_p) \det G_{n-p}(a_{p+1}, \dots, a_n). \tag{8.79}$$

В каком случае неравенство обращается в равенство?

Решение. При доказательстве предыдущей задачи фактически было доказано равенство:

$$\det G_n(a_1, \dots, a_n) = \|a_1\|^2 \|y_2\|^2 \cdots \|y_n\|^2, \tag{8.80}$$

причем:

$$y_{m+1} \in L^{\perp}(a_1, \dots, a_m), \quad a_{m+1} = \sum_{j=1}^{m} \alpha^j_{m+1} a_j + y_{m+1}, \quad \|y_m\| \leqslant \|a_m\|.$$

Из равенства (8.80) получаем:

$$\begin{aligned} \det G_n(a_1, \dots, a_n) &= \|a_1\|^2 \|y_2\|^2 \cdots \|y_p\|^2 \|y_{p+1}\|^2 \cdots \|y_n\|^2 \leqslant \\ &\leqslant \|a_1\|^2 \|y_2\|^2 \cdots \|y_p\|^2 \|a_{p+1}\|^2 \|y_{p+2}\|^2 \cdots \|y_n\|^2 = \\ &= \det G_p(a_1, \dots, a_p) \det G_{n-p}(a_{p+1}, \dots, a_n). \end{aligned} \tag{8.81}$$

Равенство достигается если есть нулевой вектор или все векторы ненулевые и попарно ортогональны.

Задача 14. Рассмотрим евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ со стандартным скалярным произведением. Записав явно в координатах неравенство Адамара, найти верхнюю оценку квадрата определителя произвольной вещественной матрицы $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Решение. Справедлива цепочка соотношений:

$$\begin{aligned} (\det A)^2 = \det(A^T A) &= \begin{vmatrix} (A^T)^1 A_1 & \cdots & (A^T)^1 A_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (A^T)^n A_1 & \cdots & (A^T)^n A_n \end{vmatrix} \leqslant \\ &\leqslant \prod_{j=1}^{n} (A^T)^j A_j = \prod_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \left(a^k_j\right)^2, \quad A = (a^k_j)^n_n. \end{aligned} \tag{8.82}$$

Задача 15. Доказать, что определитель $\det A_e$ матрицы A_e положительно определенной квадратичной формы удовлетворяет следующему неравенству:

$$\det A_e \leqslant \prod_{j=1}^{n} a_{jj}. \tag{8.83}$$

Решение. По условию задачи матрица A_e представима следующим образом:

$$A_e = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad a_{jk} = (\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k), \tag{8.84}$$

где $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — базис в некотором евклидовом пространстве, скалярное произведение в котором порождено некоторой положительно определенной симметричной билинейной формой. Но тогда согласно неравенству Адамара получаем оценку:

$$\det A_e \leqslant \prod_{j=1}^{n} (\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_j) = \prod_{j=1}^{n} a_{jj}. \tag{8.85}$$

З а д а ч а 16. Пусть $\mathcal{P}$ — линейное подпространство евклидова пространства $\mathcal{E}$. Доказать, что $\mathcal{P}^{\perp}$ — линейное подпространство и справедливо равенство:

$$\mathcal{E} = \mathcal{P} \oplus \mathcal{P}^{\perp}. \tag{8.86}$$

Решение. Пусть $x, y \in \mathcal{P}^{\perp}$, тогда для любого $z \in \mathcal{P}$ имеют место равенства:

$$(x, z) = (y, z) = 0 \Rightarrow (\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z) = 0,$$

т.е. $\mathcal{P}^{\perp}$ — линейное подпространство в $\mathcal{E}$.

Пусть $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m\}$ — базис в $\mathcal{P}$. Дополним его до базиса в $\mathcal{L}$. Получим следующий базис:

$$\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m, \mathbf{e}_{m+1}, \ldots, \mathbf{e}_n\}. \tag{8.87}$$

Тогда $x \in \mathcal{P}^{\perp}$ тогда и только тогда, когда:

$$(x, \mathbf{e}_1) = 0, \ldots, (x, \mathbf{e}_m) = 0, \tag{8.88}$$

причем:

$$x = \sum_{j=1}^{n} x^j \mathbf{e}_j. \tag{8.89}$$

Тогда (8.88) есть система m однородных уравнений относительно n неизвестных. Тогда базис в $\mathcal{P}^{\perp}$ состоит из $n - r$ векторов, причем $0 \leqslant r \leqslant m$. Стало быть,

$$\dim \mathcal{P}^{\perp} = n - r, \quad \dim \mathcal{P} = m. \tag{8.90}$$

Поэтому имеем:

$$\dim \mathcal{P} + \dim \mathcal{P}^{\perp} \geqslant \dim \mathcal{L}. \tag{8.91}$$

Заметим, что для $x \in \mathcal{P} \cap \mathcal{P}^{\perp}$ выполнено равенство $(x, x) = 0$, т.е. $x = \vartheta$. Отсюда и из (8.91) получаем, что

$$\mathcal{P} \cap \mathcal{P}^{\perp} = \{\vartheta\} \Rightarrow \mathcal{L} = \mathcal{P} \oplus \mathcal{P}^{\perp}.$$

З а д а ч а 17. Для любого линейного подпространства $\mathcal{P}$ евклидова пространства $\mathcal{E}$ доказать равенство:

$$\mathcal{P}^{\perp\perp} = \mathcal{P}. \tag{8.92}$$

Решение. В силу предыдущей задачи справедливы равенства:

$$\mathcal{E} = \mathcal{P} \oplus \mathcal{P}^{\perp} = \mathcal{P}^{\perp} \oplus \mathcal{P}^{\perp\perp}. \tag{8.93}$$

Очевидно, что $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}^{\perp\perp}$. Пусть $x \notin \mathcal{P}$ и $x \in \mathcal{P}^{\perp\perp}$. Тогда в силу (8.93) имеем $x \in \mathcal{P}^{\perp}$. Но тогда:

$$x \in \mathcal{P}^{\perp} \cap \mathcal{P}^{\perp\perp} = \{\vartheta\} \in \mathcal{P},$$

что противоречиво. Значит, $\mathcal{P}^{\perp\perp} = \mathcal{P}$.

З а д а ч а 18. Для любых двух линейных подпространств $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ евклидова пространства $\mathcal{E}$ доказать равенство:

$$(\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2)^{\perp} = \mathcal{P}_1^{\perp} \cap \mathcal{P}_2^{\perp}. \tag{8.94}$$

Решение. Справедливы равенства:

$$(\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2)^{\perp} := \{x \in \mathcal{E} : \ (x, y_1 + y_2) = 0 \,\forall\, y_1 \in \mathcal{P}_1, \ \forall\, y_2 \in \mathcal{P}_2\}, \tag{8.95}$$

$$\mathcal{P}_1^{\perp} := \{x \in \mathcal{E} : \ (x, y_1) = 0 \,\forall\, y_1 \in \mathcal{P}_1\}, \tag{8.96}$$

$$\mathcal{P}_2^{\perp} := \{x \in \mathcal{E} : \ (x, y_2) = 0 \,\forall\, y_2 \in \mathcal{P}_2\}. \tag{8.97}$$

Если $x \in \mathcal{P}_1^{\perp} \cap \mathcal{P}_2^{\perp}$, то

$$(x, y_1 + y_2) = (x, y_1) + (x, y_2) = 0 \quad \text{для всех} \quad y_1 \in \mathcal{P}_1, \quad y_2 \in \mathcal{P}_2.$$

Поэтому $x \in (\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2)^{\perp}$. Таким образом,

$$\mathcal{P}_1^{\perp} \cap \mathcal{P}_2^{\perp} \subset (\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2)^{\perp}. \tag{8.98}$$

Пусть

$$x \notin \mathcal{P}_1^{\perp} \cap \mathcal{P}_2^{\perp}, \quad x \in (\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2)^{\perp}, \tag{8.99}$$

т.е. найдутся такие $y_1 \in \mathcal{P}_1$ и $y_2 \in \mathcal{P}_2$, что

$$(x, y_1 + y_2) = 0, \quad (x, y_1) \neq 0, \quad (x, y_2) \neq 0. \tag{8.100}$$

Но тогда $x \notin \mathcal{P}_1^{\perp}$ и $x \notin \mathcal{P}_2^{\perp}$ и поскольку:

$$\mathcal{E} = \mathcal{P}_1 \oplus \mathcal{P}_1^{\perp} = \mathcal{P}_2 \oplus \mathcal{P}_2^{\perp} \tag{8.101}$$

получаем $x \in \mathcal{P}_1$ и $x \in \mathcal{P}_2$. Значит,

$$x \in \mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2. \tag{8.102}$$

Итак, из (8.99) и (8.102) приходим к противоречию. Значит,

$$\mathcal{P}_1^{\perp} \cap \mathcal{P}_2^{\perp} = (\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2)^{\perp}. \tag{8.103}$$

Задача 19. Для любых двух подпространств $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ евклидова пространства $\mathcal{E}$ имеет место соотношение:

$$\mathcal{P}_1 \subset \mathcal{P}_2 \Leftrightarrow \mathcal{P}_2^{\perp} \subset \mathcal{P}_1^{\perp}. \tag{8.104}$$

Решение. Заметим, что справедливы равенства:

$$\mathcal{E} = \mathcal{P}_1 \oplus \mathcal{P}_2^{\perp} = \mathcal{P}_2 \oplus \mathcal{P}_2^{\perp}. \tag{8.105}$$

Из этих равенств и вытекает утверждение.

Задача 20. Для любых двух линейных подпространств $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ евклидова пространства $\mathcal{E}$ доказать равенство:

$$(\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2)^{\perp} = \mathcal{P}_1^{\perp} + \mathcal{P}_2^{\perp}. \tag{8.106}$$

Решение. Справедливы равенства:

$$(\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2)^{\perp} = \{x \in \mathcal{E}: \ (x, y) = 0 \quad \text{для всех} \quad y \in \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2\}, \tag{8.107}$$

$$\mathcal{P}_1^{\perp} := \{x \in \mathcal{E}: \ (x, y_1) = 0 \ \forall \, y_1 \in \mathcal{P}_1\}, \tag{8.108}$$

$$\mathcal{P}_2^{\perp} := \{x \in \mathcal{E}: \ (x, y_2) = 0 \ \forall \, y_2 \in \mathcal{P}_2\}. \tag{8.109}$$

Заметим, что справедливы соотношения:

$$\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \subset \mathcal{P}_1, \quad \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \subset \mathcal{P}_2, \tag{8.110}$$

$$(\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2)^{\perp} \supset \mathcal{P}_1^{\perp}, \quad (\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2)^{\perp} \supset \mathcal{P}_2^{\perp}, \tag{8.111}$$

$$\mathcal{P}_1^{\perp} + \mathcal{P}_2^{\perp} \subset (\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2)^{\perp}. \tag{8.112}$$

Пусть

$$x \notin \mathcal{P}_1^{\perp} + \mathcal{P}_2^{\perp}, \quad x \in (\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2)^{\perp}. \tag{8.113}$$

Но тогда:

$$x \in \left(\mathcal{P}_1^{\perp} + \mathcal{P}_2^{\perp}\right)^{\perp} = \mathcal{P}_1^{\perp\perp} \cap \mathcal{P}_2^{\perp\perp} = \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2. \tag{8.114}$$

Из (8.113) и (8.114) получаем, что $x = \vartheta$. Стало быть, имеет место равенство (8.106).

Задача 21. Пусть $\mathcal{P} \subset \mathcal{E}$ — линейное подпространство евклидова пространства $\mathcal{E}$. Определим косинус угла между вектором $x \in \mathcal{E}$ и линейным подпространством $\mathcal{P}$ следующим образом:

$$\cos\varphi_0 := \sup_{y \in \mathcal{P}} \frac{(x, y)}{\|x\|\|y\|}. \tag{8.115}$$

Доказать, что либо $x \in \mathcal{P}^{\perp}$ и тогда $\varphi_0 = \pi/2$ либо $x \notin \mathcal{P}^{\perp}$ и тогда

$$\cos\varphi_0 = \frac{(x, x_{\parallel})}{\|x\|\|x_{\parallel}\|}, \quad x = x_{\parallel} + x_{\perp}, \ x_{\parallel} \in \mathcal{P}, \ x_{\perp} \in \mathcal{P}^{\perp}, \tag{8.116}$$

т.е. угол φ_0 между вектором x и линейным подпространством $\mathcal{P}$ равен углу между вектором x и его ортогональной проекцией на $\mathcal{P}$.

Решение. Справедливы соотношения:

$$\cos\varphi_0 := \sup_{y\in\mathcal{P}} \frac{(x_\parallel, y)}{\|x\|\|y\|} \leqslant \frac{\|x_\parallel\|}{\|x\|}, \tag{8.117}$$

причем равенство достигается на $y = x_\parallel \in \mathcal{P}$.

Замечание. *Об определении угла между линейными подпространствами евклидова пространства*. Пусть сначала $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ — два линейных подпространства евклидова пространства $\mathcal{E}$, причем $\mathcal{P}_1 \cap \cap\, \mathcal{P}_2 = \{\vartheta\}$. Тогда косинус угла φ_{12} между ними определяется следующим образом:

$$\cos\varphi_{12} := \sup_{y_j\in\mathcal{P}_j\setminus\{\vartheta\}} \frac{(y_1, y_2)}{\|y_1\|\|y_2\|}, \quad j = 1, 2. \tag{8.118}$$

Если линейные подпространства взаимно ортогональны, то $\varphi_{12} = \pi/2$. Если же нет, то справедливы равенства:

$$\cos\varphi_{12} := \sup_{y_1\in\mathcal{P}_1\setminus\{\vartheta\}} \frac{(y_1, y_{2\parallel})}{\|y_1\|\|y_{2\parallel}\|} = \sup_{y_2\in\mathcal{P}_2\setminus\{\vartheta\}} \frac{(y_{1\parallel}, y_2)}{\|y_{1\parallel}\|\|y_2\|}, \tag{8.119}$$
$$y_1 = y_{1\parallel} + y_{1\perp}, \quad y_{1\parallel} \in \mathcal{P}_2, \quad y_{1\perp} \in \mathcal{P}_2^\perp,$$
$$y_2 = y_{2\parallel} + y_{2\perp}, \quad y_{2\parallel} \in \mathcal{P}_1, \quad y_{2\perp} \in \mathcal{P}_1^\perp.$$

Если $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \neq \{\vartheta\}$, то угол между линейными подпространствами $\mathcal{P}_1 \neq \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$ и $\mathcal{P}_2 \neq \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$ определяется как угол между линейными подпространствами:

$$\mathcal{U}_1 := \mathcal{P}_1 \cap (\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2)^\perp \quad \text{и} \quad \mathcal{U}_2 := \mathcal{P}_2 \cap (\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2)^\perp. \tag{8.120}$$

Если же $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$ или $\mathcal{P}_2 = \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$, то угол между $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ считается равным нулю.

Задача 22. Пусть $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ — два линейных подпространства евклидова пространства $\mathcal{E}$, причем $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = \{\vartheta\}$. Доказать, что $\cos\varphi_{12}$ угла между линейными подпространствами $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ равен $\sqrt{\lambda_{max}}$, где $\lambda_{max} \geqslant 0$ — максимальный корень уравнения:

$$\det(F_e - \lambda G_e) = 0, \tag{8.121}$$

где G_e — матрица квадратичной формы (x, x), а F_e — матрица квадратичной формы $(P(x), P(x))$ в некотором базисе линейного подпространства $\mathcal{P}_1$, где P — оператор ортогонального проектирования на линейное подпространство $\mathcal{P}_2$.

Решение. Справедливы равенства:

$$\cos^2\varphi_{12} = \sup_{x\in\mathcal{P}_1\setminus\{\vartheta\}, y\in\mathcal{P}_2\setminus\{\vartheta\}} \frac{(x, y)^2}{\|x\|^2\|y\|^2} =$$
$$= \sup_{x\in\mathcal{P}_1\setminus\{\vartheta\}, y\in\mathcal{P}_2\setminus\{\vartheta\}} \frac{(x_\parallel, y)^2}{\|x\|^2\|y\|^2} = \sup_{x\in\mathcal{P}_1\setminus\{\vartheta\}} \frac{(x_\parallel, x_\parallel)}{(x, x)} =$$

$$= \sup_{x \in \mathcal{P}_1 \setminus \{\vartheta\}} \frac{(P(x), P(x))}{(x, x)}, \quad x = x_\parallel + x_\perp, \quad x_\parallel \in \mathcal{P}_2, \quad x_\perp \in \mathcal{P}_2^\perp. \tag{8.122}$$

Пусть $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m\}$ — базис в $\mathcal{P}_1$. Тогда стандартным образом имеем:

$$x = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m) X_e,$$

$$(x, x) = X_e^T \cdot G_e \cdot X_e, \quad (P(x), P(x)) = X_e^T \cdot F_e \cdot X_e, \tag{8.123}$$

$$G_e = ((\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k))_{m,m}, \quad F_e = ((P(\mathbf{e}_j), P(\mathbf{e}_k)))_{m,m}. \tag{8.124}$$

Тогда из (8.122) получаем вариационную задачу:

$$\lambda = \sup_{X_e \neq O} \frac{X_e^T \cdot F_e \cdot X_e}{X_e^T \cdot G_e \cdot X_e} = \sup_{X_e^T \cdot X_e = 1} \frac{X_e^T \cdot F_e \cdot X_e}{X_e^T \cdot G_e \cdot X_e}, \tag{8.125}$$

где мы числитель и знаменатель разделили на число $X_e^T \cdot X_e > 0$. Задача (8.125) эквивалентна задаче нахождения максимального $\lambda \geqslant 0$ такого, что

$$X_e^T \cdot F_e \cdot X_e = \lambda X_e^T \cdot G_e \cdot X_e, \quad X_e^T \cdot X_e = 1. \tag{8.126}$$

Стало быть необходимо решить однородную систему уравнений:

$$[F_e - \lambda G_e] \cdot X_e = O, \quad X_e^T \cdot X_e = 1, \tag{8.127}$$

т.е. найти нетривиальное решение $X_e \in \mathbb{R}^{m \times 1}$, которое существует тогда и только тогда, когда $\det(F_e - \lambda G_e) = 0$.

Задача 23. Пусть x — произвольный вектор евклидова пространства $\mathcal{E}$ и $\mathcal{P} \subset \mathcal{E}$ — линейное подпространство. Доказать, что

$$\min_{y \in \mathcal{P}} \|x - y\| = \|x_\perp\|, \quad x = x_\parallel + x_\perp, \quad x_\parallel \in \mathcal{P}, \quad x_\perp \in \mathcal{P}^\perp, \tag{8.128}$$

и достигается на векторе $y = x_\parallel$.

Решение. Для любого $y \in \mathcal{P}$ справедливо равенство:

$$\|x - y\|^2 = \|x_\parallel - y\|^2 + \|x_\perp\|^2 \tag{8.129}$$

и минимум правой части достигается на векторе $y = x_\parallel \in \mathcal{P}$.

Замечание. *О методе наименьших квадратов.* Рассмотрим следующую неоднородную систему линейных уравнений:

$$x^1 A_1 + \cdots + x^n A_n = B, \quad A_j = \begin{pmatrix} a_j^1 \\ \vdots \\ a_j^m \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b^1 \\ \vdots \\ b^m \end{pmatrix}, \tag{8.130}$$

причем $A_1, \ldots, A_n, B \in \mathbb{K}^{m \times 1}$ и $m \geqslant n$. Отметим, что столбцы $A_1, \ldots, A_n$ могут быть линейно зависимыми. Как известно, необходимым и достаточным условием существования решения системы уравнений (8.130) является условие $B \in L(A_1, \ldots, A_n)$. Предположим, что $B \notin L(A_1, \ldots, A_n)$. Тогда точного решения нет. Тогда согласно *методу наименьших квадратов* такие числа $y^1, \dots, y^n$, при которых минимальная норма:

$$\|B - y^1 A_1 - \dots - y^n A_n\|_m, \tag{8.131}$$

$$\|A\|_m = \Big(\sum_{j=1}^m a_j^2\Big)^{1/2}, \quad A = (a^1, \dots, a^m)^T \in \mathbb{K}^{m\times 1}. \tag{8.132}$$

Заметим, что если $B \in L(A_1, \dots, A_n)$, то минимум нормы (8.131) достигается на решении системы уравнений (8.130) и этот минимум равен нулю. Согласно решению предыдущей задачи числа $y^1, \dots, y^n$ определяются из системы уравнений:

$$y^1 A_1 - \dots - y^n A_n = B_\|, \quad B = B_\| + B_\perp, \tag{8.133}$$

$$B_\| \in L(A_1, \dots, A_n), \quad B_\perp \in L^\perp(A_1, \dots, A_n). \tag{8.134}$$

Условие $B_\perp \perp L(A_1, \dots, A_n)$ равносильно выполнению n равенств:

$$(B - B_\|, A_1) = 0, \dots, (B - B_\|, A_n) = 0, \tag{8.135}$$

где $(X, Y) = X^T \cdot Y$. С учетом (8.133) из (8.135) приходим к следующей системе уравнений:

$$\begin{pmatrix} (A_1, A_1) & \cdots & (A_1, A_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (A_n, A_1) & \cdots & (A_n, A_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (B, A_1) \\ \vdots \\ (B, A_n) \end{pmatrix}. \tag{8.136}$$

Решение системы уравнений (8.136) по построению существует всегда и называется *псевдорешением*. Заметим, что если семейство столбцов $\{A_1, \dots, A_n\}$ линейно независимое, то *псевдорешение* находится из системы уравнений (8.136) *однозначно*, если же семейство столбцов $\{A_1, \dots, A_n\}$ линейно зависимое, то *псевдорешение* находится *не однозначно* и нужны *дополнительные критерии* для однозначного его определения. Все это существенно используется в *теории обратных задач*.

З а д а ч а 24. Найти связь между матрицами A_e, B_e, G_e линейных операторов $A, b \in L(\mathcal{L}; \mathcal{L})$ и полуторалинейной функции g в некотором базисе $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ и матрицей F_e полуторалинейной функции:

$$f(x, y) = g(Ax, By). \tag{8.137}$$

Решение. Справедливы следующие равенства:

$$\begin{aligned}\{F_e\}^j_k = f_{jk} = f(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k) = g(A(\mathbf{e}_j), B\mathbf{e}_k) = \\ = g(a^m_j \mathbf{e}_m, b^s_k \mathbf{e}_s) = a^m_j \overline{b^s_k} g_{ms} = \{A_e\}^m_j \{G_e\}^m_s \{\overline{B_e}\}^s_k = \\ = \{A_e^T\}^j_m \{G_e \cdot \overline{B_e}\}^m_k = \{A_e^T \cdot G_e \cdot \overline{B_e}\}^j_k.\end{aligned} \tag{8.138}$$

Итак, имеем:

$$F_e = A_e^T \cdot G_e \cdot \overline{B_e}.$$

Задача 25. Доказать, что всякая полуторалинейная форма ранга 1 может быть представлена в следующем виде:

$$f(x, y) = \langle f^1, x\rangle\langle f^2, \overline{y}\rangle, \quad f^1, f^2 \in \mathcal{L}^*. \tag{8.139}$$

Решение. Пусть $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — базис в $\mathcal{L}$, а $\{\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^n\}$ — взаимный базис в $\mathcal{L}^*$. Тогда справедливо равенство:

$$f(x, y) = X_e^T \cdot F_e \cdot \overline{Y}_e, \quad x = \mathbf{E} \cdot X_e, \quad y = \mathbf{E} \cdot Y_e, \tag{8.140}$$

где $\mathbf{E} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$. Поскольку $\operatorname{rang} F_e = 1$, то без ограничения общности можно считать, что базисным столбцом у матрицы F_e является первый:

$$F_e = \|F_{e1}, \ldots, F_{en}\|, \quad F_{ek} = \alpha_k F_{e1}, \quad k = \overline{2, n}, \tag{8.141}$$
$$F_{e1} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)^T.$$

Из (8.140) с учетом (8.141) получим равенство:

$$f(x, y) = X_e^T \cdot F_e \cdot \overline{Y}_e = X_e^T \left[\left(\overline{y^1} + \alpha_2 \overline{y^2} + \cdots + \alpha_n \overline{y^n}\right) F_{e1}\right] =$$
$$= \left[\beta_1 x^1 + \cdots + \beta_n x^n\right] \left[\overline{y^1} + \alpha_2 \overline{y^2} + \cdots + \alpha_n \overline{y^n}\right] =$$
$$= \langle f^1, x\rangle\langle f^2, \overline{y}\rangle, \tag{8.142}$$

$$f^1 = \beta_1 \mathbf{e}^1 + \cdots + \beta_n \mathbf{e}^n, \quad f^2 = \mathbf{e}^1 + \alpha_2 \mathbf{e}^2 + \cdots + \alpha_n \mathbf{e}^n. \tag{8.143}$$

Задача 26. Пусть f — невырожденная полуторалинейная форма на $\mathcal{L}$. Доказать, что для любой линейной формы $p \in \mathcal{L}^*$ найдется такой единственный вектор $v \in \mathcal{L}$, что

$$\langle p, x\rangle = f(x, v) \quad \text{для всех} \quad x \in \mathcal{L}. \tag{8.144}$$

Решение. Существование. Пусть $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — базис в $\mathcal{L}$, а $\{\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^n\}$ — взаимный базис в $\mathcal{L}^*$. Тогда справедливы равенства:

$$x = x^k \mathbf{e}_k, \quad v = v^m \mathbf{e}_m, \quad p = p_k \mathbf{e}^k, \quad f_{km} = f(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_m). \tag{8.145}$$

Тогда несложно доказать, что уравнение (8.144) эквивалентно следующему равенству:

$$p_k x^k = f_{km} x^k \overline{v^m} \quad \text{для любого} \quad X_e^T = (x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{C}^{1\times n}. \tag{8.146}$$

Рассмотрим отдельно квадратную систему алгебраических уравнений:

$$f_{km}\overline{v^m} = p_k \tag{8.147}$$

относительно неизвестных $(v^1, \ldots, v^n) \in \mathbb{C}^{1\times n}$. Поскольку полуторалинейная форма f невырождена, то

$$\begin{vmatrix} f(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) & \cdots & f(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f(\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_1) & \cdots & f(\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_n) \end{vmatrix} \neq 0. \tag{8.148}$$

□ Действительно, пусть выполнено равенство:

$$\begin{vmatrix} f(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_1) & \cdots & f(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f(\mathbf{e}_n,\mathbf{e}_1) & \cdots & f(\mathbf{e}_n,\mathbf{e}_n) \end{vmatrix} = 0. \tag{8.149}$$

Тогда столбцы этого определителя линейно зависимы:

$$\alpha^1 \begin{pmatrix} f(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_1) \\ \vdots \\ f(\mathbf{e}_n,\mathbf{e}_1) \end{pmatrix} + \cdots + \alpha^n \begin{pmatrix} f(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_n) \\ \vdots \\ f(\mathbf{e}_n,\mathbf{e}_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{8.150}$$

причем $(\alpha^1,\ldots,\alpha^n) \neq (0,\ldots,0)$. Тогда справедливо равенство:

$$\begin{pmatrix} f(\mathbf{e}_1,x) \\ \vdots \\ f(\mathbf{e}_n,x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x = \overline{\alpha^1}\mathbf{e}_1 + \cdots + \overline{\alpha^n}\mathbf{e}_n \neq \vartheta. \tag{8.151}$$

Стало быть,

$$f(\mathbf{e}_j,x) = 0 \quad \text{для всех} \quad j = \overline{1,n}. \tag{8.152}$$

Но тогда имеем:

$$f(y,x) = 0 \quad \text{для всех} \quad y \in \mathcal{L}, \tag{8.153}$$

хотя $x \neq \vartheta$, что противоречит невырожденности полуторалинейной формы f. Противоречие. ⊠

Поэтому уравнение (8.147) имеет единственное решение и вектор $v = v^k\mathbf{e}_k$ искомый вектор.

Единственность. Пусть искомых векторов два:

$$\langle p,x\rangle = f(x,v_1) = f(x,v_2) \quad \text{для всех} \quad x \in \mathcal{L}. \tag{8.154}$$

Тогда получим равенство:

$$f(x,v_1 - v_2) \quad \text{для всех} \quad x \in \mathcal{L}. \tag{8.155}$$

Отсюда в силу невырожденности получаем, что $v_1 = v_2$.

Лекция 9

ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В ЕВКЛИДОВЫХ И УНИТАРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

§ 1. Сопряженный оператор

Определение 1. *Пусть* A — *линейный оператор из* $L(\mathcal{E};\mathcal{E})$ $(L(\mathcal{U};\mathcal{U}))$. *Оператор* A^* *называется сопряженным к оператору* A, *если для любых* $x, y \in \mathcal{E}(\in \mathcal{U})$ *выполняется равенство*:

$$(Ax, y) = (x, A^*y). \tag{1.1}$$

Теорема 1. *Для любого* $A \in L(\mathcal{E};\mathcal{E})$ $(L(\mathcal{U};\mathcal{U}))$ *существует единственный сопряженный оператор* $A^* \in L(\mathcal{E};\mathcal{E})$ $(L(\mathcal{U};\mathcal{U}))$.

Доказательство. Пусть $A \in L(\mathcal{E};\mathcal{E})(A \in L(\mathcal{U};\mathcal{U}))$ и $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — ортонормированный базис в $\mathcal{E}(\mathcal{U})$. Тогда для любого $x \in \mathcal{E}(\mathcal{U})$ справедливо разложение:

$$x = \sum_{k=1}^{n}(x, \mathbf{e}_k)\mathbf{e}_k \Rightarrow Ax = \sum_{k=1}^{n}(x, \mathbf{e}_k)A\mathbf{e}_k \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (Ax, y) = \sum_{k=1}^{n}(x, \mathbf{e}_k)(A\mathbf{e}_k, y). \tag{1.2}$$

Рассмотрим линейный оператор:

$$By = \sum_{k=1}^{n}(y, A\mathbf{e}_k)\mathbf{e}_k \Rightarrow (x, By) = \sum_{k=1}^{n}\overline{(y, A\mathbf{e}_k)}(x, \mathbf{e}_k) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n}(A\mathbf{e}_k, y)(x, \mathbf{e}_k) = (Ax, y) \quad \text{для всех} \quad x, y \in \mathcal{E}(\mathcal{U}). \tag{1.3}$$

Значит, $A^* = B$.

Теорема доказана.

Теорема 2. *Сопряженный оператор* A^* *обладает следующим свойствами*:

1) A^* — *линейный оператор*;
2) $(A + B)^* = A^* + B^*$;
3) $(\alpha A)^* = \overline{\alpha}A^*$;

4) $(AB)^* = B^*A^*$;
5) $(A^*)^* = A$.

Доказательство. *Шаг 1.* Докажем, что для любых $y, z \in \mathcal{E}(\in \mathcal{U})$ и любого $\alpha \in \mathbb{R}(\in \mathbb{C})$ имеют место следующие равенства:

$$A^*(y+z) = A^*y + A^*z, \quad A^*(\alpha \cdot y) = \alpha \cdot A^*y. \tag{1.4}$$

С одной стороны, для всех $x \in \mathcal{E}(\in \mathcal{U})$ имеем:

$$(Ax, y+z) = (x, A^*(y+z)). \tag{1.5}$$

С другой стороны, имеем:

$$(Ax, y+z) = (Ax, y) + (Ax, z) = (x, A^*y) + (x, A^*z). \tag{1.6}$$

Из (1.5) и (1.6) вытекает следующее равенство:

$$\begin{gathered}(x, A^*(y+z)) = (x, A^*y) + (x, A^*z) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x, A^*(y+z) - A^*y - A^*z) = 0 \quad \text{для всех} \quad x \in \mathcal{E}(\in \mathcal{U}) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow A^*(y+z) = A^*y + A^*z. \end{gathered} \tag{1.7}$$

Первое равенство из (1.4) доказано. Докажем второе равенство. С одной стороны, для всех $x \in \mathcal{E}(\in \mathcal{U})$ имеем:

$$(Ax, \alpha \cdot y) = (x, A^*(\alpha \cdot y)). \tag{1.8}$$

С другой стороны, имеем:

$$(Ax, \alpha \cdot y) = \overline{\alpha}(Ax, y) = \overline{\alpha}(x, A^*y) = (x, \alpha \cdot A^*y). \tag{1.9}$$

Из равенств (1.8) и (1.9) получаем равенство:

$$(x, A^*(\alpha \cdot y)) = (x, \alpha \cdot A^*y) \quad \text{для всех} \quad x \in \mathcal{E}(\in \mathcal{U}). \tag{1.10}$$

Следовательно,

$$A^*(\alpha \cdot y) = \alpha \cdot A^*y.$$

Второе равенство из (1.4) доказано.

Шаг 2. Докажем, что $(A+B)^* = A^* + B^*$. Действительно, с одной стороны, для всех $x, y \in \mathcal{E}(\in \mathcal{U})$ справедливо равенство:

$$((A+B)x, y) = (x, (A+B)^*y). \tag{1.11}$$

С другой стороны, имеем:

$$((A+B)x, y) = (Ax, y) + (Bx, y) = (x, A^*y) + (x, B^*y). \tag{1.12}$$

Из равенств (1.11) и (1.12) получаем:

$$\begin{gathered}(x, (A+B)^*y) = (x, A^*y) + (x, B^*y) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x, (A+B)^*y - A^*y - B^*y) = 0 \Leftrightarrow (A+B)^*y - A^*y - B^*y = \vartheta \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (A+B)^* = A^* + B^*. \end{gathered} \tag{1.13}$$

Шаг 3. Докажем, что $(\alpha A)^* = \overline{\alpha} A^*$. Действительно, для всех $x, y \in \in \mathcal{E}(\in \mathcal{U})$, с одной стороны, справедливо следующее равенство:

$$((\alpha A)x, y) = (x, (\alpha A)^* y). \tag{1.14}$$

С другой стороны, имеем:

$$((\alpha A)x, y) = \alpha(Ax, y) = \alpha(x, A^* y) = (x, \overline{\alpha} \cdot A^* y). \tag{1.15}$$

Из сравнения равенств (1.14) и (1.15) получим равенство:

$$(x, (\alpha A)^* y) = (x, (\overline{\alpha} A^*) y) \Leftrightarrow (\alpha A)^* = \overline{\alpha} A^*. \tag{1.16}$$

Шаг 4. Докажем равенство $(AB)^* = B^* A^*$. Действительно, для всех $x, y \in \mathcal{E}(\in \mathcal{U})$, с одной стороны, справедливо равенство:

$$((AB)x, y) = (x, (AB)^* y). \tag{1.17}$$

С другой стороны, имеем:

$$((AB)x, y) = (A(Bx), y) = (Bx, A^* y) = (x, B^* A^* y). \tag{1.18}$$

Из сравнения (1.17) с (1.18) получим искомое равенство.

Шаг 5. Докажем равенство $(A^*)^* = A$. Действительно, для любых $x, y \in \mathcal{E}(\in \mathcal{U})$ справедлива следующая цепочка равенств:

$$(Ax, y) = (x, A^* y) = \overline{(A^* y, x)} = \overline{(y, (A^*)^* x)} = ((A^*)^* x, y). \tag{1.19}$$

Отсюда приходим к искомому равенству.

Теорема доказана.

§ 2. Примеры сопряженных операторов

Пример 1. Сопряженные операторы к единичному и нулевому совпадают с ними. Действительно, для любых $x, y \in \mathcal{E}(\mathcal{U})$ имеем:

$$(Ix, y) = (x, y) = (x, Iy), \quad (Ox, y) = 0 = (\vartheta, y) = 0 = (x, \vartheta) = (x, Oy).$$

Пример 2. Сопряженным к оператору $Ax = [a, x]$ в трехмерном евклидовом пространстве геометрических векторов, где a — фиксированный вектор, является оператор $A^* = -A$. Действительно, справедлива следующая цепочка равенств:

$$(Ax, y) = ([a, x], y) = (y, [a, x]) = (y, a, x) = \\ = (x, y, a) = (x, [y, a]) = (x, -[a, y]) = (x, -Ay)$$

для всех x, y.

§ 3. Матрица сопряженного оператора

Пусть $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — произвольный базис в унитарном пространстве $\mathcal{U}$ (в евклидовом пространстве $\mathcal{E}$), причем $A \in L(\mathcal{U}; \mathcal{U})$ $(A \in L(\mathcal{E}; \mathcal{E}))$ и A_e — матрица этого оператора в базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$, G_e — матрица Грама базиса $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$. Наша задача найти матрицу A_e^* сопряженного оператора A^* в том же базисе. Пусть:

$$x = \mathbf{E} \cdot X_e, \quad y = \mathbf{E} \cdot Y_e, \tag{3.1}$$
$$\mathbf{E} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n), \quad X_e, Y_e \in \mathbb{C}^{n\times 1}(\mathbb{R}^{n\times 1}).$$

Тогда справедливы следующие равенства:

$$Ax = A(\mathbf{E} \cdot X_e) = A(x^k \cdot \mathbf{e}_k) = x^k \cdot A(\mathbf{e}_k) = \\ = (A \cdot \mathbf{E}) \cdot X_e = \mathbf{E} \cdot A_e \cdot X_e, \tag{3.2}$$

$$A^*y = A^*(\mathbf{E} \cdot Y_e) = A^*(y^k \cdot \mathbf{e}_k) = y^k \cdot A^*(\mathbf{e}_k) = \\ = (A^* \cdot \mathbf{E}) \cdot Y_e = \mathbf{E} \cdot A_e^* \cdot Y_e. \tag{3.3}$$

Напомним, что скалярное произведение элементов x, y выражается через координаты этих элементов следующим образом:

$$(x, y) = X_e^T \cdot G_e \cdot \overline{Y_e}, \tag{3.4}$$

где G_e — матрица Грама в базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$. С учетом (3.2)–(3.3) справедливы следующие равенства:

$$Ax = \mathbf{E} \cdot A_e \cdot X_e, \quad A^*y = \mathbf{E} \cdot A_e^* \cdot Y_e.$$

Поэтому из определяющего соотношение для сопряженного оператора

$$(Ax, y) = (x, A^*y) \quad \text{для всех} \quad x, y \in \mathcal{U}(\in \mathcal{E}) \tag{3.5}$$

вытекает следующее равенство:

$$(A_e \cdot X_e)^T \cdot G_e \cdot \overline{Y_e} = X_e^T \cdot G_e \cdot \overline{A_e^* \cdot Y_e} \tag{3.6}$$

или эквивалентно:

$$X_e^T \cdot A_e^T \cdot G_e \cdot \overline{Y_e} = X_e^T \cdot G_e \cdot \overline{A_e^*} \cdot \overline{Y_e}, \tag{3.7}$$

которое должно быть выполнено для всех столбцов $X_e, Y_e \in \mathbb{C}^{n\times 1}$ $(\in \in \mathbb{R}^{n\times 1})$. Поэтому из (3.7) вытекает цепочка равенств:

$$X_e^T \cdot \left[A_e^T \cdot G_e - G_e \cdot \overline{A_e^*}\right] \cdot \overline{Y_e} = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow A_e^T \cdot G_e - G_e \cdot \overline{A_e^*} = O \Leftrightarrow A_e^T \cdot G_e = G_e \cdot \overline{A_e^*}. \tag{3.8}$$

Теперь из (3.8), пользуясь тем, что $\det G_e \neq 0$, получим выражение для матрицы A_e^* сопряженного оператора A^*:

$$\overline{A_e^*} = G_e^{-1} \cdot A_e^T \cdot G_e \Leftrightarrow A_e^* = \overline{G_e^{-1} \cdot A_e^T \cdot G_e}. \tag{3.9}$$

Отдельно отметим, что в случае евклидова пространства выражение (3.9) примет следующий вид:

$$A_e^* = G_e^{-1} \cdot A_e^T \cdot G_e. \tag{3.10}$$

В случае ортонормированного базиса $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ матрица Грама является единичной и поэтому формулы (3.9) и (3.10) примут вид:

$$A_e^* = \overline{A_e^T} \quad \text{для унитарного пространства,} \tag{3.11}$$

$$A_e^* = A_e^T \quad \text{для евклидова пространства.} \tag{3.12}$$

Определение 2. *Матрица $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, удовлетворяющая условию $A = \overline{A^T}$, называется эрмитовой.*

Лемма 1. *Матрица Грама унитарного пространства является эрмитовой.*

Доказательство. Пусть $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — базис в унитарном пространстве $\mathcal{U}$ и $G(x, y)$ — полуторалинейная форма, задающая скалярное произведение в этом унитарном пространстве. Поэтому справедливы равенства:

$$g_{ij} = G(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \overline{G(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_i)} = \overline{g_{ji}},$$

из которых вытекает искомое равенство $G_e = \overline{G_e^T}$.

Лемма доказана.

Лемма 2. *Всякая полуторалинейная форма $\mathcal{A}$ в унитарном пространстве $\mathcal{U}$ определяет единственным образом некоторый линейный оператор $A \in L(\mathcal{U}; \mathcal{U})$ по формуле*:

$$\mathcal{A}(x, y) = (Ax, y) \quad \textit{для всех} \quad x, y \in \mathcal{U}. \tag{3.13}$$

Доказательство. *Существование.* Пусть $\{\mathbf{e}_j\}_{j=1}^n$ — некоторый ортонормированный базис в $\mathcal{U}$. Построим оператор A, чья матрица в базисе $\{\mathbf{e}_j\}_{j=1}^n$ задается формулой:

$$a_j^k = \mathcal{A}(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k).$$

Справедлива вспомогательная цепочка равенств:

$$A\mathbf{e}_j = \sum_{k=1}^n a_j^k \cdot \mathbf{e}_k, \quad x = x^j \cdot \mathbf{e}_j,$$

$$Ax = A(x^j \cdot \mathbf{e}_j) = x^j \cdot A(\mathbf{e}_j) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_j^k x^j \cdot \mathbf{e}_k,$$

$$(x, \mathbf{e}_j) = (x^k \cdot \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_j) = x^k (\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_j) = x^k \delta_{kj} = x^j,$$

Следовательно, приходим к следующему равенству:

$$Ax = \sum_{j,k=1,1}^{n,n} a_j^k (x, \mathbf{e}_j) \cdot \mathbf{e}_k. \tag{3.14}$$

Прежде всего заметим, что в силу линейности скалярного произведения $(x, \mathbf{e}_j)$ по первому аргументу оператор A тоже линейный. Пусть

$$x = x^j \cdot \mathbf{e}_j, \quad y = y^k \cdot \mathbf{e}_k.$$

Тогда справедлива следующая цепочка равенств:

$$\mathcal{A}(x, y) = \sum_{j,k=1,1}^{n,n} \mathcal{A}(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k) x^j \overline{y^k} = \sum_{j,k=1,1}^{n,n} a_j^k x^j \overline{y^k} =$$

$$= \sum_{j,k=1,1}^{n,n} a_j^k (x, \mathbf{e}_j)(\mathbf{e}_k, y) = \left(\sum_{j,k=1,1}^{n,n} a_j^k (x, \mathbf{e}_j) \cdot \mathbf{e}_k, y \right) = (Ax, y). \quad (3.15)$$

Существование оператора доказано.

Единственность. Пусть $\widehat{A} : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ такой линейный оператор, что

$$(\widehat{A}x, y) = \mathcal{A}(x, y) = (Ax, y) \quad \text{для всех} \quad x, y \in \mathcal{U}.$$

Тогда имеем:

$$(\widehat{A}x - Ax, y) = 0 \quad \text{для всех} \quad y \in \mathcal{U}$$

$$\widehat{A}x = Ax \quad \text{для всех} \quad x \in \mathcal{U} \Rightarrow \widehat{A} = A.$$

Единственность доказана.

Лемма доказана.

§ 4. Самосопряженный оператор

Определение 3. *Оператор A, действующий в евклидовом пространстве $\mathcal{E}$ (в унитарном пространстве $\mathcal{U}$), называется самосопряженным, если он совпадает со своим сопряженным*:

$$A = A^*, \quad (4.1)$$

или, иными словами, если для любых элементов $x, y \in \mathcal{E}$ $(\in \mathcal{U})$ выполняется соотношение:

$$(Ax, y) = (x, Ay).$$

Самосопряженные операторы в унитарном пространстве называются эрмитовыми, а самосопряженные операторы в евклидовом пространстве — симметричными.

Лемма 3. *Для того чтобы оператор $A \in L(\mathcal{U}; \mathcal{U})$ был эрмитовым, необходимо и достаточно, чтобы в любом ортонормированном базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ матрица A_e была эрмитовой*: $A_e = \overline{A_e^T}$.

Доказательство. *Шаг 1. Достаточность.* Пусть $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — ортонормированный базис. Тогда из равенства $A_e = \overline{A_e^T}$ вытекает следующая цепочка равенств:

$$a_k^j = \{A_e\}_k^j = \{\overline{A_e^T}\}_k^j = \{\overline{A_e}\}_j^k = \overline{a}_j^k.$$

Справедливы следующие равенства:

$$A\mathbf{e}_j = \sum_{l=1}^{n} a_j^l \cdot \mathbf{e}_l, \quad (A\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k) = a_j^k, \quad (\mathbf{e}_j, A\mathbf{e}_k) = \overline{a}_k^j. \tag{4.2}$$

$\square$ Действительно, справедливы следующие равенства:

$$(A\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k) = \left(\sum_{l=1}^{n} a_j^l \cdot \mathbf{e}_l, \mathbf{e}_k\right) = \sum_{l=1}^{n} a_j^l \delta_{lk} = a_j^k,$$

$$(\mathbf{e}_j, A\mathbf{e}_k) = \left(\mathbf{e}_j, \sum_{l=1}^{n} a_k^l \cdot \mathbf{e}_l\right) = \sum_{l=1}^{n} \overline{a_k^l}(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_l) = \overline{a}_k^j. \quad \boxtimes$$

С учетом (4.2) справедлива следующая цепочка равенств:

$$(Ax, y) = \sum_{j,k=1,1}^{n,n} x^j \overline{y}^k (A\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k) = \sum_{j,k=1,1}^{n,n} x^j \overline{y}^k a_j^k = \sum_{j,k=1,1}^{n,n} x^j \overline{y}^k \overline{a}_k^j =$$
$$= \sum_{j,k=1,1}^{n,n} x^j \overline{y}^k (\mathbf{e}_j, A\mathbf{e}_k) = (x, Ay) \quad \text{для всех} \quad x, y \in \mathcal{U}.$$

Шаг 2. Необходимость. Пусть $A^* = A$. Тогда имеем:

$$(Ax, y) = (x, Ay) \quad \text{для всех} \quad x, y \in \mathcal{U}. \tag{4.3}$$

Пусть $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — ортонормированный базис в унитарном пространстве $\mathcal{U}$. Справедливы следующие равенства:

$$x = x^j \cdot \mathbf{e}_j, \quad y = y^k \cdot \mathbf{e}_k, \quad Ax = x^j \cdot A\mathbf{e}_j =$$
$$= (A\mathbf{e}_1, \ldots, A\mathbf{e}_n) \cdot X_e =$$
$$= (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot A_e \cdot X_e, \quad Ay = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot A_e \cdot Y_e. \tag{4.4}$$

Из равенства (4.3) с учетом равенств из (4.4) получим равенство:

$$(A_e \cdot X_e)^T \cdot G_e \overline{Y_e} = X_e^T \cdot G_e \cdot \overline{(A_e \cdot Y_e)} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow X_e^T \cdot \left[A_e^T \cdot G_e - G_e \cdot \overline{A_e}\right] \cdot \overline{Y_e} = 0 \tag{4.5}$$

для любых столбцов $X_e, Y_e \in \mathbb{C}^{n\times 1}$. Заметим теперь, что $G_e = I$ и поэтому из равенства (4.5) вытекает равенство:

$$A_e^T = \overline{A_e} \Leftrightarrow A_e = \overline{A_e^T},$$

т.е. матрица $A_e \in \mathbb{C}^{n\times n}$ является эрмитовой.

Лемма доказана.

Лемма 4. *Для того чтобы оператор $A \in L(\mathcal{E};\mathcal{E})$ был симметричным, необходимо и достаточно, чтобы матрица A_e в любом ортонормированном базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ была симметричной.*

Доказательство. Доказательство повторяет в точности доказательство леммы 3.

Лемма доказана.

Лемма 5. *Если матрица A_e оператора $A \in L(\mathcal{U};\mathcal{U})$ в некотором ортонормированном базисе является эрмитовой, то она эрмитова в любом другом ортонормированном базисе.*

Доказательство. Пусть два ортонормированных базиса $\{\mathbf{e}_{1'}, \dots, \mathbf{e}_{n'}\}$ и $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ связаны матрицей $C \in \mathbb{C}^{n\times n}$:

$$(\mathbf{e}_{1'}, \dots, \mathbf{e}_{n'}) = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) \cdot C.$$

Как известно, из предыдущей лекции:

$$C^T \cdot \overline{C} = I \Leftrightarrow C = (\overline{C}^T)^{-1}, \quad \overline{C}^T = C^{-1}, \quad (\overline{C}^{-1})^T = C. \tag{4.6}$$

Матрицы $A_{e'}$ и A_e связаны известным равенством:

$$A_{e'} = C^{-1} \cdot A_e \cdot C, \tag{4.7}$$

причем $A_e = \overline{A_e}^T$. Из равенства (4.7) с учетом соотношений (4.6) вытекает цепочка равенств:

$$\overline{A_{e'}} = \overline{C}^{-1} \cdot \overline{A_e} \cdot \overline{C} \Leftrightarrow \overline{A_{e'}}^T = \overline{C}^T \cdot \overline{A_e}^T \cdot (\overline{C}^{-1})^T =$$
$$= \overline{C}^T \cdot \overline{A_e}^T \cdot C = C^{-1} \cdot \overline{A_e}^T \cdot C = C^{-1} \cdot A_e \cdot C = A_{e'}.$$

Отсюда получаем искомое равенство: $\overline{A_{e'}}^T = A_{e'}$.

Лемма доказана.

Лемма 6. *Если матрица A_e оператора $A \in L(\mathcal{E};\mathcal{E})$ в некотором ортонормированном базисе является симметричной, то она симметрична в любом другом ортонормированном базисе.*

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству утверждения леммы 5.

Лемма доказана.

Лемма 7. *Всякий ортогональный проектор P на линейное подпространство $\mathcal{P}$ евклидова пространства $\mathcal{E}$ (унитарного пространства $\mathcal{U}$) является самосопряженным.*

Доказательство. Пусть $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m\}$, где $m = \dim \mathcal{P}$ — ортонормированный базис в $\mathcal{P}$. Тогда, как нами было доказано ранее, оператор P ортогонального проектирования на $\mathcal{P}$ имеет явный вид:

$$Px = \sum_{j=1}^{m} (x, \mathbf{e}_j) \cdot \mathbf{e}_j. \tag{4.8}$$

Тогда для любых $x, y \in \mathcal{E}$ ($\in \mathcal{U}$) справедлива цепочка равенств:

$$(Px, y) = \left(\sum_{j=1}^{m} (x, \mathbf{e}_j) \cdot \mathbf{e}_j, y \right) = \sum_{j=1}^{m} (x, \mathbf{e}_j)(\mathbf{e}_j, y) =$$

$$= \left(x, \sum_{j=1}^{m} \overline{(\mathbf{e}_j, y)} \cdot \mathbf{e}_j\right) = \left(x, \sum_{j=1}^{m} (y, \mathbf{e}_j) \cdot \mathbf{e}_j\right) = (x, Py). \quad (4.9)$$

Лемма доказана.

Определение 4. *Оператор P называется идемпотентным, если $P^2 = P$.*

Теорема 3. *Всякий линейный самосопряженный идемпотентный оператор P является ортогональным проектором на некоторое линейное подпространство.*

Доказательство. *Шаг 1.* Пусть $\mathcal{P} = \operatorname{im} P$. Пусть $x \in \operatorname{im} P$. Тогда найдется такой $y \in \mathcal{E}$ $(\in \mathcal{U})$, что справедливо равенство:

$$Py = x \Rightarrow x = P^2 y = Px,$$

где мы воспользовались тем, что $P^2 = P$. Итак, имеем:

$$Px = x \quad \text{для всех} \quad x \in \mathcal{P}. \quad (4.10)$$

Шаг 2. Пусть $y \in \mathcal{P}^{\perp}$. Тогда в силу самосопряженности линейного оператора P и равенства (4.10) справедлива цепочка равенств:

$$(Py, x) = (y, Px) = (y, x) = 0 \quad \text{для всех} \quad x \in \mathcal{P}. \quad (4.11)$$

Значит, $Py \in \mathcal{P} \cap \mathcal{P}^{\perp}$. Следовательно,

$$Py = \vartheta \quad \text{для всех} \quad y \in \mathcal{P}^{\perp}. \quad (4.12)$$

Шаг 3. Пусть теперь $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m\}$, $m = \dim \operatorname{im} P = \dim \mathcal{P}$ — ортонормированный базис в $\mathcal{P} = \operatorname{im} P$. Дополним его до ортонормированного базиса во всем пространстве $\mathcal{E}$ $(\mathcal{U})$ Таким образом, $\{\mathbf{e}_{m+1}, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — это ортонормированный базис в $\mathcal{P}^{\perp}$ и справедливо разложение:

$$\mathcal{E} = \mathcal{P} \oplus \mathcal{P}^{\perp} \quad \text{или} \quad \mathcal{U} = \mathcal{P} \oplus \mathcal{P}^{\perp}.$$

Тогда для любого $x \in \mathcal{E}$ $(\in \mathcal{U})$ справедливо разложение:

$$x = \sum_{j=1}^{m} (x, \mathbf{e}_j) \cdot \mathbf{e}_j + \sum_{j=m+1}^{n} (x, \mathbf{e}_j) \cdot \mathbf{e}_j := x_P + x_{P^{\perp}}, \quad (4.13)$$

причем $x_P \in \mathcal{P}$, а $x_{P^{\perp}} = x - x_P \in \mathcal{P}^{\perp}$. Из (4.13) с учетом (4.10) и (4.12) получаем, что

$$Px = \sum_{j=1}^{m} (x, \mathbf{e}_j) \cdot P\mathbf{e}_j + \sum_{j=m+1}^{n} (x, \mathbf{e}_j) \cdot P\mathbf{e}_j = \sum_{j=1}^{m} (x, \mathbf{e}_j) \cdot \mathbf{e}_j = x_P. \quad (4.14)$$

Стало быть, P — ортогональный проектор на свой образ.

Теорема доказана.

§ 5. Теоремы Фредгольма в абстрактной форме

Пусть $A \in L(\mathcal{L};\mathcal{L})$, где $\mathcal{L} = \mathcal{E}$ или $\mathcal{L} = \mathcal{U}$. Наша задача выяснить необходимые и достаточные условия разрешимости уравнения в $\mathcal{L}$:

$$Ax = y. \tag{5.1}$$

Эти результаты известны как теоремы *об альтернативах Фредгольма.* Для их доказательства нам нужны вспомогательные результаты:
Лемма 8. *Если $\mathcal{P}$ — линейное подпространство в $\mathcal{L}$, то*

$$\mathcal{L} = \mathcal{P} \oplus \mathcal{P}^{\perp}. \tag{5.2}$$

Кроме того, имеет место равенство множеств:

$$\mathcal{P}^{\perp\perp} = \mathcal{P}. \tag{5.3}$$

Доказательство. *Шаг 1.* Прежде всего заметим, что $\mathcal{P}^{\perp}$ — линейное подпространство.

□ Действительно, пусть $y_1, y_2 \in \mathcal{P}^{\perp}$ и $\alpha^1, \alpha^2 \in \mathbb{K}$. Тогда имеем:

$$(\alpha^1 \cdot y_1 + \alpha^2 \cdot y_2, x) = \alpha^1(y_1, x) + \alpha^2(y_2, x) = 0$$

для всех $x \in \mathcal{P}$, т.е. $\alpha^1 \cdot y_1 + \alpha^2 \cdot y_2 \in \mathcal{P}^{\perp}$. ⊠

Шаг 2. Докажем теперь, что $\mathcal{P} \oplus \mathcal{P}^{\perp} = \mathcal{L}$. Приведем непосредственное доказательство этого факта. Итак, поскольку $\mathcal{P} \subset \mathcal{L}$ — линейное подпространство, то можно выбрать базис $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m, \mathbf{e}_{m+1}, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ в $\mathcal{L}$ таким образом, чтобы $\mathcal{P} = L(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m)$. Применим процесс ортогонализации Грамма–Шмидта так, как это изложено при доказательстве теоремы Грама–Шмидта. Тогда получим ортонормированный базис $\{\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{m'}, \mathbf{e}_{m'+1}, \ldots, \mathbf{e}'_n\}$ в $\mathcal{L}$, причем $\mathcal{P} = L(\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{m'})$. Введем обозначение:

$$\mathcal{H} = L(\mathbf{e}_{m'+1}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}) \subset \mathcal{L}.$$

По построению $\mathcal{H} \perp \mathcal{P}$. Поэтому $\mathcal{H} \subset \mathcal{P}^{\perp}$. Докажем, что на самом деле $\mathcal{H} = \mathcal{P}^{\perp}$.

□ Действительно, пусть $\mathcal{H}$ строго вложено в $\mathcal{P}^{\perp}$. По построению:

$$\mathcal{L} = L(\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{m'}) \oplus L(\mathbf{e}_{m'+1}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}) = \mathcal{P} \oplus \mathcal{H},$$

то существует вектор $x_0 \perp \mathcal{P}$, но $x_0 \notin \mathcal{H}$, т.е.

$$x_0 \perp \mathcal{P}, \quad x_0 \in \mathcal{P} \Rightarrow (x_0, x_0) = 0 \Rightarrow x_0 = \vartheta. \quad ⊠$$

Следовательно, $\mathcal{H} = \mathcal{P}^{\perp}$ и $\mathcal{L} = \mathcal{P} \oplus \mathcal{P}^{\perp}$.

Шаг 3. Поскольку по определению $\mathcal{P} \perp \mathcal{P}^{\perp}$, то

$$\mathcal{P} \subset \mathcal{P}^{\perp\perp}. \tag{5.4}$$

Если вложение (5.4) строгое, то в силу (5.2) найдется $x_0 \in \mathcal{P}^{\perp\perp} \cap \mathcal{P}^{\perp}$, т.е.

$$(x_0, x_0) = 0 \Rightarrow x_0 = \vartheta.$$

Следовательно, $\mathcal{P}^{\perp\perp} = \mathcal{P}$.

Лемма доказана.

Лемма 9. *Справедливо следующее равенство множеств*:

$$\ker A^* = (\operatorname{im} A)^{\perp}. \tag{5.5}$$

Доказательство. *Шаг 1.* $\ker A^* \subset (\operatorname{im} A)^{\perp}$. Пусть $y \in \ker A^*$. Тогда для любого $x \in \mathcal{L}$ имеют место равенства:

$$(Ax, y) = (x, A^*y) = 0, \quad Ax \in \operatorname{im} A \Rightarrow \\ \Rightarrow y \in (\operatorname{im} A)^{\perp} \Rightarrow \ker A^* \subset (\operatorname{im} A)^{\perp}. \tag{5.6}$$

Шаг 2. $(\operatorname{im} A)^{\perp} \subset \ker A^*$. Пусть $y \in (\operatorname{im} A)^{\perp}$. Тогда для любого $x \in \mathcal{L}$ справедливы следующие равенства:

$$0 = (Ax, y) = (x, A^*y) \Rightarrow A^*y = \vartheta \Rightarrow y \in \ker A^*. \tag{5.7}$$

Лемма доказана.

Лемма 10. *Справедливо следующее равенство множеств*:

$$\ker A = (\operatorname{im} A^*)^{\perp}. \tag{5.8}$$

Доказательство. Заметим, что всегда $A^{**} = A$. Поэтому в силу результата леммы 9 имеют место выражения:

$$\ker A = \ker A^{**} = (\operatorname{im} A^*)^{\perp}.$$

Лемма доказана.

Лемма 11. *Справедливо следующее равенство множеств*:

$$\operatorname{im} A = (\ker A^*)^{\perp}. \tag{5.9}$$

Доказательство. В силу (5.3) и (5.5) приходим к (5.9).

Лемма доказана.

Лемма 12. *Справедливы следующие равенства*:

$$\dim \ker A^* + \dim \operatorname{im} A = \dim \ker A + \dim \operatorname{im} A^* = \dim \mathcal{L}. \tag{5.10}$$

Доказательство. В силу результата леммы 5.2 имеют место следующие равенства:

$$\operatorname{im} A \oplus (\operatorname{im} A)^{\perp} = \mathcal{L}, \quad \operatorname{im} A^* \oplus (\operatorname{im} A^*)^{\perp} = \mathcal{L}. \tag{5.11}$$

Поэтому в силу определения прямой суммы подпространств имеем:

$$\dim \operatorname{im} A + \dim (\operatorname{im} A)^{\perp} = \dim \mathcal{L}, \tag{5.12}$$

$$\dim \operatorname{im} A^* + \dim (\operatorname{im} A^*)^{\perp} = \dim \mathcal{L}. \tag{5.13}$$

Теперь в силу результата леммы 9 и (5.12) имеет место следующая цепочка равенств:

$$\dim \ker A^* = \dim (\operatorname{im} A)^{\perp} = \dim \mathcal{L} - \dim \operatorname{im} A \Rightarrow \\ \Rightarrow \dim \ker A^* + \dim \operatorname{im} A = \dim \mathcal{L}. \tag{5.14}$$

Теперь в силу результата следствия 10 и равенства (5.13) справедлива следующая цепочка равенств:

$$\dim\ker A = \dim(\operatorname{im} A^*)^{\perp} = \dim \mathcal{L} - \dim\operatorname{im} A^* \Rightarrow \\ \Rightarrow \dim\ker A + \dim\operatorname{im} A^* = \dim \mathcal{L}. \quad (5.15)$$

Лемма доказана.

Теперь мы можем сформулировать и доказать *альтернативы Фредгольма*. Справедлива *первая теорема Фредгольма*:

Теорема 4. *Справедливо равенство*:

$$\dim\ker A = \dim\ker A^*. \quad (5.16)$$

Доказательство. С одной стороны, было доказано равенство:

$$\dim\ker A + \dim\operatorname{im} A = \dim \mathcal{L}. \quad (5.17)$$

С другой стороны, в силу (5.10) имеет место равенство:

$$\dim\ker A^* + \dim\operatorname{im} A = \dim \mathcal{L}. \quad (5.18)$$

Из сравнения (5.17) с (5.18) получаем (5.16).

Теорема доказана.

Справедлива *вторая теорема Фредгольма*:

Теорема 5. *Для того чтобы уравнение* (5.1) *было однозначно разрешимо при любой правой части, необходимо и достаточно, чтобы соответствующее однородное уравнение $Ax = \vartheta$ имело только тривиальное решение $x = \vartheta$.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть уравнение (5.1) разрешимо для любого $y \in \mathcal{L}$. Тогда $\operatorname{im} A = \mathcal{L}$. Поскольку:

$$\dim\ker A + \dim\operatorname{im} A = \dim \mathcal{L},$$

то $\dim\ker A = 0$. Следовательно, $\ker A = \{\vartheta\}$. Значит, уравнение $Ax = \vartheta$ имеет только тривиальное решение $x = \vartheta$.

Достаточность. Пусть однородное уравнение $Ax = \vartheta$ имеет только тривиальное решение $x = \vartheta$, т. е. $\ker A = \{\vartheta\}$ и поэтому $\dim\ker A = 0$. Поскольку:

$$\dim\ker A + \dim\operatorname{im} A = \dim \mathcal{L},$$

то $\operatorname{im} A = \mathcal{L}$. Значит, для всякого $y \in \mathcal{L}$ уравнение (5.1) имеет решение. Докажем, что это решение для каждого $y \in \mathcal{L}$ единственное.

□ Действительно, пусть для некоторого $y_0 \in \mathcal{L}$ уравнение (5.1) имеет два решения:

$$Ax_1 = Ax_2 = y_0 \Rightarrow A(x_1 - x_2) = \vartheta \Rightarrow \\ \Rightarrow x_1 - x_2 \in \ker A = \{\vartheta\} \Rightarrow x_1 - x_2 = \vartheta \Rightarrow x_1 = x_2. \quad \boxtimes \quad (5.19)$$

Теорема доказана.

Справедлива *третья теорема Фредгольма*:

Теорема 6. *Для того чтобы уравнение* (5.1) *было разрешимо, необходимо и достаточно, чтобы* $y \in (\ker A^*)^{\perp}$.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть уравнение (5.1) при заданном $y \in \mathcal{L}$ разрешимо, т.е. существует такое $x \in \mathcal{L}$, что $y = Ax \in \operatorname{im} A$. В силу результата (5.9) имеем $y \in \operatorname{im} A = (\ker A^*)^{\perp}$.

Шаг 2. Пусть $y \in (\ker A^*)^{\perp}$. В силу результата (5.9) имеем $y \in \operatorname{im} A$. Значит, найдется такой $x \in \mathcal{L}$, что $y = Ax$, т.е. уравнение (5.1) разрешимо.

Теорема доказана.

§ 6. Собственные значения и собственные векторы самосопряженного оператора

Теорема 7. *Все характеристические числа самосопряженного оператора вещественны.*

Доказательство. *Шаг 1. Эрмитов оператор в унитарном пространстве.* Любое характеристическое число эрмитова оператора A принадлежит полю $\mathbb{C}$, над которым рассматривается соответствующее унитарное пространство, так что является его собственным значением. Следовательно,

$$Ax_0 = \lambda \cdot x_0, \quad x_0 \neq \vartheta. \tag{6.1}$$

Умножим обе части равенства (6.1) на x_0 и получим равенство:

$$(Ax_0, x_0) = (\lambda \cdot x_0, x_0) = \lambda(x_0, x_0),$$

из которого с учетом равенства $A^* = A$ получим цепочку равенств:

$$\lambda(x_0, x_0) = (Ax_0, x_0) = (x_0, Ax_0) = (x_0, \lambda \cdot x_0) = \overline{\lambda}(x_0, x_0),$$

а так как $(x_0, x_0) \neq 0$, то получим равенство $\lambda = \overline{\lambda}$. Следовательно, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Шаг 2. Симметричный оператор в евклидовом пространстве $\mathcal{E}$. Рассмотрим матрицу A_e данного симметричного оператора $A \in L(\mathcal{E}; \mathcal{E})$ в каком-либо ортонормированном базисе $\mathbf{E} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$; эта матрица симметрична, $A_e = A_e^T$. Рассмотрим оператор $\widehat{A}$ в унитарном пространстве $\mathcal{U}$, имеющий в некотором ортонормированном базисе $\mathbf{F} = (\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n)$ этого унитарного пространства матрицу A_e :

$$\widehat{A} \cdot \mathbf{F} = \left(\widehat{A}\mathbf{f}_1, \ldots, \widehat{A}\mathbf{f}_n\right) = (\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n) \cdot \widehat{A}_f = \\ = (\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n) \cdot A_e = \mathbf{F} \cdot A_e, \quad \overline{A_e} = A_e = A_e^T. \tag{6.2}$$

Докажем, что такой оператор $\widehat{A} \in L(\mathcal{U}; \mathcal{U})$ существует.

□ Действительно, пусть $\mathcal{U}$ — произвольное унитарное пространство, причем $\dim \mathcal{U} = \dim \mathcal{E}$. Фиксируем в этом унитарном пространстве некоторый ортонормированный базис $\mathbf{F} = (\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n)$, который существует в силу теоремы Грама–Шмидта. Искомый оператор определим следующим равенством в обозначениях Эйнштейна:

$$\widehat{A}(x) := x^j a_j^k \cdot \mathbf{f}_k, \tag{6.3}$$

$$x = x^j \cdot \mathbf{f}_j, \quad \mathbf{F} = (\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n), \quad A_e = (a_j^k)_n^n, \quad n' = n \in \mathbb{N}.$$

Сделаем ряд наблюдений.

Наблюдение 1. Оператор $\widehat{A} \in L(\mathcal{U}; \mathcal{U})$, т.е. *линейный*. Действительно, прежде всего заметим, что для любых $x_1, x_2 \in \mathcal{U}$ и произвольных $\alpha^1, \alpha^2 \in \mathbb{C}$ имеют место равенства:

$$(\alpha^1 \cdot x_1 + \alpha^2 \cdot x_2)^j = \left\langle \mathbf{f}^j, \alpha^1 \cdot x_1 + \alpha^2 \cdot x_2 \right\rangle =$$
$$= \alpha^1 \left\langle \mathbf{f}^j, x_1 \right\rangle + \alpha^2 \left\langle \mathbf{f}^j, x_2 \right\rangle = \alpha^1 x_1^j + \alpha^2 x_2^j, \tag{6.4}$$

где $\{\mathbf{f}^1, \ldots, \mathbf{f}^n\} \subset \mathcal{U}^*$ — взаимный базис к $\{\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n\} \subset \mathcal{U}$. С учетом (6.4) и определения (6.3) приходим к равенству:

$$\widehat{A}(\alpha^1 \cdot x_1 + \alpha^2 \cdot x_2) = \alpha^1 \cdot \widehat{A}(x_1) + \alpha^2 \cdot \widehat{A}(x_2),$$

т.е. оператор $\widehat{A} \in L(\mathcal{U}; \mathcal{U})$.

Наблюдение 2. Матрица $\widehat{A}_f$ в заданном ортонормированном базисе $\mathbf{F}$ *совпадает с матрицей* A_e. Действительно, заметим, что

$$\mathbf{f}_m = \delta_m^j \cdot \mathbf{f}_j, \tag{6.5}$$

$$\widehat{A}(\mathbf{f}_m) = \delta_m^j a_j^k \cdot \mathbf{f}_k = a_m^k \cdot \mathbf{f}_k, \tag{6.6}$$

$$\left(\widehat{A}(\mathbf{f}_1), \ldots, \widehat{A}(\mathbf{f}_n)\right) = (\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n) \cdot A_e \Rightarrow \widehat{A}_f = A_e. \tag{6.7}$$

Таким образом, приходим к выводу о существовании такого оператора $\widehat{A} \in L(\mathcal{U}; \mathcal{U})$. ⊠

В силу результата леммы 5 приходим к выводу о том, что оператор $\widehat{A}$ эрмитов и поэтому все его характеристические числа вещественны. Осталось заметить, что характеристические многочлены операторов A и $\widehat{A}$ совпадают. Действительно, имеют место следующие равенства:

$$Ae = \lambda \cdot e \Rightarrow A_e \cdot X_e = \lambda X_e, \quad e = \mathbf{E} \cdot X_e,$$
$$\widehat{A} f = \lambda \cdot f \Rightarrow \widehat{A}_f \cdot Y_f = \lambda Y_f, \quad f = \mathbf{F} \cdot Y_f.$$

При этом:

$$\det(A_e - \lambda I) = 0, \quad \det(\widehat{A}_f - \lambda I) = \det(A_e - \lambda I) = 0$$

Значит, совпадают их характеристические числа. Стало быть, в силу результата шага 1 вещественны.

Теорема доказана.

Лемма 13. *Все собственные значения самосопряженного оператора вещественны.*

Теорема 8. *Симметричный оператор в евклидовом пространстве имеет по крайней мере один собственный вектор.*

Доказательство. Характеристический многочлен симметричного оператора A в n–мерном евклидовом пространстве является многочленом степени n и имеет, по основной теореме алгебры, хотя бы один корень $\lambda_0 \in \mathbb{C}$. Из предыдущей теоремы вытекает, что этот корень веществен и, стало быть, является собственным значением оператора A. В таком случае оператор $A - \lambda_0 I$ имеет ненулевое ядро, которое представляет собой собственно подпространство $V_{\lambda_0} \subset \mathcal{E}$, соответствующее собственному значению λ_0.

Теорема доказана.

Теорема 9. *Собственные векторы самосопряженного оператора, принадлежащие различным собственным значениям, ортогональны.*

Доказательство. Пусть λ_1, λ_2 — собственные значения, x_1, x_2 — соответствующие собственные векторы самосопряженного оператора A. По условию, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, причем оба числа λ_1, λ_2 вещественны. Тогда:

$$Ax_1 = \lambda_1 \cdot x_1, \quad Ax_2 = \lambda_2 \cdot x_2.$$

Умножим первое из этих равенств скалярно на x_2, а второе — на x_1 :

$$(Ax_1, x_2) = (\lambda_1 \cdot x_1, x_2) = \lambda_1(x_1, x_2), \tag{6.8}$$

$$(x_1, Ax_2) = (x_1, \lambda_2 \cdot x_2) = \overline{\lambda_2}(x_1, x_2) = \lambda_2(x_1, x_2), \tag{6.9}$$

причем:

$$(Ax_1, x_2) = (x_1, Ax_2). \tag{6.10}$$

Из равенств (6.8)–(6.10) получаем, что

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(x_1, x_2) = 0.$$

Отсюда, поскольку $\lambda_1 \neq \lambda_2$, получаем, что $(x_1, x_2) = 0$.

Теорема доказана.

Теорема 10. *Ортогональное дополнение $\mathcal{P}^{\perp}$ любого инвариантного линейного подпространства $\mathcal{P}$ самосопряженного оператора $A \in L(\mathcal{E}; \mathcal{E})$ либо $A \in L(\mathcal{U}; \mathcal{U})$ также является инвариантным линейным подпространством, причем $\mathcal{L} = \mathcal{P} \oplus \mathcal{P}^{\perp}$, где $\mathcal{L}$ либо $\mathcal{E}$ либо $\mathcal{U}$.*

Доказательство. *Шаг 1.* В силу результата леммы 8 получаем, что, во–первых, $\mathcal{P}^{\perp}$ — линейное подпространство, а во–вторых, имеет место равенство $\mathcal{L} = \mathcal{P} \oplus \mathcal{P}^{\perp}$, где либо $\mathcal{L} = \mathcal{E}$ либо $\mathcal{L} = \mathcal{P}^{\perp}$.

Шаг 2. Докажем теперь, что $\mathcal{P}^{\perp}$ — инвариантное относительно A линейное подпространство. Действительно, пусть $\mathcal{P}$ — инвариантное линейное подпространство для линейного самосопряженного оператора A. Тогда для любых $x \in \mathcal{P}$ вытекает, что $Ax \in \mathcal{P}$. Предположим, что $y \in$

$\in \mathcal{P}^\perp$. Докажем, что $Ay \in \mathcal{P}^\perp$. Действительно, справедлива следующая цепочка равенств:

$$0 = (Ax, y) = (x, Ay) \quad \text{для всех} \quad x \in \mathcal{P} \Rightarrow Ay \in \mathcal{P}^\perp.$$

Теорема доказана.

Теорема 11. *Для того чтобы оператор $A \in L(\mathcal{E};\mathcal{E})$ $(\in L(\mathcal{U};\mathcal{U}))$ был самосопряженным, необходимо и достаточно, чтобы в $\mathcal{E}$ (в $\mathcal{U}$) существовал ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов оператора A, соответствующих вещественным собственным значениям.*

Доказательство. *Достаточность.* Пусть в $\mathcal{E}$ (в $\mathcal{U}$) существует ортонормированный базис из собственных векторов оператора A. В этом базисе матрица диагональна, причем на диагонали стоят вещественные числа — собственные значения данного оператора, и, стало быть, эта матрица симметрична и эрмитова. Но оператор, имеющий в ортонормированном базисе симметричную (эрмитову матрицу), является самосопряженным (см. леммы 3 и 4).

Необходимость. Выше было доказано, что у самосопряженного оператора A в n–мерном пространстве имеется по крайней мере один собственный вектор и, следовательно, одномерное собственное подпространство $\mathcal{P}$. Ортогональное дополнение $\mathcal{P}^\perp$ этого собственного (инвариантного) подпространства, согласно теореме 10, само является инвариантным подпространством размерности $n-1$, поскольку выше в теореме 10 доказано, что $\mathcal{L} = \mathcal{P} \oplus \mathcal{P}^\perp$. Ограничение оператора A на инвариантное подпространство $\mathcal{P}^\perp$ представляет собой самосопряженный оператор в $\mathcal{P}^\perp$, поскольку в силу его инвариантности

$$(Ax, y) = (x, Ay) \quad \text{для всех} \quad x, y \in \mathcal{P}^\perp,$$

который обладает собственным вектором, лежащим в $\mathcal{P}^\perp$. Продолжая процесс, получим ортогональную систему из n собственных векторов оператора A. Нормируя их, получим ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов оператора A.

Теорема доказана.

§ 7. Спектральное разложение самосопряженного оператора

Пусть $A \in L(\mathcal{E};\mathcal{E})$ $(\in L(\mathcal{U};\mathcal{U}))$ и является самосопряженным. Пусть $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — это ортонормированный базис, составленный из собственных векторов оператора A, а $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — соответствующие собственные значения. Пусть

$$x = x^j \cdot \mathbf{e}_j, \quad x \in \mathcal{E} (\in \mathcal{U}).$$

Справедлива следующая цепочка равенств:

$$A(x) = A\left(x^j \cdot \mathbf{e}_j\right) = x^j \cdot A(\mathbf{e}_j) = \sum_{j=1}^{n} x^j \lambda_j \cdot \mathbf{e}_j. \tag{7.1}$$

Рассмотрим оператор P_j ортогональной проекции на линейное подпространство $\mathcal{P}_j := L(\mathbf{e}_j)$:

$$P_j(x) = x^j \cdot \mathbf{e}_j, \tag{7.2}$$

где *нет суммирования* по j. Из равенств (7.1) и (7.2) вытекает следующая формула:

$$A(x) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cdot P_j(x) \quad \text{для всех} \quad x \in \mathcal{E}(\in \mathcal{U}). \tag{7.3}$$

Следовательно,

$$A = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j P_j.$$

Лемма 14. *Справедливо следующее равенство*:

$$A^s = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^s P_j, \quad s \in \mathbb{N}. \tag{7.4}$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что $P_j^2 = P_j$ и $P_j P_k = O$ при $j \neq k$. Действительно, имеем:

$$P_j^2 x = P_j(x^j \cdot \mathbf{e}_j) = x^j \cdot P_j(\mathbf{e}_j) = x^j \cdot \mathbf{e}_j = P_j x \quad \text{для всех} \quad x \in \mathcal{E}(\in \mathcal{U}),$$

$$P_j P_k(x) = P_j(x^k \cdot \mathbf{e}_k) = x^k \cdot P_j(\mathbf{e}_k) = x^k 0 \cdot \mathbf{e}_j = \vartheta \quad \text{для всех} \quad x \in \mathcal{E}(\in \mathcal{U}).$$

Справедлива следующая цепочка равенств:

$$A^2 = \left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j P_j\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k P_k\right) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \lambda_j \lambda_k P_j P_k = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^2 P_j.$$

Далее по индукции доказываем утверждение этой леммы.

Лемма доказана.

Определение 5. *Самосопряженный оператор $A \in L(\mathcal{E};\mathcal{E})$ ($\in L(\mathcal{U};\mathcal{U})$) называется неотрицательным, если все его собственные значения неотрицательны.*

Определение 6. *Определим не целую степень A^s, $s \in [0, +\infty)$ неотрицательного оператора A следующим образом*:

$$A^s \overset{def}{=} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^s P_j, \quad s \in [0, +\infty). \tag{7.5}$$

Лемма 15. *Для линейного неотрицательного самосопряженного оператора A справедливы равенства*;

$$A^0 = I, \quad A^{s_1} A^{s_2} = A^{s_1+s_2} \quad \textit{для всех} \quad s_1, s_2 \in [0, +\infty).$$

§ 8. Приведение квадратичной формы к диагональному виду ортогональным преобразованием

Рассмотрим в некотором ортонормированном базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ евклидова пространства $\mathcal{E}$ квадратичную форму $Q(x)$, которая имеет следующий вид:

$$Q(x^1, \ldots, x^n) = X_e^T \cdot A_e \cdot X_e, \quad X_e^T = (x^1, \ldots, x^n), \tag{8.1}$$

а $A_e \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — матрица квадратичной формы в заданном базисе. Заметим, что $A_e^T = A_e$ и поэтому можно рассматривать матрицу A_e как матрицу некоторого симметричного оператора $A \in L(\mathcal{E}; \mathcal{E})$.

□ Действительно, рассмотрим следующий оператор:

$$Ax := x^j a_j^k \cdot \mathbf{e}_k, \quad x = x^j \cdot \mathbf{e}_j, \quad A_e = (a_j^k)_n^n. \tag{8.2}$$

Можно проверить, что $A \in L(\mathcal{E}; \mathcal{E})$ и его матрица в ортонормированном базисе $\mathbf{E} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ совпадает с матрицей A_e. ⊠

Но тогда существует ортонормированный базис $\{\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n\}$, состоящий из собственных векторов оператора A. В этом базисе матрица A_f оператора A имеет диагональный вид:

$$A_f = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}. \tag{8.3}$$

Пусть:

$$x = \mathbf{E} \cdot X_e = \mathbf{F} \cdot Y_f, \quad \mathbf{F} = \mathbf{E} \cdot C, \tag{8.4}$$

$$X_e^T = (x^1, \ldots, x^n), \quad Y_f^T = (y^1, \ldots, y^n),$$

$$\mathbf{E} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n), \quad \mathbf{F} = (\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n).$$

Тогда имеем:

$$X_e = C \cdot Y_f, \quad C^T = C^{-1}, \quad X_e, Y_f \in \mathbb{R}^{n\times 1}, \tag{8.5}$$

$$A_f = C^{-1} \cdot A_e \cdot C = C^T \cdot A_e \cdot C. \tag{8.6}$$

Справедлива следующая цепочка равенств:

$$Q(x^1, \ldots, x^n) = X_e^T \cdot A_e \cdot X_e =$$

$$= Y_f^T \cdot C^T \cdot A_e \cdot C \cdot Y_f = Y_f^T \cdot A_f \cdot Y_f = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j (y^j)^2.$$

Действительно,

$$Y_f^T \cdot A_f \cdot Y_f = (y^1, \ldots, y^n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & O \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix} =$$

$$= (y^1, \ldots, y^n) \begin{pmatrix} \lambda_1 y^1 \\ \vdots \\ \lambda_n y^n \end{pmatrix} = \lambda^1 (y^1)^2 + \cdots + \lambda_n (y^n)^2.$$

Здесь мы существенно воспользовались тем, что матрица перехода C между двумя ортонормированными базисами $\mathbf{E} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ и $\mathbf{F} = (\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n)$ является ортогональной, т.е. $C^T = C^{-1}$. В противном случае при переходе от базиса $\mathbf{E}$ к базису $\mathbf{F}$ имели бы:

$$C^T \cdot A_e \cdot C \neq C^{-1} \cdot A_e \cdot C\,!!!$$

§ 9. О паре квадратичных форм

Теорема 12. *Для любой пары квадратичных форм $\mathcal{A}(x, x)$ и $\mathcal{B}(x, x)$ в линейном вещественном пространстве $\mathcal{L}$, одна из которых положительно определена, существует общий базис, в котором обе квадратичные формы имеют канонический вид.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{B}(x, x)$ — положительно определенная квадратичная форма и $\mathcal{B}(x, y)$ — билинейная форма, полярная к квадратичной форме $\mathcal{B}(x, x)$. Форма $\mathcal{B}(x, y)$ определяет скалярное произведение в линейном пространстве $\mathcal{L}$, относительно которого $\mathcal{L}$ является евклидовым пространством. Существует такой ортонормированный базис $\{\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n\}$, в котором квадратичная форма $\mathcal{A}(x, x)$ имеет канонический вид, причем:

$$\mathcal{B}(\mathbf{f}_j, \mathbf{f}_k) = \delta_{kj}$$

и поэтому:

$$(x, x) = \mathcal{B}(x, x) = x^j x^k \mathcal{B}(\mathbf{f}_j, \mathbf{f}_k) = \sum_{j=1}^{n} (x^j)^2, \quad x = x^j \cdot \mathbf{f}_j = x^k \cdot \mathbf{f}_k.$$

причем:

$$\mathcal{A}(x, x) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j (x^j)^2.$$

Теорема доказана.

Замечание 1. *Один из способов нахождения общего базиса.* Пусть $\mathcal{B}(x, x)$ — положительно определенная квадратичная форма и A_e и B_e — это матрицы квадратичных форм $\mathcal{A}(x, x)$ и $\mathcal{B}(x, x)$ в некотором базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$. Пусть, кроме того,

$$\mathbf{F} = \mathbf{E} \cdot C, \quad \mathbf{F} = (\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n), \quad \mathbf{E} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \tag{9.1}$$

и при этом преобразование C таково, что:

$$C^T \cdot A_e \cdot C = A_f = \Lambda = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}, \tag{9.2}$$

$$C^T \cdot B_e \cdot C = B_f = I = \operatorname{diag}\{1, \ldots, 1\}. \tag{9.3}$$

Тогда справедливы следующие цепочки равенства:

$$\begin{gathered} A_e = (C^T)^{-1} \cdot \Lambda \cdot C^{-1}, \quad B_e = (C^T)^{-1} \cdot C^{-1} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow A_e = (C^T)^{-1} \cdot \Lambda \cdot C^{-1}, \quad B_e^{-1} = C \cdot C^T \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow B_e^{-1} \cdot A_e = C \cdot C^T \cdot (C^T)^{-1} \cdot \Lambda \cdot C^{-1} = C \cdot \Lambda \cdot C^{-1} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow B_e^{-1} \cdot A_e \cdot C = C \cdot \Lambda. \end{gathered} \tag{9.4}$$

Рассмотрим отдельно равенство:

$$D \cdot C = C \cdot \Lambda, \quad C = \|C_1, \ldots, C_n\|. \tag{9.5}$$

Тогда имеем:

$$(D \cdot C)_j = D \cdot C_j, \quad (C \cdot \Lambda)_j = C \cdot \Lambda_j. \tag{9.6}$$

Заметим, что:

$$C \cdot \Lambda_j = \|C_1, \ldots, C_{j-1}, C_j, C_{j+1}, \ldots, C_n\| \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \lambda_j \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_j C_j. \tag{9.7}$$

Таким образом, из (9.5)–(9.6) получаем, что

$$D \cdot C = C \cdot \Lambda \Rightarrow D \cdot C_j = \lambda_j C_j, \quad j = \overline{1, n}.$$

Отсюда и из (9.4) получаем равенства:

$$B_e^{-1} \cdot A_e \cdot C_j = \lambda_j C_j, \quad j = \overline{1, n}. \tag{9.8}$$

Последнее равенство означает, что столбцы C_j матрицы C, т.е. координаты элемента $\mathbf{f}_j$ нового базиса $\{\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n\}$ относительно старого базиса $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ являются собственными векторами матрицы $B_e^{-1} \times$ $\times A_e$, отвечающими собственным значениям $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Таким образом, канонические коэффициенты $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ являются корнями уравнения:

$$\det(B_e^{-1} \cdot A_e - \lambda I) = 0 \quad \text{или} \quad \det(A_e - \lambda B_e) = 0, \tag{9.9}$$

а координаты нового базиса относительно старого являются решениями следующей линейной однородной системы уравнений:

$$A_e \cdot Y = \lambda B_e \cdot Y.$$

Отметим, что теорема 12 обеспечивает существования полного набора вещественных корней уравнения (9.9) с учетом кратности. Кроме того, докажем, что матрица $B_e^{-1} \cdot A_e$ является симметричной.

□ Действительно, имеем:

$$B_e^{-1} \cdot A_e = C \cdot C^T \cdot (C^T)^{-1} \Lambda \cdot C^{-1} = C \cdot \Lambda \cdot C^{-1},$$

$$\left(B_e^{-1} \cdot A_e\right)^T = (C^{-1})^T \cdot \Lambda^T \cdot C^T = C \cdot \Lambda \cdot C^{-1} = B_e^{-1} \cdot A_e. \quad \boxtimes$$

§ 10. Примеры решения задач

Задача 1. *Сопряженный оператор.* Пусть в некотором ортонормированном базисе трехмерного евклидова пространства $\mathcal{E}$ заданы векторы:

$$\mathbf{e}_1 = (0, 1, 1), \quad \mathbf{e}_2 = (-1, 1, 1), \quad \mathbf{e}_3 = (1, 0, 1). \tag{10.1}$$

Пусть оператор A задан матрицей:

$$A_e = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \\ -3 & 2 & 7 \end{pmatrix} \tag{10.2}$$

в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. Найти матрицу сопряженного оператора A^* в том же базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$.

Решение. Пусть билинейная форма:

$$G(x, y) : \mathcal{E} \otimes \mathcal{E} \to \mathbb{R}^1$$

задает скалярное произведение в евклидовом пространстве $\mathcal{E}$. Пусть, кроме того,

$$x = \mathbf{E} \cdot X_e, \quad y = \mathbf{E} \cdot Y_e, \quad \mathbf{E} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3), \quad X_e, Y_e \in \mathbb{R}^{n\times 1}. \tag{10.3}$$

С одной стороны, с учетом (10.3) справедлива следующая цепочка равенств:

$$(x, y) = G(x, y) = x_e^j G(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k) y_e^k = X_e^T \cdot G_e \cdot Y_e. \tag{10.4}$$

С другой стороны, имеем:

$$Ax = A(\mathbf{E} \cdot X_e) = (A \cdot \mathbf{E}) \cdot X_e = \mathbf{E} \cdot A_e \cdot X_e, \tag{10.5}$$

$$A^* y = A^*(\mathbf{E} \cdot Y_e) = (A^* \cdot \mathbf{E}) \cdot Y_e = \mathbf{E} \cdot A_e^* \cdot Y_e. \tag{10.6}$$

Поэтому из (10.4) с учетом (10.5) и (10.6) приходим к равенству, справедливому для любых $X_e, Y_e \in \mathbb{R}^{n\times 1}$:

$$(Ax, y) = (x, A^* y) \Rightarrow (A_e \cdot X_e)^T \cdot G_e \cdot Y_e = X_e^T \cdot G_e \cdot A_e^* \cdot Y_e \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow X_e^T \cdot \left(A_e^T \cdot G_e - G_e \cdot A_e^*\right) \cdot Y_e = 0 \Leftrightarrow A_e^T \cdot G_e = G_e \cdot A_e^* \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow A_e^* = G_e^{-1} \cdot A_e^T \cdot G_e. \tag{10.7}$$

Заметим, что

$$G_e = \begin{pmatrix} (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) & (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) & (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3) \\ (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) & (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) & (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \\ (\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1) & (\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2) & (\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \tag{10.8}$$

Поэтому из (10.7) и (10.8) вытекает равенство:

$$A_e^* = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} -53 & -20 & -83 \\ 40 & 19 & 57 \\ 31 & 11 & 49 \end{pmatrix}. \tag{10.9}$$

Важный вопрос: где мы воспользовались тем, что базис $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ задан своими координатами в некотором ортонормированном базисе?

Задача 2. *Самосопряженный оператор.* Для линейного оператора A, имеющего в некотором ортонормированном базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ матрицу:

$$A_e = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{10.10}$$

найти базис, состоящий из ортонормированных собственных векторов.

Решение. В силу результатов лемм 4 и 6 линейный оператор A является симметричным. Поэтому существует собственный базис этого оператора, состоящий из собственных векторов. Найдем теперь собственные векторы этого линейного оператора. С этой целью найдем корни характеристического многочлена:

$$\det(A_e - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(1-\lambda)(3-\lambda). \tag{10.11}$$

Таким образом, характеристический многочлен имеет три корня:

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = 3.$$

Алгебраическая кратность каждого корня равна 1. Очевидно, что геометрическая кратность каждого корня тоже равна 1. Осталось найти собственные векторы. Для $\lambda = 0$ имеем:

$$A_e - 0I = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \\ \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}. \tag{10.12}$$

Поэтому система линейных однородных уравнений:

$$(A_e - 0I) \cdot X = O, \quad X = (x^1, x^2, x^3)^T$$

эквивалентна следующей:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

ФСР состоит, например, из столбца $X_1 = (-1, 1, 1)^T$. При этом собственный вектор линейного оператора равен:

$$\mathbf{f}_1 = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \cdot X_1 = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3. \tag{10.13}$$

Для $\lambda = 1$ имеем:

$$A_e - I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{10.14}$$

Тогда система линейных однородных уравнений:

$$(A_e - I) \cdot X = O, \quad X = (x^1, x^2, x^3)^T \tag{10.15}$$

эквивалентна следующей:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{10.16}$$

ФСР состоит, например, из столбца:

$$X_2 = (0, -1, 1)^T,$$

а соответствующий собственный вектор равен:

$$\mathbf{f}_2 = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \cdot X_2 = -\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3. \tag{10.17}$$

Для $\lambda = 3$ справедливы соотношения:

$$A_e - 3I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}. \tag{10.18}$$

Тогда система линейных однородных уравнений:

$$(A_e - 3I) \cdot X = O, \quad X = (x^1, x^2, x^3)^T$$

можно записать в эквивалентном виде:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{10.19}$$

ФСР состоит, например, из столбца:

$$X_3 = (2, 1, 1)^T,$$

которому соответствует собственный вектор:

$$\mathbf{f}_3 = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \cdot X_3 = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3. \tag{10.20}$$

Таким образом, собственный базис линейного оператора A состоит из векторов (10.13), (10.17) и (10.20), которые осталось нормировать на единицу:

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3), \tag{10.21}$$

$$\mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3), \tag{10.22}$$

$$\mathbf{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3). \tag{10.23}$$

Найдем матрицу оператора в ортонормированном базисе $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$:

$$A \cdot (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3) = (A\mathbf{u}_1, A\mathbf{u}_2, A\mathbf{u}_3) =$$
$$= (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3) \cdot A_u = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}. \tag{10.24}$$

Задача 3. *Приведение квадратичной формы к каноническому виду ортогональным преобразованием.* Найти ортогональное преобразование, приводящее квадратичную форму:

$$6x_1^2 + 5x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 \tag{10.25}$$

к каноническому виду, и найти этот канонический вид.

Решение. Поскольку для матрицы ортогонального преобразования выполнено равенство $C^T = C^{-1}$, то ортогональное преобразование одинаковым образом преобразует матрицы линейных операторов и квадратичных форм. Запишем матрицу квадратичной формы:

$$B = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}. \tag{10.26}$$

Характеристический многочлен матрицы B равен:

$$\det(B-\lambda I)=\begin{vmatrix} 6-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & 5-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 7-\lambda \end{vmatrix} = \\ = -(\lambda-3)(\lambda-6)(\lambda-9). \quad (10.27)$$

Поэтому в базисе из собственных векторов матрицы B квадратичной формы ее матрица будет иметь следующий вид:

$$\widetilde{B} = C^T \cdot B \cdot C = C^{-1} \cdot B \cdot C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \quad (10.28)$$

и соответствующая квадратичная форма примет вид:

$$3(x^{1'})^2 + 6(x^{2'})^2 + 9(x^{3'})^2. \quad (10.29)$$

Однако, нам нужно найти матрицу ортогонального преобразования C :

$$(\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'}, \mathbf{e}_{3'}) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \cdot C. \quad (10.30)$$

Столбцы матрицы C составлены из координат разложения соответствующих векторов базиса $\{\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'}, \mathbf{e}_{3'}\}$ по базису $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$.

Для $\lambda = 3$ имеем:

$$B - 3I = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (10.31)$$

Тогда система линейных однородных уравнений:

$$(B-3I)\cdot X = O, \quad X = (x^1, x^2, x^3)$$

эквивалентна следующей:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (10.32)$$

ФСР состоит, например, из следующего столбца:

$$X_1 = (2, 2, -1)^T. \quad (10.33)$$

Для $\lambda = 6$ имеем:

$$B - 6I = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \\ \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (10.34)$$

Тогда линейная однородная система уравнений:

$$(B-6I)\cdot X = O, \quad X = (x^1, x^2, x^3)^T$$

примет следующий эквивалентный вид:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad (10.35)$$

ФСР состоит, например, из следующего столбца:

$$X_2 = (-1, 2, 2)^T. \qquad (10.36)$$

Для $\lambda = 9$ имеем:

$$B - 9I = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 2 \\ -2 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim$$
$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (10.37)$$

Тогда линейная однородная система уравнений:

$$(B - 9I) \cdot X = O, \quad X = (x^1, x^2, x^3)^T$$

эквивалентна следующей:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad (10.38)$$

ФСР состоит, например, из столбца:

$$X_3 = (2, -1, 2)^T. \qquad (10.39)$$

Нормируя столбцы (10.33), (10.36) и (10.39) получим разложение нового ортонормированного базиса по старому ортонормированному базису:

$$\mathbf{e}_{1'} = \frac{1}{3}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \cdot X_1 = \frac{2}{3}\mathbf{e}_1 + \frac{2}{3}\mathbf{e}_2 - \frac{1}{3}\mathbf{e}_3, \qquad (10.40)$$

$$\mathbf{e}_{2'} = \frac{1}{3}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \cdot X_2 = -\frac{1}{3}\mathbf{e}_1 + \frac{2}{3}\mathbf{e}_2 + \frac{2}{3}\mathbf{e}_3, \qquad (10.41)$$

$$\mathbf{e}_{3'} = \frac{1}{3}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \cdot X_3 = \frac{2}{3}\mathbf{e}_1 - \frac{1}{3}\mathbf{e}_2 + \frac{2}{3}\mathbf{e}_3. \qquad (10.42)$$

Таким образом, матрица C определяется следующим образом:

$$(\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'}, \mathbf{e}_{3'}) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \cdot C =$$
$$= (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \cdot \begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}, \qquad (10.43)$$

а старые и новые координаты связаны равенством:

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = C \cdot \begin{pmatrix} x^{1'} \\ x^{2'} \\ x^{3'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{1'} \\ x^{2'} \\ x^{3'} \end{pmatrix}. \quad (10.44)$$

Задача 4. *Приведение пары квадратичных форм одним ортогональным преобразованием к каноническим формам.* Проверить, что в паре квадратичных форм, которые имеют следующий вид:

$$\varphi = 8(x^1)^2 - 28(x^2)^2 + 14(x^3)^2 + 16x^1x^2 + 14x^1x^3 + 32x^2x^3, \quad (10.45)$$

$$\psi = (x^1)^2 + 4(x^2)^2 + 2(x^3)^2 + 2x^1x^3 \quad (10.46)$$

по крайней мере одна форма является положительно определенной. Найти невырожденное линейное преобразование, приводящее эту форму к нормальному, а другую форму той же пары к каноническому виду, и найти этот канонический вид.

Решение. Квадратичной форме φ отвечает матрица:

$$\Phi = \begin{pmatrix} 8 & 8 & 7 \\ 8 & -28 & 16 \\ 7 & 16 & 14 \end{pmatrix}, \quad (10.47)$$

а квадратичной форме ψ отвечает матрица:

$$\Psi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \quad (10.48)$$

Как мы знаем из критерия Сильвестра вытекает, что квадратичная форма является положительно определенной тогда и только тогда, когда все главные миноры положительны. Проверим, что квадратичная форма ψ является положительно определенной. Действительно,

$$1 > 0, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 4 > 0, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0.$$

Найдем тогда собственные числа пары матриц Φ и Ψ, то есть корни многочлена:

$$\det(\Phi - \lambda\Psi) = \begin{vmatrix} 8-\lambda & 8 & 7-\lambda \\ 8 & -28-4\lambda & 16 \\ 7-\lambda & 16 & 14-2\lambda \end{vmatrix} = \\ = -4(\lambda-9)^2(\lambda+9). \quad (10.49)$$

Таким образом, совместными собственными числами матриц Φ и Ψ являются $\lambda_1 = \lambda_2 = 9$, $\lambda_3 = -9$.

Теперь нам нужно найти базис $\{\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'}, \mathbf{e}_{3'}\}$, обладающий следующими свойствами:

1. Верно равенство $(\Phi - \lambda_{i'}\Psi) \cdot \mathbf{e}_{i'} = O$.

2. Векторы $\{\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'}, \mathbf{e}_{3'}\}$ образуют ортонормированный базис относительно скалярного произведения, заданного симметрической матрицей Ψ.

Прежде всего заметим, что матрица Ψ определяет некоторое скалярное произведение в $\mathbb{R}^3$:

$$(X, Y) := X^T \cdot \Psi \cdot Y, \quad X = (x^1, x^2, x^3)^T, \quad Y = (y^1, y^2, y^3)^T. \tag{10.50}$$

При этом квадратичная форма φ можно записать в компактном виде:

$$\varphi = X^T \cdot \Phi \cdot X. \tag{10.51}$$

Линейное пространство $\mathbb{R}^3$ является евклидовым относительно скалярного произведения (10.50). Пусть $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ — произвольный ортонормированный относительно скалярного произведения (10.50) базис в $\mathbb{R}^3$, а Φ — это матрица квадратичной формы (10.51) в этом базисе.

Заметим, что если $\lambda_{i'} \neq \lambda_{j'}$, то соответствующие столбцы $\mathbf{e}_{i'}$ и $\mathbf{e}_{j'}$ являются ортогональными.

□ Действительно, справедливы следующие равенства:

$$(\Phi - \lambda_{i'}\Psi) \cdot \mathbf{e}_{i'} = O, \quad (\Phi - \lambda_{j'}\Psi) \cdot \mathbf{e}_{j'} = O, \tag{10.52}$$

$$\mathbf{e}_{j'}^T \cdot (\Phi - \lambda_{i'}\Psi) \cdot \mathbf{e}_{i'} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{e}_{j'}^T \cdot \Phi \cdot \mathbf{e}_{i'} = \lambda_{i'}\mathbf{e}_{j'}^T \cdot \Psi \cdot \mathbf{e}_{i'} = \lambda_{i'}(\mathbf{e}_{j'}, \mathbf{e}_{i'}), \tag{10.53}$$

$$\mathbf{e}_{i'}^T \cdot (\Phi - \lambda_{j'}\Psi) \cdot \mathbf{e}_{j'} = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \mathbf{e}_{i'}^T \cdot \Phi \cdot \mathbf{e}_{j'} = \lambda_{j'}\mathbf{e}_{i'}^T \cdot \Psi \cdot \mathbf{e}_{j'} = \lambda_{j'}(\mathbf{e}_{i'}, \mathbf{e}_{j'}), \tag{10.54}$$

$$\mathbf{e}_{i'}^T \cdot \Phi \cdot \mathbf{e}_{j'} = (\mathbf{e}_{i'}^T \cdot \Phi \cdot \mathbf{e}_{j'})^T = \mathbf{e}_{j'}^T \cdot \Phi^T \cdot \mathbf{e}_{i'} = \mathbf{e}_{j'}^T \cdot \Phi \cdot \mathbf{e}_{i'}. \tag{10.55}$$

Из равенств (10.53)–(10.55) получаем, что

$$\lambda_{j'}(\mathbf{e}_{i'}, \mathbf{e}_{j'}) = \lambda_{i'}(\mathbf{e}_{j'}, \mathbf{e}_{i'}), \tag{10.56}$$

из которого в силу симметричности скалярного произведения приходим к равенству:

$$\lambda_{j'}(\mathbf{e}_{i'}, \mathbf{e}_{j'}) = \lambda_{i'}(\mathbf{e}_{i'}, \mathbf{e}_{j'}).$$

Следовательно,

$$(\mathbf{e}_{i'}, \mathbf{e}_{j'}) = 0 \quad \text{при} \quad \lambda_{i'} \neq \lambda_{j'}. \quad \boxtimes \tag{10.57}$$

Рассмотрим сначала корень $\lambda_3 = -9$ алгебраической кратности 1. Тогда собственный вектор относительно матриц Φ и Ψ определяется из следующей системы однородных линейных уравнений:

$$(\Phi + 9\Psi) \cdot X = O, \quad X = (x^1, x^2, x^3)^T, \quad O = (0, 0, 0)^T, \tag{10.58}$$

$$\begin{pmatrix} 17 & 8 & 16 \\ 8 & 8 & 16 \\ 16 & 16 & 32 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{10.59}$$

Несложно проверить, что ФСР этой системы состоит из столбца:

$$X_3 = c_3(0, -2, 1)^T, \quad c_3 \neq 0, \tag{10.60}$$

нормируя который на единицу относительно скалярного произведения (10.50), получим следующие соотношения:

$$c_3^2(0, -2, 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow c_3 = \pm \frac{1}{3\sqrt{2}}. \tag{10.61}$$

Таким образом, первый собственный нормированный на единицу вектор можно выбрать, например, таким:

$$\mathbf{e}_{3'} = \left(0, -\frac{2}{3\sqrt{2}}, \frac{1}{3\sqrt{2}}\right). \tag{10.62}$$

Рассмотрим теперь случай собственного числа $\lambda = 9$ алгебраической кратности 2. Имеем:

$$(\Phi - 9\Psi) \cdot X = O, \tag{10.63}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 8 & -2 \\ 8 & -64 & 16 \\ -2 & 16 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{10.64}$$

Система уравнений (10.64) эквивалентна одному уравнению:

$$-x^1 + 8x^2 - 2x^3 = 0. \tag{10.65}$$

Выберем любое решение этого уравнения, например, $X_1 = (-2, 0, 1)^T$. Квадрат длины этого вектора относительно скалярного произведения (10.50) равен:

$$(-2, 0, 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2. \tag{10.66}$$

Поэтому получаем вектор длины 1:

$$\mathbf{e}_{1'} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}. \tag{10.67}$$

Вектор $\mathbf{e}_{2'}$ должен удовлетворять уравнению (10.65) а также быть ортогональным к вектору $\mathbf{e}_{1'}$ относительно скалярного произведения (10.50). Стало быть, имеем:

$$(\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'}) = (-\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0. \tag{10.68}$$

Рассмотрим систему уравнений:

$$-x^1 + 8x^2 - 2x^3 = 0, \quad x_1 = 0. \tag{10.69}$$

ФСР этой системы уравнений состоит, например, из столбца:

$$X_2 = c_2(0,1,4)^T, \quad c_2 \neq 0. \tag{10.70}$$

Условие того, что этот вектор имеет длину 1 относительно скалярного произведения (10.50), примет следующий вид:

$$c_2^2(0,1,4)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow c_2 = \pm\frac{2}{3}. \tag{10.71}$$

Из (10.70) и (10.71) вытекает выражение для собственного вектора:

$$\mathbf{e}_{2'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/6 \\ 2/3 \end{pmatrix}. \tag{10.72}$$

Матрица перехода C от старого ортонормированного базиса $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ к новому ортонормированному базису $\{\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'}, \mathbf{e}_{3'}\}$, определенному равенствами (10.67), (10.72) и (10.67), имеет следующий вид:

$$(\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'}, \mathbf{e}_{3'}) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)\cdot C =$$
$$= (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)\cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1/6 & -2/(3\sqrt{2}) \\ 1/\sqrt{2} & 2/3 & 1/(3\sqrt{2}) \end{pmatrix}. \tag{10.73}$$

При этом в этом базисе арифметического пространства $\mathbb{R}^3$ квадратичные формы имеют следующий вид:

$$\psi(x) = (x^{1'})^2 + (x^{2'})^2 + (x^{3'})^2,$$
$$\varphi(x) = -9(x^{1'})^2 + 9(x^{2'})^2 + 9(x^{3'})^2,$$
$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1/6 & -2/(3\sqrt{2}) \\ 1/\sqrt{2} & 2/3 & 1/(3\sqrt{2}) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^{1'} \\ x^{2'} \\ x^{3'} \end{pmatrix}.$$

Задача 5. *Экзаменационная задача* Рассматривается линейное евклидово пространство $\mathcal{E}$, $\dim\mathcal{E} \in \mathbb{N}$. Пусть: $P \in L(\mathcal{E};\mathcal{E})$ — самосопряженный оператор, причем $P^2 = P$ (т. е. оператор P идемпотентный). Доказать, что оператор P является оператором ортогонального проектирования на линейное подпространство $\operatorname{im} P \subset \mathcal{E}$.

Решение. Справедливо разложение:

$$x = Px + (x - Px) \quad \text{для любого} \quad x \in \mathcal{E}. \tag{10.74}$$

Очевидно, что $Px \in \operatorname{im} P$. Докажем, что

$$(x - Px) \in (\operatorname{im} P)^{\perp} \quad \text{для всех} \quad x \in \mathcal{E}. \tag{10.75}$$

Пусть $z \in \operatorname{im} P$. Тогда найдется такое $y \in \mathcal{E}$, что $z = Py$. Справедливы равенства:

$$(x - Px, z) = (x - Px, Py) = (P(x - Px), y) = (Px - P^2 x, y) = \\ = (Px - Px, y) = 0 \quad \text{для всех} \quad x \in \mathcal{E} \quad \text{и всех} \quad z \in \operatorname{im} P. \quad (10.76)$$

Следовательно, $x - Px \in (\operatorname{im} P)^{\perp}$. Следовательно, оператор P является оператором ортогонального проектирования на $\operatorname{im} P$.

Задача 6. *Экзаменационная задача.* Рассматривается евклидово пространство $\mathcal{E}$. Пусть $A, B \in L(\mathcal{E}; \mathcal{E})$ — два самосопряженных оператора. Доказать, что оператор AB является самосопряженным оператором тогда и только тогда, когда $AB = BA$.

Решение. Необходимость. Пусть $(AB)^* = AB$. Для всех $x, y \in \mathcal{E}$ справедлива цепочка равенств:

$$(ABx, y) = (x, (AB)^* y) = (x, ABy) = \\ = (B^* A^* x, y) = (BAx, y) \Rightarrow AB = BA. \quad (10.77)$$

Шаг 2. Достаточность. Пусть $AB = BA$. Тогда для всех $x, y \in \mathcal{E}$ справедлива цепочка равенств:

$$(x, (AB)^* y) = (x, B^* A^* y) = (x, BAy) = (x, ABy).$$

Следовательно, $(AB)^* = AB$.

Задача 7. *Экзаменационная задача.* Рассматривается ориентированное евклидово пространство V_3 с правым ортонормированным базисом $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. Пусть $\mathbf{a} \in V_3$ и $Ax = [x, \mathbf{a}]$ при $x \in V_3$ (здесь $[x, \mathbf{a}]$ — векторное произведение векторов x и $\mathbf{a} \neq \vartheta$). Доказать, что A — линейный оператор в пространстве V_3. Найти матрицу оператора A в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$; ядро, образ, собственные значения, собственные векторы оператора A.

Решение. Шаг 1. Линейность. Линейность оператора $Ax = [x, \mathbf{a}]$ является следствием линейности векторного произведения $[x, \mathbf{a}]$ по первому аргументу.

Шаг 2. Матрица оператора. Справедливы следующие равенства:

$$A\mathbf{e}_1 = [\mathbf{e}_1, \mathbf{a}] = -a_3 \mathbf{e}_2 + a_2 \mathbf{e}_3, \quad (10.78)$$

$$A\mathbf{e}_2 = [\mathbf{e}_2, \mathbf{a}] = a_3 \mathbf{e}_1 - a_1 \mathbf{e}_3, \quad (10.79)$$

$$A\mathbf{e}_3 = [\mathbf{e}_3, \mathbf{a}] = -a_2 \mathbf{e}_1 + a_1 \mathbf{e}_2, \quad (10.80)$$

где $\mathbf{a} = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3$. Таким образом, из (10.78)–(10.80) вытекает, что

$$(A\mathbf{e}_1, A\mathbf{e}_2, A\mathbf{e}_3) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \cdot A_e, \quad (10.81)$$

$$A_e = \begin{pmatrix} 0 & a_3 & -a_2 \\ -a_3 & 0 & a_1 \\ a_2 & -a_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Шаг 3. Ядро оператора. Имеем:

$$\ker A = \{x \in V_3 : \ [x, \mathbf{a}] = \vartheta\}. \quad (10.82)$$

Справедливы равенства:

$$[x, \mathbf{a}] = \vartheta \Leftrightarrow \alpha\mathbf{a} + \beta x = \vartheta, \quad \alpha^2 + \beta^2 > 0.$$

Если $\beta = 0$, то $\alpha \neq 0$ и тогда $\mathbf{a} = \vartheta$, что противоречит условию задачи. Поэтому $\beta \neq 0$. Следовательно,

$$x = \frac{\alpha}{\beta}\mathbf{a}.$$

Итак, отсюда и из (10.82) получаем:

$$\ker A = \{x \in V_3: \ x = t \cdot \mathbf{a}, \ t \in \mathbb{R}\}. \tag{10.83}$$

Шаг 4. Образ оператора. По определению имеем:

$$\operatorname{im} A = \{y \in V_3: \ y = [x, \mathbf{a}], \quad \forall x \in V_3\}. \tag{10.84}$$

Докажем, что

$$\operatorname{im} A = \{y \in V_3: \ (y, \mathbf{a}) = 0\}. \tag{10.85}$$

□ Действительно, пусть $y \in \operatorname{im} A$. Тогда найдется такое $x \in V_3$, что $y = [x, \mathbf{a}]$. Согласно свойствам векторного произведения получаем $(y, \mathbf{a}) = 0$. Обратно. Пусть $(y, \mathbf{a}) = 0$. Введем следующий правый ортогональный базис $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ в V_3. Тогда взаимный базис будет иметь вид:

$$\mathbf{f}_1 = \frac{[\mathbf{b}, \mathbf{c}]}{(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})}, \quad \mathbf{f}_2 = \frac{[\mathbf{c}, \mathbf{a}]}{(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})}, \quad \mathbf{f}_3 = \frac{[\mathbf{a}, \mathbf{b}]}{(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})}. \tag{10.86}$$

Справедливо разложение:

$$y = \alpha\mathbf{f}_1 + \beta\mathbf{f}_2 + \gamma\mathbf{f}_3, \tag{10.87}$$

причем из условия $(y, \mathbf{a}) = 0$ сразу же получаем, что $\alpha = 0$. Итак,

$$y = \beta\mathbf{f}_2 + \gamma\mathbf{f}_3 = \frac{1}{(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})}\{\beta[\mathbf{c}, \mathbf{a}] + \gamma[\mathbf{a}, \mathbf{b}]\} = [\mathbf{d}, \mathbf{a}] = A\mathbf{d}, \tag{10.88}$$

$$\mathbf{d} = \frac{\beta\mathbf{c} - \gamma\mathbf{b}}{(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})}.$$

Следовательно, $y \in \operatorname{im} A$.

Шаг 5. Собственные векторы. Рассмотрим уравнение:

$$Ax = \lambda x, \quad x \neq \vartheta, \tag{10.89}$$

из которого получаем:

$$[x, \mathbf{a}] = \lambda x, \quad x \neq \vartheta, \tag{10.90}$$

Если $\lambda \neq 0$, то из равенства (10.90) получаем, что $(x, x) = 0$, т.е. $x = \vartheta$. Пришли к противоречию. Значит, $\lambda = 0$. В этом случае задача (10.89) имеет один линейно независимый собственный вектор, например, $x = \mathbf{a}$. Собственное подпространство совпадает с $\ker A$.

Задача 8. *Экзаменационная задача.* Рассматривается унитарное пространство $\mathcal{U}$. Пусть $A \in L(\mathcal{U};\mathcal{U})$. Доказать, что $i(A - A^*)$ — самосопряженный оператор.

Решение. Справедлива цепочка равенств:

$$(i(A - A^*)x, y) = i(Ax, y) - i(A^*x, y) = \\ = (x, -iA^*y) + (x, iA^{**}y) = (x, i(A - A^*)y) \quad (10.91)$$

для всех $x, y \in \mathcal{U}$, поскольку $A^{**} = A$.

Задача 9. *Вычислительная задача.* Рассматривается евклидово пространство $\mathcal{E}$ с ортонормированным базисом $\mathbf{E} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4)$. Заданы элементы этого евклидова пространства:

$$x_1 = \mathbf{E} \cdot X_1, \quad x_2 = \mathbf{E} \cdot X_2, \quad X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (10.92)$$

Найти матрицу оператора ортогонального проектирования P на линейное подпространство $L(x_1, x_2)$ в базисе $\mathbf{E} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4)$.

Решение. Очевидно, что $\dim L(x_1, x_2) = 2$. Построим базис в $(L(x_1, x_2))^\perp$. В силу ортонормированности базиса $\mathbf{E}$ имеем:

$$y = \mathbf{E} \cdot Y, \quad (Y, X_1) = (Y, X_2) = 0, \quad Y^T = (y^1, y^2, y^3, y^4), \quad (10.93)$$

где символом $(\cdot, \cdot)$ мы обозначили стандартное скалярное произведение в $\mathbb{R}^4$. Из (10.93) получаем систему однородных уравнений:

$$1 \cdot y^1 + 0 \cdot y^2 = 0 \cdot y^3 + (-1) \cdot y^4, \quad 1 \cdot y^1 + 1 \cdot y^2 = 0 \cdot y^3 + 0 \cdot y^4. \quad (10.94)$$

ФСР этой системы уравнений состоит из следующих столбцов:

$$Y_1^T = (0, 0, 1, 0), \quad Y_2^T = (-1, 1, 0, 1). \quad (10.95)$$

Но тогда с учетом (10.92) и (10.95) справедливо равенство:

$$(x_1, x_2, y_1, y_2) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4) \cdot C, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (10.96)$$

Согласно определению ортогонального проектирования имеем:

$$Px_1 = x_1, \quad Px_2 = x_2, \quad Py_1 = \vartheta, \quad Py_2 = \vartheta. \quad (10.97)$$

Из (10.97) получаем:

$$(Px_1, Px_2, Py_1, Py_2) = (x_1, x_2, y_1, y_2) \cdot P_x, \quad (10.98)$$

$$P_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (10.99)$$

Итак,имеем:

$$(P\mathbf{e}_1, P\mathbf{e}_2, P\mathbf{e}_3, P\mathbf{e}_4) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4) \cdot P_e, \tag{10.100}$$

$$P_e = C \cdot P_x \cdot C^{-1}. \tag{10.101}$$

Вычислите сами!

Задача 10. *Вычислительная задача.* Рассматривается евклидово пространство $\mathcal{E}$ с ортонормированным базисом $\mathbf{E} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$. Задано выражение для квадратичной формы Q в базисе E :

$$Q(x) = 3(x^1)^2 - 4x^1x^3 + (x^2)^2 + 3(x^3)^2. \tag{10.102}$$

Найти: матрицу квадратичной формы Q в базисе $\mathbf{E}$; ортонормированный базис $\mathbf{F} = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3)$, в котором матрица квадратичной формы Q имеет диагональный вид; матрицу перехода от базиса E к базису F и наоборот; матрицу квадратичной формы в базисе F.

Решение. Полярная билинейная форма $B(x, y)$ к квадратичной форме $Q(x) = B(x, x)$ имеет следующий вид:

$$B(x, y) = 3x^1y^1 - 2x^1y^3 - 2x^3y^1 + x^2y^2 + 3x^3y^3. \tag{10.103}$$

Поэтому:

$$Q_e = B_e = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}. \tag{10.104}$$

Корни характеристического многочлена:

$$f(\lambda) = \det(Q_e - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & -2 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ -2 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{10.105}$$

равны $\lambda_1 = 5$ и $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$.

Случай 1. $\lambda_1 = 5$. Тогда:

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & -4 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \backsim$$

$$\backsim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{10.106}$$

Нормированный на единицу ФСР этой однородной СЛАУ имеет вид:

$$X_1 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \tag{10.107}$$

причем собственные вектор самосопряженного оператора, порождающего данную симметричную билинейную форму, имеет вид:

$$\mathbf{f}_1 = \mathbf{E} \cdot X_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{e}_3. \tag{10.108}$$

Случай 2. $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$. В этом случае имеем:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \backsim x^1 - x^3 = 0. \tag{10.109}$$

Нормированный на единицу ФСР этой системы уравнений состоит из следующих двух столбцов:

$$X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \tag{10.110}$$

а соответствующие собственные векторы имеют следующий вид:

$$\mathbf{f}_2 = \mathbf{E} \cdot X_2 = \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{f}_3 = \mathbf{E} \cdot X_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{e}_3. \tag{10.111}$$

Семейство векторов (10.108) и (10.111) образуют ортонормированный базис евклидова пространства $\mathcal{E}$, в котором матрица квадратичной формы диагональна. Именно,

$$\mathbf{F} = \mathbf{E} \cdot C, \quad C = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

$$Q_f = C^T \cdot Q_e \cdot C = C^{-1} \cdot Q_e \cdot C = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задача 11. Пусть нам задана евклидова плоскость в прямоугольной декартовой системе координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$. Рассмотрим оператор A проецирования вектора плоскости на ось абсцисс Ox параллельно биссектрисе первой и третьей четверти. Найти A^*.

Решение. Пусть:

$$\mathbf{x} = x^1\mathbf{e}_1 + x^2\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{y} = y^1\mathbf{e}_1 + y^2\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{a} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2. \tag{10.112}$$

Вектор $\mathbf{a}$ — направляющий вектор биссектрисы первой и третьей четверти. Справедливы равенства:

$$\mathbf{x} = \alpha\mathbf{e}_1 + \beta\mathbf{a} = (\alpha + \beta)\mathbf{e}_1 + \beta\mathbf{e}_2 = x^1\mathbf{e}_1 + x^2\mathbf{e}_2, \tag{10.113}$$

из которых получаем:

$$\alpha = x^1 - x^2, \quad \beta = x^2. \tag{10.114}$$

Значит, имеем:
$$A\mathbf{x} = \alpha\mathbf{e}_1 = (x^1 - x^2)\mathbf{e}_1. \tag{10.115}$$

Имеет место следующие равенства:

$$(A\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (x^1 - x^2)y^1 = x^1y^1 + x^2(-y^1) =$$
$$= (x^1\mathbf{e}_1 + x^2\mathbf{e}_2, y^1\mathbf{e}_1 - y^1\mathbf{e}_2) = (\mathbf{x}, y^1(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)) = (\mathbf{x}, A^*\mathbf{y}), \tag{10.116}$$
$$A^*\mathbf{y} = y^1\mathbf{b}, \quad \mathbf{b} = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{y} = y^1\mathbf{e}_1 + y^2\mathbf{e}_2. \tag{10.117}$$

Проведем качественный анализ оператора A^*. Вектор $\mathbf{b}$ — это направляющий вектор биссектрисы второй и четвертой четверти, т.е. оператор A^* — это оператор проецирования на эту биссектрису, причем при этом проецировании координата y^1 сохраняется, т.е. это проецирование параллельно оси ординат.

Задача 12. Найти оператор $\mathbf{C}^*$ сопряженный к оператору $\mathbf{C}$ умножения на произвольную матрицу:
$$\mathbf{C}(X) = C \cdot X, \quad C, X \in \mathbb{K}^{n\times n}, \tag{10.118}$$
в евклидовом $\mathbb{R}^{n\times n}$ или унитарном пространстве $\mathbb{C}^{n\times n}$ квадратных матриц относительно скалярного произведения:
$$(A, B) := \operatorname{tr}\left(\overline{A}^T B\right). \tag{10.119}$$

Решение. Справедливы равенства:
$$(\mathbf{C}(A), B) = \operatorname{tr}(\overline{A}^T\overline{C}^T B) = (A, \mathbf{C}^*(B)), \quad \mathbf{C}^*(B) := \overline{C}^T B, \tag{10.120}$$
т.е. искомый сопряженный оператор — это оператор умножения на матрицу $\overline{C}^T$.

Задача 13. *Лапласианом* оператора A называется оператор:
$$L(A) := AA^* + A^*A. \tag{10.121}$$

Доказать равенство:
$$\ker L(A) = \ker A \cap \ker A^*. \tag{10.122}$$

Решение. Вложение $\ker A \cap \ker A^* \subset \ker L(A)$ очевидно. Пусть $x \in \in \ker L(A)$. Тогда справедливо равенство:
$$AA^*x = -A^*Ax. \tag{10.123}$$

Умножим обе части равенства (10.123) на вектор x и получим следующие равенства:

$$(AA^*x, x) = -(A^*Ax, x) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (A^*x, A^*x) = -(Ax, A^{**}x) = -(Ax, Ax) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \|A^*x\|^2 + \|Ax\|^2 = 0 \Rightarrow x \in \ker A \cap \ker A^*. \tag{10.124}$$

З а д а ч а 14. Пусть у оператора A существует базис из собственных векторов $\{x_1, \ldots, x_n\}$. Доказать, что тогда у сопряженного оператора A^* также существует базис из собственных векторов $\{y_1, \ldots, y_n\}$, причем их можно выбрать таким образом, чтобы они были взаимные, т.е.

$$(x_j, y_k) = \delta_{jk}. \tag{10.125}$$

Решение. Рассмотрим следующую линейную оболочку:

$$L_k = L(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n). \tag{10.126}$$

Совершенно понятно, что $AL_k \subset L_k$. Пусть $y_k \in L_k^{\perp}$, причем $\dim L_k^{\perp} = 1$ и $y_k \neq \vartheta$. Тогда для любого $x \in L_k$ имеют место равенства:

$$0 = (Ax, y_k) = (x, A^* y_k) \Rightarrow A^* y_k \in L_k^{\perp} \Rightarrow A^* y_k = \mu_k y_k. \tag{10.127}$$

Осталось нормировать вектор y_k таким образом, чтобы:

$$(y_k, x_k) = 1. \tag{10.128}$$

Тогда по построению будем иметь семейство векторов $\{y_1, \ldots, y_n\}$ такое, что выполнены равенства (10.125). Докажем, что семейство $\{y_1, \ldots, y_n\}$, удовлетворяющее равенствам (10.125) образует базис, если семейство векторов $\{x_1, \ldots, x_n\}$ образует базис. Для этого достаточно доказать их линейную независимость. Рассмотрим линейную комбинацию векторов семейства $\{y_1, \ldots, y_n\}$:

$$\alpha^j y_j = \vartheta \Rightarrow \alpha^j (y_j, x_k) = 0 \Rightarrow \alpha^k = 0, \quad k = \overline{1, n}. \tag{10.129}$$

З а д а ч а 15. Пусть A — (не обязательно линейное) отображение евклидова пространства $\mathcal{E}$ в себя, для которого существует сопряженное отображение A^* со свойством $(Ax, y) = (x, A^* y)$ для всех $x, y \in \mathcal{E}$. Доказать, что отображения A и A^* линейны.

Решение. Достаточно доказать, что оператор A линейный. Действительно, для всех $x_1, x_2, y \in \mathcal{E}$ и всех $\alpha^1, \alpha^2 \in \mathbb{R}$ справедливы равенства:

$$\begin{aligned}(A(\alpha^1 x_1 + \alpha^2 x_2), y) &= (\alpha^1 x_1 + \alpha^2 x_2, A^* y) = \\ &= \alpha^1 (x^1, A^* y) + \alpha^2 (x_2, A^* y) = \alpha^1 (A x^1, y) + \alpha^2 (A x_2, y) = \\ &= (\alpha^1 A x_1 + \alpha^2 A x_2, y),\end{aligned} \tag{10.130}$$

которые выполнены для любого $y \in \mathcal{E}$. Следовательно,

$$A(\alpha^1 x_1 + \alpha^2 x_2) = \alpha^1 A x_1 + \alpha^2 A x_2.$$

З а д а ч а 16. Пусть $A \in L(\mathcal{E}; \mathcal{E})$ и A^* — сопряженный оператор. Доказать, что

1) если e — собственный вектор оператора $A^* A$ и $x \perp e$, то $Ax \perp Ae$;

2) если для каждого вектора $x \in L^{\perp}(e)$ векторы $Ae \perp Ax$, то e — собственный вектор оператора $A^* A$.

Решение. Шаг 1. Итак, пусть:

$$A^* A e = \lambda e \quad \text{и} \quad x \perp e. \tag{10.131}$$

Тогда имеем:

$$(Ax, Ae) = (x, A^*Ae) = (x, \lambda e) = \lambda(x, e) = 0. \tag{10.132}$$

Шаг 2. Справедливо равенство:

$$0 = (Ax, Ae) = (x, A^*Ae) \quad \text{для всех} \quad x \in L^{\perp}(e). \tag{10.133}$$

Значит, $A^*Ae \in L(e)$. Следовательно, найдется такое число $\lambda \in \mathbb{R}$, что

$$A^*Ae = \lambda e. \tag{10.134}$$

Задача 17. Доказать, что для того чтобы линейный оператор $A \in \in L(\mathcal{E}; \mathcal{E})$ переводил ортогональный базис пространства в ортогональную систему векторов, необходимо и достаточно, чтобы векторы этого базиса были собственными векторами оператора A^*A, где оператор A^* — сопряженный к A.

Решение. Достаточность. Пусть $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — базис в $\mathcal{E}$ такой, что

$$A^*Ae_j = \lambda_j e_j, \quad \lambda_j \in \mathbb{R}. \tag{10.135}$$

В силу результат предыдущей задачи из того, что $\mathbf{e}_j \perp \mathbf{e}_k$ вытекает, что $A\mathbf{e}_j \perp A\mathbf{e}_k$.

Необходимость. Пусть $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — ортонормированный базис в $\mathcal{E}$ такой, что

$$A\mathbf{e}_j \perp A\mathbf{e}_k \quad \text{при} \quad j \neq k. \tag{10.136}$$

Тогда для каждого $k = \overline{1, n}$ — фиксированного имеем:

$$0 = (A\mathbf{e}_j, A\mathbf{e}_k) = (\mathbf{e}_j, A^*A\mathbf{e}_k) \quad \text{для всех} \quad j = \overline{1, n}, \quad j \neq k. \tag{10.137}$$

Значит,

$$A^*A\mathbf{e}_k \in L^{\perp}(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{k-1}, \mathbf{e}_{k+1}, \ldots, \mathbf{e}_n) = L(\mathbf{e}_k). \tag{10.138}$$

Таким образом, найдется такое $\lambda_k \in \mathbb{R}$, что

$$A^*A\mathbf{e}_k = \lambda_k \mathbf{e}_k, \quad k = \overline{1, n}.$$

Задача 18. В стандартном базисе четырехмерного евклидова пространства $\mathbb{R}^4$ найти матрицу ортогонального проектирования пространства на подпространство:

$$x^1 + x^2 + x^3 + x^4 = 0. \tag{10.139}$$

Решение. Гиперплоскость π вида (10.139) можно записать в следующие виде:

$$(\mathbf{n}, x) = 0, \quad \mathbf{n} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4, \quad x \in \mathbb{R}^4, \tag{10.140}$$

где $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$ — канонический базис в $\mathbb{R}^4$. Тогда вектор x можно представить в следующем виде:

$$x = x_{\parallel} + x_{\perp}, \quad x_{\parallel} \in \pi, \quad x_{\perp} \perp \pi. \tag{10.141}$$

Значит,

$$x_\perp = \alpha\mathbf{n}, \quad \alpha = \frac{(\mathbf{n}, x)}{(\mathbf{n}, \mathbf{n})}, \quad x_\parallel = x - x_\perp = x - \frac{(\mathbf{n}, x)}{(\mathbf{n}, \mathbf{n})}\mathbf{n}. \tag{10.142}$$

Искомый оператор проецирования имеет следующий вид:

$$Ax = x - x_\perp = x - \frac{(\mathbf{n}, x)}{(\mathbf{n}, \mathbf{n})}\mathbf{n}. \tag{10.143}$$

При этом имеем:

$$A\mathbf{e}_j = \mathbf{e}_j - \frac{1}{4}\mathbf{n}, \quad j = 1, 2, 3, 4. \tag{10.144}$$

Из (10.144) приходим к равенству:

$$(A\mathbf{e}_1, A\mathbf{e}_2, A\mathbf{e}_3, A\mathbf{e}_4) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4)A_e, \tag{10.145}$$

$$A_e = \begin{pmatrix} 3/4 & -1/4 & -1/4 & -1/4 \\ -1/4 & 3/4 & -1/4 & -1/4 \\ -1/4 & -1/4 & 3/4 & -1/4 \\ -1/4 & -1/4 & -1/4 & 3/4 \end{pmatrix}. \tag{10.146}$$

Задача 19. Доказать, что для того чтобы оператор проектирования пространства $\mathcal{E}$ на подпространство $\mathcal{P}_1$ параллельно подпространству $\mathcal{P}_2$ был самосопряженным, необходимо и достаточно, чтобы:

$$\mathcal{P}_1 \perp \mathcal{P}_2. \tag{10.147}$$

Решение. Необходимость. Пусть:

$$\mathcal{E} = \mathcal{P}_1 \oplus \mathcal{P}_2. \tag{10.148}$$

Тогда для любого $x \in \mathcal{E}$ найдутся единственные $x_1 \in \mathcal{P}_1$ и $x_2 \in \mathcal{P}_2$, что

$$x = x_1 + x_2. \tag{10.149}$$

Искомый оператор P имеет следующий вид:

$$Px = x_1. \tag{10.150}$$

Предположим, что оператор P самосопряженный. Тогда имеем:

$$(Px, y) = (x, Py) \Leftrightarrow (x_1, y_1 + y_2) = (x_1 + x_2, y_1) \Rightarrow \\ \Rightarrow (x_1, y_2) = (x_2, y_1) \quad \text{для любых} \quad x, y \in \mathcal{E}. \tag{10.151}$$

Пусть $x_2 \in \mathcal{P}_2$ и $y_1 \in \mathcal{P}_1$ в разложениях

$$x = x_1 + x_2, \quad y = y_1 + y_2, \quad x_1, y_1 \in \mathcal{P}_1, \quad x_2, y_2 \in \mathcal{P}_2$$

зафиксированы, а $x_1 \in \mathcal{P}_1$ и $y_2 \in \mathcal{P}_2$ будем независимо менять. Тогда правая часть равенства (10.151) должна оставаться постоянной как и левая часть. Это возможно тогда и только тогда, когда

$$\mathcal{P}_1 \perp \mathcal{P}_2.$$

Достаточность. Пусть теперь $\mathcal{P}_1 \perp \mathcal{P}_2$. Тогда в обозначениях доказательства необходимости справедливы равенства:

$$(Px, y) = (x_1, y) = (x_1, y_1) = (x, y_1) = (x, Py) \tag{10.152}$$

для всех $x, y \in \mathcal{E}$.

Задача 20. Доказать, что если $A \in L(\mathcal{E}; \mathcal{E})$ — самосопряженный оператор в евклидовом пространстве $\mathcal{E}$, то справедливо равенство:

$$\mathcal{E} = \ker A \oplus \operatorname{im} A. \tag{10.153}$$

Решение. Прежде всего справедливо равенство:

$$\dim \ker A + \dim \operatorname{im} A = \dim \mathcal{E}. \tag{10.154}$$

Докажем, что $\ker A \cap \operatorname{im} A = \{\vartheta\}$. Действительно, пусть $y \in \ker A \cap \cap \operatorname{im} A$. Тогда найдется такое $x \in \mathcal{E}$, что

$$y = Ax, \quad Ay = \vartheta. \tag{10.155}$$

Справедливы равенства:

$$0 = (Ay, x) = (y, Ax) = (y, y) \Rightarrow y = \vartheta \Rightarrow \ker A \cap \operatorname{im} A = \{\vartheta\}. \tag{10.156}$$

Задача 21. Доказать, что два самосопряженных оператора в евклидовом или эрмитовом пространстве коммутируют тогда и только тогда, когда они имеют общий канонический базис.

Решение. Необходимость. Пусть самосопряженные операторы $A, B \in L(\mathcal{L}; \mathcal{L})$ при $\mathcal{L} = \mathcal{E}$ или $\mathcal{L} = \mathfrak{U}$ коммутируют: $AB = BA$. Поскольку они самосопряженные, то справедливы разложения $\mathcal{L}$ в прямую сумму инвариантных собственных подпространств:

$$\mathcal{L} = V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_m} \quad \text{для оператора} \quad A, \tag{10.157}$$

$$\mathcal{L} = U_{\mu_1} \oplus \dots \oplus U_{\mu_r} \quad \text{для оператора} \quad B, \tag{10.158}$$

причем для любых $\mathbf{e} \in V_{\lambda_j}$ и $\mathbf{f} \in U_{\mu_k}$ имеем:

$$A\mathbf{e} = \lambda_j \mathbf{e}, \quad B\mathbf{f} = \mu_k \mathbf{f}, \tag{10.159}$$

$$A(B\mathbf{e}) = B(A\mathbf{e}) = \lambda_j (B\mathbf{e}), \quad B(A\mathbf{f}) = A(B\mathbf{f}) = \mu_k (A\mathbf{f}). \tag{10.160}$$

Из (10.160) получаем, что

$$A, B: \ V_{\lambda_j} \to V_{\lambda_j}, \quad A, B: \ U_{\mu_k} \to U_{\mu_k}. \tag{10.161}$$

Рассмотрим пересечение $V_{\lambda_j} \cap U_{\mu_k}$. Тогда в силу (10.161) имеем:

$$A, B: \ V_{\lambda_j} \cap U_{\mu_k} \to V_{\lambda_j} \cap U_{\mu_k}. \tag{10.162}$$

Заметим, что

$$\mathcal{L} = \bigcup_{j=1}^{m} \bigcup_{k=1}^{r} \oplus \left(V_{\lambda_j} \cap U_{\mu_k} \right). \tag{10.163}$$

Возможны две ситуации:

$$\text{либо} \quad V_{\lambda_j} \cap U_{\mu_k} = \{\vartheta\} \quad \text{либо} \quad V_{\lambda_j} \cap U_{\mu_k} \neq \{\vartheta\}.$$

Рассмотрим второй случай. Поскольку операторы A, B самосопряженные, то существует собственный базис $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\}$ оператора A и собственный базис $\{\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_p\}$ оператора B в линейном подпространстве $V_{\lambda_j} \cap U_{\mu_k}$:

$$A\mathbf{e}_s = \lambda_j \mathbf{e}_s, \quad B\mathbf{f}_s = \mu_j \mathbf{f}_s, \quad s = \overline{1, p}. \tag{10.164}$$

Введем обозначения:

$$\lambda_0 := \lambda_j, \quad \mu_0 := \mu_k.$$

Предположим, что $\lambda_0 \neq 0$. Тогда справедливо равенство:

$$\begin{aligned} \mu_0\lambda_0(\mathbf{e}_j, \mathbf{f}_k) = (\lambda_0\mathbf{e}_j, \mu_0\mathbf{f}_k) = (A\mathbf{e}_j, B\mathbf{f}_k) = \\ = (B^*A\mathbf{e}_j, \mathbf{f}_k) = (BA\mathbf{e}_j, \mathbf{f}_k) = (AB\mathbf{e}_j, \mathbf{f}_k) = \lambda_0(B\mathbf{e}_j, \mathbf{f}_k) \Rightarrow \\ \Rightarrow (B\mathbf{e}_j - \mu_0\mathbf{e}_j, \mathbf{f}_k) = 0 \quad \text{для всех} \quad j, k = \overline{1, p}. \end{aligned} \tag{10.165}$$

Отсюда при фиксированном $j \in \overline{1, n}$ и для любого $k = \overline{1, n}$ получим, что

$$B\mathbf{e}_j = \mu_0\mathbf{e}_j, \quad j = \overline{1, p}. \tag{10.166}$$

Аналогичным образом при $\mu_0 \neq 0$ с заменой B на A получим равенство:

$$A\mathbf{f}_k = \lambda_0\mathbf{f}_k, \quad k = \overline{1, p}. \tag{10.167}$$

Итак, базисы $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\}$ и $\{\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_p\}$ можно выбрать совпадающими в случае, когда либо $\lambda_0 \neq 0$ либо $\mu_0 \neq 0$. Таким образом, приходим к выводу о том, что собственные базисы для операторов A и B можно выбрать совпадающими.

Пусть $\mu_0 = 0$ и $\lambda_0 = 0$. Тогда рассмотрим новые операторы:

$$\widehat{A} := A + NI, \quad \widehat{B} := B + NI, \tag{10.168}$$

где I — единичный оператор, а $N \in \mathbb{N}$ — достаточно велико. Новые операторы $\widehat{A}$ и $\widehat{B}$ коммутируют и все их собственные значения при большом N больше от нуля. Дальше повторяем рассуждения и получим, что собственные базисы можно выбрать совпадающими для новых операторов $\widehat{A}$ и $\widehat{B}$. Значит, этот базис будет собственным и для операторов A и B.

Достаточность. Пусть $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ общий базис в пространстве $\mathcal{L}$ собственных векторов операторов A и B. Тогда справедлива следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} AB(x) = AB(x^j\mathbf{e}_j) = x^jAB(\mathbf{e}_j) = x^j\lambda_j\mu_j\mathbf{e}_j = \\ = x^j\mu_j\lambda_j\mathbf{e}_j = x^jBA(\mathbf{e}_j) = BA(x^j\mathbf{e}_j) = BA(x) \end{aligned} \tag{10.169}$$

для любого $x \in \mathcal{L}$.

Задача 22. Показать, что самосопряженный оператор в евклидовом или эрмитовом пространстве положителен (неотрицателен) тогда и только тогда, когда все его собственные значения положительны (неотрицательны.)

Решение. Необходимость. Пусть оператор A положителен (неотрицателен). Тогда, в частности, имеем:

$$\lambda_j(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_j) = (A\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_j) > 0(\geqslant 0) \Rightarrow \lambda_j > 0(\geqslant 0).$$

где $\mathbf{e}_j$ — собственный вектор оператора A, а λ_j — собственное значение оператора A.

Достаточность. Пусть собственные значения λ_j оператора A положительны (неотрицательны). Тогда имеем:

$$(Ax, x) = (A(x^j\mathbf{e}_j), x) = \lambda_j x^j(\mathbf{e}_j x) = \lambda_j(x, x).$$

Тогда отсюда получаем неравенства:

$$(Ax, x) > 0(\geqslant 0) \quad \text{при} \quad x \neq \vartheta.$$

Задача 23. Показать, что для любого линейного оператора A в евклидовом или эрмитовом пространстве имеют место следующие утверждения:

1) самосопряженные операторы A^*A и AA^* неотрицательны;

2) операторы A^*A и AA^* являются положительными тогда и только тогда, когда A невырожден;

3) операторы $I + A^*A$ и $I + AA^*$ невырождены, где I — единичный оператор.

Решение. Шаг 1. Справедливы равенства:

$$(A^*Ax, x) = (Ax, Ax) = \|Ax\|^2 \geqslant 0, \tag{10.170}$$

$$(AA^*x, x) = (A^*x, A^*x) = \|A^*x\|^2 \geqslant 0. \tag{10.171}$$

Шаг 2. Если A невырожденный, то равенство $Ax = \vartheta$ возможно тогда и только тогда когда $x = \vartheta$. Если A — невырожденный, то сопряженный оператор A^* тоже невырожденный. Действительно, пусть $y \in \ker A^*$. Поскольку $\ker A = \{\vartheta\}$, то $\operatorname{im} A = \mathcal{L}$. Поэтому найдется такое $x \in \mathcal{L}$, что $y = Ax$. Справедливы равенства:

$$0 = (A^*y, x) = (y, Ax) = (y, y) \Rightarrow y = \vartheta \Rightarrow \ker A^* = \{\vartheta\}. \tag{10.172}$$

Осталось воспользоваться равенствами (10.170) и (10.171).

Шаг 3. Справедливы соотношения:

$$((I + A^*A)x, (I + A^*A)x) = \\ = \|x\|^2 + 2\|Ax\|^2 + \|A^*Ax\|^2 \geqslant \|x\|^2. \tag{10.173}$$

Поэтому $\ker(I + A^*A) = \{\vartheta\}$. Кроме того, справедливы соотношения:

$$((I + AA^*)x, (I + AA^*)x) =$$

$$= \|x\|^2 + 2\|A^*x\|^2 + \|AA^*x\|^2 \geqslant \|x\|^2. \quad (10.174)$$

Поэтому $\ker(I + AA^*) = \{\vartheta\}$.

Задача 24. *Эрмитово разложение.* Показать, что любой оператор A в эрмитовом пространстве единственным образом представляется в виде $A = H_1 + iH_2$, где H_1 и H_2 — самосопряженные операторы.

Решение. Шаг 1. Единственность. Пусть такое разложение имеет место:

$$A = H_1 + iH_2. \quad (10.175)$$

Тогда имеем:

$$A^* = (H_1 + iH_2)^* = H_1 - iH_2, \quad (10.176)$$

$$H_1 = \frac{A + A^*}{2}, \quad 2iH_2 = A - A^* \Rightarrow H_2 = i\frac{A^* - A}{2}, \quad (10.177)$$

т.е. если указанное разложение имеет место, то оно единственное. С другой стороны, имеет место очевидное равенство:

$$A = \frac{A + A^*}{2} + \frac{A - A^*}{2} =$$

$$= \frac{A + A^*}{2} + i\left(-i\frac{A - A^*}{2}\right) := H_1 + iH_2, \quad (10.178)$$

Проверим, что операторы H_1 и H_2 — самосопряженные. Действительно, имеем:

$$H_1^* = \left(\frac{A + A^*}{2}\right)^* = \frac{A^* + A^{**}}{2} = \frac{A + A^*}{2} = H_1, \quad (10.179)$$

$$H_2^* = \frac{i}{2}\left(A - A^*\right)^* = \frac{i}{2}\left(A^* - A\right) = -i\frac{A - A^*}{2} = H_2. \quad (10.180)$$

Задача 25. Доказать, что:

1) эрмитовы матрицы размера 2×2 с нулевым следом образуют линейное подпространство V_H^0 вещественного пространства V_H всех эрмитовых матриц размера 2×2;

2) размерность пространства V_H^0 равна трем, причем в качестве базиса можно взять так называемые матрицы Паули:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad (10.181)$$

3) V_H^0 является евклидовым пространством относительно скалярного произведения:

$$(A, B) = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}(\overline{A}^T B) = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}(AB), \quad (10.182)$$

причем матрицы Паули образуют ортонормированный базис относительно этого скалярного произведения.

Решение. Шаг 1. Эрмитовы матрицы 2×2 определяются как такие матрицы, что $\overline{A}^T = A$. Справедливы равенства:

$$\overline{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}^T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{c} \\ \overline{b} & \overline{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \tag{10.183}$$

$$\overline{a} = a, \quad \overline{d} = d, \quad \overline{c} = b, \tag{10.184}$$

$$a, d \in \mathbb{R}, \quad b = b_1 + ib_2, \quad c = b_1 - ib_2, \quad b_1, b_2 \in \mathbb{R}. \tag{10.185}$$

Таким образом, имеем:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b_1 \\ b_1 & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & ib_2 \\ -ib_2 & 0 \end{pmatrix} =$$
$$= a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + b_2 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}. \tag{10.186}$$

Матрицы в правой части равенства (10.186) линейно независимы относительно линейных комбинаций с вещественными коэффициентами. Поэтому матрицы:

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_4 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

образуют базис в вещественном линейном пространстве V_H эрмитовых матриц.

Пусть теперь $A_1, A_2 \in V_H^0$. Тогда очевидно, что

$$\operatorname{tr}(\alpha^1 A_1 + \alpha^2 A_2) = \alpha^1 \operatorname{tr} A_1 + \alpha^2 \operatorname{tr} A_2 = \alpha^1 0 + \alpha^2 0 = 0. \tag{10.187}$$

Поэтому V_H^0 — является вещественным линейным пространством, линейным подпространством пространства V_H. При этом это линейное подпространство определяется условием, что $a + d = 0$. Тогда из (10.186) получим равенства:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ \overline{b} & -a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + b_2 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} =$$
$$= a\sigma_3 + b_1\sigma_1 + b_2\sigma_2. \tag{10.188}$$

Шаг 2. Полнота матриц Паули σ_1, σ_2 и σ_3 вытекает из равенств (10.188). Осталось проверить линейную независимость матриц Паули:

$$\alpha\sigma_1 + \beta\sigma_2 + \gamma\sigma_3 = \begin{pmatrix} \alpha^3 & \alpha^1 - \alpha^2 \\ \alpha^1 + \alpha^2 & -\alpha^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \alpha^3 = 0, \quad \alpha^1 = \alpha^2 = 0. \tag{10.189}$$

Таким образом, матрицы Паули σ_1, σ_2 и σ_3 образуют базис в вещественном линейном пространстве V_H^0. Следовательно,

$$\dim V_H^0 = 3.$$

Шаг 3. Осталось доказать, что

$$\operatorname{tr}(\overline{A}^T A) > 0 \quad \text{для всех} \quad A \neq O. \tag{10.190}$$

Справедливы равенства:

$$A = \|A_1, A_2\| = \left\| \begin{matrix} A^1 \\ A^2 \end{matrix} \right\|, \quad \overline{A}^T = \|(\overline{A}^1)^T, (\overline{A}^2)^T\| = \left\| \begin{matrix} (\overline{A}_1)^T \\ (\overline{A}_2)^T \end{matrix} \right\|, \tag{10.191}$$

$$\overline{A}^T A = \left\| \begin{matrix} (\overline{A}_1)^T \\ (\overline{A}_2)^T \end{matrix} \right\| \|A_1, A_2\| = \begin{pmatrix} (\overline{A}_1)^T A_1 & (\overline{A}_1)^T A_2 \\ (\overline{A}_2)^T A_1 & (\overline{A}_2)^T A_2 \end{pmatrix}, \tag{10.192}$$

$$\operatorname{tr}(\overline{A}^T A) = (\overline{A_1})^T A_1 + (\overline{A}_2)^T A_2 = |a_1^1|^2 + |a_1^2|^2 + |a_2^1|^2 + |a_2^2|^2, \tag{10.193}$$

$$A_1 = (a_1^1, a_1^2)^T, \quad A_2 = (a_2^1, a_2^2)^T.$$

Из (10.193) вытекает (10.190). Ортонормированность матриц Паули σ_1, σ_2 и σ_3 относительно скалярного произведения (10.182) проверяется непосредственно.

Задача 26. Доказать, что линейный оператор переводит каждый вектор евклидова пространства в вектор ему ортогональный, тогда и только тогда, когда этот оператор кососимметрический.

Решение. Необходимость. Рассмотрим оператор $B = A + A^*$. Это самосопряженный оператор. Пусть $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — собственный ортонормированный базис оператора B. Тогда справедливы равенства:

$$(A + A^*)\mathbf{e}_j = \lambda_j \mathbf{e}_j, \quad \lambda_j \in \mathbb{R}. \tag{10.194}$$

Заметим, что справедливы равенства:

$$0 = (Ax, x) = (x, A^*x) \quad \text{для любого} \quad x \in \mathcal{E}. \tag{10.195}$$

Стало быть,

$$(A + A^*)\mathbf{e}_j \in L^{\perp}(\mathbf{e}_j) = L(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{j-1}, \mathbf{e}_{j+1}, \ldots, \mathbf{e}_n). \tag{10.196}$$

Поэтому имеем:

$$(A + A^*)\mathbf{e}_j = \sum_{i \neq j} \alpha^i \mathbf{e}_i. \tag{10.197}$$

Из (10.194) и (10.197) получаем равенство:

$$\sum_{i \neq j} \alpha^i \mathbf{e}_i - \lambda_j \mathbf{e}_j = \vartheta \Rightarrow \alpha^i = \lambda_j = 0. \tag{10.198}$$

Итак, из (10.194) и (10.198) имеем:

$$(A + A^*)\mathbf{e}_j = \vartheta \Rightarrow (A + A^*)x = \\ = x^j (A + A^*)\mathbf{e}_j = \vartheta \Rightarrow A^* = -A. \tag{10.199}$$

Достаточность. Пусть $A^* = -A$. Тогда для любого $x \in \mathcal{E}$ имеем:

$$((A + A^*)x, x) = 0 \Rightarrow (Ax, x) + (A^*x, x) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (Ax, x) + (x, Ax) = 0 \Rightarrow 2(x, Ax) = 0 \Rightarrow Ax \perp x. \quad (10.200)$$

Задача 27. Доказать, что собственные векторы косоэрмитова оператора, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны.

Решение. Пусть $\mathbf{e}$ и $\mathbf{f}$ — собственные векторы косоэрмитова оператора A :

$$A\mathbf{e} = \lambda\mathbf{e}, \quad A\mathbf{f} = \mu\mathbf{f}, \quad \mathbf{e}, \mathbf{f} \neq \vartheta, \quad \mu \neq \lambda. \quad (10.201)$$

Тогда справедливы равенства:

$$\lambda(\mathbf{e}, \mathbf{e}) = (\lambda\mathbf{e}, \mathbf{e}) = (A\mathbf{e}, \mathbf{e}) = (\mathbf{e}, A^*\mathbf{e}) = \\ = -(\mathbf{e}, A\mathbf{e}) = -\overline{\lambda}(\mathbf{e}, \mathbf{e}) \Rightarrow \lambda = -\overline{\lambda}. \quad (10.202)$$

Аналогичным образом получаем, что $\mu = -\overline{\mu}$. Справедливы равенства:

$$\lambda(\mathbf{e}, \mathbf{f}) = (\lambda\mathbf{e}, \mathbf{f}) = (A\mathbf{e}, \mathbf{f}) = (\mathbf{e}, A^*\mathbf{f}) = \\ = -(\mathbf{e}, A\mathbf{f}) = -\overline{\mu}(\mathbf{e}, \mathbf{f}) = \mu(\mathbf{e}, \mathbf{f}). \quad (10.203)$$

Поскольку $\lambda \neq \mu$ отсюда получаем, что $(\mathbf{e}, \mathbf{f}) = 0$.

Задача 28. Доказать, что ортогональное дополнение $\mathcal{P}^\perp$ к инвариантному подпространству $\mathcal{P}$ кососимметрического (косоэрмитова) оператора A тоже инвариантно относительно этого оператора.

Решение. Пусть $x \in \mathcal{P}$ — произвольный вектор и $y \in \mathcal{P}^\perp$. Тогда справедливы равенства:

$$0 = (Ax, y) = (x, A^*y) = -(x, Ay) \Rightarrow Ay \in \mathcal{P}^\perp. \quad (10.204)$$

Задача 29. Показать, что для кососимметрического оператора в евклидовом пространстве существует ортонормированный базис, в котором матрица оператора состоит из двумерных блоков вида:

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}, \quad (10.205)$$

и одномерных нулевых блоков, расположенных на главной диагонали. Кроме того, показать, что в нечетномерном евклидовом пространстве кососимметрический оператор вырожденный.

Решение. Шаг 1. Любой оператор и в том числе рассматриваемый $A \in L(\mathcal{E}; \mathcal{E})$ имеет инвариантное двумерное или (и) одномерное подпространство $\mathcal{P} \subset \mathcal{E}$. В силу предыдущей задачи для любого x имеет место свойство: $(Ax, x) = 0$. Поэтому если $\dim \mathcal{P} = 1$, то справедливо равенство:

$$A\mathbf{e} = 0\mathbf{e}, \quad \mathcal{P} = L(\mathbf{e}). \quad (10.206)$$

Пусть теперь $\dim \mathcal{P} = 2$ и $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ — ортонормированный базис в $\mathcal{E}$. Тогда снова в силу результата предыдущей задачи имеем:

$$A\mathbf{e}_1 = \lambda\mathbf{e}_2, \quad A\mathbf{e}_2 = \mu\mathbf{e}_1, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}^1. \quad (10.207)$$

Тогда матрица A_e оператора A в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ имеет следующий вид:

$$A_e = \begin{pmatrix} 0 & \mu \\ \lambda & 0 \end{pmatrix}, \tag{10.208}$$

причем поскольку оператор A кососимметрический, то справедливы равенства:

$$\overline{A}_e^T = -A_e \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & \mu \\ \lambda & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\lambda \\ -\mu & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mu = a, \quad \lambda = -a, \quad a \in \mathbb{R}^1. \tag{10.209}$$

В силу предыдущей задачи имеем: $A\mathcal{P}^{\perp} \subset \mathcal{P}^{\perp}$. Поэтому далее точно также рассматриваем вместо $\mathcal{E}$ его линейное подпространство $\mathcal{P}^{\perp}$, которое само является линейным пространством и в нем существует или двумерное или (и) одномерное инвариантное подпространство. Далее повторяем рассуждения и приходим к утверждению задачи.

Шаг 2. Согласно результату шага 1 у оператора A найдется по меньшей мере одно одномерное инвариантное подпространство $L(\mathbf{e}) \neq \{\vartheta\}$ и тогда имеем:

$$A\mathbf{e} = \vartheta \Rightarrow e \in \ker A.$$

Стало быть, у оператора ненулевое ядро и, стало быть, он вырожденный.

З а д а ч а 30. Доказать, что косоэрмитов оператор A в эрмитовом пространстве диагонализируем в некотором ортонормированном базисе, причем матрица косоэрмитова оператора в этом базисе имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} i\varphi_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & i\varphi_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & i\varphi_n \end{pmatrix}, \quad \varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \mathbb{R}. \tag{10.210}$$

Решение. Прежде всего заметим, что любого оператора в комплексном линейном пространстве есть по меньшей мере один собственный вектор. Пусть $\mathbf{e}_1 \neq \vartheta$ — искомый вектор. Тогда справедлива цепочка равенств:

$$A\mathbf{e}_1 = \lambda_1 \mathbf{e}_1, \quad \lambda_1 \in \mathbb{C}, \tag{10.211}$$

$$\begin{aligned} \lambda_1(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) = (\lambda_1\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) = (A\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) = (\mathbf{e}_1, A^*\mathbf{e}_1) = \\ = -(\mathbf{e}_1, A\mathbf{e}_1) = -\overline{\lambda_1}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) \Rightarrow \lambda_1 + \overline{\lambda}_1 = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \lambda_1 = i\varphi_1, \quad \varphi_1 \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{10.212}$$

Заметим, что справедливо равенство $\mathcal{U} = \mathcal{P}_1 \oplus \mathcal{P}_1^{\perp}$, $\mathcal{P}_1 = L(\mathbf{e}_1)$, причем:

$$A\mathcal{P}_1 \subset \mathcal{P}_1 \Rightarrow A\mathcal{P}_1^{\perp} \subset \mathcal{P}_1^{\perp}.$$

Теперь вместо эрмитова пространства $\mathcal{U}$ его эрмитово подпространство $\mathcal{P}_1^{\perp}$ и повторим рассуждения. В результате получим, что

$$\mathcal{U} = \mathcal{P}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{P}_n, \quad \mathcal{P}_j = L(\mathbf{e}_j), \tag{10.213}$$

$$A\mathbf{e}_j = \lambda_j \mathbf{e}_j, \quad \lambda_j = i\varphi_j, \quad \varphi_j \in \mathbb{R}. \tag{10.214}$$

Задача 31. Доказать, что в трехмерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$, снабженном векторным произведением $[\cdot,\cdot]$, всякий кососимметрический оператор φ может быть представлен в виде:

$$\varphi = \varphi_a(x) = [x, a], \quad a \in \mathbb{R}^3. \tag{10.215}$$

Решение. Существует ортонормированный базис $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, в котором матрица $(\varphi)_e$ оператора φ имеет следующий вид:

$$(\varphi)_e = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}. \tag{10.216}$$

Тогда имеем:

$$\varphi(\mathbf{e}_1) = -\alpha\mathbf{e}_2, \quad \varphi(\mathbf{e}_2) = \alpha\mathbf{e}_1, \quad \varphi(\mathbf{e}_3) = \mathbf{0}. \tag{10.217}$$

В силу последнего равенства будем искать вид оператора φ с следующем виде:

$$\varphi_a(x) := [x, a], \quad a = \alpha\mathbf{e}_3. \tag{10.218}$$

Тогда имеем:

$$\varphi_a(\mathbf{e}_1) = \alpha[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3] = -\alpha\mathbf{e}_2, \tag{10.219}$$

$$\varphi_a(\mathbf{e}_2) = \alpha[\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3] = \alpha\mathbf{e}_1, \tag{10.220}$$

$$\varphi_a(\mathbf{e}_3) = \alpha[\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3] = \mathbf{0}. \tag{10.221}$$

Из сравнения (10.217) с (10.219)–(10.221) приходим к выводу о том, что $\varphi = \varphi_a$.

Задача 32. Доказать, что оператор ортогонального отражения относительно подпространства евклидова или унитарного пространства является ортогональным или унитарным оператором.

Решение. Пусть $\mathcal{E} = \mathcal{P} \oplus \mathcal{P}^{\perp}$ или $\mathcal{U} = \mathcal{P} \oplus \mathcal{P}^{\perp}$. Тогда оператор действует так:

$$Ax = x_{\parallel} - x_{\perp}, \quad x = x_{\parallel} + x_{\perp}, \quad x_{\parallel} \in \mathcal{P}, \quad x_{\perp} \in \mathcal{P}^{\perp}. \tag{10.222}$$

Тогда справедлива цепочка равенств:

$$\begin{aligned}(Ax, Ay) = (x_{\parallel} - x_{\perp}, y_{\parallel} - y_{\perp}) = (x_{\parallel}, y_{\parallel}) + (x_{\perp}, y_{\perp}) = \\ = (x_{\parallel} + x_{\perp}, y_{\parallel} + y_{\perp}) = (x, y).\end{aligned} \tag{10.223}$$

Задача 33. Доказать, что любое отображение евклидова пространства на себя, сохраняющее скалярное произведение, линейно.

Решение. По условию задачи $A\mathcal{E} = \mathcal{E}$, т.е. $\operatorname{im} A = \mathcal{E}$. Тогда для всех $x_1, x_2, y \in \mathcal{E}$ справедливы равенства:

$$(A(\alpha^1 x_1 + \alpha^2 x_2), y) = (A(\alpha^1 x_1 + \alpha^2 x_2), Ax) = (\alpha^1 x_1 + \alpha^2 x_2, x) =$$
$$= \alpha^1 (x_1, x) + \alpha^2 (x_2, x) = \alpha^1 (Ax_1, Ax) + \alpha^2 (Ax_2, Ax) =$$
$$= (\alpha^1 Ax_1 + \alpha^2 Ax_2, y) \Rightarrow A(\alpha^1 x_1 + \alpha^2 x_2) = \alpha^1 Ax_1 + \alpha^2 Ax_2. \quad (10.224)$$

Задача 34. Доказать, что если оператор A сохраняет длины всех векторов евклидова пространства $\mathcal{E}$, то он является ортогональным оператором.

Решение. Справедливы равенства:

$$\|A(x+y)\|^2 = (A(x+y), A(x+y)) =$$
$$= \|Ax\|^2 + \|Ay\|^2 + 2(Ax, Ay), \quad (10.225)$$
$$\|x+y\|^2 = (x+y, x+y) = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(x, y), \quad (10.226)$$

$$(Ax, Ay) = \frac{1}{2}\left[\|A(x+y)\|^2 - \|Ax\|^2 - \|Ay\|^2\right] =$$
$$= \frac{1}{2}\left[\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right] = (x, y). \quad (10.227)$$

Задача 35. Показать, что собственные значения ортогонального или унитарного оператора — числа по модулю равные единице.

Решение. Справедливы равенства:

$$A\mathbf{e} = \lambda \mathbf{e}, \quad \lambda \in \mathbb{K}, \quad \mathbf{e} \neq \vartheta, \quad (10.228)$$
$$(\mathbf{e}, \mathbf{e}) = (A\mathbf{e}, A\mathbf{e}) = \lambda\overline{\lambda}(\mathbf{e}, \mathbf{e}) \Rightarrow |\lambda|^2 = 1. \quad (10.229)$$

Задача 36. Доказать, что собственные векторы унитарного оператора, относящиеся к различным собственным значениям, ортогональны.

Решение. Справедливы равенства:

$$(\mathbf{e}, \mathbf{f}) = (A\mathbf{e}), A\mathbf{f}) = \lambda\overline{\mu}(\mathbf{e}, \mathbf{f}) = \frac{\lambda}{\mu}(\mathbf{e}, \mathbf{f}), \quad \lambda \neq \mu. \quad (10.230)$$

Отсюда получаем, что $\mathbf{e} \perp \mathbf{f}$.

Задача 37. Доказать, что ортогональное дополнение $\mathcal{P}^\perp$ к любому инвариантному подпространству $\mathcal{P}$ ортогонального или унитарного оператора тоже является инвариантным подпространством для этого оператора.

Решение. Поскольку для ортогонального или унитарного оператора выполнено равенство $\|Ax\| = \|x\|$, то $\ker A = \{\vartheta\}$. Следовательно, $\operatorname{im} A$ совпадает со всем пространством, где оператор действует. Поэтому для всех $x \in \mathcal{P}$ и $y \in \mathcal{P}^\perp$ справедливы равенства:

$$0 = (x, y) = (Ax, Ay) = (z, Ay) \quad \text{для всех} \quad z \in \mathcal{P}. \quad (10.231)$$

Отсюда получаем, что $Ay \in \mathcal{P}^\perp$.

Задача 38. Показать, что для ортогонального оператора в евклидовом пространстве существует ортонормированный базис,в котором матрица оператора состоит из двумерных блоков вида:

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \quad \varphi \in \mathbb{R}, \tag{10.232}$$

и одномерных блоков вида (± 1), расположенных на главной диагонали.

Решение. Шаг 1. Прежде всего заметим, что у любого оператора всегда существует или двумерное или (и) одномерное инвариантное подпространство $\mathcal{P}_1 \subset \mathcal{E}$, причем:

$$\mathcal{E} = \mathcal{P}_1 \oplus \mathcal{P}_1^{\perp}, \quad A\mathcal{P}_1^{\perp} \subset \mathcal{P}_1^{\perp}. \tag{10.233}$$

Пусть $\dim \mathcal{P}_1 = 1$, тогда для любого вектора $\mathbf{e}_1 \in \mathcal{P}_1$, $\|e_1\| = 1$ имеем:

$$A\mathbf{e}_1 = \lambda_1 \mathbf{e}_1,\ 1 = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) = (A\mathbf{e}_1, A\mathbf{e}_1) = \\ = \lambda_1^2 (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) = \lambda_1^2,\ \lambda_1 = \pm 1. \tag{10.234}$$

Пусть теперь $\dim \mathcal{P}_1 = 2$. Тогда в произвольном ортонормированном базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ имеем:

$$A\mathbf{e}_1 = \lambda_1 \mathbf{e}_1 + \lambda_2 \mathbf{e}_2, \quad A\mathbf{e}_2 = \mu_1 \mathbf{e}_1 + \mu_2 \mathbf{e}_2, \quad \lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}. \tag{10.235}$$

Справедливы равенства:

$$1 = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) = (A\mathbf{e}_1, A\mathbf{e}_1) = \lambda_1^2 + \lambda_2^2, \tag{10.236}$$

$$1 = (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) = (A\mathbf{e}_2, A\mathbf{e}_2) = \mu_1^2 + \mu_2^2, \tag{10.237}$$

$$0 = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = (A\mathbf{e}_1, A\mathbf{e}_2) = \lambda_1 \mu_1 + \lambda_2 \mu_2. \tag{10.238}$$

В силу (10.236) и (10.237) существует такие $\varphi, \psi \in [0, 2\pi]$, что имеем:

$$\lambda_1 = \cos\varphi, \quad \lambda_2 = \sin\varphi, \quad \mu_1 = \sin\psi, \quad \mu_2 = \cos\psi. \tag{10.239}$$

Из (10.238) и (10.239) получим:

$$\sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi = 0 \Leftrightarrow \sin(\varphi + \psi) = 0. \tag{10.240}$$

Матрица A_e оператора A в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ имеет следующий вид:

$$A_e = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \mu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 \end{pmatrix}, \tag{10.241}$$

причем, поскольку оператор A ортогональный, то

$$A_e A_e^T = I \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 & \mu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \mu_1 & \mu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{10.242}$$

из которого получаем равенства:

$$\lambda_1^2 + \mu_1^2 = 1, \quad \lambda_2^2 + \mu_2^2 = 1, \quad \lambda_1\lambda_2 + \mu_1\mu_2 = 0, \tag{10.243}$$

из которых получим равенства:

$$\cos^2\varphi + \sin^2\psi = 1, \quad \sin^2\varphi + \cos^2\psi = 1, \tag{10.244}$$

$$\cos\varphi\sin\varphi + \sin\psi\cos\psi = 0. \tag{10.245}$$

Из (10.244) получим, что

$$\sin\psi = \pm\sin\varphi, \quad \cos\psi = \pm\cos\varphi, \tag{10.246}$$

а с учетом (10.245) получим, что

$$\sin\psi = -\sin\varphi, \quad \cos\psi = \cos\varphi \Rightarrow \psi = -\varphi. \tag{10.247}$$

Итак, матрица A_e оператора A имеет следующий вид:

$$A_e = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \quad \varphi \in \mathbb{R}. \tag{10.248}$$

Шаг 2. На этом шаге вместо $\mathcal{E}$ нужно рассмотреть $\mathcal{P}_1^{\perp}$ и воспользоваться тем, что $A\mathcal{P}_1^{\perp} \subset \mathcal{P}_1^{\perp}$ и $\mathcal{P}_1^{\perp}$ само является евклидовым пространством. Далее нужно повторить рассуждения на шаге 1.

З а д а ч а 39. Доказать, что унитарный оператор A в эрмитовом пространстве диагонализируем в некотором ортонормированном базисе и имеет следующую матрицу:

$$A_e = \begin{pmatrix} e^{i\varphi_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{i\varphi_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & e^{i\varphi_n} \end{pmatrix}. \tag{10.249}$$

Решение. Шаг 1. Заметим, что у любого оператора в комплексном пространстве $\mathcal{U}$ имеется собственный вектор:

$$A\mathbf{e}_1 = \lambda_1\mathbf{e}_, \quad \mathbf{e}_1 \neq \vartheta, \tag{10.250}$$

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) = (A\mathbf{e}_1, A\mathbf{e}_1) = |\lambda_1|^2(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) \Rightarrow \lambda_1 = e^{i\varphi_1}, \quad \varphi_1 \in \mathbb{R}. \tag{10.251}$$

Причем справедливо разложение:

$$\mathcal{U} = \mathcal{P}_1 \oplus \mathcal{P}_1^{\perp}, \quad \mathcal{P}_1 = L(\mathbf{e}_1), \quad A\mathcal{P}_1^{\perp} \subset \mathcal{P}_1^{\perp}. \tag{10.252}$$

Шаг 2. Теперь вместо $\mathcal{U}$ нужно рассмотреть $\mathcal{P}_1^{\perp}$, которое само является эрмитовым пространством. Далее повторяем рассуждения на шаге 1.

З а д а ч а 40. Доказать, что если оператор A является одновременно унитарным (соответственно, ортогональным) и самосопряженным, то он является оператором ортогонального отражения относительно некоторого подпространства эрмитова (соответственно, евклидова) пространства.

Решение. Пусть оператор A удовлетворяет условиям задачи. Поскольку он самосопряженный, то существует ортонормированный базис $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$, состоящий из собственных векторов:

$$A\mathbf{e}_j = \lambda_j \mathbf{e}_j, \quad \lambda_j \in \mathbb{R}. \tag{10.253}$$

Поскольку A — унитарный (ортогональный) оператор, то $\lambda_j = \pm 1$. Теперь мы можем считать базис $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ упорядоченный таким образом, чтобы:

$$A\mathbf{e}_j = \mathbf{e}_j, \quad j = \overline{1, m}, \tag{10.254}$$

$$A\mathbf{e}_j = -\mathbf{e}_j, \quad j = \overline{m+1, n}. \tag{10.255}$$

Справедливы равенства:

$$\mathcal{L} = \mathcal{P} \oplus \mathcal{P}^{\perp}, \quad \mathcal{P} = L(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m), \quad \mathcal{P}^{\perp} = L(\mathbf{e}_{m+1}, \dots, \mathbf{e}_n), \tag{10.256}$$

где либо $\mathcal{L} = \mathcal{U}$ либо $\mathcal{L} = \mathcal{E}$. Тогда для любого $x \in \mathcal{L}$ справедливо разложение:

$$x = x_{\parallel} + x_{\perp}, \quad x_{\parallel} \in \mathcal{P}, \quad x_{\perp} = \mathcal{P}^{\perp}. \tag{10.257}$$

Имеют место равенства:

$$A(x_{\parallel}) = A\left(\sum_{j=1}^{m} x^j \mathbf{e}_j\right) = \sum_{j=1}^{m} x^j A(\mathbf{e}_j) = \sum_{j=1}^{m} x^j \mathbf{e}_j = x_{\parallel}, \tag{10.258}$$

$$A(x_{\perp}) = A\left(\sum_{j=m+1}^{n} x^j \mathbf{e}_j\right) = \\ = \sum_{j=m+1}^{n} x^j A(\mathbf{e}_j) = -\sum_{j=m+1}^{n} x^j \mathbf{e}_j = -x_{\parallel}. \tag{10.259}$$

Итак, из (10.257)–(10.259) имеем:

$$A(x) = A(x_{\parallel} + x_{\perp}) = A(x_{\parallel}) + A(x_{\perp}) = x_{\parallel} - x_{\perp}, \tag{10.260}$$

т.е. оператор A является оператором ортогонального отражения относительно линейного подпространства $\mathcal{P}$.

Задача 41. Доказать, что если A — косоэрмитов (кососимметрический) оператор в эрмитовом (евклидовом) пространстве, то оператор $\exp A$ является унитарным (ортогональным).

Решение. Шаг 1. Определение экспоненты от оператора. Дадим определение нормы оператора $A \in L(\mathcal{U}; \mathcal{U})$, где $\mathcal{U}$ — унитарное пространство:

$$\|A\| := \sup_{\|x\|_U = 1} \|Ax\|_U, \quad \|x\|_U := \sqrt{(x, x)}, \tag{10.261}$$

где (x,y) — скалярное произведение в унитарном пространстве $\mathcal{U}$. Нужно проверить, что это действительно норма:

$$\|A+B\| = \sup_{\|x\|_U=1} \|(A+B)x\|_U \leqslant \\ \leqslant \sup_{\|x\|_U=1} \|Ax\|_U + \sup_{\|x\|_U=1} \|Bx\|_U = \|A\| + \|B\|, \quad (10.262)$$

$$\|\alpha A\| = \sup_{\|x\|_U=1} \|\alpha Ax\|_U = |\alpha| \sup_{\|x\|_U=1} \|Ax\|_U = \alpha\|A\|, \quad (10.263)$$

$$\|AB\| = \sup_{\|x\|_U=1} \|AB(x)\|_U = \sup_{\|x\|_U=1} \frac{\|AB(x)\|_U}{\|Bx\|_U}\|Bx\|_U \leqslant \\ \leqslant \sup_{\|x\|_U=1} \frac{\|Ay\|_U}{\|y\|}\|Bx\|_U \leqslant \sup_{\|z\|_U=1} \|Az\|_U \sup_{\|x\|_U=1} \|Bx\|_U = \\ = \|A\|\|B\|, \quad (10.264)$$

$$y = Bx, \quad z = \begin{cases} y/\|y\|_U, & y \neq \vartheta; \\ 0, & y = \vartheta. \end{cases}$$

Отметим, что линейное пространство $L(\mathcal{U};\mathcal{U})$ относительно введенной нормы $\|\cdot\|$ обладает *свойством полноты*: если последовательность операторов $\{B_N\} \subset L(\mathcal{U};\mathcal{U})$ обладает *свойством фундаментальности*:

$$\|B_N - B_M\| \to +0 \quad \text{при} \quad N, M \to +\infty, \quad (10.265)$$

причем N, M стремятся к $+\infty$ независимым образом, то существует такой оператор $B_0 \in L(\mathcal{U};\mathcal{U})$, что

$$\|B_N - B_0\| \to +0 \quad \text{при} \quad N \to +\infty. \quad (10.266)$$

Введем следующий оператор:

$$B_N := \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}A^k \in L(\mathcal{U};\mathcal{U}) \quad \text{для любого} \quad A \in L(\mathcal{U};\mathcal{U}). \quad (10.267)$$

Справедливо равенство:

$$B_N - B_M = \sum_{k=\min\{N,M\}}^{\max\{N,M\}} \frac{1}{k!}A^k, \quad (10.268)$$

причем справедлива оценка, вытекающая из (10.268) с учетом (10.262)–(10.264):

$$\|B_N - B_M\| \leqslant \sum_{k=\min\{N,M\}}^{\max\{N,M\}} \frac{1}{k!}\|A^k\| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=\min\{N,M\}}^{\max\{N,M\}} \frac{1}{k!}\|A\|^k \to +0 \quad \text{при} \quad N, M \to +\infty. \tag{10.269}$$

Следовательно, последовательность $\{B_N\} \subset L(\mathcal{U};\mathcal{U})$ обладает свойством фундаментальности и поэтому существует такой оператор $B_0 \in L(\mathcal{U};\mathcal{U})$, что

$$\|B_N - B_0\| \to +0 \quad \text{при} \quad N \to +\infty. \tag{10.270}$$

Для оператора B_0 используется обозначение:

$$B_0 := \exp A := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}A^n. \tag{10.271}$$

Точно также как в вещественном анализе можно доказать равенство:

$$\exp(A)\exp(B) = \exp(A+B), \quad \text{если} \quad AB = BA. \tag{10.272}$$

Заметим, что справедливо следующее равенство:

$$\|x\|_U = \sup_{\|y\|_U=1} |(x,y)|. \tag{10.273}$$

□ Действительно, всегда имеет место неравенство:

$$|(x,y)| \leqslant \|x\|_U\|y\|_U, \tag{10.274}$$

причем знак равенства достигается на

$$y = \frac{x}{\|x\|_U}. \quad \boxtimes$$

Докажем, что справедливо равенство:

$$\|D\| = \|D^*\|. \tag{10.275}$$

□ Действительно, имеют место соотношения:

$$\|D\| = \sup_{\|x\|_U=1} \|Dx\|_U = \sup_{\|x\|_U=1} \sup_{\|y\|_U=1} |(Dx,y)| =$$
$$= \sup_{\|x\|_U=1} \sup_{\|y\|_U=1} |(x,D^*y)| = \sup_{\|y\|_U=1} \sup_{\|x\|_U=1} |(x,D^*y)| =$$
$$= \sup_{\|y\|_U=1} \|D^*y\| = \|D^*\|. \quad \boxtimes \tag{10.276}$$

Шаг 2. Пусть теперь $A \in L(\mathcal{U};\mathcal{U})$ — косоэрмитов (кососимметрический $A \in L(\mathcal{E};\mathcal{E})$) оператор:

$$A^* = -A.$$

Тогда в обозначениях шага 1 имеем:

$$(B_N)^* = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}(A^k)^* = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}[A^*]^k. \tag{10.277}$$

Поэтому имеем:

$$\|(B_N)^* - \exp(A^*)\| \to +0 \quad \text{при} \quad N \to +\infty. \tag{10.278}$$

С другой стороны, в силу (10.275) справедливо равенство:

$$\|B_N^* - B_0^*\| = \|B_N - B_0\|. \tag{10.279}$$

Отсюда и из (10.270) получаем, что

$$\|B_N^* - B_0^*\| \to +0 \quad \text{при} \quad N \to +\infty. \tag{10.280}$$

Итак, из (10.278) и (10.280) получаем равенство:

$$(\exp A)^* = \exp(A^*) = \exp(-A). \tag{10.281}$$

Тогда из (10.272) и (10.281) имеем:

$$(\exp(A))^* \exp(A) = \exp(-A)\exp(A) = I = \\ = \exp(A)\exp(-A) = \exp(A)(\exp(A))^*. \tag{10.282}$$

Задача 42. Найти такую кососимметрическую матрицу A, что

$$\exp(A) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}. \tag{10.283}$$

Решение. Общий вид кососимметрической матрицы 2×2 такой:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}. \tag{10.284}$$

При этом

$$A^{2m} = (-1)^m \alpha^{2m} I, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad m \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \tag{10.285}$$

$$A^{2m+1} = (-1)^m \alpha^{2m} \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 0 & -(-1)^{2m+1}\alpha^{2m+1} \\ (-1)^{2m+1}\alpha^{2m+1} & 0 \end{pmatrix}, \quad m \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \tag{10.286}$$

С учетом (10.285) и (10.286) справедливы равенства:

$$\exp(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} A^n = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{(2m)!} A^{2m} + \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{(2m+1)!} A^{2m+1} = \\ = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 \\ 0 & \cos\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & 0 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}. \tag{10.287}$$

Из сравнения (10.283) с (10.287) приходим к выводу о том, что $\alpha = \varphi + 2\pi n$ для любого $n \in \mathbb{Z}$ и искомая матрица имеет следующий вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -(\varphi + 2\pi n) \\ \varphi + 2\pi n & 0 \end{pmatrix}, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{10.288}$$

Задача 43. Доказать, что любой унитарный оператор B представляется в виде $\exp(A)$, где A — некоторый косоэрмитов оператор.

Решение. Пусть $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — собственный ортонормированный базис унитарного оператора B, в котором его матрица B_e имеет следующий канонический вид:

$$B_e = \begin{pmatrix} e^{i\varphi_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{i\varphi_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & e^{i\varphi_n} \end{pmatrix}. \tag{10.289}$$

Рассмотрим следующую матрицу:

$$A_e = \begin{pmatrix} i(\varphi_1 + 2\pi n_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & i(\varphi_2 + 2\pi n_2) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & i(\varphi_n + 2\pi n_n) \end{pmatrix} \tag{10.290}$$

для произвольных $n_1, \ldots, n_n \in \mathbb{Z}$. Заметим, что справедливо равенство:

$$[A_e]^m = \begin{pmatrix} [i(\varphi_1 + 2\pi n_1)]^m & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & [i(\varphi_2 + 2\pi n_2)]^m & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & [i(\varphi_n + 2\pi n_n)]^m \end{pmatrix}. \tag{10.291}$$

Тогда имеем:

$$\exp(A_e) := \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m!}[A_e]^m =$$

$$= \begin{pmatrix} e^{i(\varphi_1+2\pi n_1)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{i(\varphi_2+2\pi n_2)} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & e^{i(\varphi_n+2\pi n_n)} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} e^{i\varphi_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{i\varphi_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & e^{i\varphi_n} \end{pmatrix} = B_e \quad (10.292)$$

Осталось рассмотреть оператор A, который в ортонормированном базисе $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ имеет косоэрмитову матрицу A_e. Тогда оператор A будет косоэрмитовым. Заметим, что справедливо равенство:

$$[A_e]^m = [A^m]_e, \quad m \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \quad (10.293)$$

Тогда имеем:

$$\mathbf{E} \cdot \exp(A_e) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m!} \mathbf{E} \cdot [A_e]^m = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m!} \mathbf{E} \cdot [A^m]_e =$$

$$= \mathbf{E} \cdot \left(\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m!} A^m \right)_e = \mathbf{E} \cdot (\exp(A))_e, \quad (10.294)$$

$$\mathbf{E} \cdot B_e = \mathbf{E} \cdot \exp(A_e) = \mathbf{E} \cdot (\exp(A))_e, \quad (10.295)$$

$$B(\mathbf{e}_j) = \exp(A)(\mathbf{e}_j), \quad j = \overline{1, n}, \quad (10.296)$$

$$B(x) = x^j B(\mathbf{e}_j) = x^j \exp(A)(\mathbf{e}_j) = \exp(A)(x) \quad (10.297)$$

для всех $x \in \mathfrak{U}$. Итак, имеем:

$$B = \exp(A).$$

Задача 44. Пусть $A_{t,a}$ — оператор поворота в $\mathbb{R}^3$ вокруг некоторого единичного вектора a на угол t, а φ_a — оператор, определенный по формуле:

$$\varphi_a(x) = [a, x]. \quad (10.298)$$

Доказать, что

$$A_{t,a} = \exp(t\varphi_a). \quad (10.299)$$

Решение. Рассмотрим ортонормированный базис $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ в $\mathbb{R}^3$ таким образом, чтобы $\mathbf{e}_3$. Тогда, с одной стороны, матрица $(A_{t,a})_e$ оператора поворота $A_{t,a}$ имеет следующий вид:

$$(A_{t,a})_e = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (10.300)$$

С другой стороны, имеем:

$$\varphi_a(\mathbf{e}_1) = [\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1] = \mathbf{e}_2, \quad (10.301)$$

$$\varphi_a(\mathbf{e}_2) = [\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2] = -\mathbf{e}_2, \quad (10.302)$$

$$\varphi_a(\mathbf{e}_3) = [\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3] = \mathbf{0}. \quad (10.303)$$

Поэтому матрица $(\varphi_a)_e$ оператора φ_a в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ имеет следующий вид:

$$(\varphi_a)_e = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{10.304}$$

Можно проверить справедливость следующих равенств:

$$[(\varphi_a)_e]^{2m} = (-1)^m \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad m \geqslant 1, \tag{10.305}$$

$$[(\varphi_a)_e]^{2m+1} = (-1)^m \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad m \geqslant 0. \tag{10.306}$$

Далее имеем:

$$\begin{aligned} \exp((\varphi_a)_e) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!}[(\varphi_a)_e]^n = \\ &= \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{t^{2m}}{(2m)!}[(\varphi_a)_e]^{2m} + \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{t^{2m+1}}{(2m+1)!}[(\varphi_a)_e]^{2m+1} = \\ &= \begin{pmatrix} \cos t & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\sin t & 0 \\ \sin t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{10.307}$$

Далее рассуждаем точно также как при решении предыдущей задачи и получим равенства:

$$(\exp(t\varphi_a))_e = \exp(t(\varphi_a)_e) = (A_{t,a})_e.$$

Таким образом, $A_{t,a} = \exp(t\varphi_a)$.

Задача 45. Рассмотрим трехмерное евклидово пространство V_H^0 эрмитовых матриц порядка 2 с нулевым следом, снабженное скалярным произведением:

$$(A, B) = \frac{1}{2}\operatorname{tr}(\overline{A}^T B). \tag{10.308}$$

Доказать, что линейный оператор $F_U : V_H^0 \to V_H^0$, заданный при помощи произвольной унитарной матрицы U по формуле $F_U(X) = U^* X U$, $U^* = \overline{U}^T$ является ортогональным оператором на пространстве V_H^0.

Решение. Прежде всего понятно, что оператор F_U — линейный. При этом справедливо равенство:

$$\operatorname{tr}(U^* X U) = \operatorname{tr}(U^{-1} X U) = \operatorname{tr}(X U U^{-1}) = \operatorname{tr} X. \tag{10.309}$$

Поэтому $F_U : V_H^0 \to V_H^0$. Кроме того, справедлива следующая цепочка равенств:

$$(F_U(X), F_U(Y)) = \frac{1}{2}\operatorname{tr}\left(\overline{F_U(X)^T} F_U(Y)\right) = \\ = \frac{1}{2}\operatorname{tr}\left(U^{-1}\overline{X}^T U U^{-1} Y U\right) = \frac{1}{2}\operatorname{tr}\left(\overline{X}^T Y\right) \quad (10.310)$$

З а д а ч а 46. Найти оператор $F_\varphi : V_H^0 \to V_H^0$, представляющий собой вращение на угол φ вокруг

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (10.311)$$

Решение. Напомним, что матрицы:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (10.312)$$

образуют базис в V_H^0. Искомый оператор F_φ обладает следующими свойствами:

$$F_\varphi(\sigma_1) = \cos\varphi\sigma_1 + \sin\varphi\sigma_2, \quad F_\varphi(\sigma_2) = -\sin\varphi\sigma_1 + \cos\varphi\sigma_2, \quad (10.313)$$

$$F_\varphi(\sigma_3) = \sigma_3. \quad (10.314)$$

Поэтому матрица $(F_\varphi)_\sigma$ оператора F_φ в базисе $\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ имеет вид:

$$(F_\varphi)_\sigma = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (10.315)$$

Теперь рассмотрим оператор:

$$\Phi_{\sigma_3}(x) := \frac{i\varphi}{2}[x, \sigma_3], \quad [A, B] := AB - BA. \quad (10.316)$$

Прежде всего заметим, что

$$\operatorname{tr}([A, B]) = \operatorname{tr}(AB) - \operatorname{tr}(BA) = \operatorname{tr}(AB) - \operatorname{tr}(AB) = 0.$$

Поэтому

$$\Phi_{\sigma_3}(x) :\ V_H^0 \to V_H^0. \quad (10.317)$$

Действительно, для любых $A, B \in V_H^0$ имеем:

$$\overline{[A, B]}^T = -[A, B] \Rightarrow \overline{i[A, B]}^T = i[A, B]. \quad (10.318)$$

Справедливы равенства:

$$[\sigma_1, \sigma_3] = 2\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \Phi_{\sigma_3}(\sigma_1) = \varphi\sigma_2. \quad (10.319)$$

$$[\sigma_2, \sigma_3] = 2i\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \Phi_{\sigma_3}(\sigma_2) = -\varphi\sigma_1, \quad (10.320)$$

$$[\sigma_3, \sigma_3] = O \Rightarrow \Phi_{\sigma_3}(\sigma_3) = O. \tag{10.321}$$

Поэтому матрица $(\Phi_{\sigma_3})_\sigma$ оператора Φ_{σ_3} в базисе $\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ имеет следующий вид:

$$(\Phi_{\sigma_3})_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & -\varphi & 0 \\ \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{10.322}$$

Точно также как при решении задачи 44 можно доказать, что

$$(F_\varphi)_\sigma = \exp((\Phi_{\sigma_3})_\sigma) = (\exp(\Phi_{\sigma_3}))_\sigma\,. \tag{10.323}$$

Отсюда сразу же получаем, что:

$$F_\varphi = \exp(\Phi_{\sigma_3}). \tag{10.324}$$

Теперь наша задача записать оператор F_φ в следующем виде:

$$F_\varphi(X) = U_\varphi^* X U_\varphi, \quad U_\varphi^* = U_\varphi^{-1}, \quad \det U_\varphi = 1. \tag{10.325}$$

Пусть матрица U_φ имеет следующий общий вид:

$$U_\varphi = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \overline{U}_\varphi^T = U_\varphi^{-1}, \tag{10.326}$$

$$\begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{c} \\ \overline{b} & \overline{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \Rightarrow d = \overline{a}, \quad c = -\overline{b}. \tag{10.327}$$

Итак, на данный момент имеем:

$$U_\varphi = \begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix}, \quad |a|^2 + |b|^2 = 1. \tag{10.328}$$

Заметим, что по определению матрица σ_3 является собственным вектором оператора F_φ с собственным значением $\lambda = 1$. Поэтому справедливо равенство:

$$\sigma_3 U_\varphi = U_\varphi \sigma_3 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ \overline{b} & -\overline{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ -\overline{b} & -\overline{a} \end{pmatrix} \Rightarrow b = 0, \tag{10.329}$$

причем $|a|^2 = 1$. Итак, на данный момент имеем:

$$U_\varphi = \begin{pmatrix} \exp(i\psi) & 0 \\ 0 & \exp(-i\psi) \end{pmatrix}, \quad \psi \in \mathbb{R}. \tag{10.330}$$

Справедливы следующие равенства:

$$F_\varphi(\sigma_1) = \begin{pmatrix} \exp(-i\psi) & 0 \\ 0 & \exp(i\psi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \exp(i\psi) & 0 \\ 0 & \exp(-i\psi) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \exp(-2i\psi) \\ \exp(2i\psi) & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \cos(2\psi) \\ \cos(2\psi) & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -i\sin(2\psi) \\ i\sin(2\psi) & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \cos(2\psi)\sigma_1 + \sin(2\psi)\sigma_2, \quad (10.331)$$

$$F_\varphi(\sigma_2) = \begin{pmatrix} \exp(-i\psi) & 0 \\ 0 & \exp(i\psi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \exp(i\psi) & 0 \\ 0 & \exp(-i\psi) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -i\exp(-2i\psi) \\ i\exp(2i\psi) & 0 \end{pmatrix} = -\sin(2\psi)\sigma_1 + \cos(2\psi)\sigma_2. \quad (10.332)$$

Из сравнения (10.313) с (10.331), (10.332) получим, что $2\psi = \varphi$. Следовательно, матрица U_φ имеет следующий вид:

$$U_\varphi = \begin{pmatrix} \exp(i\varphi/2) & 0 \\ 0 & \exp(-i\varphi/2) \end{pmatrix}, \quad \varphi \in \mathbb{R}. \quad (10.333)$$

Несложно заметить, что

$$U_\varphi = \exp\left(\frac{i\varphi}{2}\sigma_3\right). \quad (10.334)$$

Итак, оператор F_φ примет следующий вид:

$$F_\varphi(X) = \exp\left(-\frac{i\varphi}{2}\sigma_3\right) \cdot X \cdot \exp\left(\frac{i\varphi}{2}\sigma_3\right). \quad (10.335)$$

Лекция 10

ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА И ИХ КЛАССИФИКАЦИЯ

§ 1. Преобразование координат в пространстве

Пусть в пространстве заданы две прямоугольные декартовы системы координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ и $\{O, \mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'}, \mathbf{e}_{3'}\}$.

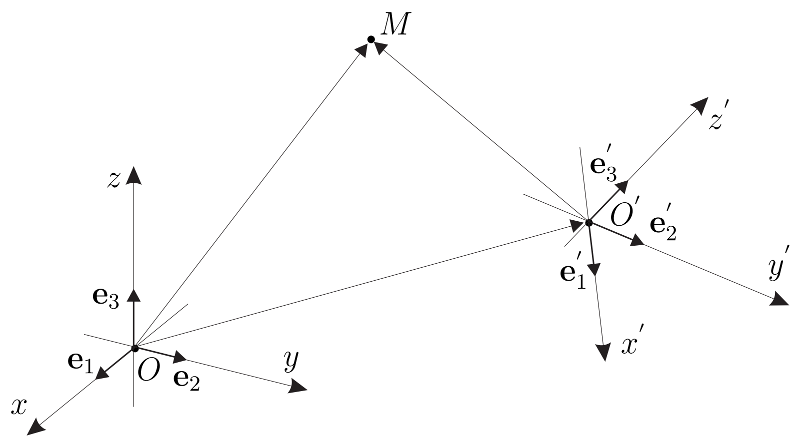

Рис. 20. К задаче 5.

Разложим базис $\{\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'}, \mathbf{e}_{3'}\}$ по базису $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$:

$$\mathbf{e}_{i'} = c_{i'}^{i}\mathbf{e}_i \tag{1.1}$$

или в развернутой форме

$$\mathbf{e}_{1'} = c_{1'}^{1}\mathbf{e}_1 + c_{1'}^{2}\mathbf{e}_2 + c_{1'}^{3}\mathbf{e}_3, \tag{1.2}$$

$$\mathbf{e}_{2'} = c_{2'}^{1}\mathbf{e}_1 + c_{2'}^{2}\mathbf{e}_2 + c_{2'}^{3}\mathbf{e}_3, \tag{1.3}$$

$$\mathbf{e}_{3'} = c_{3'}^{1}\mathbf{e}_1 + c_{3'}^{2}\mathbf{e}_2 + c_{3'}^{3}\mathbf{e}_3. \tag{1.4}$$

Введем следующие углы между векторами старого базиса и нового базиса:

$$c_{1'}^{1} = \cos\alpha_1 = (\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_1), \quad c_{1'}^{2} = \cos\beta_1 = (\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_2), \tag{1.5}$$

$$c_{1'}^{3} = \cos\gamma_1 = (\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_3), \tag{1.6}$$

$$c_{2'}^1 = \cos\alpha_2 = (\mathbf{e}_{2'}, \mathbf{e}_1), \quad c_{2'}^2 = \cos\beta_2 = (\mathbf{e}_{2'}, \mathbf{e}_2), \tag{1.7}$$

$$c_{2'}^3 = \cos\gamma_2 = (\mathbf{e}_{2'}, \mathbf{e}_3), \tag{1.8}$$

$$c_{3'}^1 = \cos\alpha_3 = (\mathbf{e}_{3'}, \mathbf{e}_1), \quad c_{3'}^2 = \cos\beta_3 = (\mathbf{e}_{3'}, \mathbf{e}_2), \tag{1.9}$$

$$c_{3'}^3 = \cos\gamma_3 = (\mathbf{e}_{3'}, \mathbf{e}_3). \tag{1.10}$$

Тогда (1.2)–(1.4) с учетом и (1.5)–(1.10) мы приходим к следующей формуле:

$$(\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'}, \mathbf{e}_{3'}) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \cdot R, \tag{1.11}$$

$$R = \begin{pmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\alpha_2 & \cos\alpha_3 \\ \cos\beta_1 & \cos\beta_2 & \cos\beta_3 \\ \cos\gamma_1 & \cos\gamma_2 & \cos\gamma_3 \end{pmatrix}. \tag{1.12}$$

Поскольку матрица R является матрицей преобразования ортонормированных базисов, то справедливо равенство $R^T = R^{-1}$.

Теперь наша задача найти формулы связывающие, координаты радиуса–вектора некоторой точки в репере $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ с радиус–вектором той же точки в репере $\{O', \mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'}, \mathbf{e}_{3'}\}$.

□ Действительно, пусть $\mathbf{r}$ — радиус–вектор точки в старой системе координат, а $\mathbf{r}'$ — радиус–вектор той же точки в новой системе координат, а $\overrightarrow{OO'}$ — направленный отрезок с началом в точке O и с концом в точке O'. Справедливы следующие равенства:

$$\mathbf{r} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \cdot X, \quad \mathbf{r}' = (\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'}, \mathbf{e}_{3'}) \cdot X', \tag{1.13}$$

$$\overrightarrow{OO'} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \cdot X_0, \tag{1.14}$$

где

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}, \quad X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix},$$

причем справедливо равенство:

$$\mathbf{r} = \overrightarrow{OO'} + \mathbf{r}' \tag{1.15}$$

или с учетом (1.13) и (1.14) получим следующее выражение:

$$\begin{aligned}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \cdot X &= (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \cdot X_0 + (\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'}, \mathbf{e}_{3'}) \cdot X' = \\ &= (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \cdot X_0 + (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \cdot R \cdot X' \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \cdot [X - X_0 - R \cdot X'] = \vartheta \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow X = X_0 + R \cdot X'. \quad \boxtimes \end{aligned} \tag{1.16}$$

Введем столбцы из $\mathbb{R}^{4\times 1}$:

$$Z = \left\| \begin{matrix} X \\ 1 \end{matrix} \right\|, \quad Z' = \left\| \begin{matrix} X' \\ 1 \end{matrix} \right\|. \tag{1.17}$$

Рассмотрим блочную матрицу

$$P = \left\| \begin{array}{c|c} R & X_0 \\ \hline O & 1 \end{array} \right\| \tag{1.18}$$

Справедлива следующая лемма:
Лемма 1. *Матричное равенство*:

$$X = X_0 + R \cdot X' \tag{1.19}$$

эквивалентно следующему матричному равенству:

$$Z = P \cdot Z'. \tag{1.20}$$

Доказательство. Справедливо следующее равенство:

$$P \cdot Z' = \left\| \begin{array}{c|c} R & X_0 \\ \hline O & 1 \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{c} X' \\ 1 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} X_0 + R \cdot X' \\ 1 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} X \\ 1 \end{array} \right\| = Z.$$

Лемма доказана.

§ 2. Различные формы записи уравнения поверхности второго порядка

Определение 1. *Уравнение второй степени, записанное в некоторой прямоугольной декартовой системе координат* $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ *следующим образом*:

$$a_{11}x^1 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + \\ + 2b_1x + 2b_2y + 2b_3z + c = 0, \tag{2.1}$$

называется уравнением поверхности второго порядка, если все коэффициенты и свободное слагаемое — вещественные числа, причем хотя бы один коэффициент при слагаемом второй степени отличен от нуля.

Введем следующие матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad B = (b_1, b_2, b_3), \quad a_{jk} = a_{kj}. \tag{2.2}$$

С учетом (2.2) уравнение (2.1) можно переписать в сжатой матричной форме:

$$X^T \cdot A \cdot X + 2B \cdot X + c = 0. \tag{2.3}$$

Справедлива следующая:

Лемма 2. *Уравнение* (2.3) *равносильно следующему матричному уравнению*:

$$Z^T \cdot D \cdot Z = 0, \quad D = \left\| \begin{array}{c|c} A & B^T \\ \hline B & c \end{array} \right\|, \quad Z = \left\| \begin{array}{c} X \\ 1 \end{array} \right\| = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{2.4}$$

Доказательство. Справедлива следующая цепочка равенств:

$$Z^T \cdot D \cdot Z = \|X^T, 1\| \cdot \left\| \begin{array}{c|c} A & B^T \\ \hline B & c \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{c} X \\ 1 \end{array} \right\| = \|X^T, 1\| \cdot \left\| \begin{array}{c} A \cdot X + B^T \\ B \cdot X + c \end{array} \right\| =$$
$$= X^T \cdot A \cdot X + X^T \cdot B^T + B \cdot X + c =$$
$$= X^T \cdot A \cdot X + 2B \cdot X + c = 0, \tag{2.5}$$

поскольку $B \cdot X$ — это число и, следовательно,

$$B \cdot X = (B \cdot X)^T = X^T \cdot B^T.$$

Лемма доказана.

Теперь наша задача получить уравнение поверхности (2.3) и (2.4) в новой прямоугольной декартовой системе координат $\{O', \mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'}, \mathbf{e}_{3'}\}$. С этой целью воспользуемся формулой (1.20) и после подстановки в равенство (2.4) мы получим равенство:

$$Z'^T \cdot P^T \cdot D \cdot P \cdot Z' = 0 \Leftrightarrow Z'^T \cdot D' \cdot Z' = 0, \quad D' = P^T \cdot D \cdot P. \tag{2.6}$$

Осталось вычислить D'. Действительно, справедливы равенства:

$$D' = P^T \cdot D \cdot P = \left\| \begin{array}{c|c} R^T & O \\ \hline X_0^T & 1 \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{c|c} A & B^T \\ \hline B & c \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{c|c} R & X_0 \\ \hline O & 1 \end{array} \right\| =$$
$$= \left\| \begin{array}{c|c} R^T & O \\ \hline X_0^T & 1 \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{c|c} A \cdot R & A \cdot X_0 + B^T \\ \hline B \cdot R & B \cdot X_0 + c \end{array} \right\| =$$
$$= \left\| \begin{array}{c|c} R^T \cdot A \cdot R & R^T \cdot (A \cdot X_0 + B^T) \\ \hline (X_0^T \cdot A + B) \cdot R & X_0^T \cdot A \cdot X_0 + X_0^T \cdot B^T + B \cdot X_0 + c \end{array} \right\| =$$
$$= \left\| \begin{array}{c|c} R^T \cdot A \cdot R & R^T \cdot (A \cdot X_0 + B^T) \\ \hline (X_0^T \cdot A + B) \cdot R & X_0^T \cdot A \cdot X_0 + 2B \cdot X_0 + c \end{array} \right\| =$$
$$= \left\| \begin{array}{c|c} A' & B'^T \\ \hline B' & c' \end{array} \right\|, \tag{2.7}$$

из которых получаем следующие равенства:

$$A' = R^T \cdot A \cdot R, \quad B' = (X_0^T \cdot A + B) \cdot R, \tag{2.8}$$
$$c' = X_0^T \cdot A \cdot X_0 + 2B \cdot X_0 + c \tag{2.9}$$

и уравнение (2.3) в новой прямоугольной системе координат $\{O', \mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'}, \mathbf{e}_{3'}\}$ примет следующий вид:

$$X'^T \cdot A' \cdot X' + 2B' \cdot X' + c' = 0, \tag{2.10}$$

где соответствующие матрицы и свободное слагаемое c' связаны с соответствующими матрицами в старой системе координат уравнениями (2.8) и (2.9).

§ 3. Ортогональные инварианты

Справедлива следующая:
Теорема 1. *Следующие функции являются ортогональными инвариантами поверхности второго порядка*:

$$K_4 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 & c \end{vmatrix}, \quad I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \tag{3.1}$$

$$I_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33}. \tag{3.2}$$

Доказательство. Справедливы следующие равенства:

$$\det D' = \det(P^T \cdot D \cdot P) = \det D (\det P)^2 = \det D, \tag{3.3}$$

где мы воспользовались равенством (2.6) и тем , что

$$(\det P)^2 = (\det R)^2 = 1, \tag{3.4}$$

поскольку:

$$R^T = R^{-1}, \quad \det R = \frac{1}{\det R}, \quad (\det R)^2 = 1.$$

Из равенства (3.4) и равенства (2.8) получаем равенство:

$$\det A' = \det(R^T \cdot A \cdot R) = (\det R)^2 \det A = \det A. \tag{3.5}$$

Наконец, имеет место равенство:

$$\operatorname{tr} A' = \operatorname{tr}(R^T \cdot A \cdot R) = \operatorname{tr}(A \cdot R \cdot R^T) = \operatorname{tr} A, \quad R^T = R^{-1}. \tag{3.6}$$

Теорема доказана.

Справедлива следующая важная:
Теорема 2. *Следующая функция является ортогональным инвариантом поверхности второго порядка*:

$$I_2 = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}. \tag{3.7}$$

Доказательство. Рассмотрим квадратичную форму вида:

$$X^T \cdot \widehat{A} \cdot X + 2B \cdot X + c = 0, \quad \widehat{A} = A - \lambda I. \tag{3.8}$$

После ортогонального преобразования уравнение (3.8) примет вид:

$$X'^T \cdot \widehat{A}' \cdot X' + 2B' \cdot X' + c' = 0, \quad \widehat{A}' = R^T \cdot (A - \lambda I) \cdot R = \\ = R^T \cdot A \cdot R - \lambda R^T \cdot R = A' - \lambda I. \quad (3.9)$$

В силу результата теоремы 1 имеем:

$$\det \widehat{A} = \det \widehat{A}' \Leftrightarrow \det(A - \lambda I) = \det(A' - \lambda I). \quad (3.10)$$

Последнее равенство должно быть выполненным для всех $\lambda \in \mathbb{R}$. Его можно переписать в развернутой форме:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_{11} - \lambda & a'_{12} & a'_{13} \\ a'_{21} & a'_{22} - \lambda & a'_{23} \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} - \lambda \end{vmatrix}. \quad (3.11)$$

Значит, коэффициенты в разных частях при λ^0, λ^1, λ^2 и λ^3 совпадают. Пользуясь элементарными свойствами определителей находим коэффициент при λ^0:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad (3.12)$$

коэффициент при λ^1 имеет следующий вид:

$$-\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}; \quad (3.13)$$

коэффициент при λ^2 равен:

$$a_{11} + a_{22} + a_{33}; \quad (3.14)$$

Очевидно, что коэффициент при λ^3 равен числу -1. Из (3.13) вытекает утверждение теоремы.

Теорема доказана.

Теорема 3. *Следующие функции являются инвариантами только относительно поворота прямоугольной декартовой системы координат*:

$$K_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ b_1 & b_2 & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & b_1 \\ a_{31} & a_{33} & b_3 \\ b_1 & b_3 & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{32} & a_{33} & b_3 \\ b_2 & b_3 & c \end{vmatrix}, \quad (3.15)$$

$$K_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ b_1 & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & b_2 \\ b_2 & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{33} & b_3 \\ b_3 & c \end{vmatrix}. \quad (3.16)$$

Доказательство. Рассмотрим квадратичную форму:

$$X^T \cdot (A - \lambda I) \cdot X + 2B \cdot X + c = 0. \quad (3.17)$$

Заметим, что при повороте с матрицей поворота R получим:

$$x^2 + y^2 + z^2 = X^T \cdot X = X'^T \cdot R^T \cdot R \cdot X' =$$

$$= X'^T \cdot X' = (x')^2 + (y')^2 + (z')^2. \quad (3.18)$$

В силу теоремы 1 функция K_4 является ортогональным инвариантом. Поэтому при однородном преобразовании и в силу сказанного выше мы приходим к выводу о том, что в результате однородного ортогонального преобразования получаем равенство:

$$X'^T \cdot (A' - \lambda I) \cdot X' + 2B' \cdot X' + c = 0, \quad A' = R^T \cdot A \cdot R, \qquad (3.19)$$

причем строчка B' от параметра λ не зависит. Из инвариантности K_4 получаем равенство:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda & b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_{11}-\lambda & a'_{12} & a'_{13} & b'_1 \\ a'_{21} & a'_{22}-\lambda & a'_{23} & b'_2 \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33}-\lambda & b'_3 \\ b'_1 & b'_2 & b'_3 & c \end{vmatrix}.$$

Поскольку это равенство должно быть выполнено для всех $\lambda \in \mathbb{R}^3$, то коэффициенты при одинаковых степенях параметра λ. Приравнивая коэффициенты при λ и λ^2, приходим к утверждению теоремы.

Теорема доказана.

Прежде всего заметим, что матрица A квадратичной формы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

является симметричной $a_{ij} = a_{ji}$. Поэтому в линейном пространстве $\mathbb{V}_3$ существует собственный базис $\{\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'}, \mathbf{e}_{3'}\}$, в котором матрица имеет следующий вид:

$$A' = R^T \cdot A \cdot R = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \qquad (3.20)$$

Ниже мы рассмотрим пять групп поверхностей второго порядка в соответствующих канонических прямоугольных декартовых системах координат. Причем мы получим условия на инварианты, которые в совокупности выделяют каждую поверхность из оставшихся всех поверхностей второго порядка.

§ 4. Первая группа: центральные поверхности

Определение 2. *Поверхность второго порядка называется центральной, если найдется такая единственная точка M, такая, что для любой точки M_1, принадлежащей поверхности, симметричная точка M_2 относительно точки M, тоже принадлежит данной поверхности.*

Замечание 1. *Условие $I_3 \neq 0$.* Это условие означает, что уравнение:

$$A \cdot X_0 = -B^T, \quad I_3 = \det A \neq 0 \qquad (4.1)$$

имеет единственное решение $X_0 \in \mathbb{R}^{4\times 1}$. Поэтому в новой прямоугольной декартовой системе координат $\{O', \mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'}, \mathbf{e}_{3'}\}$, в котором матрица A' имеет вид (3.20), а столбец $B'^T \in \mathbb{R}^{3\times 1}$ с учетом (4.1) имеет вид:

$$B'^T = R^T \cdot (A \cdot X_0 + B^T) = O \in \mathbb{R}^{3\times 1},$$

мы приходим к следующему виду матрицы D':

$$D' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c' \end{pmatrix}, \quad c' = X_0^T \cdot A \cdot X_0 + 2B \cdot X_0 + c. \tag{4.2}$$

Поскольку по условию

$$K_4 = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c' \end{vmatrix}, \quad I_3 = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K_4 = c' I_3, \quad I_3 = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \neq 0. \tag{4.3}$$

Таким образом, в новой прямоугольной системе координат $\{O', \mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'}, \mathbf{e}_{3'}\}$ уравнение поверхности второго порядка (2.10) примет следующий вид:

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + \frac{K_4}{I_3} = 0. \tag{4.4}$$

Для сокращения формы записи мы используем в новой системе координат не координаты x', y', z', а x, y, z.

I.1. Эллипсоид. Если уравнение (4.4) — *эллипсоид*, то числа λ_1, λ_2 и λ_3 одного знака, а число K_4/I_3 имеет знак им противоположный, но так как $I_3 = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$, то $K_4 < 0$.

□ Действительно, пусть $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$, $\lambda_3 < 0$. Тогда $I_3 < 0$ и справедливы неравенства:

$$\frac{K_4}{I_3} > 0 \Rightarrow K_4 < 0.$$

Пусть теперь $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $\lambda_3 > 0$. Тогда $I_3 > 0$ и

$$\frac{K_4}{I_3} < 0 \Rightarrow K_4 < 0.$$

Кроме того, имеют место неравенства:

$$I_2 = \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_3 > 0, \quad I_1 I_3 = (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 > 0. \tag{4.5}$$

Следовательно, эллипсоид определяется следующим набором ортогональных инвариантов:

$$I_2 > 0, \quad I_1 I_3 > 0, \quad K_4 < 0. \tag{4.6}$$

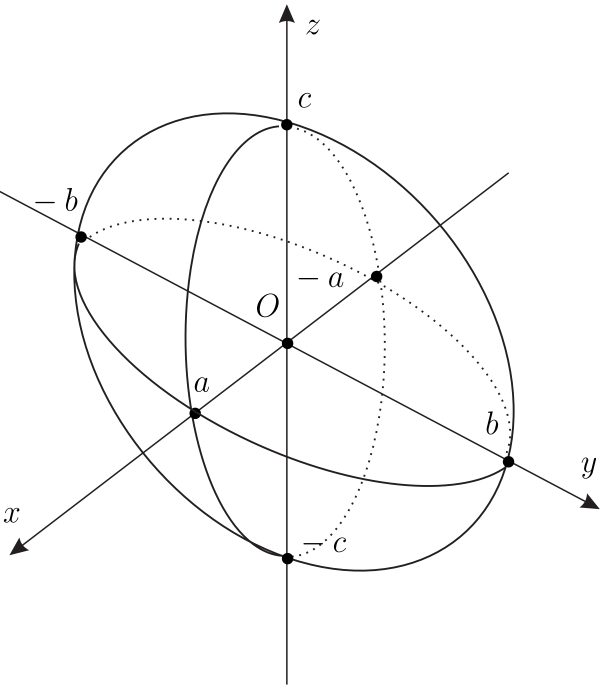

Рис. 21. Эллипсоид.

И уравнение эллипсоида можно привести к следующему каноническому виду: [1])

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{4.7}$$

I.2. Мнимый эллипсоид. Если уравнение (4.4) — мнимый эллипсоид, то это означает, что все числа λ_1, λ_2, λ_3 и K_4/I_3 одного знака. Точно также как и в случае эллипсоида приходим к выводу о том, что $K_4 > 0$. Кроме того, имеют место неравенства (4.5). Следовательно, мнимый эллипсоид определяется следующим набором на ортогональные инварианты:

$$I_2 > 0, \quad I_1 I_3 > 0, \quad K_4 > 0. \tag{4.8}$$

И уравнение эллипсоида можно привести к каноническому виду:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0. \tag{4.9}$$

[1]) К сожаленью, мы используем букву c еще в уравнении поверхности второго порядка.

I.3. Мнимый конус. Если уравнение (4.4) — мнимый конус, то это означает, что $K_4 = 0$ и все числа λ_1, λ_2 и λ_3 одного знака. При этом точно также как и ранее имеем неравенства (4.5). Следовательно,

$$I_2 > 0, \quad I_1 I_3 > 0, \quad K_4 = 0. \tag{4.10}$$

И уравнение мнимого конуса можно привести к следующему виду:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0. \tag{4.11}$$

I.4. Однополостный гиперболоид. Если уравнение (4.4) описывает однополостный гиперболоид, то из четырех чисел:

$$\lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \lambda_3 \quad \text{и} \quad \frac{K_4}{I_3} \tag{4.12}$$

два числа положительны, а два отрицательны. Без ограничения общности нужно рассмотреть два случая:

$$\lambda_1, \lambda_2 > 0, \quad \lambda_3 < 0, \quad K_4/I_3 < 0,$$

$$\lambda_1, \lambda_2 < 0, \quad \lambda_3 > 0, \quad K_4/I_3 > 0.$$

Случай 1. В этом случае имеем $I_3 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 < 0$ и поэтому $K_4 > 0$. Теперь мы имеем на выбор два подслучая:

$$I_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 \leqslant 0, \quad I_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 > 0. \tag{4.13}$$

Пусть выполнено второе неравенство в (4.13). Докажем, что тогда:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \geqslant 0. \tag{4.14}$$

□ Действительно, пусть выполнено противоположное неравенство

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 < 0. \tag{4.15}$$

Тогда справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 < -\lambda_1^2 < 0. \tag{4.16}$$

По предположению имеем:

$$\lambda_1\lambda_3 < 0. \tag{4.17}$$

Из (4.16) и (4.17) получаем, что

$$\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 < 0, \tag{4.18}$$

что противоречит второму неравенству из (4.13). Следовательно, справедливо неравенство (4.14). ⊠

Итак,

$$I_2 > 0 \Rightarrow I_1 I_3 = (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \leqslant 0. \tag{4.19}$$

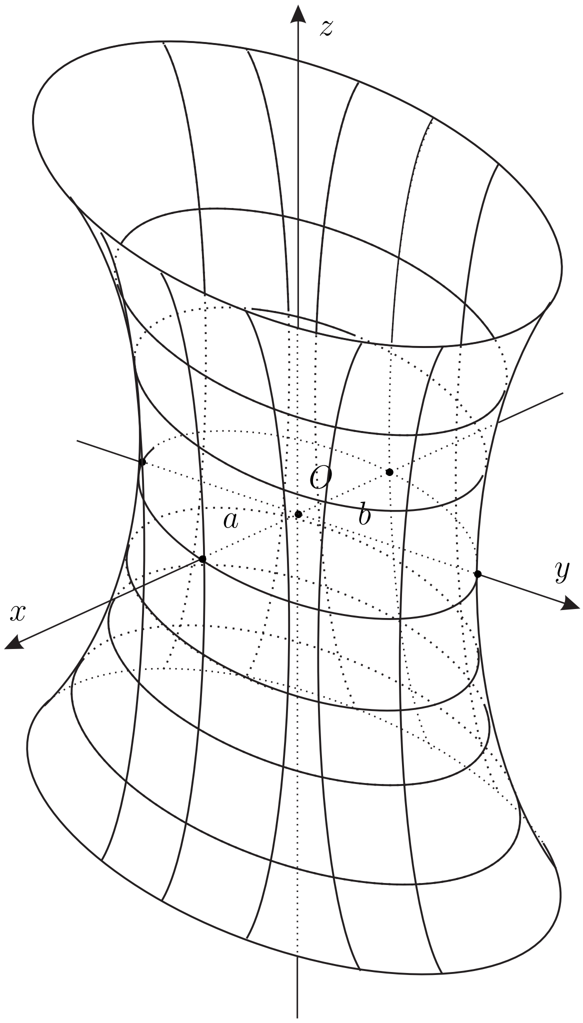

Рис. 22. Однополостный гиперболоид.

Случай 2. Пусть:

$$\lambda_1 < 0, \quad \lambda_2 < 0, \quad \lambda_3 > 0, \quad \frac{K_4}{I_3} > 0. \tag{4.20}$$

Из (4.20) вытекает

$$I_3 = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 > 0 \Rightarrow K_4 > 0. \tag{4.21}$$

Пусть либо $I_2 \leqslant 0$ либо $I_2 > 0$ (см. определение (4.13)). Рассмотрим второй подслучай:

$$I_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 > 0 \tag{4.22}$$

Докажем, что

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \leqslant 0. \tag{4.23}$$

□ Действительно, пусть выполнено противоположное неравенство:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 > 0. \tag{4.24}$$

Умножим обе части неравенства (4.24) на $\lambda_1 < 0$ и, с одной стороны, получим такое неравенство:

$$\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 < -\lambda_1^2 < 0, \tag{4.25}$$

а с другой стороны из (4.20) вытекает неравенство:

$$\lambda_2\lambda_3 < 0. \tag{4.26}$$

Итак, из неравенств (4.25) и (4.26) получаем неравенство:

$$\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 < 0, \tag{4.27}$$

что противоречит неравенству (4.22). Значит,

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \leqslant 0 \Rightarrow I_3 I_1 \leqslant 0. \quad \boxtimes \tag{4.28}$$

Итак,

$$I_2 > 0 \Rightarrow I_3 I_1 \leqslant 0.$$

Таким образом, приходим к двум наборам условий на инварианты, при которых поверхность (4.4) описывает однополостный гиперболоид.

$$I_3 \neq 0, \quad K_4 > 0, \quad I_2 \leqslant 0,$$
$$I_3 \neq 0, \quad K_4 > 0, \quad I_1 I_3 \leqslant 0.$$

Уравнение однополостного гиперболоида в канонической системе координат имеет следующий вид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{4.29}$$

I.5. Двуполостный гиперболоид. Если уравнение (4.4) описывает двуполостный гиперболоид, то два корня из $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ имеют одинаковый знак с K_4/I_3, а третий противоположный. Рассмотрим два случая

Случай 1. Пусть $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $K_4/I_3 > 0$ и $\lambda_3 < 0$. Тогда $I_3 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 < 0$ и поэтому $K_4 < 0$. Теперь:

$$\text{либо} \quad I_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 \leqslant 0 \tag{4.30}$$

$$\text{либо} \quad I_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 > 0. \tag{4.31}$$

Предположим, что $I_2 > 0$. Докажем, что

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \geqslant 0 \tag{4.32}$$

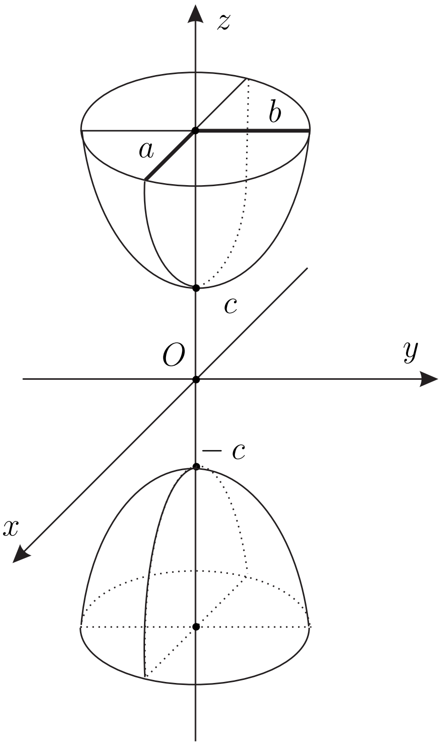

Рис. 23. Двуполостный гиперболоид.

и тогда $I_1 I_3 \leqslant 0$.

□ Действительно, пусть выполнено противное условие:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 < 0. \tag{4.33}$$

Умножим это неравенство на $\lambda_1 > 0$ и получим неравенства:

$$\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 < -\lambda_1^2 < 0. \tag{4.34}$$

По предположению $\lambda_1\lambda_3 < 0$. Поэтому с учетом (4.34) приходим к неравенству:

$$\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 < 0, \tag{4.35}$$

которое противоречит неравенству (4.31). Следовательно, выполнено неравенство (4.32). ⊠

Итак, если $I_2 > 0$, то $I_3 I_1 \leqslant 0$.

Случай 2. Пусть $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$, $K_4/I_3 < 0$ и $\lambda_3 > 0$. Тогда $I_3 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 > 0$ и поэтому $K_4 < 0$. Теперь либо $I_2 > 0$ либо $I_2 \leqslant 0$. Предположим, что

$$I_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 > 0. \tag{4.36}$$

Докажем, что
$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \leqslant 0. \tag{4.37}$$

$\square$ Действительно, пусть выполнено противоположное неравенство:
$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 > 0. \tag{4.38}$$

Умножим обе части неравенства (4.38) на $\lambda_1 < 0$ и получим неравенства
$$\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 < -\lambda_1^2 < 0. \tag{4.39}$$

Согласно исходному предположению $\lambda_2\lambda_3 < 0$ и поэтому с учетом (4.39) приходим к неравенству:
$$\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 < 0, \tag{4.40}$$

которое противоречит неравенству (4.36). Итак, имеет место неравенство (4.37). $\boxtimes$

Следовательно, если $I_2 > 0$, то $I_1 I_3 \leqslant 0$.

Таким образом, приходим к двум наборам условий на инварианты, при которых поверхность (4.4) описывает двуполостный гиперболоид:
$$I_3 \neq 0, \quad K_4 < 0, \quad I_2 \leqslant 0,$$
$$I_3 \neq 0, \quad K_4 < 0, \quad I_1 I_3 \leqslant 0.$$

Уравнение двуполостного гиперболоида в канонической системе координат имеет следующий вид:
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1. \tag{4.41}$$

I.6. Конус. Если уравнение (4.4) описывает конус, то $K_4/I_3 = 0$. Поэтому $K_4 = 0$ и $I_3 \neq 0$. Причем два корня из трех λ_1, λ_2 и λ_3 одного знака, а третий противоположного. Рассмотрим два случая.

Случай 1. Пусть $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$ и $\lambda_3 < 0$. Тогда $I_3 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 < 0$. Причем:
$$\text{либо} \quad I_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 \leqslant 0 \tag{4.42}$$
$$\text{либо} \quad I_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 > 0. \tag{4.43}$$

Пусть выполнено (4.43). Докажем, что тогда:
$$I_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \geqslant 0. \tag{4.44}$$

$\square$ Действительно, пусть выполнено противоположное неравенство:
$$I_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 < 0. \tag{4.45}$$

Умножим обе части неравенства (4.45) на $\lambda_1 > 0$ и получим неравенства:
$$\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 < -\lambda_1^2 < 0. \tag{4.46}$$

Согласно условию $\lambda_2\lambda_3 < 0$. Отсюда и с учетом (4.46) получим неравенство:
$$\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 < 0, \tag{4.47}$$

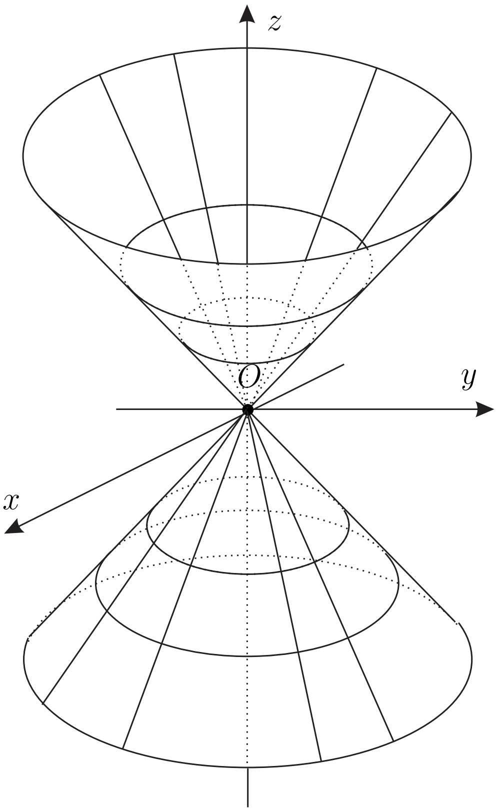

Рис. 24. Конус.

которое противоречит неравенству (4.43). Следовательно, имеет место (4.44), т.е. $I_1 I_3 \leqslant 0$. ⊠

Итак, если $I_2 > 0$, то $I_1 I_3 \leqslant 0$.

Случай 2. Пусть $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$ и $\lambda_3 > 0$. Тогда $I_3 > 0$. Причем либо $I_2 \leqslant 0$ либо $I_2 > 0$. Пусть выполнено последнее неравенство. Докажем, что

$$I_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \leqslant 0. \tag{4.48}$$

□ Действительно, пусть выполнено противоположное неравенство:

$$I_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 > 0. \tag{4.49}$$

Умножим обе части этого неравенства на $\lambda_1 < 0$ и получим неравенства:

$$\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 < -\lambda_1^2 < 0. \tag{4.50}$$

По условию $\lambda_2\lambda_3 < 0$. Отсюда и из (4.50) мы приходим к неравенству:

$$\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 < 0, \tag{4.51}$$

которое противоречит неравенству $I_2 > 0$. Итак, неравенство (4.48) доказано. ⊠

Следовательно, если $I_2 > 0$, то $I_1 I_3 \leqslant 0$.

Таким образом, приходим к двум наборам условий на инварианты, при которых поверхность (4.4) описывает конус:

$$I_3 \neq 0, \quad K_4 = 0, \quad I_2 \leqslant 0,$$

$$I_3 \neq 0, \quad K_4 = 0, \quad I_1 I_3 \leqslant 0.$$

Уравнение конуса в канонической системе координат имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0. \tag{4.52}$$

§ 5. Вторая группа: параболоиды

К параболоидам относятся поверхности второго порядка, у которых инвариант:

$$I_3 = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 0, \quad \text{но} \quad K_4 \neq 0,$$

причем только один корень из трех λ_1, λ_2 и λ_3 равен нулю. Без ограничения общности будем считать, что $\lambda_3 = 0$. Рассмотрим поверхность (2.4) второго порядка, записанную в исходной прямоугольной декартовой системе координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. Сначала сделаем только поворот и получим в новой прямоугольной декартовой системе координат $\{O, \mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'}, \mathbf{e}_{3'}\}$ уравнение:

$$Z'^T \cdot D' \cdot Z' = 0, \tag{5.1}$$

$$D' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & b'_1 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & b'_2 \\ 0 & 0 & 0 & b'_3 \\ b'_1 & b'_2 & b'_3 & c \end{pmatrix}. \tag{5.2}$$

Теперь сделаем сдвиг в точку $O' = (x_0, y_0, 0)$, которая определяется как решение следующей системы уравнений:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} b'_1 \\ b'_2 \end{pmatrix} \Rightarrow x_0 = -\frac{b'_1}{\lambda_1}, \quad y_0 = -\frac{b'_2}{\lambda_2}. \tag{5.3}$$

В результате этого сдвига получим новое уравнение:

$$Z''^T \cdot D'' \cdot Z'' = 0, \tag{5.4}$$

$$D'' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b''_3 \\ 0 & 0 & b''_3 & c'' \end{pmatrix} \Rightarrow K_4 = -(b''_3)^2 \lambda_1 \lambda_2. \tag{5.5}$$

Поскольку K_4 является инвариантом и $K_4 \neq 0$, то $b_3'' \neq 0$. В силу этого вывода параболоиды не являются центральными поверхностями, поскольку уравнение центра имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b_3'' \end{pmatrix}, \quad b_3'' \neq 0. \tag{5.6}$$

Вывод из этих предварительных рассуждений, что без ограничения общности при $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$, $\lambda_3 = 0$ ($I_3 = 0$) и $K_4 \neq 0$ мы получаем ровно две поверхности при $K_4 > 0$ и при $K_4 < 0$.

II.1. Эллиптический параболоид. Если уравнение (4.4) описывает эллиптический параболоид, то:

$$I_3 = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = I_2 \lambda_3 = 0, \quad I_2 = \lambda_1 \lambda_2 > 0,$$

причем в силу (5.5) справедливо неравенство $K_4 < 0$. При этом имеем:

$$|b_3''| = \sqrt{-\frac{K_4}{I_2}} \tag{5.7}$$

и очевидно величина $|b_3''|$ является полуинвариантом относительно сдвигов. Осталось сделать сдвиг:

$$z''' = z'' + \frac{c''}{2b_3''}.$$

Таким образом, приходим к выводу, что:

$$I_3 = 0, \quad I_2 > 0, \quad K_4 < 0.$$

Уравнение эллиптического параболоида можно привести к виду:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z. \tag{5.8}$$

II.2. Гиперболический параболоид. Если уравнение (4.4) описывает гиперболический параболоид, то:

$$I_3 = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = I_2 \lambda_3 = 0, \quad I_2 = \lambda_1 \lambda_2 < 0,$$

причем в силу (5.5) имеем $K_4 > 0$. Таким образом, приходим к выводу о том, что:

$$I_3 = 0, \quad I_2 < 0, \quad K_4 > 0.$$

Уравнение гиперболического параболоида можно привести к следующему виду:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z. \tag{5.9}$$

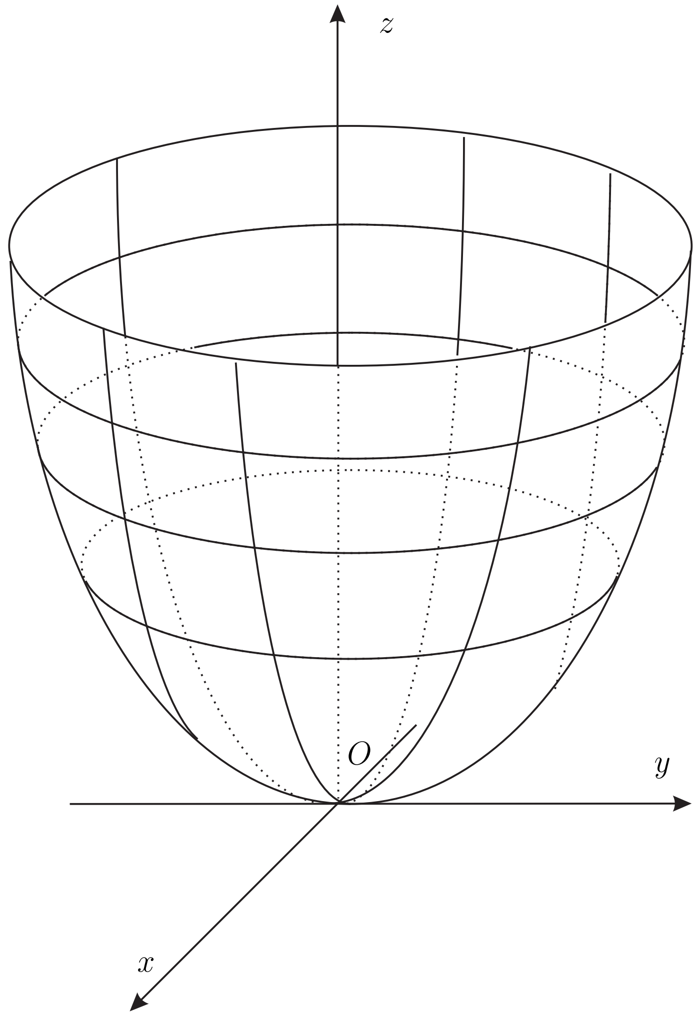

Рис. 25. Эллиптический параболоид.

§ 6. Третья группа: эллиптические и гиперболические цилиндры

III.1. Эллиптический цилиндр. Если уравнение (4.4) описывает эллиптический цилиндр, то $I_3 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 0$, причем два корня одного знака, а третий корень равен нулю.

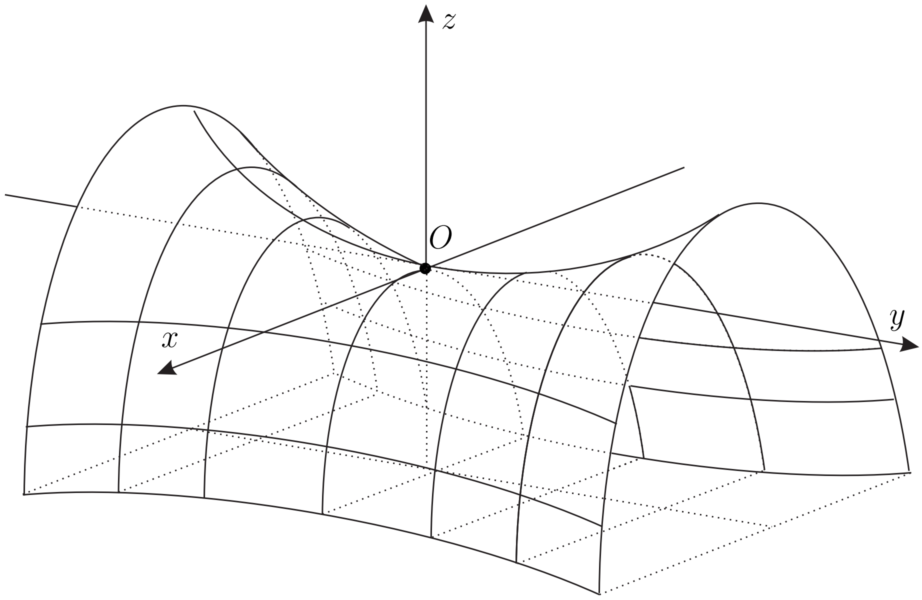

Рис. 26. Гиперболический параболоид.

Например, $I_2 = \lambda_1\lambda_2 > 0$ и $\lambda_3 = 0$. При этом после поворота мы получим для ортогонального инварианта K_4 выражение:

$$K_4 = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & b'_1 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & b'_2 \\ 0 & 0 & 0 & b'_3 \\ b'_1 & b'_2 & b'_3 & c \end{vmatrix}. \tag{6.1}$$

Поскольку $\lambda_1 \neq 0$ и $\lambda_2 \neq 0$, то можно сделать сдвиг в точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} b'_1 \\ b'_2 \end{pmatrix}, \quad z_0 = 0. \tag{6.2}$$

В результате которого ортогональный инвариант K_4 примет вид:

$$K_4 = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b''_3 \\ 0 & 0 & b''_3 & c' \end{vmatrix}. \tag{6.3}$$

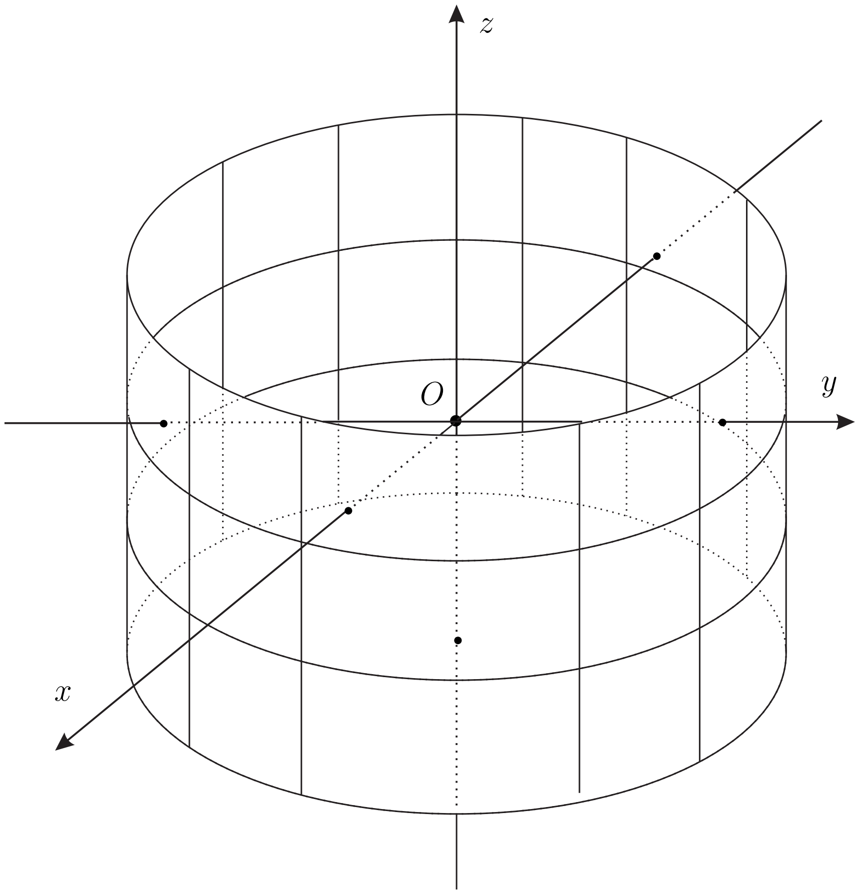

Рис. 27. Эллиптический цилиндр.

Эллиптический цилиндр определяется условием, что $K_4 = 0$. Из (6.3) получаем $b_3'' = 0$ и поэтому:

$$K_4 = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c' \end{vmatrix}. \tag{6.4}$$

Тогда получаем, что

$$K_3 = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & c' \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2 c' = I_2 c' \Rightarrow c' = \frac{K_3}{I_2}. \tag{6.5}$$

Тогда уравнение поверхности второго порядка примет следующий вид:

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \frac{K_3}{I_2} = 0. \tag{6.6}$$

Эллиптический цилиндр характеризуется тем, что знаки λ_1, λ_2 противоположны знаку K_3/I_2. Поскольку $I_2 = \lambda_1\lambda_2 > 0$, то знак K_3 противоположен знаку $I_1 = \lambda_1 + \lambda_2$. Таким образом, имеем:

$$K_3 I_1 < 0. \tag{6.7}$$

$$I_3 = 0,\ K_4 = 0,\ I_2 > 0,\ I_1 K_3 < 0.$$

Уравнение эллиптического цилиндра можно привести к виду:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{6.8}$$

III.2. Мнимый эллиптический цилиндр. Отличается от вещественного эллиптического цилиндра тем, что знак K_3 совпадает со знаком I_1. Поэтому из уравнения (6.6) имеем:

$$I_3 = 0, \quad K_4 = 0, \quad I_2 > 0, \quad I_1 K_3 > 0.$$

Уравнение эллиптического цилиндра можно привести к виду:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0. \tag{6.9}$$

III.3. Две мнимые пересекающиеся плоскости. Эта поверхность получается из уравнения (6.6) при $K_3 = 0$. Поэтому из уравнения (6.6) имеем:

$$I_3 = 0, \quad K_4 = 0, \quad I_2 > 0, \quad K_3 = 0.$$

Уравнение пары мнимых пересекающихся плоскостей можно привести к следующему виду:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0. \tag{6.10}$$

III.4. Гиперболический цилиндр. Эта поверхность отличается от эллиптического цилиндра тем, что два корня разных знаков. Третий корень равен нулю.

Рассуждая как и в случае эллиптического цилиндра получим уравнение (6.6), в котором $I_2 = \lambda_1\lambda_2 < 0$ и $K_3 \neq 0$. Поэтому из уравнения (6.6) имеем:

$$I_3 = 0, \quad K_4 = 0, \quad I_2 < 0, \quad K_3 \neq 0.$$

Уравнение гиперболического цилиндра можно привести к виду:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{6.11}$$

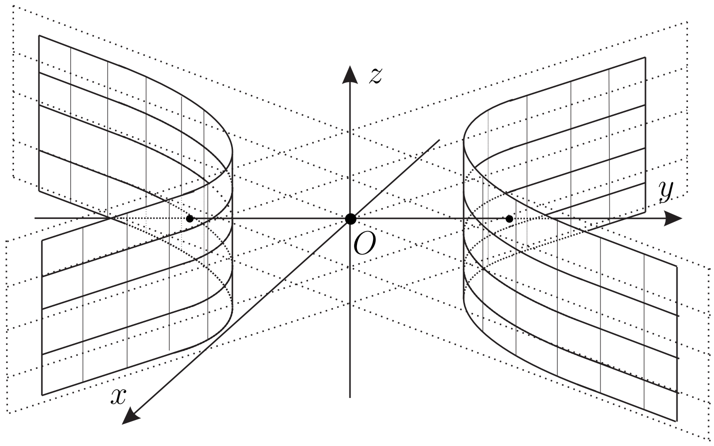

Рис. 28. Гиперболический цилиндр.

III.5. Пара пересекающихся плоскостей. Отличие от гиперболического цилиндра в том, что в уравнении (6.6) $K_3 = 0$. Поэтому из уравнения (6.6) имеем:

$$I_3 = 0, \quad K_4 = 0, \quad I_2 < 0, \quad K_3 = 0.$$

Уравнение пары пересекающихся плоскостей можно привести к виду:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0. \tag{6.12}$$

§ 7. Четвертая группа: параболический цилиндр

IV.1. Параболический цилиндр. Это случай, когда $I_3 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 0$, $I_2 = \lambda_1\lambda_2 = 0$. Без ограничения общности можно считать, что $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$, а $\lambda_1 \neq 0$. После поворота мы получим следующее уравнение:

$$\lambda_1 x^2 + 2b'_1 x + 2b'_2 y + 2b'_3 z + c = 0. \tag{7.1}$$

Заметим, что тогда:

$$K_4 = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & b'_1 \\ 0 & 0 & 0 & b'_2 \\ 0 & 0 & 0 & b'_3 \\ b'_1 & b'_2 & b'_3 & c' \end{vmatrix} = 0. \tag{7.2}$$

Поскольку $\lambda_1 \neq 0$, то мы можем сделать сдвиг, чтобы избавится от слагаемого $2b'_1 x$. В результате получим уравнение:

$$\lambda_1 (x')^2 + 2b'_2 y' + 2b'_3 z' + c' = 0. \tag{7.3}$$

Теперь осталось сделать поворот вокруг оси Ox и получить уравнение следующего вида:

$$\lambda_1 (x'')^2 + 2b_2'' y'' + c' = 0. \tag{7.4}$$

Далее имеем:

$$K_3 = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_2'' \\ 0 & b_2'' & c' \end{vmatrix} = -\lambda_1 (b_2'')^2 \Rightarrow |b_2''| = \sqrt{-\frac{K_3}{I_1^3}}, \quad K_3 \neq 0. \tag{7.5}$$

Таким образом, уравнение (7.4) можно при помощи еще одного сдвига, чтобы исчезло слагаемое c', привести к следующему уравнению:

$$(x''')^2 = 2\sqrt{-\frac{K_3}{I_1^3}}\, y'''. \tag{7.6}$$

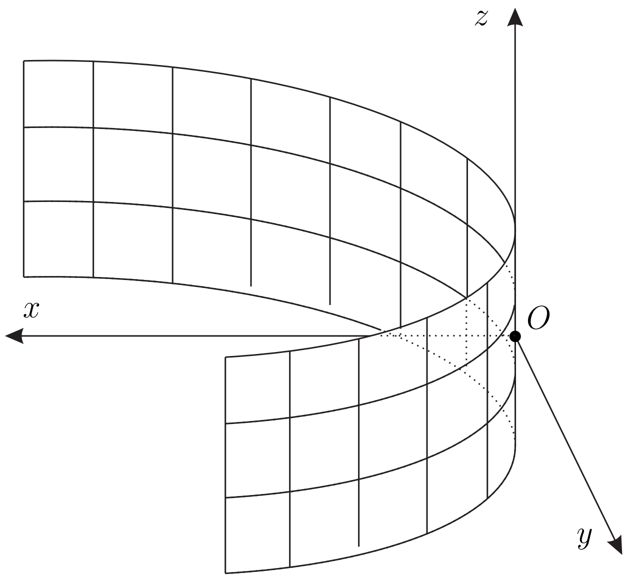

Рис. 29. Параболический цилиндр.

Поэтому из уравнения (6.6) имеем

$$I_3 = 0, \quad K_4 = 0, \quad I_2 = 0, \quad K_3 \neq 0, \quad I_1 \neq 0.$$

Уравнение параболического цилиндра можно привести к виду:

$$x^2 = 2py. \tag{7.7}$$

§ 8. Пятая группа: вырожденные параболические цилиндры

V.1. Две параллельные плоскости. Этот случай, который характеризуется теми же условиями, что и параболический цилиндр, только $b_2'' = 0$, т.е. в силу (7.5) имеем $K_3 = 0$. Тогда уравнение (7.4) примет следующий вид:

$$\lambda_1 x^2 + c' = 0. \tag{8.1}$$

Тогда:

$$K_2 = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & c' \end{vmatrix} = \lambda_1 c' = I_1 c' \Rightarrow c' = \frac{K_2}{I_1}. \tag{8.2}$$

Таким образом, из (8.3) и (8.4) мы приходим к уравнению:

$$x^2 + \frac{K_2}{I_1^2} = 0. \tag{8.3}$$

Условие того, чтобы уравнение (8.3) описывало две параллельные плоскости — это $K_2 < 0$. Поэтому из уравнения (8.3) имеем:

$$I_3 = 0, \quad K_4 = 0, \quad I_2 = 0, \quad K_3 = 0, \quad K_2 < 0, \quad I_1 \neq 0.$$

Уравнение двух параллельных плоскостей можно привести к виду:

$$x^2 - a^2 = 0. \tag{8.4}$$

V.2. Две мнимые параллельные плоскости. Из уравнения (8.3) имеем:

$$I_3 = 0, \quad K_4 = 0, \quad I_2 = 0, \quad K_3 = 0, \quad K_2 > 0, \quad I_1 \neq 0.$$

Уравнение двух параллельных плоскостей можно привести к виду:

$$x^2 + a^2 = 0. \tag{8.5}$$

V.3. Две совпадающие плоскости. Из уравнения (8.3) имеем:

$$I_3 = 0, \quad K_4 = 0, \quad I_2 = 0, \quad K_3 = 0, \quad K_2 = 0, \quad I_1 \neq 0.$$

Уравнение двух совпадающих плоскостей можно привести к следующему виду:

$$x^2 = 0. \tag{8.6}$$

§ 9. Линейчатые поверхности

Определение 3. *Поверхность S называется цилиндрической поверхностью с образующей, параллельной оси Oz, если она обладает следующим свойством: какова бы ни была лежащая на этой поверхности точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$, прямая линия, проходящая через эту точку и параллельная оси Oz, целиком лежит на S.*

Лемма 3. *Всякое алгебраическое уравнение линии второго порядка вида $F(x, y) = 0$ определяет цилиндрическую поверхность с образующей, параллельной оси Oz.*

Доказательство. Всякая точка $M_0(x_0, y_0, z)$, для которой имеет место равенство $F(x_0, y_0) = 0$, лежит на поверхности $F(x, y) = 0$. Согласно определению 3 — это поверхность цилиндра.

Лемма доказана.

Определение 4. *Поверхность S называется конической или конусом с вершиной в начале координат O, если она обладает следующим свойством: какова бы ни была лежащая на этой поверхности и отличная от начала координат точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$, прямая линия, проходящая через точку M_0 и начало координат O, целиком лежит на поверхности S.*

Пусть $F(x, y, z) = 0$ — это уравнение поверхности второго порядка, причём $F(0, 0, 0) = 0$.

Лемма 4. *Если $F(tx, ty, tz) = t^2 F(x, y, z)$, то уравнение:*

$$F(x, y, z) = 0 \tag{9.1}$$

описывает конус.

Доказательство. Действительно, пусть $M_0(x_0, y_0, z_0)$ — это точка на поверхности S, определяемой уравнением (9.1), и отличная от точки $O(0, 0, 0)$. Тогда прямая:

$$x = x_0 t, \quad y = y_0 t, \quad z = z_0 t \quad \text{при} \quad t \in \mathbb{R}$$

целиком лежит на этой поверхности S и, очевидно, проходит через точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и $O(0, 0, 0)$.

Лемма доказана.

Определение 5. *Поверхность S называется l–кратно линейчатой, если через каждую её точку проходит ровно $l \in \mathbb{N}$ различных прямых, лежащих на этой поверхности, называемых прямолинейными образующими.*

Пример 1. Все цилиндры (эллиптический, гиперболический и параболический) являются 1–линейчатыми поверхностями. Конус:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$$

не является 1–линейчатой поверхностью, поскольку через точку $(0, 0, 0)$ проходит не одна прямая, а бесконечно много прямых.

П р и м е р 2. Однополостный гиперболоид:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

является дважды линейчатой поверхностью.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, запишем уравнение однополостного гиперболоида в виде:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{y^2}{b^2} \Leftrightarrow \left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=\left(1-\frac{y}{b}\right)\left(1+\frac{y}{b}\right).$$

Пусть точка (x_0, y_0, z_0) лежит на гиперболоиде. Рассмотрим две системы однородных линейных уравнений:

$$\begin{cases} \alpha\left(\dfrac{x_0}{a}-\dfrac{z_0}{c}\right)=\beta\left(1-\dfrac{y_0}{b}\right), \\ \beta\left(\dfrac{x_0}{a}+\dfrac{z_0}{c}\right)=\alpha\left(1+\dfrac{y_0}{b}\right), \end{cases} \qquad \begin{cases} \gamma\left(\dfrac{x_0}{a}-\dfrac{z_0}{c}\right)=\delta\left(1+\dfrac{y_0}{b}\right), \\ \delta\left(\dfrac{x_0}{a}+\dfrac{z_0}{c}\right)=\gamma\left(1-\dfrac{y_0}{b}\right), \end{cases}$$

Заметим, что эти две системы относительно неизвестных (α, β) и (γ, δ) имеют нетривиальные решения $(\alpha_0, \beta_0) \neq (0,0)$ и $(\gamma_0, \delta_0) \neq (0,0)$, поскольку определители систем равны нулю. Например, для первой системы:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{x_0}{a}-\dfrac{z_0}{c} & -\left(1-\dfrac{y_0}{b}\right) \\ -\left(1+\dfrac{y_0}{b}\right) & \dfrac{x_0}{a}+\dfrac{z_0}{c} \end{vmatrix} = \left(\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{z_0^2}{c^2}\right)-\left(1-\frac{y_0^2}{b^2}\right)=0.$$

Теперь рассмотрим следующие две системы уравнений:

$$\begin{cases} \alpha_0\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}\right)=\beta_0\left(1-\dfrac{y}{b}\right); \\ \beta_0\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}\right)=\alpha_0\left(1+\dfrac{y}{b}\right); \end{cases} \qquad \begin{cases} \gamma_0\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}\right)=\delta_0\left(1+\dfrac{y}{b}\right); \\ \delta_0\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}\right)=\gamma_0\left(1-\dfrac{y}{b}\right). \end{cases} \tag{9.2}$$

Это и есть уравнения двух прямых, лежащих на поверхности однополостного гиперболоида и проходящих через точку (x_0, y_0, z_0). Однако, осталось доказать, что любые две прямые из первого семейства (9.2) не пересекаются и любые две прямые из второго семейства (9.2) не пересекаются. Докажем это, например, для семейства (9.2). Заметим, что каждой точке $M_0(x_0, y_0 z_0)$ однополостного гиперболоида однозначно соответствует число:

$$\frac{\beta_0}{\alpha_0}=\frac{\dfrac{x_0}{a}-\dfrac{z_0}{c}}{1-\dfrac{y_0}{b}}, \quad \frac{\beta_0}{\alpha_0}=\frac{1+\dfrac{y_0}{b}}{\dfrac{x_0}{a}+\dfrac{z_0}{c}},$$

поскольку:

$$\frac{\dfrac{x_0}{a} - \dfrac{z_0}{c}}{1 - \dfrac{y_0}{b}} = \frac{1 + \dfrac{y_0}{b}}{\dfrac{x_0}{a} + \dfrac{z_0}{c}}.$$

Поэтому если предположить, что две прямые семейства (9.2) пересекаются в некоторой точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$, то эти прямые просто совпадают, поскольку этим двум прямым соответствует одно и тоже соотношение:

$$\frac{\beta_0}{\alpha_0},$$

а, значит, их уравнения совпадают. ⊠

П р и м е р 3. Гиперболический параболоид:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$$

является дважды линейчатой поверхностью.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, запишем уравнение гиперболического параболоида в следующем виде:

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 2z.$$

Пусть точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ лежит на гиперболическом параболоиде. Рассмотрим две системы однородных линейных уравнений относительно неизвестных (α, β) и (γ, δ):

$$\begin{cases} \alpha\left(\dfrac{x_0}{a} - \dfrac{y_0}{b}\right) = \beta, \\ \beta\left(\dfrac{x_0}{a} + \dfrac{y_0}{b}\right) = 2\alpha z_0, \end{cases} , \quad \begin{cases} \gamma\left(\dfrac{x_0}{a} + \dfrac{y_0}{b}\right) = \delta, \\ \delta\left(\dfrac{x_0}{a} - \dfrac{y_0}{b}\right) = 2\gamma z_0, \end{cases}$$

Определители этих систем равны нулю! Поэтому существуют нетривиальные их решения (α_0, β_0) и (γ_0, δ_0). Тогда следующие системы уравнений описывают искомые прямые:

$$\begin{cases} \alpha_0\left(\dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b}\right) = \beta_0, \\ \beta_0\left(\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b}\right) = 2\alpha_0 z, \end{cases} \quad \begin{cases} \gamma_0\left(\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b}\right) = \delta_0, \\ \delta_0\left(\dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b}\right) = 2\gamma_0 z. \end{cases} \qquad ⊠$$

Лекция 11

ТЕНЗОРЫ

§ 1. Правило умножения «строчка на столбец»

В этом параграфе мы детально применим наше правило умножения матриц «строчка на столбец» для того, чтобы переходить от тензорной формы записи умножения матриц к матричной форме. Причем это будем делать на примерах. Мы пользуемся обозначениями Эйнштейна.

Пример 1. Начнем со следующего простейшего случая:

$$a^i b_i. \tag{1.1}$$

Заметим, что в случае одного индекса у буквы верхний индекс нумерует строчки матрицы, а нижний индекс нумерует столбцы матрицы. В таком случае рассмотрим следующие матрицу–столбец и матрицу–строчку:

$$A = \begin{pmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^n \end{pmatrix}, \quad B = (b_1, \ldots, b_n). \tag{1.2}$$

Наше правило «строчка на столбец» в данном случае означает, что мы можем умножить строчку B на столбец A и поэтому справедливы равенства:

$$a^i b_i = b_i a^i = (b_1, \ldots, b_n) \begin{pmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^n \end{pmatrix} = B \cdot A. \tag{1.3}$$

Заметим, что при этом нам пришлось поменять местами сомножители в сумме произведений (1.1).

Пример 2. Теперь рассмотрим следующий пример. Как записать в матричной форме следующую сумму произведений:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i. \tag{1.4}$$

Поскольку у обоих букв индекс нижний, то эти индексы нумеруют столбцы следующих матриц–строчек:

$$A = (a_1, \ldots, a_n), \quad B = (b_1, \ldots, b_n). \tag{1.5}$$

Но умножить строчку на строчку мы не можем. Найдем транспонированные матрицы к матрицам–строчкам (1.5). Они имеют вид:

$$A^T = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad B^T = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}. \tag{1.6}$$

Но теперь у нас справедливы следующие равенства:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = (a_1, \dots, a_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = A \cdot B^T, \tag{1.7}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = \sum_{i=1}^{n} b_i a_i = (b_1, \dots, b_n) \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = B \cdot A^T. \tag{1.8}$$

Заметим, что сумма произведений (1.4) — это число, произведения $A \cdot B^T$ и $B \cdot A^T$ — матрицы размера 1×1 и поэтому справедливы следующие равенства:

$$A \cdot B^T = (A \cdot B^T)^T = (B^T)^T \cdot A^T = B \cdot A^T. \tag{1.9}$$

Таким образом, мы пришли к выводу о том, что если в сумме произведений индекс суммирования у обоих элементов матриц находится внизу, нужно при записи в матричной форме переходить к транспонированной матрице.

Пример 3. Теперь рассмотрим следующую сумму произведений:

$$\sum_{i=1}^{n} a^i b^i. \tag{1.10}$$

Поскольку верхний индекс нумерует строчки, то мы введем следующие матрицы–столбцы:

$$A = \begin{pmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b^1 \\ \vdots \\ b^n \end{pmatrix}. \tag{1.11}$$

Умножить столбец на столбец мы не можем. Поэтому рассмотрим соответствующие транспонированные матрицы:

$$A^T = (a^1, \dots, a^n), \quad B^T = (b^1, \dots, b^n). \tag{1.12}$$

Но тогда справедливы следующие равенства:

$$\sum_{i=1}^{n} a^i b^i = (a^1, \dots, a^n) \begin{pmatrix} b^1 \\ \vdots \\ b^n \end{pmatrix} = A^T \cdot B, \tag{1.13}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a^i b^i = \sum_{i=1}^{n} b^i a^i = (b^1, \dots, b^n) \begin{pmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^n \end{pmatrix} = B^T \cdot A. \tag{1.14}$$

Заметим, как и в предыдущем примере, что $A^T \cdot B = B^T \cdot A \in \mathbb{K}^{1\times 1}$.

Теперь наша задача рассмотреть разнообразные суммы произведений элементов квадратных матриц $n \times n$.

Пример 4. Начнем со следующего примера:

$$a_s^j b_k^s, \tag{1.15}$$

здесь мы используем обозначения Эйнштейна. В данном случае мы используем один верхний и один нижний индексы для задания элемента матрицы. Верхний индекс нумерует строчки матрицы, а нижний индекс нумерует столбцы матрицы. Итак, введем матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix} = \begin{Vmatrix} A^1 \\ \vdots \\ A^n \end{Vmatrix}, \quad A^j = (a_1^j, \dots, a_n^j), \quad j = \overline{1, n}, \tag{1.16}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_1^1 & \cdots & b_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_1^n & \cdots & b_n^n \end{pmatrix} = \|B_1, \dots, B_n\|, \quad B_k = \begin{pmatrix} b_k^1 \\ \vdots \\ b_k^n \end{pmatrix}, \quad k = \overline{1, n}. \tag{1.17}$$

Заметим, что справедливы следующие равенства:

$$a_s^j b_k^s = (a_1^j, \dots, a_n^j) \begin{pmatrix} b_k^1 \\ \vdots \\ b_k^n \end{pmatrix} = A^j \cdot B_k = \{A \cdot B\}_k^j. \tag{1.18}$$

Напомним, что символом $\{C\}_k^j$ мы обозначаем операцию извлечения из матрицы C ее элемент, расположенный на пересечении j–ой строчки и k–го столбца.

Пример 5. Рассмотрим следующий пример, который формально очень «похож» на предыдущий:

$$b_k^s a_s^j. \tag{1.19}$$

Только теперь нужно записать эту сумму произведений таким образом, чтобы матрица, которая содержит элементы b_k^s была первой, а матрица, которая содержит элементы a_s^j была второй. Действительно, справедливы следующие равенства:

$$b_k^s a_s^j = (b_k^1, \dots, b_k^n) \begin{pmatrix} a_1^j \\ \vdots \\ a_n^j \end{pmatrix} = (B_k)^T (A^j)^T =$$

$$= (B^T)_k (A^T)^j = \{B^T A^T\}_k^j. \quad (1.20)$$

Здесь символом $\{C\}_k^j$ обозначена операция извлечения из матрицы C элемента, находящегося на пересечении k–ой строчки и j–го столбца. Сравните с таким же обозначением в предыдущем примере! Но там было все с точностью да наоборот. Это связано с переходом к транспонированным матрицам. Такая ситуация у нас будет возникать снова и снова.

Определение 1. *Пусть $A \in \mathbb{K}^{n\times m}$. Введем операции извлечения j–ой строчки из матрицы A и операцию извлечения k–го столбца из матрицы A следующим образом*:

$$\{A\}^j = A^j, \quad \{A\}_k = A_k, \quad A = \|A_1, \ldots, A_n\| = \left\| \begin{array}{c} A^1 \\ \vdots \\ A^m \end{array} \right\|.$$

Пример 6. Теперь рассмотрим вот такой пример:

$$\sum_{s=1}^{n} a_s^j b_s^k. \quad (1.21)$$

Поскольку нижний индекс нумерует столбцы, то

$$B^k = (b_1^k, \ldots, b_n^k), \quad (B^k)^T = \begin{pmatrix} b_1^k \\ \vdots \\ b_n^k \end{pmatrix}. \quad (1.22)$$

Заметим, что справедливо следующее равенство:

$$(B^k)^T = \{B^T\}_k, \quad (1.23)$$

причем индекс в правой и в левой частях носят разный характер. В левой части индекс k совпадает с верхним индексом, которым мы обозначаем элементы матрицы $B = (b_s^k)$, а в правой части индексом k мы обозначаем k–ый столбец матрицы B^T.

Поэтому справедлива следующая цепочка равенств:

$$\sum_{s=1}^{n} a_s^j b_s^k = (a_1^j, \ldots, a_n^j) \begin{pmatrix} b_1^k \\ \vdots \\ b_n^k \end{pmatrix} = A^j \cdot (B^k)^T =$$
$$= \{A\}^j \{B^T\}_k = \{A \cdot B^T\}_k^j = \{A \cdot B^T\}^{jk}, \quad (1.24)$$

где символом $\{C\}^{jk}$ мы обозначили операцию извлечения элемента из матрицы C, находящегося на пересечении j–ой строчки и k–го столбца. Туже операцию мы обозначаем символом $\{C\}_k^j$.

Пример 7. Следующий пример такой:

$$\sum_{s=1}^{n} a_j^s b_k^s. \tag{1.25}$$

Поскольку верхний индекс нумерует строчки, то

$$A_j = \begin{pmatrix} a_j^1 \\ \vdots \\ a_j^n \end{pmatrix}, \quad (A_j)^T = (a_j^1, \ldots, a_j^n), \quad B_k = \begin{pmatrix} b_k^1 \\ \vdots \\ b_k^n \end{pmatrix}. \tag{1.26}$$

Поэтому справедливо следующее равенство:

$$\sum_{s=1}^{n} a_j^s b_k^s = (a_j^1, \ldots, a_j^n) \begin{pmatrix} b_k^1 \\ \vdots \\ b_k^n \end{pmatrix} = (A_j)^T \cdot B_k =$$
$$= \{A^T\}^j \{B\}_k = \{A^T \cdot B\}_k^j = \{A^T \cdot B\}_{jk}, \tag{1.27}$$

где символом $\{C\}_{jk}$ мы обозначили операцию извлечения элемента матрицы C, расположенного на пересечении j–ой строчки и k–го столбца.

Пример 8. Следующий пример такой:

$$\sum_{s=1}^{n} a^{js} b^{sk}. \tag{1.28}$$

Итак, в этом примере оба индекса верхние. Тогда первый индекс нумерует строчки матрицы,а второй индекс нумерует столбцы матрицы. Введем следующие матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} a^{11} & \cdots & a^{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a^{n1} & \cdots & a^{nn} \end{pmatrix} = \begin{Vmatrix} A^1 \\ \vdots \\ A^n \end{Vmatrix}, \quad A^j = (a^{j1}, \ldots, a^{jn}), \quad j = \overline{1,n}, \tag{1.29}$$

$$B = \begin{pmatrix} b^{11} & \cdots & b^{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b^{n1} & \cdots & b^{nn} \end{pmatrix} = \|B^1, \ldots, B^n\|, \quad B^k = \begin{pmatrix} b^{1k} \\ \vdots \\ b^{nk} \end{pmatrix}, \quad k = \overline{1,n}. \tag{1.30}$$

С учетом введенных обозначений справедливы следующие равенства:

$$\sum_{s=1}^{n} a^{js} b^{sk} = (a^{j1}, \ldots, a^{jn}) \begin{pmatrix} b^{1k} \\ \vdots \\ b^{nk} \end{pmatrix} = \{A\}^j \cdot \{B\}_k = \{A \cdot B\}^{jk}. \tag{1.31}$$

П р и м е р 9. Рассмотрим такой пример:

$$\sum_{s=1}^{n} a^{js} b^{ks}. \tag{1.32}$$

Заметим, что поскольку второй верхний индекс нумерует столбцы, то

$$B^k = (b^{k1}, \ldots, b^{kn}), \quad (B^k)^T = \begin{pmatrix} b^{k1} \\ \vdots \\ b^{kn} \end{pmatrix}. \tag{1.33}$$

Справедлива следующая цепочка равенств:

$$\sum_{s=1}^{n} a^{js} b^{ks} = (a^{j1}, \ldots, a^{jn}) \begin{pmatrix} b^{k1} \\ \vdots \\ b^{kn} \end{pmatrix} = \\ = A^j \cdot (B^k)^T = \{A\}^j \cdot \{B^T\}_k = \{A \cdot B^T\}^j_k = \{A \cdot B^T\}^{jk}. \tag{1.34}$$

П р и м е р 10. Рассмотрим теперь следующий пример:

$$\sum_{s=1}^{n} a^{sj} b^{sk}. \tag{1.35}$$

В обозначениях предыдущих двух примеров получаем равенства:

$$\sum_{s=1}^{n} a^{sj} b^{sk} = (a^{1j}, \ldots, a^{nj}) \begin{pmatrix} b^{1k} \\ \vdots \\ b^{nk} \end{pmatrix} = \\ = (A^j)^T \cdot B^k = \{A^T\}_j \cdot B^k = \{A^T \cdot B\}^{jk},$$

где

$$A^j = \begin{pmatrix} a^{1j} \\ \vdots \\ a^{nj} \end{pmatrix}, \quad (A^j)^T = (a^{1j}, \cdots, a^{nj}), \quad B^k = \begin{pmatrix} b^{1k} \\ \vdots \\ b^{nk} \end{pmatrix}.$$

П р и м е р 11. Следующий пример:

$$\sum_{s=1}^{n} a^j_s b^{sk}. \tag{1.36}$$

В этой сумме произведений во множителе a^j_s индекс j нумерует строчки, а индекс s нумерует столбцы; во множителе b^{sk} индекс s

нумерует строчки, а индекс k нумерует столбцы. Поэтому справедлива следующая цепочка равенств:

$$\sum_{s=1}^{n} a_s^j b^{sk} = (a_1^j, \ldots, a_n^j) \begin{pmatrix} b^{1k} \\ \vdots \\ b^{nk} \end{pmatrix} = \{A\}^j \cdot \{B\}_k = \{A \cdot B\}^{jk}. \qquad (1.37)$$

Пример 12. Следующий пример такой:

$$\sum_{s=1}^{n} a_j^s b^{sk}. \qquad (1.38)$$

Здесь, во множителе a_j^s индекс s нумерует строчки, а индекс j нумерует столбцы; во множителе b^{sk} индекс s нумерует строчки, а индекс k нумерует столбцы. Поэтому справедлива цепочка равенств:

$$\sum_{s=1}^{n} a_j^s b^{sk} = (a_j^1, \ldots, a_j^n) \begin{pmatrix} b^{1k} \\ \vdots \\ b^{nk} \end{pmatrix} =$$
$$= (A_j)^T \cdot B_k = \{A^T\}^j \cdot \{B\}_k = \{A^T \cdot B\}_k^j = \{A^T \cdot B\}^{jk}, \qquad (1.39)$$

где

$$A_j = \begin{pmatrix} a_j^1 \\ \vdots \\ a_j^n \end{pmatrix}, \quad (A_j)^T = (a_j^1, \cdots, a_j^n).$$

Пример 13. Следующий пример такой:

$$a_s^j b^{ks}. \qquad (1.40)$$

Здесь во множителе a_s^j индекс j нумерует строчки, а индекс s нумерует столбцы; во множителе b^{ks} индекс k нумерует строчки, а индекс s нумерует столбцы. Поэтому справедлива цепочка равенств:

$$a_s^j b^{ks} = (a_1^j, \ldots, a_n^j) \begin{pmatrix} b^{k1} \\ \vdots \\ b^{kn} \end{pmatrix} =$$
$$= A^j (B^k)^T = A^j (B^T)^k = \{AB^T\}^{jk}, \qquad (1.41)$$

где символом $\{C\}^{jk}$ мы обозначили операцию извлечения из матрицы C элемента, расположенного на пересечении j–ой строчки и k–го столбца.

Пример 14. Докажите сами, что

$$a_{js} b^{sk} = \{AB\}_j^k, \qquad (1.42)$$

где символом $\{C\}_j^k$ мы обозначили операцию извлечения элемента из матрицы, находящегося на пересечении j–ой строчки и k–го столбца.

Пример 15. Докажите сами, что

$$a_{js}b^{ks} = \{AB^T\}_j^k, \tag{1.43}$$

где символом $\{C\}_j^k$ мы обозначили операцию извлечения элемента из матрицы, находящегося на пересечении j–ой строчки и k–го столбца.

Пример 16. Докажите сами, что

$$a_{sj}b^{sk} = \{A^TB\}_j^k, \tag{1.44}$$

где символом $\{C\}_j^k$ мы обозначили операцию извлечения элемента из матрицы, находящегося на пересечении j–ой строчки и k–го столбца.

Пример 17. Докажите сами, что

$$b^{sk}a_{js} = \{B^TA^T\}_j^k \tag{1.45}$$

где символом $\{C\}_j^k$ мы обозначили операцию извлечения элемента из матрицы, находящегося на пересечении k–ой строчки и j–го столбца.

§ 2. «Мистическое» определение тензора

Пусть $\mathcal{L}$ — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$. Рассмотрим два базиса $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ и $\{\mathbf{e}_{1'}, \dots, \mathbf{e}_{n'}\}$ в этом линейном пространстве, которые связаны линейным преобразованием:

$$\mathbf{e}_{i'} = c_{i'}^i \cdot \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{e}_i = c_i^{i'} \cdot \mathbf{e}_{i'}, \quad c_{i'}^i c_j^{i'} = \delta_j^i, \quad c_i^{i'} c_{j'}^i = \delta_{j'}^{i'}. \tag{2.1}$$

Дадим «мистическое» определение тензора:

Определение 2. *Тензором типа (p, q) (p раз ковариантным и q раз контравариантным) в линейном пространстве $\mathcal{L}$ называется объект, который в каждом базисе $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ линейного пространства $\mathcal{L}$ задается n^{p+q} координатами $A_{j_1 \dots j_p}^{k_1 \dots k_q} \in \mathbb{K}$ (индексы $j_1, \dots, j_p, k_1, \dots, k_q$ независимо принимают значения $1, 2, \dots, n$), причем при переходе к новому базису $\{\mathbf{e}_{1'}, \dots, \mathbf{e}_{n'}\}$ эти координаты преобразуются по формуле*:

$$A_{j_{1'} \dots j_{p'}}^{k_{1'} \dots k_{q'}} = c_{j_{1'}}^{j_1} \cdots c_{j_{p'}}^{j_p} c_{k_1}^{k_{1'}} \cdots c_{k_q}^{k_{q'}} A_{j_1 \dots j_p}^{k_1 \dots k_q}, \tag{2.2}$$

по всем повторяющимся индексам предполагается суммирование. Соответствующий своим координатам $A_{j_1 \dots j_p}^{k_1 \dots k_q}$ тензор будем называть тензором A. Соответствие:

тензор $\leftrightarrow$ координаты при фиксированном базисе

взаимно однозначно.

Замечание 1. Иногда, допуская грубую ошибку, тензором называют его координаты $A_{j_1 \dots j_p}^{k_1 \dots k_q}$.

П р и м е р 18. Пусть A имеет одну и туже координату во всех базисах — это тензор скаляр типа $(0,0)$.

П р и м е р 19. Контравариантный тензор типа $(0,1)$ имеет n координат, преобразующихся по закону:

$$A^{k'} = c_k^{k'} A^k. \tag{2.3}$$

Это набор координат вектора.

П р и м е р 20. Ковариантный тензор типа $(1,0)$ имеет n координат, преобразующихся по закону:

$$A_{k'} = c_{k'}^k A_k. \tag{2.4}$$

Это набор координат линейной формы (ковектора).

П р и м е р 21. *Градиент функции.* Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$, $\{\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}\}$ связаны преобразованием:

$$\mathbf{e}_{k'} = c_{k'}^k \mathbf{e}_k, \quad x^k = c_{k'}^k x^{k'}. \tag{2.5}$$

Градиентом функции f называется «вектор»:

$$\nabla f(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f(x)}{\partial x^k} \mathbf{e}_k.$$

Однако, при переходе к новому базису (2.5) справедлива следующая формула:

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x^{k'}} = \frac{\partial f(x)}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} = \frac{\partial f(x)}{\partial x^k} c_{k'}^k,$$

т.е. преобразуется как тензор ранга $(1,0)$. Следовательно, градиент функции — не вектор, а ковектор.

Л е м м а 1. *Матрица линейного оператора $A \in L(\mathcal{L};\mathcal{L})$ в каждом базисе линейного пространства $\mathcal{L}$ состоит из координат некоторого тензора ранга* $(1,1)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$, $\{\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}\}$ — два базиса линейного пространства $\mathcal{L}$, связанные равенством (2.5). Заметим, что матрица линейного оператора A в базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$, имеет вид:

$$a_k^j = \langle \mathbf{e}^j, A\mathbf{e}_k \rangle, \tag{2.6}$$

где $\{\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^n\}$ — это взаимный базис в сопряженном к $\mathcal{L}$ линейном пространстве $\mathcal{L}^*$ к базису $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ в $\mathcal{L}$. Справедлива следующая цепочка равенств:

$$a_{k'}^{j'} = \langle \mathbf{e}^{j'}, A\mathbf{e}_{k'} \rangle = \left\langle c_j^{j'} \cdot \mathbf{e}^j, A\left(c_{k'}^k \cdot \mathbf{e}_k\right)\right\rangle = \\ = c_j^{j'} c_{k'}^k \langle \mathbf{e}^j, A\mathbf{e}_k \rangle = c_j^{j'} c_{k'}^k a_k^j. \tag{2.7}$$

Л е м м а д о к а з а н а.

Лемма 2. *Матрица билинейной формы на линейном пространстве $\mathcal{L}$ в каждом базисе состоит из координат некоторого тензора ранга* $(2,0)$.

Доказательство. В обозначениях доказательства предыдущей леммы справедлива следующая цепочка равенств:

$$b_{j'k'} = B(\mathbf{e}_{j'}, \mathbf{e}_{k'}) = B\left(c^j_{j'} \cdot \mathbf{e}_j, c^k_{k'} \cdot \mathbf{e}_k\right) = \\ = c^j_{j'} c^k_{k'} B(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k) = c^j_{j'} c^k_{k'} b_{jk}. \quad (2.8)$$

Лемма доказана.

Дадим определение суммы тензоров и умножения тензора на число. Пусть $A^{k_1 \ldots k_q}_{j_1 \ldots j_p}$ и $B^{k_1 \ldots k_q}_{j_1 \ldots j_p}$ — координаты двух тензоров A и B одного типа (p,q), а $\alpha \in \mathbb{K}$ — произвольное число.

Определение 3. *Суммой двух тензоров $A+B$ типа (p,q) называется объект D, который в произвольном базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ линейного пространства $\mathcal{L}$ имеет координаты*:

$$D^{k_1 \ldots k_q}_{j_1 \ldots j_p} := A^{k_1 \ldots k_q}_{j_1 \ldots j_p} + B^{k_1 \ldots k_q}_{j_1 \ldots j_p}. \quad (2.9)$$

Произведением тензора A типа (p,q) на число $\alpha \in \mathbb{K}$ называется объект $F := \alpha A$, который в произвольном базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ линейного пространства $\mathcal{L}$ имеет координаты:

$$F^{k_1 \ldots k_q}_{j_1 \ldots j_p} := \alpha A^{k_1 \ldots k_q}_{j_1 \ldots j_p}. \quad (2.10)$$

Теорема 1. *Сумма двух тензоров типа (p,q) и произведение тензора типа (p,q) на число $\alpha \in \mathbb{K}$ являются тензорами типа (p,q).*

Доказательство. Второе утверждение очевидно. Поэтому докажем только первое утверждение. Действительно, справедлива следующая цепочка равенств:

$$D^{k_{1'} \ldots k_{q'}}_{j_{1'} \ldots j_{p'}} = A^{k_{1'} \ldots k_{q'}}_{j_{1'} \ldots j_{p'}} + B^{k_{1'} \ldots k_{q'}}_{j_{1'} \ldots j_{p'}} = \\ = c^{j_1}_{j_{1'}} \cdots c^{j_p}_{j_{p'}} c^{k_{1'}}_{k_1} \cdots c^{k_{q'}}_{k_q} A^{k_1 \ldots k_q}_{j_1 \ldots j_p} + c^{j_1}_{j_{1'}} \cdots c^{j_p}_{j_{p'}} c^{k_{1'}}_{k_1} \cdots c^{k_{q'}}_{k_q} B^{k_1 \ldots k_q}_{j_1 \ldots j_p} = \\ = c^{j_1}_{j_{1'}} \cdots c^{j_p}_{j_{p'}} c^{k_{1'}}_{k_1} \cdots c^{k_{q'}}_{k_q} \left(A^{k_1 \ldots k_q}_{j_1 \ldots j_p} + B^{k_1 \ldots k_q}_{j_1 \ldots j_p}\right) = \\ = c^{j_1}_{j_{1'}} \cdots c^{j_p}_{j_{p'}} c^{k_{1'}}_{k_1} \cdots c^{k_{q'}}_{k_q} D^{k_1 \ldots k_q}_{j_1 \ldots j_p}.$$

Теорема доказана.

Дадим определение произведения двух тензоров A и B типов (p,q) и (r,s), которые в каждом базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ линейного пространства $\mathcal{L}$ имеют координаты:

$$A^{k_1 \ldots k_q}_{j_1 \ldots j_p} \quad \text{и} \quad B^{i_1 \ldots i_s}_{l_1 \ldots l_r} \quad (2.11)$$

соответственно.

Определение 4. *Произведением тензоров A и B типов (p,q) и (r,s) называется объект D, который в каждом базисе $\{\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n\}$ линейного пространства $\mathcal{L}$ имеет координаты*:

$$D^{k_1\ldots k_q i_1\ldots i_s}_{j_1\ldots j_p l_1\ldots l_r} = A^{k_1\ldots k_q}_{j_1\ldots j_p} B^{i_1\ldots i_s}_{l_1\ldots l_r}. \tag{2.12}$$

Теорема 2. *Произведение двух тензоров A и B типов (p,q) и (r,s) является тензором типа $(p+r, q+s)$.*

Доказательство. В стандартных обозначениях справедлива следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned}
D^{k_{1'}\ldots k_{q'} i_{1'}\ldots i_{s'}}_{j_{1'}\ldots j_{p'} l_{1'}\ldots l_{r'}} &= A^{k_{1'}\ldots k_{q'}}_{j_{1'}\ldots j_{p'}} B^{i_{1'}\ldots i_{s'}}_{l_{1'}\ldots l_{r'}} = \\
&= c^{j_1}_{j_{1'}}\cdots c^{j_p}_{j_{p'}} c^{k_{1'}}_{k_1}\cdots c^{k_{q'}}_{k_q} A^{k_1\ldots k_q}_{j_1\ldots j_p} c^{l_1}_{l_{1'}}\cdots c^{l_r}_{l_{r'}} c^{i_{1'}}_{i_1}\cdots c^{i_{s'}}_{i_s} B^{i_1\ldots i_s}_{l_1\ldots l_r} = \\
&= c^{j_1}_{j_{1'}}\cdots c^{j_p}_{j_{p'}} c^{k_{1'}}_{k_1}\cdots c^{k_{q'}}_{k_q} c^{l_1}_{l_{1'}}\cdots c^{l_r}_{l_{r'}} c^{i_{1'}}_{i_1}\cdots c^{i_{s'}}_{i_s} A^{k_1\ldots k_q}_{j_1\ldots j_p} B^{i_1\ldots i_s}_{l_1\ldots l_r} = \\
&= c^{j_1}_{j_{1'}}\cdots c^{j_p}_{j_{p'}} c^{l_1}_{l_{1'}}\cdots c^{l_r}_{l_{r'}} c^{k_{1'}}_{k_1}\cdots c^{k_{q'}}_{k_q} c^{i_{1'}}_{i_1}\cdots c^{i_{s'}}_{i_s} D^{k_1\ldots k_q i_1\ldots i_s}_{j_1\ldots j_p l_1\ldots l_r}.
\end{aligned}$$

Теорема доказана.

Для произведения тензоров A и B используется обозначение:

$$A\otimes B.$$

Лемма 3. *В общем случае $A\otimes B \neq B\otimes A$ для тензоров A и B.*

Доказательство. Приведем пример. Пусть A и B — тензоры типа $(0,1)$, координаты которых в одном и том же базисе $\{\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n\}$ следующие: A^j и B^k. Рассмотрим тензоры $D = A\otimes B$ и $F = B\otimes A$, координаты которых в том же базисе имеют следующий вид:

$$D^{jk} = A^j B^k \quad \text{и} \quad F^{kj} = B^k A^j.$$

Запишем эти координаты в виде следующих матриц:

$$\|D^{jk}\| = \begin{pmatrix} A^1B^1 & \cdots & A^1B^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A^nB^1 & \cdots & A^nB^n \end{pmatrix},$$

$$\|F^{kj}\| = \begin{pmatrix} B^1A^1 & \cdots & B^1A^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B^nA^1 & \cdots & B^nA^n \end{pmatrix}.$$

Это две взаимно транспонированные матрицы. Следовательно, $D = A\otimes B \neq F = B\otimes A$.

Лемма доказана.

Свертка тензора. Пусть A — тензор типа (p,q), причем $p\geqslant 1$ и $q\geqslant 1$. Пусть в произвольном базисе $\{\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n\}$ он имеет координаты:

$$A^{k_1\ldots k_q}_{j_1\ldots j_p}.$$

Выберем у этих координат один верхний и один нижний индекс. Например, пусть это будут индексы k_1 и j_1 и рассмотрим сумму компонент:

$$\sum_{\alpha=1}^{n} A^{\alpha k_2 \dots k_q}_{\alpha j_2 \dots j_p} = B^{k_2 \dots k_q}_{j_2 \dots j_p}. \tag{2.13}$$

Определение 5. *Объект B, который в любом базисе $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ линейного пространства $\mathcal{L}$ имеет координаты $B^{k_2 \dots k_q}_{j_2 \dots j_p}$, определенные равенством* (2.13), *называется сверткой тензора A по паре индексов.*

Теорема 3. *Свертка тензора типа (p, q) по паре индексов представляет собой тензор типа $(p-1, q-1)$.*

Доказательство. Докажем теорему для случая тензора A типа $(2, 1)$, координаты которого в произвольном базисе обозначим символом A^l_{jk}. Рассмотрим свертку:

$$B_j = A^k_{jk}$$

и получим закон преобразования для координат B_j. Действительно, справедлива следующая цепочка равенств:

$$B_{j'} = A^{k'}_{j'k'} = \delta^{k'}_{l'} A^{l'}_{j'k'} = \delta^{k'}_{l'} c^{l'}_l c^j_{j'} c^k_{k'} A^l_{jk} = \\ = c^j_{j'} c^k_{k'} c^{k'}_l A^l_{jk} = c^j_{j'} \delta^k_l A^l_{jk} = c^j_{j'} A^k_{jk} = c^j_{j'} B_j.$$

Теорема доказана.

Пример 22. Рассмотрим тензор A типа $(1, 1)$. Его сверткой является тензор типа $(0, 0)$, т.е. скаляр, имеющий в любой системе координат $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ одну координату:

$$B = A^1_1 + \dots + A^n_n. \tag{2.14}$$

С целью приобретения навыков в тензорных вычислениях давайте проверим, что тензор B является инвариантом, т.е. скаляром. Действительно, справедлива следующая цепочка равенств:

$$B = A^{j'}_{j'} = \delta^{j'}_{k'} A^{k'}_{j'} = \delta^{j'}_{k'} c^{k'}_k c^j_{j'} A^k_j = c^{k'}_k c^j_{k'} A^k_j = \\ = c^j_{k'} c^{k'}_k A^k_j = \delta^j_k A^k_j = A^j_j. \tag{2.15}$$

Довольно часто объект, который в каждом базисе задается совокупностью координат, при переходе от одного базиса к другому преобразуется другим образом, нежели закон (2.2). Однако, для специального класса преобразований базиса все же справедлив закон (2.2). Поэтому вводится еще один класс тензоров — *ортогональные тензоры*. Дадим определение.

Определение 6. *Ортогональным тензором типа (p, q) (p раз ковариантным и q раз контравариантным) в евклидовом пространстве $\mathcal{E}$ называется объект, который в каждом ортонормированном базисе $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ евклидова пространства $\mathcal{E}$ задается n^{p+q} коор-*

динатами $A^{k_1\dots k_q}_{j_1\dots j_p}\in\mathbb{K}$ (*индексы* $j_1,\dots,j_p,k_1,\dots,k_q$ *независимо принимают значения* $1,2,\dots,n$), *причем при переходе к новому ортонормированному базису* $\{\mathbf{e}_{1'},\dots,\mathbf{e}_{n'}\}$ *эти координаты преобразуются по формуле*:

$$A^{k_{1'}\dots k_{q'}}_{j_{1'}\dots j_{p'}}=c^{j_1}_{j_{1'}}\cdots c^{j_p}_{j_{p'}}c^{k_{1'}}_{k_1}\cdots c^{k_{q'}}_{k_q}A^{k_1\dots k_q}_{j_1\dots j_p}, \tag{2.16}$$

по всем повторяющимся индексам предполагается суммирование.

Для ортогональных тензоров можно, как и для тензоров, ввести операции сложения тензоров, умножения на число, произведения.

Пример 23. Рассмотрим тензор A типа $(2,0)$. Докажем, что число

$$\sum_{j=1}^{n}A_{jj}$$

не является инвариантом. Действительно, справедлива следующая цепочка равенств:

$$\sum_{j'=1}^{n'}A_{j'j'}=\sum_{j'=1}^{n'}\delta^{k'}_{j'}A_{j'k'}=\sum_{j'=1}^{n'}\delta^{k'}_{j'}c^{j}_{j'}c^{k}_{k'}A_{jk}=$$

$$=\sum_{j'=1}^{n'}c^{j}_{j'}c^{k}_{j'}A_{jk}=\{CC^T\}^{jk}A_{jk}.$$

В общем случае

$$\{CC^T\}^{jk}\neq\delta^{jk}\Leftrightarrow CC^T\neq I.$$

Однако, если рассматривать ортогональные преобразования, т.е. матрицы перехода C между ортонормированными базисами в евклидовом пространстве $\mathcal{E}$, то будет выполнено равенство $C^TC=I$. И тогда число A_{jj} будет инвариантом. Поэтому для ортогональных преобразований можно вести операцию свертки по двум нижним индексам, которая является *тензорной*, т.е. результатом свертки ортогональных тензоров тоже является ортогональным тензором. Ниже после рассмотрения метрического тензора мы поймем в чем здесь причина.

§ 3. Второе определение тензора: полилинейная форма

Пусть $\mathcal{L}$ — линейное пространство, а $\mathcal{L}^*$ — соответствующее сопряженное пространство, а символом $\langle\cdot,\cdot\rangle$ обозначены скобки двойственности между $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}^*$. Для удобства элементы линейного пространства $\mathcal{L}$ будем обозначать латинскими буквами $x,y,z,\dots$, а элементы сопряженного пространства $\mathcal{L}^*$ будем обозначать греческими буквами $\xi,\eta,\chi,\dots$. Дадим определение полилинейной формы.

Определение 7. *Числовая функция* $f = f(x, y, z, \ldots; \xi, \eta, \chi, \ldots)$ *от* p *векторных аргументов* $x, y, z, \ldots$ *и* q *ковекторных аргументов* $\xi, \eta, \chi, \ldots$ *называется полилинейной, если эта функция линейна по каждому аргументу из* $p+q$ *аргументов при оставшихся фиксированных* $p+q-1$ *аргументах. Говорят, что полилинейная форма* f *имеет тип* (p, q).

Пример 24. Например, вот такая функция:

$$f(x, y; \xi, \eta) = \langle \xi, x\rangle \langle \eta, y\rangle. \tag{3.1}$$

является полилинейной. Действительно, в силу линейности скобок двойственности по обоим аргументам справедливы равенства:

$$\langle \alpha_1 \cdot \xi^1 + \alpha_2 \cdot \xi^2, x\rangle \langle \eta, y\rangle = \alpha_1 \langle \xi^1, x\rangle \langle \eta, y\rangle + \alpha_2 \langle \xi^2, x\rangle \langle \eta, y\rangle,$$
$$\langle \xi, x\rangle \langle \alpha_1 \cdot \eta^1 + \alpha_2 \cdot \eta^2, y\rangle = \alpha_1 \langle \xi, x\rangle \langle \eta^1, y\rangle + \alpha_2 \langle \xi, x\rangle \langle \eta^2, y\rangle,$$
$$\langle \xi, \beta^1 \cdot x_1 + \beta^2 \cdot x_2\rangle \langle \eta, y\rangle = \beta^1 \langle \xi, x_1\rangle \langle \eta, y\rangle + \beta^2 \langle \xi, x_2\rangle \langle \eta, y\rangle,$$
$$\langle \xi, x\rangle \langle \eta, \beta^1 \cdot y_1 + \beta^2 \cdot y_2\rangle = \beta^1 \langle \xi, x\rangle \langle \eta, y_1\rangle + \beta^2 \langle \xi, x\rangle \langle \eta, y_2\rangle.$$

Теперь заметим, что если, например, зафиксировать ковекторные аргументы $\xi, \eta \in \mathcal{L}^*$, то функция (3.1) будет билинейной функцией от векторных аргументов $x, y \in \mathcal{L}$. Конечно, можно зафиксировать векторный аргумент $x \in \mathcal{L}$ и ковекторный аргумент $\eta \in \mathcal{L}^*$ и мы получим билинейную функцию от аргументов $y \in \mathcal{L}$ и $\xi \in \mathcal{L}^*$.

Лемма 4. *Если* $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ *и* $\{\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}\}$ *— два базиса в линейном пространстве* $\mathcal{L}$, *а* $\{\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^n\}$ *— взаимный базис к* $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ *в сопряженном пространстве ковекторов* $\mathcal{L}^*$, *причем*:

$$\mathbf{e}_{i'} = c^i_{i'} \cdot \mathbf{e}_i. \tag{3.2}$$

Тогда:

$$\mathbf{e}^{i'} = c^{i'}_i \cdot \mathbf{e}^i \tag{3.3}$$

— взаимный базис к $\{\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}\}$.

Доказательство. Действительно, пусть $x \in \mathcal{L}$, тогда имеют место равенства:

$$x = x^i \cdot \mathbf{e}_i = x^{i'} \cdot \mathbf{e}_{i'}, \tag{3.4}$$

$$\langle \mathbf{e}^{i'}, x\rangle = x^{i'} = c^{i'}_i x^i = c^{i'}_i \langle \mathbf{e}^i, x\rangle = \langle c^{i'}_i \cdot \mathbf{e}^i, x\rangle \Rightarrow c^{i'}_i \cdot \mathbf{e}^i = \mathbf{e}^{i'}. \tag{3.5}$$

Лемма доказана.

Справедлива следующая:

Теорема 4. *Если числовая функция*:

$$f = f(x, y, z, \ldots; \xi, \eta, \chi, \ldots)$$

от p *векторных аргументов* $x, y, z, \ldots$ *и* q *ковекторных аргументов* $\xi, \eta, \chi, \ldots$ *является полилинейной, то наборы чисел*:

$$F^{k_1 \ldots k_q}_{j_1 \ldots j_p} := f(\mathbf{e}_{j_1}, \ldots, \mathbf{e}_{j_p}; \mathbf{e}^{k_1}, \ldots, \mathbf{e}^{k_q}), \tag{3.6}$$

$$F^{k_{1'}\dots k_{q'}}_{j_{1'}\dots j_{p'}} := f(\mathbf{e}_{j_{1'}}, \dots, \mathbf{e}_{j_{p'}}; \mathbf{e}^{k_{1'}}, \dots, \mathbf{e}^{k_{q'}}) \tag{3.7}$$

связаны равенствами:

$$F^{k_{1'}\dots k_{q'}}_{j_{1'}\dots j_{p'}} = c^{j_1}_{j_{1'}} \cdots c^{j_p}_{j_{p'}} c^{k_{1'}}_{k_1} \cdots c^{k_{q'}}_{k_q} F^{k_1\dots k_q}_{j_1\dots j_p}, \tag{3.8}$$

где старый базис $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ *и новый базис* $\{\mathbf{e}_{1'}, \dots, \mathbf{e}_{n'}\}$ *в* $\mathcal{L}$ *связаны равенствами*:

$$\mathbf{e}_{i'} = c^i_{i'} \cdot \mathbf{e}_i,$$

а соответствующие взаимные старый и новый базисы: $\{\mathbf{e}^1, \dots, \mathbf{e}^n\}$ *и* $\{\mathbf{e}^{1'}, \dots, \mathbf{e}^{n'}\}$ *в* $\mathcal{L}^*$ *связаны равенствами*:

$$\mathbf{e}^{i'} = c^{i'}_i \cdot \mathbf{e}^i.$$

Доказательство. В обозначениях формулировки теоремы справедлива следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} F^{k_{1'}\dots k_{q'}}_{j_{1'}\dots j_{p'}} &= f(c^{j_1}_{j_{1'}} \cdot \mathbf{e}_{j_1}, \dots, c^{j_p}_{j_{p'}} \cdot \mathbf{e}_{j_p}; c^{k_{1'}}_{k_1} \cdot \mathbf{e}^{k_1}, \dots, c^{k_{q'}}_{k_q} \cdot \mathbf{e}^{k_q}) = \\ &= c^{j_1}_{j_{1'}} \cdots c^{j_p}_{j_{p'}} c^{k_{1'}}_{k_1} \cdots c^{k_{q'}}_{k_q} f(\mathbf{e}_{j_1}, \dots, \mathbf{e}_{j_p}; \mathbf{e}^{k_1}, \dots, \mathbf{e}^{k_q}) = \\ &= c^{j_1}_{j_{1'}} \cdots c^{j_p}_{j_{p'}} c^{k_{1'}}_{k_1} \cdots c^{k_{q'}}_{k_q} F^{k_1\dots k_q}_{j_1\dots j_p}. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Теорема доказана.

Заметим, что при фиксированном базисе $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ в $\mathcal{L}$, который однозначно определяет взаимный базис $\{\mathbf{e}^1, \dots, \mathbf{e}^n\}$ в $\mathcal{L}^*$, для полилинейной формы $f = f(x_1, \dots, x_p, \dots; \xi^1, \dots, \xi^q)$ справедлива следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} f &= f(x_1, \dots, x_p, \dots; \xi^1, \dots, \xi^q) = \\ &= f(x^{j_1}_1 \cdot \mathbf{e}_{j_1}, \dots, x^{j_p}_p \cdot \mathbf{e}_{j_p}; \xi^1_{k_1} \cdot \mathbf{e}^{k_1}, \dots, \xi^q_{k_q} \cdot \mathbf{e}^{k_q}) = \\ &= f(\mathbf{e}_{j_1}, \dots, \mathbf{e}_{j_p}; \mathbf{e}^{k_1}, \dots, \mathbf{e}^{k_q}) x^{j_1}_1 \cdots x^{j_p}_p \xi^1_{k_1} \cdots \xi^q_{k_q}. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Отметим, что согласно определению взаимного базиса справедливы следующие равенства:

$$x^{j_s}_s = \langle \mathbf{e}^{j_s}, x_s \rangle \quad \text{для всех} \quad s = \overline{1, p}, \tag{3.11}$$

$$\xi^l_{k_l} = \langle \widehat{\mathbf{e}}_{k_l}, \xi^l \rangle_* \quad \text{для всех} \quad l = \overline{1, q}, \tag{3.12}$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle_*$ — это скобки двойственности между $\mathcal{L}^*$ и $\mathcal{L}^{**}$, а $\{\widehat{\mathbf{e}}_1, \dots, \widehat{\mathbf{e}}_n\}$ — это взаимный базис в $\mathcal{L}^{**}$ к базису $\{\mathbf{e}^1, \dots, \mathbf{e}^n\}$ в $\mathcal{L}^*$. Как мы установили ранее, справедливо равенство:

$$\langle \widehat{\mathbf{e}}_j, \xi \rangle_* = \langle \xi, \mathbf{e}_j \rangle \quad \text{для всех} \quad \xi \in \mathcal{L}^*, \quad j = \overline{1, n}.$$

Отсюда и из (3.12) получаем равенство:

$$\xi^l_{k_l} = \langle \xi^l, \mathbf{e}_{k_l} \rangle \quad \text{для всех} \quad l = \overline{1, q}. \tag{3.13}$$

С учетом равенств (3.11) и (3.13) продолжим равенства (3.10):

$$f = f(x_1, \ldots, x_p, \ldots; \xi^1, \ldots, \xi^q) = \\ = f(\mathbf{e}_{j_1}, \ldots, \mathbf{e}_{j_p}; \mathbf{e}^{k_1}, \ldots, \mathbf{e}^{k_q}) \times \\ \times \langle \mathbf{e}^{j_1}, x_1 \rangle \cdots \langle \mathbf{e}^{j_p}, x_p \rangle \langle \xi^1, \mathbf{e}_{k_1} \rangle \cdots \langle \xi^q, \mathbf{e}_{k_q} \rangle. \quad (3.14)$$

Для дальнейшего нам нужно ввести операцию тензорного произведения векторов и ковекторов. Действительно, определим следующее отображение:

$$\mathbf{e}^{j_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}^{j_p} \otimes \mathbf{e}_{k_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}_{k_q} : (x_1, \ldots, x_p, \xi^1, \ldots, \xi^q) \to \\ \to \langle \mathbf{e}^{j_1}, x_1 \rangle \cdots \langle \mathbf{e}^{j_p}, x_p \rangle \langle \xi^1, \mathbf{e}_{k_1} \rangle \cdots \langle \xi^q, \mathbf{e}_{k_q} \rangle. \quad (3.15)$$

С учетом этого обозначения мы можем записать полилинейную форму $f = f(x_1, \ldots, x_p, \ldots; \xi^1, \ldots, \xi^q)$ как отображение следующим образом:

$$f = F^{k_1 \ldots k_q}_{j_1 \ldots j_p} \mathbf{e}^{j_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}^{j_p} \otimes \mathbf{e}_{k_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}_{k_q} : (x_1, \ldots, x_p, \xi^1, \ldots, \xi^q) \to \\ \to F^{k_1 \ldots k_q}_{j_1 \ldots j_p} x^{j_1}_1 \cdots x^{j_p}_p \xi^1_{k_1} \cdots \xi^q_{k_q}. \quad (3.16)$$

Справедливы следующие утверждения:

Теорема 5. *Отображение* (3.15) *линейно по каждому из тензорных сомножителей.*

Доказательство. Доказательство основано на линейности скобок двойственности $\langle \cdot, \cdot \rangle$ по обеим аргументам.

Теорема доказана.

Теорема 6. *Всякую полилинейную форму однозначно можно записать в виде*:

$$f = F^{k_1 \ldots k_q}_{j_1 \ldots j_p} \mathbf{e}^{j_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}^{j_p} \otimes \mathbf{e}_{k_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}_{k_q} \quad (3.17)$$

и отображение (3.17) *является полилинейной формой.*

Доказательство. Прямое утверждение фактически нами доказано. А обратное утверждение вытекает из (3.16) с учетом (3.11) и (3.13), а также линейности скобок двойственности $\langle \cdot, \cdot \rangle$ по обоим аргументам.

Теорема доказана.

Для полилинейных форм, у которых одинаковые количества векторных аргументов и ковекторных аргументов, можно ввести сумму полилинейных форм. Также можно ввести произведение полилинейной формы на число. Эти операции делают из полилинейных форм типа (p, q) линейное пространство, которое мы обозначим символом T^q_p.

Теорема 7. *Набор из n^{p+q} всевозможных отображений*:

$$\left\{ \mathbf{e}^{j_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}^{j_p} \otimes \mathbf{e}_{k_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}_{k_q} \right\}, \quad (3.18)$$

где индексы $j_1, \ldots, j_p, k_1, \ldots, k_q$ *независимо побегают множество первых* n *натуральных чисел, образуют базис линейного пространства* T_p^q *полилинейных форм типа* (p, q).

Доказательство. Полнота вытекает из теоремы 6. Докажем линейную независимость. Рассмотрим линейную комбинацию:

$$\alpha^{k_1 \ldots k_q}_{j_1 \ldots j_p} \mathbf{e}^{j_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}^{j_p} \otimes \mathbf{e}_{k_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}_{k_q} \tag{3.19}$$

и приравняем ее нулевой полилинейной форме. Тогда получим следующее равенство:

$$\alpha^{k_1 \ldots k_q}_{j_1 \ldots j_p} \mathbf{e}^{j_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}^{j_p} \otimes \mathbf{e}_{k_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}_{k_q} = \vartheta \in T_p^q. \tag{3.20}$$

Применим обе части равенства (3.20) к следующему упорядоченному набору векторов и ковекторов $(\mathbf{e}_{l_1}, \ldots, \mathbf{e}_{l_p}; \mathbf{e}^{s_1}, \ldots, \mathbf{e}^{s_q})$. Тогда получим равенство:

$$\alpha^{k_1 \ldots k_q}_{j_1 \ldots j_p} \delta^{j_1}_{l_1} \cdots \delta^{j_p}_{l_p} \delta^{s_1}_{k_1} \cdots \delta^{s_q}_{k_q} = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \alpha^{s_1 \ldots s_q}_{l_1 \ldots l_p} = 0 \quad \text{для всех индексов} \quad l_1, \ldots, l_p, s_1, \ldots, s_q \in \overline{1, n}.$$

Линейная независимость доказана.

Теорема доказана.

Теперь мы в состоянии дать второе определение тензора.

Определение 8. *Тензором типа* (p, q) *называется полилинейная форма типа* (p, q). *Координатами тензора в заданном базисе* $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ *линейного пространства* $\mathcal{L}$ *называются коэффициенты разложения полилинейной формы по базису* (3.18) *линейного пространства* T_p^q.

Теорема 8. *Определения тензора* 8 *эквивалентно определению тензора* 2.

Доказательство. *Шаг 1.* Доказательство того, что из определения 8 вытекает утверждение из определения 2 основано на результатах теорем 4 и (6).

Шаг 2. Доказательство в обратную сторону основано на том что по коэффициентам:

$$A^{k_1 \ldots k_q}_{j_1 \ldots j_p}$$

можно составить следующую полилинейную форму:

$$A = A^{k_1 \ldots k_q}_{j_1 \ldots j_p} \mathbf{e}^{j_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}^{j_p} \otimes \mathbf{e}_{k_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}_{k_q}. \tag{3.21}$$

И нам осталось доказать инвариантность объекта A, т.е. независимость его от выбора базиса $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ линейного пространства $\mathcal{L}$. Действительно, пусть $\{\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}\}$ — другой базис линейного пространства $\mathcal{L}$, причем:

$$\mathbf{e}_{i'} = c^i_{i'} \cdot \mathbf{e}_i.$$

Справедлива следующая цепочка равенств:

$$
\begin{aligned}
A' = A^{k_{1'}\dots k_{q'}}_{j_{1'}\dots j_{p'}} \mathbf{e}^{j_{1'}} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}^{j_{p'}} \otimes \mathbf{e}_{k_{1'}} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{k_{q'}} = \\
= c^{j_1}_{j_{1'}} \cdots c^{j_p}_{j_{p'}} c^{k_{1'}}_{k_1} \cdots c^{k_{q'}}_{k_q} A^{k_1\dots k_q}_{j_1\dots j_p} \times \\
\times c^{j_{1'}}_{l_1} \cdots c^{j_{p'}}_{l_p} c^{s_1}_{k_{1'}} \cdots c^{s_q}_{k_{q'}} \mathbf{e}^{l_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}^{l_p} \otimes \mathbf{e}_{s_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{s_q} = \\
= \delta^{j_1}_{l_1} \cdots \delta^{j_p}_{l_p} \delta^{s_1}_{k_1} \cdots \delta^{s_q}_{k_q} A^{k_1\dots k_q}_{j_1\dots j_p} \mathbf{e}^{l_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}^{l_p} \otimes \mathbf{e}_{s_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{s_q} = \\
= A^{k_1\dots k_q}_{j_1\dots j_p} \mathbf{e}^{j_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}^{j_p} \otimes \mathbf{e}_{k_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{k_q} = A. \qquad (3.22)
\end{aligned}
$$

Теорема доказана.

Сумма тензоров и произведение тензора на число. Поскольку T^q_p — линейное пространство тензоров типа (p,q) с базисом (3.18), то при фиксированном базисе $\{\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n\}$ линейной комбинации тензоров одного типа однозначно соответствует линейная комбинация координат тензора.

Произведение тензоров. Если у нас имеются два тензора=полилинейные формы:

$$
f = f(x_1,\dots,x_{p_1};\xi^1,\dots,\xi^{q_1}),
$$
$$
g = g(y_1,\dots,y_{p_2};\eta^1,\dots,\eta^{q_2})
$$

типов (p_1,q_1) и (p_2,q_2) от различных аргументов, то мы можем формально рассмотреть их произведение:

$$
\begin{aligned}
h = h(x_1,\dots,x_{p_1},y_1,\dots,y_{p_2};\xi^1,\dots,\xi^{q_1},\eta^1,\dots,\eta^{q_2}) = \\
= f(x_1,\dots,x_{p_1};\xi^1,\dots,\xi^{q_1}) g(y_1,\dots,y_{p_2};\eta^1,\dots,\eta^{q_2}), \qquad (3.23)
\end{aligned}
$$

Поскольку аргументы у скалярной функции h различны, то функция будет полилинейной формой, т.е. тензором типа (p_1+p_2, q_1+q_2), координаты которого будут равны произведению соответствующих координат, записанных в той последовательности, что и произведение тензоров f и g.

Свертка тензоров. Рассмотрим тензор:

$$
f = f(x_1,\dots,x_p;\xi^1,\dots,\xi^q).
$$

Пусть $\{\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n\}$ — базис в $\mathcal{L}$, а $\{\mathbf{e}^1,\dots,\mathbf{e}^n\}$ — взаимный базис в $\mathcal{L}^*$. Рассмотрим, например, свертку тензора f по первому векторному и первому ковекторному аргументам:

$$
f(\mathbf{e}_j,\dots,x_p;\mathbf{e}^j,\dots,\xi^q).
$$

Докажем, что эта величина не зависит от выбора базиса и, значит, является полилинейной функцией=тензор типа $(p-1,q-1)$. Действительно, справедлива следующая цепочка равенств:

$$
\begin{aligned}
A' = f(\mathbf{e}_{j'},\dots,x_p;\mathbf{e}^{j'},\dots,\xi^q) = f(c^j_{j'}\cdot\mathbf{e}_j,\dots,x_p;c^{j'}_i\cdot\mathbf{e}^i,\dots,\xi^q) = \\
= c^j_{j'}c^{j'}_i f(\mathbf{e}_j,\dots,x_p;\mathbf{e}^i,\dots,\xi^q) = \delta^j_i f(\mathbf{e}_j,\dots,x_p;\mathbf{e}^i,\dots,\xi^q) =
\end{aligned}
$$

$$= f(\mathbf{e}_j, \ldots, x_p; \mathbf{e}^j, \ldots, \xi^q) = A$$

Пример 25. *Вектор как тензор типа* $(0,1)$. Почему вектор — тензор? Пусть $x \in \mathcal{L}$ — фиксированный вектор. Тогда мы можем теперь записать равенство:

$$x = x^j \cdot \mathbf{e}_j = \langle \mathbf{e}^j, x \rangle \cdot \mathbf{e}_j.$$

Итак, вектор x — это тензор типа $(0,1)$, а его координаты x^j и есть те самые координаты тензора–вектора, которые преобразуются контравариантным образом:

$$x^{j'} = c_j^{j'} x^j.$$

Пример 26. *Ковектор как тензор типа* $(1,0)$. Пусть $\xi \in \mathcal{L}^*$ — фиксированный ковектор. Тогда справедливо равенство:

$$\xi = \xi_j \cdot \mathbf{e}^j = \langle \xi, \mathbf{e}_j \rangle \cdot \mathbf{e}^j.$$

Отсюда вытекает, что ковектор — это тензор ранга $(1,0)$, а его координаты как тензора — это координаты $\{\xi_j\}$ его разложения по взаимному базису $\{\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^n\}$ в $\mathcal{L}^*$ к базису $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ в $\mathcal{L}$, которые преобразуются ковариантным образом:

$$\xi_{i'} = c_{i'}^i \xi_i.$$

Пример 27. *Оператор* $A \in L(\mathcal{L}; \mathcal{L})$ *как тензор типа* $(1,1)$. Пусть $\{\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^n\}$ в $\mathcal{L}^*$ взаимный к базису $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ в $\mathcal{L}$. Тогда справедливы следующие равенства:

$$x = x^j \cdot \mathbf{e}_j, \quad Ax = x^j \cdot A(\mathbf{e}_j) = x^j a_j^k \cdot \mathbf{e}_k = a_j^k \langle \mathbf{e}^j, x \rangle \cdot \mathbf{e}_k,$$

Причем матрица $\|a_j^k\|$ оператора A преобразуется согласно закону:

$$a_{j'}^{k'} = c_k^{k'} c_{j'}^j a_j^k.$$

§ 4. Метрический тензор

Пусть $\mathcal{L}$ — n–мерное вещественное пространство с заданной симметричной билинейной формой $G(x,y)$, причем соответствующая квадратичная форма $G(x,x)$ является положительно определенной формой. Тогда $\mathcal{L}$ становится евклидовым пространством, а билинейная форма $G(x,y)$ называется *метрическим тензором*. В частности, $G(x,y)$ является тензором ранга $(2,0)$. Для скалярного произведения $(x,y) = G(x,y)$ в базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ линейного пространства $\mathcal{L}$ справедливо равенство:

$$(x,y) = g_{ik} x^i y^k, \quad g_{ik} = G(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k). \tag{4.1}$$

□ Действительно, справедлива цепочка равенств:

$$(x,y) = G(x,y) = G(x^i \mathbf{e}_i, y^k \mathbf{e}_k) = x^i y^k G(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k) = g_{ik} x^i y^k. \quad \boxtimes$$

Матрицу метрического тензора в базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ обозначим:

$$G = \|g_{ik}\|.$$

В силу положительной определенности квадратичной формы $G(x, x)$ матрица этой квадратичной формы является обратимой ($\det G > 0$). Поэтому определена обратная матрица G^{-1}, элементы которой по соглашению обозначаются следующим образом:

$$G^{-1} = \left\|g^{ik}\right\|.$$

Согласно нашему правилу умножения «строчка на столбец» приходим к следующим равенствам:

$$\left\{G^{-1} \cdot G\right\}_j^i = g^{ik} g_{kj} = \delta_j^i, \quad \left\{G \cdot G^{-1}\right\}_j^i = g_{jk} g^{ki} = \delta_j^i.$$

Теорема 9. *Набор n^2 чисел g^{ik} определяет тензор ранга* $(0, 2)$.

Доказательство. *Шаг 0.* Нам нужно доказать, что при переходе от старого базиса $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ к новому базису $\{\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}\}$, задаваемому равенствами:

$$\mathbf{e}_{i'} = c_{i'}^i \cdot \mathbf{e}_i \tag{4.2}$$

справедливо равенство:

$$g^{i'k'} = c_i^{i'} c_k^{k'} g^{ik}, \tag{4.3}$$

где $g^{i'k'}$ — это элементы матрицы, обратной к матрице $\|g_{i'k'}\|$ метрического тензора, записанного в новом базисе $\{\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}\}$. Понятно, что равенство (4.3) нужно доказать как следствие уже доказанного равенства:

$$g_{i'k'} = c_{i'}^i c_{k'}^k g_{ik}. \tag{4.4}$$

Шаг 1. Пусть $\mathcal{L}^*$ — сопряженное пространство к линейному пространству $\mathcal{L}$ и $\{\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^n\}$ — это базис в $\mathcal{L}^*$ взаимный к базису $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ в $\mathcal{L}$, т.е., в частности,

$$\langle \mathbf{e}^j, \mathbf{e}_k \rangle = \delta_k^j.$$

Построим линейное преобразование:

$$g : \mathcal{L} \to \mathcal{L}^*, \quad u = g(x),$$

которое каждому $x = x^k \cdot \mathbf{e}_k \in \mathcal{L}$ ставит в соответствие $u = u_i \cdot \mathbf{e}^i \in \mathcal{L}^*$ по формуле:

$$u_i = g_{ik} x^k. \tag{4.5}$$

Докажем, что это отображение инвариантно, т.е. не зависит от выбора базиса. Действительно, справедливы следующие равенства:

$$u_i = c_i^{i'} u_{i'}, \quad g_{ik} = c_i^{j'} c_k^{l'} g_{j'l'}, \quad x^k = c_{k'}^k x^{k'}. \tag{4.6}$$

Подставим равенства (4.6) в выражение (4.5) и получим равенство:

$$c_i^{i'} u_{i'} = c_i^{j'} c_k^{l'} c_{k'}^k g_{j'l'} x^{k'} \Leftrightarrow u_{i'} = c_{i'}^i c_i^{j'} c_k^{l'} c_{k'}^k g_{j'l'} x^{k'}. \tag{4.7}$$

Заметим, что
$$c^i_{i'} c^{j'}_i = c^{j'}_i c^i_{i'} = \delta^{j'}_{i'}, \quad c^{l'}_k c^k_{k'} = \delta^{l'}_{k'}. \tag{4.8}$$
Из (4.7) с учетом (4.8) получаем искомое равенство:
$$u_{i'} = g_{i'k'} x^{k'},$$
которое и доказывает не зависимость от базиса отображения g.

Шаг 2. Рассмотрим теперь линейную систему уравнений (4.5), которую с учетом нашего правила умножения «строчка на столбец» можно записать в следующей матричной форме:
$$G \cdot X = U, \quad X = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}, \quad U = (u_1, \ldots, u_n)^T, \tag{4.9}$$
из которой поскольку $\det G \neq 0$ вытекает матричное равенство:
$$X = G^{-1} U \quad \text{или} \quad x^i = g^{ik} u_k. \tag{4.10}$$
Очевидно, что в новом базисе $\{\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}\}$ будет выполнено аналогичное равенство:
$$x^{i'} = g^{i'k'} u_{k'}. \tag{4.11}$$
Осталось доказать, что числа $g^{i'k'}$ и g^{ik} связаны соотношением (4.3). Действительно, справедливы следующие равенства:
$$x^i = c^i_{i'} x^{i'}, \quad u_k = c^{k'}_k u_{k'}. \tag{4.12}$$
Из (4.10) с учетом (4.12) вытекает равенство:
$$c^i_{i'} x^{i'} = g^{ik} c^{k'}_k u_{k'}. \tag{4.13}$$
Теперь из (4.11) и (4.13) получаем равенство:
$$c^i_{i'} g^{i'k'} u_{k'} = g^{ik} c^{k'}_k u_{k'} \quad \text{для всех} \quad u' = (u_{1'}, \ldots, u_{n'}) \in \mathbb{R}_n. \tag{4.14}$$
Поэтому из (4.14) приходим к равенству:
$$c^i_{i'} g^{i'k'} = g^{ik} c^{k'}_k \quad \text{или} \quad g^{i'k'} = c^{i'}_i c^{k'}_k g^{ik}.$$

Теорема доказана.

Определение 9. *Тензор, определяемый числами g_{ik} называется ковариантным метрическим тензором, а тензор, определяемый числами g^{ik} называется контравариантным метрическим тензором, соответственно.*

Определение 10. *Базисы $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ и $\{\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^n\}$ в одном и том же евклидовом пространстве $\mathcal{E}$ называются взаимными, если:*
$$(\mathbf{e}^j, \mathbf{e}_k) = \delta^j_k.$$

Лемма 5. *Взаимный базис в смысле определения* 10 *единствен.*

Доказательство. Пусть к базису $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ в евклидовом пространстве имеются два взаимных базиса $\{\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^n\}$ и $\{\mathbf{f}^1, \ldots, \mathbf{f}^n\}$. Тогда справедливы следующие равенства:

$$(\mathbf{e}^j, \mathbf{e}_k) = \delta^j_k = (\mathbf{f}^j, \mathbf{e}_k) \Rightarrow (\mathbf{e}^j - \mathbf{f}^j, \mathbf{e}_k) = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow x^k(\mathbf{e}^j - \mathbf{f}^j, \mathbf{e}_k) = 0 \Rightarrow (\mathbf{e}^j - \mathbf{f}^j, x) = 0 \quad \text{для всех} \quad x \in \mathcal{E}.$$

Поэтому $\mathbf{e}^j = \mathbf{f}^j$ для всех $j = \overline{1, n}$.

Лемма доказана.

Замечание 2. Не путайте взаимный базис в $\mathcal{L}^*$ к базису из $\mathcal{L}$ со взаимным базисом в одном и том же пространстве. Напомним, что мы уже знакомы со взаимным базисом из курса «Аналитическая геометрия». Однако, в случае евклидова пространства $\mathcal{E}$, взаимный базис в $\mathcal{E}^*$ можно отождествить с взаимным базисом в $\mathcal{E}$.

Действительно, справедлива следующая лемма:

Лемма 6. *Если* $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — *базис в евклидовом пространстве* $\mathcal{E}$, $\{\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^n\}$ *взаимный базис в том же евклидовом пространстве* $\mathcal{E}$ *в смысл определения* 10, *а* $\{\widehat{\mathbf{e}}^1, \ldots, \widehat{\mathbf{e}}^n\}$ — *взаимный базис в* $\mathcal{E}^*$. *Тогда справедливо следующее равенство*:

$$\langle \widehat{\mathbf{e}}^j, x \rangle = (\mathbf{e}^j, x) \quad \textit{для всех} \quad x \in \mathcal{E}, \quad j = \overline{1, n}. \tag{4.15}$$

Иначе говоря,

$$\widehat{\mathbf{e}}^j = \mathbf{e}^j \quad \textit{для всех} \quad j = \overline{1, n} \tag{4.16}$$

в смысле ранее доказанной теоремы Рисса–Фреше.

Доказательство. Согласно определению взаимного базиса $\{\widehat{\mathbf{e}}^1, \ldots, \widehat{\mathbf{e}}^n\}$ в $\mathcal{E}^*$ к базису $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ в $\mathcal{E}$ справедливо равенство:

$$\langle \widehat{\mathbf{e}}^j, x \rangle = x^j \quad \text{для всех} \quad x \in \mathcal{E}, \tag{4.17}$$

а в силу определения 10 справедлива следующая цепочка равенств:

$$(\mathbf{e}^j, x) = (\mathbf{e}^j, x^k \cdot \mathbf{e}_k) = x^k(\mathbf{e}^j, \mathbf{e}_k) = x^k \delta^j_k = x^j \tag{4.18}$$

для всех $x \in \mathcal{E}$. Из сравнения равенств (4.17) и (4.18) вытекает равенство (4.15).

Лемма доказана.

Теорема 10. *Для произвольного базиса* $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ *в евклидовом пространстве* $\mathcal{E}$ *взаимный базис* $\{\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^n\}$ *в* $\mathcal{E}$ *существует и единствен.*

Доказательство. *Шаг 1. Существование.* Пусть задан базис $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ в евклидовом пространстве $\mathcal{E}$. Тогда взаимный базис будем искать в виде разложения по этому базису:

$$\mathbf{e}^k = A^{k\alpha} \cdot \mathbf{e}_\alpha, \quad A^{k\alpha} \in \mathbb{R}. \tag{4.19}$$

Заметим, что для взаимного базиса должно быть выполнено следующее равенство:

$$(\mathbf{e}^k, \mathbf{e}_i) = \delta_i^k, \tag{4.20}$$

и, кроме того,

$$(\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_i) = g_{\alpha i}. \tag{4.21}$$

Тогда умножая скалярно обе части равенства (4.19) на вектор $\mathbf{e}_i$, с учетом (4.20), (4.21) получим равенство:

$$\delta_i^k = A^{k\alpha} g_{\alpha i} \quad \text{или} \quad A \cdot G = I \Leftrightarrow A = G^{-1}. \tag{4.22}$$

Итак, из (4.19) получаем равенства:

$$\mathbf{e}^k = g^{k\alpha} \cdot \mathbf{e}_\alpha. \tag{4.23}$$

Шаг 2. Линейная независимость. Докажем, что семейство элементов $\{\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^n\}$, определенное равенствами (4.23), является линейно независимым, т.е. является базисом в $\mathcal{E}$. Действительно, пусть $\widehat{\mathbf{E}} = (\mathbf{e}^1, \ldots \mathbf{e}^n)$ и $\mathbf{E} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$. Тогда равенство (4.23) можно переписать в матричной форме:

$$\widehat{\mathbf{E}} = \mathbf{E} \cdot G^{-1}, \quad G^{-1} = \|g^{k\alpha}\|. \tag{4.24}$$

Предположим, что элементы $\{\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^n\}$ линейно зависимы. Тогда найдется ненулевой столбец $X_0 \in \mathbb{R}^n$ такой, что

$$\widehat{\mathbf{E}} \cdot X_0 = \vartheta. \tag{4.25}$$

Умножим обе части равенства (4.24) слева на этот столбец X_0 и с учетом (4.25) получим равенство:

$$\mathbf{E} \cdot G^{-1} \cdot X_0 = \vartheta \Leftrightarrow \mathbf{E} \cdot X_1 = \vartheta, \quad X_1 = G^{-1} \cdot X_0 \in \mathbb{R}^n. \tag{4.26}$$

Поскольку набор $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ линейно независимым, то $X_1 = O$. Следовательно,

$$G^{-1} \cdot X_0 = O \Leftrightarrow G \cdot (G^{-1} \cdot X_0) = G \cdot O = O \Leftrightarrow X_0 = O. \tag{4.27}$$

Пришли к противоречию. Значит, семейство векторов $\{\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^n\}$ линейно независимо.

Шаг 3. Взаимный базис. Осталось доказать, что семейство элементов $\{\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^n\}$, определенное равенствами (4.23), является взаимным базисом к базису $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$. Действительно, справедлива следующая цепочка равенств:

$$(\mathbf{e}^k, \mathbf{e}_i) = (g^{k\alpha} \cdot \mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_i) = g^{k\alpha} g_{\alpha i} = \delta_i^k.$$

Осталось воспользоваться результатом леммы 5.

Теорема доказана.

Из формулы (4.23) вытекают полезные формулы. Действительно, справедливы следующие соотношения:

$$g_{jk} \cdot \mathbf{e}^k = g_{jk} g^{k\alpha} \cdot \mathbf{e}_\alpha = \delta_j^\alpha \cdot \mathbf{e}_\alpha = \mathbf{e}_j \Rightarrow \mathbf{e}_j = g_{jk} \cdot \mathbf{e}^k, \tag{4.28}$$

$$(\mathbf{e}^k, \mathbf{e}^i) = \left(g^{k\alpha} \cdot \mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}^i\right) = g^{k\alpha}(\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}^i) = \\ = g^{k\alpha}\delta^i_\alpha = g^{ki} \Rightarrow (\mathbf{e}^k, \mathbf{e}^i) = g^{ki}. \quad (4.29)$$

Разложим элементы $x, y \in \mathcal{E}$ по взаимному базису $\{\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^n\}$ к базису $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$:

$$x = x_i \cdot \mathbf{e}^i, \quad y = y_j \cdot \mathbf{e}^j \Rightarrow (x, y) = (x_i \cdot \mathbf{e}^i, y_j \cdot \mathbf{e}^j) = \\ = x_i y_j (\mathbf{e}^i, \mathbf{e}^j) = g^{ij} x_i y_j. \quad (4.30)$$

Итак, в координатах скалярное произведение евклидова пространства может быть записано двойственным образом:

$$(x, y) = g_{ij} x^i y^j \quad \text{и} \quad (x, y) = g^{ij} x_i y_j.$$

Определение 11. *Координаты x^j элемента $x \in \mathcal{E}$ в базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ называются контравариантными, а координаты x_i того же элемента в взаимном базисе $\{\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^n\}$ называются ковариантными.*

Координатная запись скалярного произведения. Пусть $x, u \in \mathcal{E}$ и $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ базис в $\mathcal{E}$, а $\{\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^n\}$ — взаимный базис в $\mathcal{E}$. Тогда справедливы следующие цепочки соотношений:

$$x = x^j \cdot \mathbf{e}_j, \quad u = u_i \cdot \mathbf{e}^i \Rightarrow (u, x) = (u_i \cdot \mathbf{e}^i, x^j \cdot \mathbf{e}_j) = \\ = u_i x^j (\mathbf{e}^i, \mathbf{e}_j) = u_i x^j \delta^i_j = u_i x^i.$$

Таким образом,

$$(u, x) = u_i x^i.$$

Лемма 7. *Элементы взаимного базиса $\{\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^n\}$ к базису $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ преобразуются контравариантным образом*:

$$\mathbf{e}^{k'} = c^{k'}_k \cdot \mathbf{e}^k, \quad (4.31)$$

если

$$\mathbf{e}_{k'} = c^k_{k'} \cdot \mathbf{e}_k.$$

Доказательство. В стандартных обозначениях справедливы следующие равенства:

$$\mathbf{e}^{k'} = g^{k'\alpha'} \cdot \mathbf{e}_{\alpha'} = g^{k'\alpha'} c^\alpha_{\alpha'} \cdot \mathbf{e}_\alpha = \\ = g^{k'\alpha'} c^\alpha_{\alpha'} g_{\alpha\beta} \cdot \mathbf{e}^\beta = g^{j_1 j_2} c^{k'}_{j_1} c^{\alpha'}_{j_2} c^\alpha_{\alpha'} g_{\alpha\beta} \cdot \mathbf{e}^\beta = g^{j_1\alpha} c^{k'}_{j_1} g_{\alpha\beta} \cdot \mathbf{e}^\beta = \\ = \delta^{j_1}_\beta c^{k'}_{j_1} \cdot \mathbf{e}^\beta = c^{k'}_\beta \cdot \mathbf{e}^\beta, \quad (4.32)$$

поскольку:

$$c^{\alpha'}_{j_2} c^\alpha_{\alpha'} = c^\alpha_{\alpha'} c^{\alpha'}_{j_2} = \delta^\alpha_{j_2}, \quad g^{j_1\alpha} g_{\alpha\beta} = \delta^{j_1}_\beta. \quad (4.33)$$

Лемма доказана.

Лемма 8. *Контравариантные и ковариантные координаты одного и того же элемента x евклидова пространства $\mathcal{E}$ связаны следующими двойственными формулами*:

$$x_j = g_{jk}x^k \quad \text{и} \quad x^j = x_k g^{kj}. \tag{4.34}$$

Доказательство. Справедливы следующие равенства:

$$x = x_i \cdot \mathbf{e}^i = x^k \cdot \mathbf{e}_k. \tag{4.35}$$

Умножим равенства (4.35) скалярно на $\mathbf{e}_j$ и получим равенство:

$$x_i(\mathbf{e}^i, \mathbf{e}_j) = x^k(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_j), \tag{4.36}$$

из которого вытекает равенство:

$$x_j = g_{jk}x^k. \tag{4.37}$$

Теперь умножим равенство (4.35) скалярно на $\mathbf{e}^j$ и получим равенство:

$$x_i(\mathbf{e}^i, \mathbf{e}^j) = x^k(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}^j), \tag{4.38}$$

из которого получаем равенство:

$$x^j = x_i g^{ij}.$$

Лемма доказана.

Определение 12. *Числа g^{jk} называются контравариантными координатами метрического тензора, а числа g_{jk} называются ковариантными координатами метрического тензора.*

Заметим, что при помощи метрического тензора с контравариантными и ковариантными координатами можно поднимать или опускать индексы у координат тензора. Например, рассмотрим следующий тензор ранга $(0, 2)$:

$$a = a^{ik}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k. \tag{4.39}$$

Справедлива следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} a = a^{ik}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k = a^{ik}\mathbf{e}_i \otimes (g_{k\alpha}\mathbf{e}^\alpha) = a^{ik}g_{k\alpha}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^\alpha = \\ = a^{i\beta}g_{\beta k}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^k = a^i_k\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^k, \quad a^i_k = a^{i\beta}g_{\beta k}. \end{aligned} \tag{4.40}$$

В результате мы получили другую запись того же самого тензора, но теперь ранга $(1, 1)$. Поэтому, используя жаргон, говорят, что при помощи метрического тензора (в евклидовом пространстве!!!) можно поднимать и опускать индексы.

§ 5. Вычисления в тензорных обозначениях. Объекты с нижними индексами

Символ Кронекера. Символ Кронекера δ^j_k в каждом базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ линейного пространства $\mathcal{L}$ определяется таким образом:

$$\delta^j_k = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad j = k; \\ 0, & \text{если} \quad j \neq k. \end{cases} \tag{5.1}$$

Справедливо следующее утверждение:
Лемма 9. *Числа δ^j_k являются координатами тензора ранга $(1,1)$. Числа δ_{jk} и δ^{jk}, формально совпадающие с определением* (5.1), *являются координатами ортогональных тензоров рангов $(2,0)$ и $(0,2)$ соответственно. Однако, числа δ_{jk} и δ^{jk} не являются координатами тензоров.*

Доказательство. С одной стороны, справедлива следующая цепочка равенств:

$$\delta^j_k c^{j'}_j c^k_{k'} = c^{j'}_k c^k_{k'} = \delta^{j'}_{k'}.$$

С другой стороны, имеем:

$$\delta_{jk} c^j_{j'} c^k_{k'} = c^k_{j'} c^k_{k'} = \{C^T \cdot C\}_{j'k'}, \tag{5.2}$$

$$\delta^{jk} c^{j'}_j c^{k'}_k = c^{j'}_k c^{k'}_k = \{C^{-1} \cdot (C^{-1})^T\}^{j'k'}. \tag{5.3}$$

Совершенно понятно, что в случае ортогональных преобразований:

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} \cdot C, \quad \mathbf{E} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n), \quad \mathbf{E}' = (\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'})$$

матрица C такова, что, $C^T = C^{-1}$ и поэтому:

$$C^T \cdot C = I \quad \text{и} \quad C^{-1} \cdot (C^{-1})^T = C^{-1} \cdot C^{TT} = C^{-1} \cdot C = I. \tag{5.4}$$

Из (5.2)–(5.4) вытекают равенства:

$$\delta_{jk} c^j_{j'} c^k_{k'} = \delta_{j'k'} \quad \text{и} \quad \delta^{jk} c^{j'}_j c^{k'}_k = \delta^{j'k'}. \tag{5.5}$$

Осталось доказать, что числа δ_{jk} и δ^{jk} не являются координатами тензоров. Рассмотрим например, числа δ_{jk}. Рассмотрим два базиса:

$$\mathbf{e}_{1'} = 2 \cdot \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}_{2'} = \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_{n'} = \mathbf{e}_n,$$

$$(\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Поэтому:

$$C^T \cdot C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \neq I. \tag{5.6}$$

Таким образом, из (5.2) и (5.6) вытекает, в частности, равенство:

$$\delta_{jk} c^j_{1'} c^k_{1'} = 4 \neq \delta_{1'1'} = 1.$$

Отсюда получаем, что числа δ_{jk} не являются координатами тензора. Аналогичным образом рассматривается набор чисел δ^{jk}.

Лемма доказана.

Пример 28. Пусть $[\cdot,\cdot]$ — векторное произведение векторов. Докажем, что набор коэффициентов a^k_{ij}, определенный равенством

$$[\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j] = a^k_{ij}\mathbf{e}_k, \tag{5.7}$$

является координатами в каждом базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ некоторого тензора ранга $(2,1)$.

□ Действительно, пусть $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ и $\{\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}\}$ — старый и новый базисы, причем:

$$\mathbf{e}_{i'} = c^i_{i'}\mathbf{e}_i, \quad \mathbf{e}_{j'} = c^j_{j'}\mathbf{e}_j \tag{5.8}$$

$$[\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j] = a^k_{ij}\mathbf{e}_k, \quad [\mathbf{e}_{i'}, \mathbf{e}_{j'}] = a^{k'}_{i'j'}\mathbf{e}_{k'}. \tag{5.9}$$

Справедлива следующая цепочка равенств:

$$a^{k'}_{i'j'}\mathbf{e}_{k'} = [\mathbf{e}_{i'}, \mathbf{e}_{j'}] = c^i_{i'}c^j_{j'}[\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j] = c^i_{i'}c^j_{j'}a^k_{ij}\mathbf{e}_k = c^i_{i'}c^j_{j'}c^{k'}_k a^k_{ij}\mathbf{e}_{k'}, \tag{5.10}$$

из которого в силу того, что $\{\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}\}$ — базис получаем равенство:

$$a^{k'}_{i'j'} = c^i_{i'}c^j_{j'}c^{k'}_k a^k_{ij}. \quad \boxtimes \tag{5.11}$$

Пример 29. Пусть каждому базису в $\mathbb{R}^3$ сопоставлен следующий набор чисел:

$$\varepsilon_{i_1 i_2 i_3} = 0, \quad \text{если среди индексов есть повторения}, \tag{5.12}$$

а в случае если все индексы i_1, i_2, i_3 различны, то

$$\varepsilon_{i_1 i_2 i_3} = \operatorname{sign}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i_1 & i_2 & i_3 \end{pmatrix}. \tag{5.13}$$

Докажем, что числа $\varepsilon_{i_1 i_2 i_3}$ не являются координатами тензора.

□ Действительно, пусть два базиса $\{\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'}, \mathbf{e}_{3'}\}$ и $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ связаны равенствами:

$$\mathbf{e}_{1'} = 2\cdot\mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}_{2'} = \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{e}_{3'} = \mathbf{e}_3, \tag{5.14}$$

$$(\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'}, \mathbf{e}_{3'}) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{5.15}$$

Но тогда справедлива следующая цепочкам равенств:

$$1 = \varepsilon_{1'2'3'} = c^{i_1}_{1'} c^{i_2}_{2'} c^{i_3}_{3'} \varepsilon_{i_1 i_2 i_3} = c^1_{1'} c^2_{2'} c^3_{3'} \varepsilon_{123} = 2. \tag{5.16}$$

Пришли к противоречию. ⊠

Определение 15. *Объект $\varepsilon_{i_1 i_2 i_3}$ называется абсолютно антисимметричным символом Леви–Чивиты.*

Из символов Кронекера δ_{ik} и δ_{pq} можно соорудить объект четвертого порядка $\delta_{ik}\delta_{pq}$. Поскольку объекты δ_{ik} и δ_{pq} являются координатами ортогональных тензоров рангов $(2,0)$ и $(2,0)$, то их произведение $\delta_{ik}\delta_{pq}$ является ортогональным тензором ранга $(4,0)$. Действительно, справедливы следующая цепочка равенств:

$$\delta_{ik}\delta_{pq} c^i_{i'} c^k_{k'} c^p_{p'} c^q_{q'} = c^k_{i'} c^k_{k'} c^p_{p'} c^p_{q'} = \{C^T \cdot C\}_{i'k'} \{C^T \cdot C\}_{p'q'} = \delta_{i'k'}\delta_{p'k'}.$$

Заметим, что справедлива следующая цепочка равенств:

$$\delta_{is}\delta_{sq} = \{I \cdot I\}_{iq} = \{I\}_{iq} = \delta_{iq}. \tag{5.17}$$

Лемма 10. *Справедливо следующее равенство*:

$$\varepsilon_{ikl}\varepsilon_{pqr} = \begin{vmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} & \delta_{ir} \\ \delta_{kp} & \delta_{kq} & \delta_{kr} \\ \delta_{lp} & \delta_{lq} & \delta_{lr} \end{vmatrix}. \tag{5.18}$$

Доказательство. *Случай 1.* Пусть два или три индекса из какой–нибудь тройки индексов $\{i,k,l\}$ или $\{p,q,r\}$ совпадают. Тогда равенство (5.18) выполнено, потому что слева либо $\varepsilon_{ikl} = 0$ либо $\varepsilon_{pqr} = 0$, а справа две или три строчки или два или три столбца совпадают и в этих случаях определитель равен нулю.

Случай 2. Теперь простым вычислением получим, что справедливо равенство:

$$\varepsilon_{123}\varepsilon_{123} = \begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{vmatrix}, \tag{5.19}$$

поскольку $\varepsilon_{123}\varepsilon_{123} = 1$ и

$$\begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Кроме того, выражения справа и слева в равенстве (5.18) могут отличаться только знаком. Рассмотрим следующую перестановку:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ p & q & r \end{pmatrix}. \tag{5.20}$$

Как известно, любую перестановку можно представить в виде конечной последовательности транспозиций соседних индексов. При транспозиции индексов во втором сомножителе в левой части равенства (5.19) знак меняется на противоположный, а слева в равенстве (5.19) при этой же транспозиции соседние строчки будут переставляться и, следовательно, знак определителя тоже будет меняться на противоположный. Таким образом, в результате последовательности транспозиций, образующих перестановку (5.20) мы придем к равенству:

$$\varepsilon_{123}\varepsilon_{pqr} = \begin{vmatrix} \delta_{1p} & \delta_{1q} & \delta_{1r} \\ \delta_{2p} & \delta_{2q} & \delta_{2r} \\ \delta_{3p} & \delta_{3q} & \delta_{3r} \end{vmatrix}. \tag{5.21}$$

Теперь рассмотрим перестановку:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i & k & l \end{pmatrix}. \tag{5.22}$$

Сделаем соответствующую последовательность транспозиций в обеих частях равенства (5.21). Справа в равенстве (5.21) каждой транспозиции будет соответствовать перестановка строк. В результате перестановки (5.21) мы получим искомое равенство (5.18).

Лемма доказана.

Лемма 11. *Справедливо следующее равенство*:

$$\varepsilon_{ikl}\varepsilon_{pql} = \begin{vmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} \\ \delta_{kp} & \delta_{kq} \end{vmatrix}. \tag{5.23}$$

Доказательство. Справедлива следующая цепочка равенств:

$$\varepsilon_{ikl}\varepsilon_{pql} = \begin{vmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} & \delta_{il} \\ \delta_{kp} & \delta_{kq} & \delta_{kl} \\ \delta_{lp} & \delta_{lq} & \delta_{ll} \end{vmatrix} =$$

$$= \delta_{lp}\begin{vmatrix} \delta_{iq} & \delta_{il} \\ \delta_{kq} & \delta_{kl} \end{vmatrix} - \delta_{lq}\begin{vmatrix} \delta_{ip} & \delta_{il} \\ \delta_{kp} & \delta_{kl} \end{vmatrix} + \delta_{ll}\begin{vmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} \\ \delta_{kp} & \delta_{kq} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \delta_{iq} & \delta_{ip} \\ \delta_{kq} & \delta_{kp} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} \\ \delta_{kp} & \delta_{kq} \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} \\ \delta_{kp} & \delta_{kq} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} \\ \delta_{kp} & \delta_{kq} \end{vmatrix}.$$

Лемма доказана.

Лемма 12. *Справедливы следующие равенства:*

$$\varepsilon_{ikl}\varepsilon_{pkl} = 2\delta_{ip}, \quad \varepsilon_{ikl}\varepsilon_{ikl} = 6. \tag{5.24}$$

Доказательство. Из равенства (5.23) получаем:

$$\varepsilon_{ikl}\varepsilon_{pkl} = \begin{vmatrix} \delta_{ip} & \delta_{ik} \\ \delta_{kp} & \delta_{kk} \end{vmatrix} = \delta_{kk}\delta_{ip} - \delta_{ik}\delta_{kp} = 3\delta_{ip} - \delta_{ip} = 2\delta_{ip}. \tag{5.25}$$

В свою очередь из (5.25) вытекает равенство:

$$\varepsilon_{ikl}\varepsilon_{ikl} = 2\delta_{ii} = 6.$$

Лемма доказана.

Определение 16. *Объекты*:

$$(a_1, a_2, a_3) \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} 0 & a_3 & -a_2 \\ -a_3 & 0 & a_1 \\ a_2 & -a_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.26}$$

называются дуальными.

Лемма 13. *Дуальные объекты связаны равенствами*:

$$a_{ik} = \varepsilon_{ikl} a_l, \quad a_l = \frac{1}{2} \varepsilon_{ikl} a_{ik}, \tag{5.27}$$

$$\|a_{ik}\| := \begin{pmatrix} 0 & a_3 & -a_2 \\ -a_3 & 0 & a_1 \\ a_2 & -a_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Доказательство. *Шаг 1.* Докажем первое равенство из (5.27). Непосредственно проверяем это равенство:

$$a_{11} = 0, \quad a_{12} = a_3, \quad a_{13} = -a_2,$$

$$a_{21} = -a_3, \quad a_{22} = 0, \quad a_{23} = -a_1,$$

$$a_{31} = a_2, \quad a_{32} = -a_1, \quad a_{33} = 0.$$

Шаг 2. докажем второе равенство из (5.27). С этой целью воспользуемся доказанным первым равенством из (5.27), а также первым равенством из (5.24). Действительно, справедлива следующая цепочка равенств:

$$\frac{1}{2} \varepsilon_{ikl} a_{ik} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ikl} \varepsilon_{ikm} a_m = \frac{1}{2} 2 \delta_{lm} a_m = a_l.$$

Лемма доказана.

Определение 17. *Внешним произведением объектов*:

$$(a_1, a_2, a_3) \quad \text{и} \quad (b_1, b_2, b_3)$$

называется объект (S_1, S_2, S_3), *определенный равенствами*:

$$S_i = \varepsilon_{ikl} a_k b_l. \tag{5.28}$$

Лемма 14. *Справедливы следующие равенства*:

$$(S_1, S_2, S_3) = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1), \tag{5.29}$$

$$S_i = b_{ik} a_k, \quad S_i = \begin{vmatrix} \delta_{i1} & \delta_{i2} & \delta_{i3} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \tag{5.30}$$

$$\|b_{ik}\| := \begin{pmatrix} 0 & b_3 & -b_2 \\ -b_3 & 0 & b_1 \\ b_2 & -b_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Доказательство. *Шаг 1.* Докажем сначала равенства (5.29). Действительно, имеем:

$$S_1 = \varepsilon_{1kl} a_k b_l = a_2 b_3 - a_3 b_2,$$
$$S_2 = \varepsilon_{2kl} a_k b_l = a_3 b_1 - a_1 b_3,$$
$$S_3 = \varepsilon_{3kl} a_k b_l = a_1 b_2 - a_2 b_1.$$

Шаг 2. Докажем первое равенство из (5.30). Справедливы следующие равенства:

$$S_i = \varepsilon_{ikl} a_k b_l = (\varepsilon_{ikl} b_l) a_k = b_{ik} a_k, \tag{5.31}$$

$$\begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b_3 & -b_2 \\ -b_3 & 0 & b_1 \\ b_2 & -b_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}.$$

Шаг 3. Докажем второе равенство из (5.30). Непосредственной проверкой убеждаемся, что справедливы следующие равенства:

$$S_1 = \begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = a_2 b_3 - a_3 b_2,$$

$$S_2 = \begin{vmatrix} \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = a_3 b_1 - a_1 b_3,$$

$$S_3 = \begin{vmatrix} \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1.$$

Лемма доказана.

Тождество Эйлера–Лагранжа. Докажем следующее тождество:

$$(a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 = \\ = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2. \tag{5.32}$$

Действительно, с учетом (5.23) имеет место цепочка равенств:

$$S_l S_l = \varepsilon_{lik} a_i b_k \varepsilon_{lpq} a_p b_q = \varepsilon_{lik} \varepsilon_{lpq} a_i b_k a_p b_q = \varepsilon_{ikl} \varepsilon_{pql} a_i b_k a_p b_q = \\ = (\delta_{ip}\delta_{kq} - \delta_{kp}\delta_{iq}) a_i b_k a_p b_q = \delta_{ip}\delta_{kq} a_i b_k a_p b_q - \delta_{kp}\delta_{iq} a_i b_k a_p b_q = \\ = a_p a_p b_k b_k - (a_q b_q)(a_p b_p). \tag{5.33}$$

Таким образом, тождество (5.32) Эйлера–Лагранжа доказано.

Теперь воспользуемся итоговым равенством (5.33). Справедлива следующая цепочка равенств:

$$S_l S_l = a_p^2 b_k^2 - (a_i b_i)(a_k b_k) = a_p^2 \delta_{ik} b_i b_k - (a_i a_k)(b_i b_k) = \\ = (a_p^2 \delta_{ik} - a_i a_k) b_i b_k = (b_p^2 \delta_{ik} - b_i b_k) a_i a_k. \tag{5.34}$$

Теперь воспользуемся дуальным представлением с тем, чтобы доказать следующее равенство:

$$a_p^2\delta_{ik} - a_i a_k = a_{is}a_{ks}. \tag{5.35}$$

Действительно, согласно (5.27) имеем:

$$a_{is} = \varepsilon_{isp}a_p, \quad a_{ks} = \varepsilon_{ksq}a_q. \tag{5.36}$$

Справедлива следующая цепочка равенств:

$$a_{is}a_{ks} = \varepsilon_{isp}a_p\varepsilon_{ksq}a_q = \varepsilon_{ips}\varepsilon_{kqs}a_p a_q = \begin{vmatrix} \delta_{ik} & \delta_{iq} \\ \delta_{pk} & \delta_{pq} \end{vmatrix} a_p a_q =$$
$$= (\delta_{ik}\delta_{pq} - \delta_{iq}\delta_{pk})a_p a_q = a_p^2\delta_{ik} - a_i a_k, \tag{5.37}$$

где мы воспользовались равенством (5.23). Осталось воспользоваться равенствами (5.30).

Вычисление определителей. Рассмотрим следующий определитель:

$$a = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \varepsilon_{ikl}a_{i1}a_{k2}a_{l3}. \tag{5.38}$$

Рассмотрим перестановку:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ p & q & r \end{pmatrix}. \tag{5.39}$$

Как известно, любую перестановку можно представить в виде транспозиции соседних чисел. Применим эту последовательностей к правой части равенства (5.38), которое для удобства перепишем в виде:

$$a = \varepsilon_{ikl}a_{i1}a_{k2}a_{l3}. \tag{5.40}$$

При каждой транспозиции правая часть равенства (5.40) меняет знак, поскольку транспозиция соседних чисел равносильна перестановке столбцов. Если перестановка (5.39) четная, то мы снова получим равенство:

$$a = \varepsilon_{ikl}a_{ip}a_{kq}a_{lr}. \tag{5.41}$$

Если же перестановка (5.39) нечетная, то мы получим равенство:

$$a = -\varepsilon_{ikl}a_{ip}a_{kq}a_{lr}. \tag{5.42}$$

Введем следующий объект:

$$A_{pqr} \stackrel{def:}{=} \varepsilon_{ikl}a_{ip}a_{kq}a_{lr}. \tag{5.43}$$

Заметим, что если в равенстве (5.43) хотя бы два индекса из тройки $\{p, q, r\}$ совпадают, то $A_{pqr} = 0$, поскольку тогда у определителя $\varepsilon_{ikl}a_{ip}a_{kq}a_{lr}$ по крайней мере два столбца одинаковые. Таким образом, имеет место следующее равенство:

$$A_{pqr} = a\varepsilon_{pqr}. \tag{5.44}$$

Следовательно, из (5.43) и (5.44) вытекает равенство:

$$\varepsilon_{ikl}a_{ip}a_{kq}a_{lr} = a\varepsilon_{pqr}. \tag{5.45}$$

Аналогичным образом можно доказать следующее равенство:

$$\varepsilon_{pqr}a_{ip}a_{kq}a_{lr} = a\varepsilon_{ikl}. \tag{5.46}$$

Теорема 11. *Определитель произведения квадратных матриц одного размера равен произведению определителей матриц.*

Доказательство. Пусть $c_{ik} = a_{is}b_{sk}$. Докажем равенство:

$$|c_{ik}| = |a_{rj}||b_{pq}|. \tag{5.47}$$

Пусть:

$$a = |a_{rj}|, \quad b = |b_{pq}|, \quad c = |c_{ik}|. \tag{5.48}$$

Тогда имеем:

$$b = \varepsilon_{pqr}b_{p1}b_{q2}b_{r3}, \quad a\varepsilon_{pqr} = \varepsilon_{ikl}a_{ip}a_{kq}a_{lr}, \tag{5.49}$$

$$\begin{aligned} ab = a\varepsilon_{pqr}b_{p1}b_{q2}b_{r3} = \varepsilon_{ikl}a_{ip}a_{kq}a_{lr}b_{p1}b_{q2}b_{r3} = \\ = \varepsilon_{ikl}(a_{ip}b_{p1})(a_{kq}b_{q2})(a_{lr}b_{r3}) = \varepsilon_{ikl}c_{i1}c_{k2}c_{l3} = c. \end{aligned} \tag{5.50}$$

Теорема доказана.

Лемма 15. *Справедливо равенство*:

$$|a_l^2\delta_{ik} - a_ia_k| = 0. \tag{5.51}$$

Доказательство. Воспользуемся равенством (5.35) и результатом теоремы 11. Тогда справедливо равенство:

$$|a_l^2\delta_{ik} - a_ia_k| = |a_{is}||a_{ks}|. \tag{5.52}$$

Заметим, что

$$|a_{is}| = \begin{vmatrix} 0 & a_3 & -a_2 \\ -a_3 & 0 & a_1 \\ a_2 & -a_1 & 0 \end{vmatrix} = a_3a_1a_2 - a_2a_3a_1 = 0. \tag{5.53}$$

Из равенств (5.52) и (5.53) вытекает утверждение леммы.

Лемма доказана.

Алгебраические дополнения. Справедливы следующие равенства:

$$a\varepsilon_{pqr}\varepsilon_{pqt} = \varepsilon_{pqt}a\varepsilon_{pqr} = \varepsilon_{pqt}\varepsilon_{ikl}a_{ip}a_{kq}a_{lr}, \tag{5.54}$$

где мы воспользовались равенством (5.45). Воспользуемся равенством (5.24) и получим равенство:

$$\varepsilon_{pqr}\varepsilon_{pqt} = 2\delta_{rt}. \tag{5.55}$$

Из равенств (5.54) и (5.55) получаем равенство:

$$\delta_{rt}a = a_{lr}\left(\frac{1}{2}\varepsilon_{ikl}\varepsilon_{pqt}a_{ip}a_{kq}\right). \tag{5.56}$$

Введем обозначение:

$$A_{lt} \overset{def}{=} \frac{1}{2}\varepsilon_{ikl}\varepsilon_{pqt}a_{ip}a_{kq}. \tag{5.57}$$

Тогда с учетом этого обозначения мы получим из (5.56) равенство:

$$\delta_{rt}a = a_{lr}A_{lt}. \tag{5.58}$$

Определение 18. *Числа A_{lt} называются алгебраическими дополнениями элемента a_{lt}.*

Разложение определителя по столбцу. Положим в равенстве (5.58) $r = t = a$, где a относится к так называемым *фиксирующим индексам*, т.е. по нему не производится суммирование. В результате получим следующую формулу разложения определителя по a–му столбцу:

$$a = a_{la}A_{la}. \tag{5.59}$$

Теперь положим $r = a$ и $t = b$, причем $a \neq b$ и это фиксирующие индексы. Тогда получим формулу фальшивого разложения определителя:

$$0 = a_{la}A_{lb}. \tag{5.60}$$

Разложение определителя по строчке. Умножим обе части равенства (5.46) на ε_{ikm}. С учетом (5.24) получим следующее равенство:

$$a\delta_{lm} = a_{lr}\left(\frac{1}{2}\varepsilon_{ikm}\varepsilon_{pqr}a_{ip}a_{kq}\right). \tag{5.61}$$

Введем обозначение:

$$A_{mr} :\overset{def}{=} \frac{1}{2}\varepsilon_{ikm}\varepsilon_{pqr}a_{ip}a_{kq}. \tag{5.62}$$

С учетом этого обозначения из (5.61) вытекает равенство:

$$a\delta_{lm} = a_{lr}A_{mr}. \tag{5.63}$$

Сначала положим в равенстве (5.63) $l = m = a$, где a — фиксирующий индекс. Тогда из (5.63) получим равенство:

$$a = a_{ar}A_{ar}. \tag{5.64}$$

Формула (5.63) — есть формула разложения определителя по a–ой строчке. Теперь положим в равенстве (5.63) $l = a$ и $m = b$, $a \neq b$, то получим соответствующее фальшивое разложение по a–ой строчке:

$$0 = a_{ar}A_{br}. \tag{5.65}$$

Формулы Крамера. Рассмотрим следующую систему линейных уравнений:

$$a_{ik}x_k = b_i, \quad a = |a_{ik}| \neq 0. \tag{5.66}$$

Умножим обе части этого уравнения на алгебраические дополнение A_{ip} и получим равенство:

$$A_{ip}a_{ik}x_k = A_{ip}b_i. \tag{5.67}$$

Воспользуемся равенством (5.58) и получим равенство:

$$a\delta_{pk}x_k = A_{ip}b_i \Leftrightarrow ax_p = A_{ip}b_i \Leftrightarrow x_p = \frac{1}{a}A_{ip}b_i. \tag{5.68}$$

Последнее равенство в (5.68) можно записать в несколько другом виде. Пусть $p = 1$. Тогда сумма произведений $A_{i1}b_i$ — есть разложение определителя:

$$\Delta_1 = \varepsilon_{pqr}b_p a_{q2}a_{r3} \tag{5.69}$$

по первому столбцу и, следовательно,

$$x_1 = \frac{1}{a}\Delta_1. \tag{5.70}$$

Пусть $p = 2$. Тогда сумма произведений $A_{i2}b_i$ — есть разложение определителя:

$$\Delta_2 = \varepsilon_{pqr}a_{p1}b_q a_{r3} \tag{5.71}$$

по второму столбцу и, следовательно,

$$x_2 = \frac{1}{a}\Delta_2. \tag{5.72}$$

Пусть $p = 3$. Тогда сумма произведений $A_{i3}b_i$ — есть разложение определителя:

$$\Delta_3 = \varepsilon_{pqr}a_{p1}a_{q2}b_r \tag{5.73}$$

по третьему столбцу и, следовательно,

$$x_3 = \frac{1}{a}\Delta_3. \tag{5.74}$$

§ 6. Вычисления в тензорных обозначениях. Объекты с верхними и нижними индексами

Точно также как и в предыдущем параграфе можно ввести символ Леви–Чивиты ε^{ikl}.

Лемма 16. *Справедливы следующие равенства*:

$$\varepsilon^{ikl}\varepsilon_{pqr} = \begin{vmatrix} \delta^i_p & \delta^i_q & \delta^i_r \\ \delta^k_p & \delta^k_q & \delta^k_r \\ \delta^l_p & \delta^l_q & \delta^l_r \end{vmatrix}, \tag{6.1}$$

$$\varepsilon^{ikl}\varepsilon_{pql} = \begin{vmatrix} \delta^i_p & \delta^i_q \\ \delta^k_p & \delta^k_q \end{vmatrix}, \tag{6.2}$$

$$\varepsilon^{ikl}\varepsilon_{pkl} = 2\delta^i_p, \quad \varepsilon^{ikl}\varepsilon_{ikl} = 6. \tag{6.3}$$

Доказательство. Указанные равенства доказываются в точности точно также, как и равенства лемм 10, 11 и 12.

Лемма доказана.

О п р е д е л е н и е 19. *Обобщенными символами Кронекера называются следующие величины*:

$$\delta^{ikl}_{pqr} \stackrel{def:}{=} \varepsilon^{ikl}\varepsilon_{pqr}, \tag{6.4}$$

$$\delta^{ik}_{pq} \stackrel{def:}{=} \varepsilon^{ikl}\varepsilon_{pql} = \delta^i_p\delta^k_q - \delta^k_p\delta^i_q. \tag{6.5}$$

З а м е ч а н и е 3. Заметим, что символ Кронекера δ^i_p в силу первого равенства из (6.3) можно представить в следующем виде:

$$\delta^i_p = \frac{1}{2}\varepsilon^{ikl}\varepsilon_{pkl}. \tag{6.6}$$

Поэтому логично отнести символ Кронекера δ^i_p к группе обобщенных символов Кронекера (6.4) и (6.5). С помощью обобщенных символов Кронекера можно проводить ряд тензорных операций.

Замена индексов. Справедливы равенства:

$$\delta^i_k a^k = a^i, \quad \delta^i_k a_i = a_k.$$

Альтернирование. Справедливы равенства:

$$\delta^{ik}_{pq} b_{ik} = (\delta^i_p\delta^k_q - \delta^k_p\delta^i_q)b_{ik} = b_{pq} - b_{qp}.$$

Вычисление определителей. Полученные ранее формулы (5.45) и (5.46) могут быть переписаны следующим образом:

$$\varepsilon^{ikl}a_{ip}a_{kq}a_{lr} = a\varepsilon_{pqr}, \quad \varepsilon^{pqr}a_{ip}a_{kq}a_{lr} = a\varepsilon_{ikl}, \tag{6.7}$$

$$\varepsilon_{ikl}a^{ip}a^{kq}a^{lr} = a\varepsilon^{pqr}, \quad \varepsilon_{pqr}a^{ip}a^{kq}a^{lr} = a\varepsilon^{ikl}, \tag{6.8}$$

$$\varepsilon_{ikl}a^i_p a^k_q a^l_r = a\varepsilon_{pqr}, \quad \varepsilon^{pqr}a^i_p a^k_q a^l_r = a\varepsilon^{ikl}. \tag{6.9}$$

Из формул (6.9) вытекает следующее утверждение:

Л е м м а 17. *Закон преобразования символов ε_{ikl} и ε^{ikl} Леви-Чивиты следующий*:

$$\varepsilon_{i'k'l'} = \frac{1}{c}c^i_{i'}c^k_{k'}c^l_{l'}\varepsilon_{ikl}, \quad \varepsilon^{i'k'l'} = \frac{1}{c}c^{i'}_i c^{k'}_k c^{l'}_l \varepsilon^{ikl}, \tag{6.10}$$

где $c = \det C$ — определитель матрицы перехода C от базиса $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ к базису $\{\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'}, \mathbf{e}_{3'}\}$.

Иначе говоря, символы Леви–Чивиты ε_{ikl} и ε^{ikl} являются так называемыми *псевдотензорами.*

Алгебраические дополнения. Умножим первое равенство из (6.7) на ε^{pqt}. В силу равенства (6.6) получим выражение:

$$a\delta^t_r = a_{lr}\left(\frac{1}{2}\varepsilon^{ikl}\varepsilon^{pqt}a_{ip}a_{kq}\right) = a_{lr}A^{lt}, \tag{6.11}$$

$$A^{lt} := \frac{1}{2}\varepsilon^{ikl}\varepsilon^{pqt}a_{ip}a_{kq}. \tag{6.12}$$

Определение 20. *Символы* A^{lt}, *определенные равенствами* (6.12), *называются алгебраическими дополнениями.*

Разложение определителя по элементам столбца. Если в равенстве (6.11) положить $t = r = a$, где a — фиксирующий индекс, то получим разложение определителя по элементам a–го столбца:

$$a = a_{la} A^{la}. \tag{6.13}$$

Разложение определителя по элементам строчки. Умножим второе равенство из (6.7) на ε^{ikm} и с учетом (6.6) получим равенство:

$$a\delta^l_m = a_{lr}\left(\frac{1}{2}\varepsilon^{ikm}\varepsilon^{pqr}a_{ip}a_{kq}\right) = a_{lr}A^{mr}, \tag{6.14}$$

$$A^{mr} := \frac{1}{2}\varepsilon^{ikm}\varepsilon^{pqr}a_{ip}a_{kq}. \tag{6.15}$$

В равенстве (6.14) положим $l = m = a$, где a — фиксирующий индекс. Тогда получим следующую формулу разложения определителя по элементам a–ой строчки:

$$a = a_{ar} A^{ar}. \tag{6.16}$$

§ 7. Формула для векторного произведения векторов

Введем следующие объекты третьего порядка:

$$E_{ikl} := \varepsilon\sqrt{g}\,\varepsilon_{ikl}, \quad E^{ikl} := \frac{\varepsilon}{\sqrt{g}}\varepsilon^{ikl}, \tag{7.1}$$

где

$$g = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix}, \quad \|g_{jk}\| \text{ – метрический тензор,} \tag{7.2}$$

$$\varepsilon = \begin{cases} +1, & \text{если базис правый;} \\ -1, & \text{если базис левый.} \end{cases} \tag{7.3}$$

Введем следующие объекты:

$$S_i := E_{ikl}a^k b^l, \quad S^i = E^{ikl}a_k b_l. \tag{7.4}$$

Лемма 18. *Объекты S_i и S^i связаны следующими равенствами*:

$$S_p = g_{ip}S^i. \tag{7.5}$$

Доказательство. Действительно,

$$a_k = g_{kq}a^q, \quad a_l = g_{lr}a^r, \quad \varepsilon^{ikl}g_{ip}g_{kq}g_{lr} = g\varepsilon^{pqr},$$

и справедлива следующая цепочка равенств:

$$g_{ip}S^i = \frac{\varepsilon}{\sqrt{g}}g_{ip}\varepsilon^{ikl}a_k b_l = \frac{\varepsilon}{\sqrt{g}}g_{ip}\varepsilon^{ikl}g_{kq}a^q g_{lr}b^r =$$

$$= \frac{\varepsilon}{\sqrt{g}} \varepsilon^{ikl} g_{ip} g_{kq} g_{lr} a^q b^r = \varepsilon \sqrt{g}\, \varepsilon_{pqr} a^q b^r = S_p. \quad (7.6)$$

Лемма доказана.

Лемма 19. *Справедливо равенство*:

$$S^p = \frac{g^{ip}}{g^2} S_i. \quad (7.7)$$

Доказательство. Действительно, справедлива следующая цепочка равенств:

$$g^{ip} S_i = g^{ip} E_{ikl} a^k b^l = \varepsilon \sqrt{g}\, g^{ip} \varepsilon_{ikl} g^{kq} a_q g^{lr} b_r = \varepsilon \sqrt{g}\, \varepsilon_{ikl} g^{ip} g^{kq} g^{lr} a_q b_r =$$
$$= \varepsilon \sqrt{g}\, g \varepsilon^{pqr} a_q b_r = g^2 E^{pqr} a_q b_r = g^2 S^p.$$

Лемма доказана.

Пусть

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} S^1 \\ S^2 \\ S^3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a} = \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ b^3 \end{pmatrix}. \quad (7.8)$$

Докажем, что $\mathbf{S} \perp \mathbf{a}$ и $\mathbf{S} \perp \mathbf{b}$. Действительно, с учетом равенства (7.5) справедлива следующая цепочка равенств:

$$(\mathbf{S}, \mathbf{a}) = g_{ij} S^i a^j = S_i a^i = E_{ikl} a^i a^k b^l = \varepsilon \sqrt{g}\, \varepsilon_{ikl} a^i a^k b^l = 0, \quad (7.9)$$

поскольку в определителе $\varepsilon_{ikl} a^i a^k b^l$ две одинаковые строчки. Аналогичным образом устанавливаем, что

$$(\mathbf{S}, \mathbf{b}) = g_{ij} S^i b^j = S_i b^i = E_{ikl} b^i a^k b^l = \varepsilon \sqrt{g}\, \varepsilon_{ikl} b^i a^k b^l = 0. \quad (7.10)$$

Теперь вычислим длину вектора $\mathbf{S}$. Действительно, с учетом равенства (7.5) справедлива следующая цепочка равенств:

$$|\mathbf{S}|^2 = (\mathbf{S}, \mathbf{S}) = g_{ij} S^i S^j = S_i S^i = E^{ikl} E_{ipq} a_k b_l a^p b^q =$$
$$= \varepsilon^2 \varepsilon^{ikl} \varepsilon_{ipq} a_k b_l a^p b^q = (\delta^k_p \delta^l_q - \delta^l_p \delta^k_q) a_k b_l a^p b^q =$$
$$= (a_p a^p)(b_q b^q) - (a_k b^k)(b_l a^l) = |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a}, \mathbf{b})^2 =$$
$$= |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 - |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 \cos^2 \varphi = |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 \sin^2 \varphi. \quad (7.11)$$

Лемма 20. *Если C — матрица перехода между старым $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ и новым базисами $\{\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'}, \mathbf{e}_{3'}\}$:*

$$\mathbf{e}_{i'} = c^i_{i'} \cdot \mathbf{e}_i, \quad (7.12)$$

то справедливо следующее равенство:

$$\operatorname{sign}(\det C) = \varepsilon' \varepsilon, \quad (7.13)$$

$$\varepsilon' = \begin{cases} +1, & \text{\textit{если штрихованный базис правый};} \\ -1, & \text{\textit{если штрихованный базис левый},} \end{cases} \quad (7.14)$$

$$\varepsilon = \begin{cases} +1, & \textit{если не штрихованный базис правый;} \\ -1, & \textit{если не штрихованный базис левый.} \end{cases} \tag{7.15}$$

Доказательство. Для доказательства равенства (7.13) нужно воспользоваться тем, что из (7.12) вытекает следующее равенство с участием смешанных произведений:

$$(\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'}, \mathbf{e}_{3'}) = c^{i_1}_{1'} c^{i_2}_{2'} c^{i_3}_{3'} (\mathbf{e}_{i_1}, \mathbf{e}_{i_2}, \mathbf{e}_{i_3}) = \\ = \varepsilon_{i_1 i_2 i_3} c^{i_1}_{1'} c^{i_2}_{2'} c^{i_3}_{3'} (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = \det C (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3), \tag{7.16}$$

причем по свойству смешанного произведения справедливы равенства:

$$\varepsilon = \operatorname{sign}\{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)\}, \quad \varepsilon' = \operatorname{sign}\{(\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'}, \mathbf{e}_{3'})\}. \tag{7.17}$$

Итак, из (7.16) и (7.17) вытекает следующее равенство:

$$\varepsilon' = \operatorname{sign}(\det C)\varepsilon \Rightarrow 1 = (\varepsilon')^2 = \operatorname{sign}(\det C)\varepsilon\varepsilon' \Rightarrow \varepsilon\varepsilon' = \operatorname{sign}(\det C).$$

Лемма доказана.

Лемма 21. *Числа* E_{ikl}, *определенные первым равенством из* (7.1), *является координатами тензора, а числа* E^{ikl}, *определенные вторым равенством из* (7.1), *являются координатами ортогонального тензора.*

Доказательство. Воспользуемся результатом леммы 17.

Шаг 1. Докажем сначала первое утверждение леммы. Действительно, пусть два базиса $\{\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'}, \mathbf{e}_{3'}\}$ и $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ связаны соотношением:

$$\mathbf{e}_{i'} = c^i_{i'} \cdot \mathbf{e}_i.$$

Тогда, в частности, метрический тензор преобразуется таким образом:

$$g_{i'k'} = c^i_{i'} c^k_{k'} g_{ik} \Rightarrow |g_{i'k'}| = |c^i_{i'}||c^k_{k'}||g_{ik}| \Rightarrow g' = c^2 g, \tag{7.18}$$

где $g' = |g_{i'k'}|$, $g = |g_{ik}|$, $c = |c^i_{i'}| = |c^k_{k'}|$. Справедлива следующая цепочка равенств:

$$E_{i'k'l'} = \varepsilon' \sqrt{g'}\, \varepsilon_{i'k'l'} = \varepsilon' |c| \sqrt{g}\, \frac{1}{c} c^i_{i'} c^k_{k'} c^l_{l'} \varepsilon_{ikl} = \\ = \varepsilon' \operatorname{sign}(c) c^i_{i'} c^k_{k'} c^l_{l'} \sqrt{g}\, \varepsilon_{ikl} = \varepsilon' \varepsilon \varepsilon' c^i_{i'} c^k_{k'} c^l_{l'} \sqrt{g}\, \varepsilon_{ikl} = \\ = \varepsilon c^i_{i'} c^k_{k'} c^l_{l'} \sqrt{g}\, \varepsilon_{ikl} = c^i_{i'} c^k_{k'} c^l_{l'} E_{ikl}. \tag{7.19}$$

Следовательно, E_{ikl} — координаты тензора.

Шаг 2. Докажем второе утверждение леммы. Действительно, в случае ортогональных базисов для матрицы перехода C справедливо равенство $C^T = C^{-1}$ и поэтому $(\det C)^2 = 1$. Справедлива следующая цепочка равенств:

$$E^{i'k'l'} = \frac{\varepsilon'}{\sqrt{g'}} \varepsilon^{i'k'l'} = \frac{\varepsilon'}{|c|\sqrt{g}} c^{i'}_i c^{k'}_k c^{l'}_l \frac{\varepsilon^{ikl}}{c} =$$

$$= \frac{\varepsilon' \operatorname{sign}(c)}{c^2} c_i^{i'} c_k^{k'} c_l^{l'} \frac{e^{ikl}}{\sqrt{g}} = \frac{\varepsilon' \varepsilon' \varepsilon}{c^2} c_i^{i'} c_k^{k'} c_l^{l'} \frac{e^{ikl}}{\sqrt{g}} =$$
$$= \frac{1}{c^2} c_i^{i'} c_k^{k'} c_l^{l'} E^{ikl} = c_i^{i'} c_k^{k'} c_l^{l'} E^{ikl}, \quad (7.20)$$

поскольку $c^2 = (\det C)^2 = 1$.

Лемма доказана.

Лемма 22. *Векторное произведение векторов можно представить в следующем виде*:

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = a_{ij}^k a^i b^j \mathbf{e}_k, \quad a_{ij}^k = g^{kl} E_{lij}, \quad (7.21)$$

где тензор Леви–Чивиты E_{ijl} определен равенством (7.1).

§ 8. Пример ортогонального тензора — тензор инерции

Тензор инерции возникает при изучении движения твердого тела. Рассмотрим движение твердого тела G относительно прямоугольной системы координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. Скорость $\mathbf{v}$ произвольной точки $M \in G$ представима в следующем виде:

$$\mathbf{v} = \mathbf{V} + [\Omega, \mathbf{r}], \quad (8.1)$$

где $\mathbf{V}$ — скорость центра инерции тела, $\Omega = \{\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3\}$ — угловая скорость вращения тела вокруг оси, проходящей через центр инерции тела, $\mathbf{r} = \{x^1, x^2, x^3\}$ — радиус-вектор точки M.

Кинетическая энергия T тела G определяется формулой:

$$T = \frac{1}{2} \int\limits_G \rho(M) |\mathbf{v}|^2 \, dx, \quad (8.2)$$

где $\rho = \rho(M)$ — плотность тела в точке M. Из (8.1) вытекает следующая цепочка равенств:

$$|\mathbf{v}|^2 = |\mathbf{V}|^2 + 2(\mathbf{V}, [\Omega, \mathbf{r}]) + |[\Omega, \mathbf{r}]|^2 =$$
$$= |\mathbf{V}|^2 + 2([\mathbf{V}, \Omega], \mathbf{r}) + |\Omega|^2 |\mathbf{r}|^2 - (\Omega, \mathbf{r})^2. \quad (8.3)$$

Поскольку векторы $\mathbf{V}$ и Ω — одни и те же для всех точек тела G, то справедливо равенство:

$$\int\limits_G \rho(M)([\mathbf{V}, \Omega], \mathbf{r}) \, dx = \left([\mathbf{V}, \Omega], \int\limits_G \rho(M) \mathbf{r} \, dx \right) = 0, \quad (8.4)$$

поскольку точка O — точка центра инерции тела G. Таким образом, из (8.2)–(8.4) вытекает следующее выражение для кинетической энергии тела:

$$T = \frac{1}{2}\int\limits_G \rho(M)|\mathbf{V}|^2\,dx +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_G \rho(M)(|\Omega|^2|\mathbf{r}|^2 - (\Omega,\mathbf{r})^2)\,dx := T_{\text{пост}} + T_{\text{вр}}, \quad (8.5)$$

где $T_{\text{пост}}$ есть кинетическая энергия поступательного движения твердого тела, $T_{\text{вр}}$ — кинетическая энергия вращательного движения тела. Заметим, что справедливы следующие равенства:

$$|\Omega|^2|\mathbf{r}|^2 - (\Omega,\mathbf{r})^2 = \Omega_i\Omega_j\delta^{ij}|\mathbf{r}|^2 - (\Omega_i x^i)(\Omega_j x^j) =$$
$$= \Omega_i\Omega_j\left((\mathbf{r},\mathbf{r})\delta^{ij} - x^i x^j\right). \quad (8.6)$$

С учетом (8.6) выражение для $T_{\text{вр}}$ можно записать в виде следующей квадратичной формы:

$$T_{\text{вр}} = \frac{1}{2} I^{ij}\Omega_i\Omega_j, \quad (8.7)$$

$$I^{ij} = \int\limits_G \rho(M)\left[(\mathbf{r},\mathbf{r})\delta^{ij} - x^i x^j\right]\,dx. \quad (8.8)$$

Справедливо следующее утверждение:

Лемма 23. *Числа I^{ij} являются координатами некоторого ортогонального тензора типа* $(0,2)$.

Доказательство. В целях практики тензорных вычислений сделаем все вычисления подробно. Пусть $\{\mathbf{e}_{1'},\mathbf{e}_{2'},\mathbf{e}_{3'}\}$ — новый ортонормированный базис, связанный с ортонормированным базисом $\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$ равенствами:

$$\mathbf{e}_{i'} = c^i_{i'}\mathbf{e}_i, \quad C = \|c^i_{i'}\|, \quad C^T = C^{-1}.$$

Справедливы следующие цепочки равенств:

$$c^{i'}_i c^{j'}_j \delta^{ij} = c^{i'}_i c^{j'}_i = \{C\cdot C^T\}^{i'j'} = \delta^{i'j'}, \quad (8.9)$$

$$(\mathbf{r},\mathbf{r}) = x_{k'}x^{k'} = c^k_{k'}x_k c^{k'}_j x^j = c^k_{k'}c^{k'}_j x_k x^j = \delta^k_j x_k x^j = x_k x^k, \quad (8.10)$$

$$x^{i'}x^{j'} = c^{i'}_i c^{j'}_j x^i x^j. \quad (8.11)$$

Таким образом, из (8.9)–(8.11) для координат (8.8) вытекает равенство:

$$I^{i'j'} = c^{i'}_i c^{j'}_j I^{ij}.$$

Лемма доказана.

Отметим, что, как мы знаем, символ Кронекера δ^{ij} не является тензором, а только ортогональным тензором.

§ 9. Примеры решения задач

Задача 1. Пусть $x, y \in \mathcal{L}$ — векторы, а $\xi, \eta \in \mathcal{L}^*$ — ковекторы. Пусть полилинейная форма f определена равенством:

$$f(x, y; \xi, \eta) = \begin{vmatrix} \langle \xi, x \rangle & \langle \eta, x \rangle \\ \langle \xi, y \rangle & \langle \eta, y \rangle \end{vmatrix}. \tag{9.1}$$

Найти разложение тензора f по базису $\{\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l\}$ в пространстве тензоров T_2^2, где $\{\mathbf{e}^k\}_{k=1}^n \subset \mathcal{L}^*$ — базис, взаимный к базису $\{\mathbf{e}_m\}_{m=1}^n \subset \mathcal{L}$.

Решение. Полилинейную форму f можно записать таким образом:

$$f = f_{ij}^{kl} \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l, \tag{9.2}$$

$$f_{ij}^{kl} = f(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j; \mathbf{e}^k, \mathbf{e}^l) = \begin{vmatrix} \langle \mathbf{e}^k, \mathbf{e}_i \rangle & \langle \mathbf{e}^l, \mathbf{e}_i \rangle \\ \langle \mathbf{e}^k, \mathbf{e}_j \rangle & \langle \mathbf{e}^l, \mathbf{e}_j \rangle \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \delta_i^k & \delta_i^l \\ \delta_j^k & \delta_j^l \end{vmatrix} = \delta_i^k \delta_j^l - \delta_j^k \delta_i^l. \tag{9.3}$$

Таким образом, из (9.2) и (9.3) получаем:

$$f = \left(\delta_i^k \delta_j^l - \delta_j^k \delta_i^l\right) \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l = \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j \otimes \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j - \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_i, \tag{9.4}$$

где, напомним, по индексам $i, j \in \overline{1, n}$ производится суммирование.

Задача 2. Пусть $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ — базис в линейном пространстве $\mathcal{L}$, а $\{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3\}$ — взаимный ему базис в $\mathcal{L}^*$. Рассмотрим тензор:

$$T = \mathbf{e}^1 \otimes \mathbf{e}_3 - 2\mathbf{e}^2 \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}^3 \otimes \mathbf{e}_2 \tag{9.5}$$

и определим трилинейное отображение F равенством:

$$F(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) = \begin{vmatrix} v_1^1 & v_2^1 & v_3^1 \\ v_1^2 & v_2^2 & v_3^2 \\ v_1^3 & v_2^3 & v_3^3 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{v}_k = v_k^j \cdot \mathbf{e}_j, \quad k = 1, 2, 3. \tag{9.6}$$

Найти $(T \otimes F)_{3212}^1$ и $(F \otimes T)_{3212}^1$.

Решение. По определению тензорного произведения имеем:

$$(T \otimes F)_{3212}^1 = T(\mathbf{e}_3; \mathbf{e}^1) F(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 0, \tag{9.7}$$

причем, с одной стороны,

$$T(\mathbf{e}_3; \mathbf{e}^1) = 0,$$

поскольку в разложении тензора (9.5) отсутствует слагаемое $\mathbf{e}^3 \otimes \mathbf{e}_1$, для которого:

$$(\mathbf{e}^3 \otimes \mathbf{e}_1)(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}^1) = \langle \mathbf{e}^3, \mathbf{e}_3 \rangle \langle \mathbf{e}^1, \mathbf{e}_1 \rangle = 1.$$

С другой стороны, имеем:

$$F(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Согласно определению тензорного произведения тензоров имеем:

$$(F \otimes T)^1_{3212} = F(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) T(\mathbf{e}_2; \mathbf{e}^1) = 2, \tag{9.8}$$

поскольку:

$$F(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1,$$

$$T(\mathbf{e}_2; \mathbf{e}^1) = \Big(\mathbf{e}^1 \otimes \mathbf{e}_3 - 2\mathbf{e}^2 \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}^3 \otimes \mathbf{e}_2\Big)(\mathbf{e}_2; \mathbf{e}^1) = \\ = -2\langle \mathbf{e}^2, \mathbf{e}_2 \rangle \langle \mathbf{e}^1, \mathbf{e}_1 \rangle = -2.$$

Задача 3. Пусть линейные операторы A и B из $L(\mathcal{L}; \mathcal{L})$ заданы матрицами:

$$A_e = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_e = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \tag{9.9}$$

в некотором базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ линейного пространства $\mathcal{L}$. Найти матрицу оператора $A \otimes B$ в базисе $\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2$, где оператор $A \otimes B$ определяется на элементах базиса следующим образом:

$$(A \otimes B)(\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k) = A(\mathbf{e}_j) \otimes B(\mathbf{e}_k), \quad j, k = \overline{1, 2}.$$

Решение. Из условия задачи имеем:

$$(A(\mathbf{e}_1), A(\mathbf{e}_2)) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) A_e, \quad (B(\mathbf{e}_1), B(\mathbf{e}_2)) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) B_e, \tag{9.10}$$

$$A(\mathbf{e}_1) = 2\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2, \quad A(\mathbf{e}_2) = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \tag{9.11}$$

$$B(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1 + 5\mathbf{e}_2, \quad B(\mathbf{e}_2) = 4\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2. \tag{9.12}$$

Таким образом, из (9.11) и (9.12) имеем:

$$(A \otimes B)(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1) = A(\mathbf{e}_1) \otimes B(\mathbf{e}_1) = (2\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2) \otimes (\mathbf{e}_1 + 5\mathbf{e}_2) = \\ = 2\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + 10\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 + 15\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2, \tag{9.13}$$

$$(A \otimes B)(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2) = A(\mathbf{e}_1) \otimes B(\mathbf{e}_2) = (2\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2) \otimes (4\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2) = \\ = 8\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 - 4\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + 12\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 - 6\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2, \tag{9.14}$$

$$(A \otimes B)(\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1) = A(\mathbf{e}_2) \otimes B(\mathbf{e}_1) = (-\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) \otimes (\mathbf{e}_1 + 5\mathbf{e}_2) = \\ = -\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 - 5\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 + 5\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2, \tag{9.15}$$

$$(A \otimes B)(\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2) = A(\mathbf{e}_2) \otimes B(\mathbf{e}_2) = (-\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) \otimes (4\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2) =$$

$$= -4\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + 4\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2, \quad (9.16)$$

Теперь мы можем найти матрицу оператора $A \otimes B$ в базисе:

$$\{\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2\} :$$

$$(A \otimes B)_e = \begin{pmatrix} 2 & 8 & -1 & -4 \\ 10 & -4 & -5 & 2 \\ 3 & 12 & 1 & 4 \\ 15 & -6 & 5 & -2 \end{pmatrix}.$$

З а д а ч а 4. *Вычислительная задача.* В линейном пространстве $P_1[-1,1]$ (пространство всех полиномов на сегменте $[-1,1]$ степени не выше 1) задано скалярное произведение:

$$(x, y) = \int_{-1}^{1} x(t)y(t)\,dt. \quad (9.17)$$

В этом евклидовом пространстве заданы элементы:

$$e_1(t) = 1, \quad e_2(t) = t. \quad (9.18)$$

Доказать, что элементы e_1, e_2 образуют базис в $P_1[-1,1]$. Найти ковариантный метрический тензор в базисе $E = (e_1, e_2)$.

Решение. Ранее было доказано, что семейство $E = (e_1, e_2)$ образуют базис в линейном пространстве $P_1[-1,1]$. Ковариантный метрический тензор имеет следующий вид:

$$G_e = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}, \quad (9.19)$$

$$g_{11} = \int_{-1}^{1} 1\,dt = 2, \quad g_{12} = g_{21} = \int_{-1}^{1} t\,dt = 0, \quad g_{22} = \int_{-1}^{1} t^2\,dt = \frac{2}{3}.$$

Следовательно,

$$G_e = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

Лекция 12

ЖОРДАНОВА ФОРМА МАТРИЦЫ ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА

§ 1. Корневые векторы

Определение 1. *Вектор $e \in \mathcal{L}$ называется корневым вектором линейного оператора $\mathcal{A} \in L(\mathcal{L};\mathcal{L})$, отвечающим числу $\lambda \in \mathbb{K}$, если*

$$(\mathcal{A}-\lambda I)^m e = \vartheta \Leftrightarrow e \in \ker(\mathcal{A}-\lambda I)^m \tag{1.1}$$

для некоторого $m \in \mathbb{N}\cup\{0\}$. Наименьшее из таких m называется высотой корневого вектора e.

Замечание 1. Собственные векторы — это корневые векторы высоты 1. Будем считать, что нулевой вектор является корневым вектором высоты 0.

Пример 1. Рассмотрим оператор дифференцирования:

$$D_x : \; C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R}). \tag{1.2}$$

Собственными векторами линейного оператора D_x являются функции $\exp(\lambda x)$ для любого $\lambda \in \mathbb{R}$. Действительно,

$$D_x e^{\lambda x} = \lambda e^{\lambda x}.$$

Докажем, что корневыми векторами высоты $m = n+1$ являются следующие функции:

$$p(x)e^{\lambda x}, \quad p(x) \in P^n, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Действительно, справедливы следующие равенства:

$$(D_x - \lambda I)\left(p(x)e^{\lambda x}\right) = \lambda p(x)e^{\lambda x} - \lambda p(x)e^{\lambda x} + p^{(1)}(x)e^{\lambda x} = p^{(1)}(x)e^{\lambda x}.$$

Поэтому:

$$(D_x - \lambda I)^m\left(p(x)e^{\lambda x}\right) = p^{(m)}(x)e^{\lambda x} = 0, \quad \text{если} \quad m = n+1.$$

Лемма 1. *Если e — корневой вектор высоты $m \geqslant 2$, то вектор*:

$$f = (\mathcal{A}-\lambda I)^{m-1} e \tag{1.3}$$

собственный вектор с собственным значением λ, т.е. λ — корень характеристического многочлена.

Доказательство. Действительно, справедлива следующая цепочка равенств:

$$(\mathcal{A}-\lambda I)f=(\mathcal{A}-\lambda I)(\mathcal{A}-\lambda I)^{m-1}e=(\mathcal{A}-\lambda I)^{m}e=\vartheta. \qquad (1.4)$$

Лемма доказана.

Лемма 2. *Корневые векторы, отвечающие корню λ, образуют линейное подпространство в линейном пространстве $\mathcal{L}$.*

Доказательство. Действительно, пусть e_1 и e_2 — корневые векторы высоты m_1 и m_2 соответственно. Тогда справедливы следующие равенства:

$$(\mathcal{A}-\lambda I)^{m_1}e_1=\vartheta, \quad (\mathcal{A}-\lambda I)^{m_2}e_2=\vartheta. \qquad (1.5)$$

Справедлива следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned}&(\mathcal{A}-\lambda I)^{m}(\alpha^1\cdot e_1+\alpha^2\cdot e_2)=\\ &\qquad=(\mathcal{A}-\lambda I)^{m-1}(\alpha^1\cdot(\mathcal{A}-\lambda I)e_1+\alpha^2\cdot(\mathcal{A}-\lambda I)e_2)=\cdots\\ &\cdots=\alpha^1\cdot(\mathcal{A}-\lambda I)^{m}e_1+\alpha^2\cdot(\mathcal{A}-\lambda I)^{m}e_2=\alpha^1\cdot\vartheta+\alpha^2\cdot\vartheta=\vartheta, \qquad (1.6)\end{aligned}$$

где $m=\max\{m_1,m_2\}$ и $\alpha^1,\alpha^2\in\mathbb{K}$ — произвольные числа. Из (1.6) вытекает, что $\alpha^1\cdot e_1+\alpha^2\cdot e_2$ тоже корневой вектор.

Лемма доказана.

Определение 2. *Линейное подпространство в $\mathcal{L}$, состоящее из всех корневых векторов, соответствующих числу $\lambda\in\mathbb{K}$, называется корневым подпространством.*

Обозначение. Для корневого подпространства используется обозначение $V^{\lambda}(A)$. Напомним, что символом $V_{\lambda}(A)$ мы ранее обозначили линейную оболочку из собственных векторов, соответствующих собственному значению λ.

Лемма 3. *Справедливо вложение $V_{\lambda}(A)\subset V^{\lambda}(A)$.*

Доказательство. С одной стороны, линейное подпространство $V_{\lambda}(A)$ состоит из корневых векторов высоты 1 и одного вектора ϑ высоты 0. С другой стороны, линейное подпространство $V^{\lambda}(A)$ состоит из всех корневых векторов, соответствующих числу λ. Поэтому имеет место указанное вложение.

Лемма доказана.

Лемма 4. *Корневое подпространство $V^{\lambda}(A)$ инвариантно относительно оператора $\mathcal{A}$.*

Доказательство. Очевидно, что $\mathcal{A}\vartheta=\vartheta$. Пусть $e\in V^{\lambda}(A)$ — корневой вектор высоты $m\geqslant 1$, тогда $(\mathcal{A}-\lambda I)e$ — корневой вектор высоты $m-1$. Действительно, справедлива следующая цепочка равенств:

$$(\mathcal{A}-\lambda I)^{m-1}(\mathcal{A}-\lambda I)e=(\mathcal{A}-\lambda I)^{m}e=\vartheta.$$

Таким образом, $(\mathcal{A}-\lambda I)e\in V^{\lambda}(A)$, если $e\in V^{\lambda}(A)$. Следовательно, линейное подпространство $V^{\lambda}(A)$ инвариантно относительно оператора $\mathcal{A}-\lambda I$. Заметим, что любое линейное подпространство инвариантно относительно единичного оператора I. Поэтому для любого $e \in V^{\lambda}(A)$ справедлива следующая цепочка соотношений:

$$\mathcal{A}e = (\mathcal{A} - \lambda I)e + (\lambda I)e = (\mathcal{A} - \lambda I)e + \lambda \cdot e \subset \\ \subset V^{\lambda}(A) + V^{\lambda}(A) = V^{\lambda}(A) \Rightarrow \mathcal{A}V^{\lambda}(A) \subset V^{\lambda}(A).$$

Лемма доказана.

Лемма 5. *Множество всех корневых векторов высоты не большей m совпадает с линейным подпространством* $\ker(\mathcal{A} - \lambda I)^m$.

Доказательство. Пусть $e \in \ker(\mathcal{A} - \lambda I)^m$. Тогда имеет место следующее равенство:

$$(\mathcal{A} - \lambda I)^m e = \vartheta,$$

из которого вытекает, что e — корневой вектор высоты не большей m. Обратно, пусть e — корневой вектор высоты $m_1 \leqslant m$, т.е

$$(\mathcal{A} - \lambda I)^{m_1} e = \vartheta \Rightarrow \\ \Rightarrow (\mathcal{A} - \lambda I)^{m-m_1}(\mathcal{A} - \lambda I)^{m_1} e = (\mathcal{A} - \lambda I)^{m-m_1}\vartheta = \vartheta \Rightarrow \\ \Rightarrow (\mathcal{A} - \lambda I)^m e = \vartheta \Rightarrow e \in \ker(\mathcal{A} - \lambda I)^m.$$

Лемма доказана.

Лемма 6. *Справедливы следующие соотношения*:

$$\ker(\mathcal{A} - \lambda I) \subset \ker(\mathcal{A} - \lambda I)^2 \subset \cdots \subset \ker(\mathcal{A} - \lambda I)^m \subset \cdots, \tag{1.7}$$

$$V^{\lambda}(A) = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \ker(\mathcal{A} - \lambda I)^m. \tag{1.8}$$

Доказательство. Пусть $e \in \ker(\mathcal{A} - \lambda I)^{m-1}$ при $m \geqslant 1$, тогда:

$$(\mathcal{A} - \lambda I)^{m-1} e = \vartheta \Rightarrow (\mathcal{A} - \lambda I)(\mathcal{A} - \lambda I)^{m-1} e = \vartheta \Rightarrow \\ \Rightarrow (\mathcal{A} - \lambda I)^m e = \vartheta \Rightarrow e \in \ker(\mathcal{A} - \lambda I)^m. \tag{1.9}$$

Равенство (1.8) вытекает из вложений (1.7).

Лемма доказана.

Лемма 7. *Если* $\dim \mathcal{L} < +\infty$, *то найдется такое минимальное* $m \in \in \mathbb{N}$, *что*

$$V^{\lambda}(A) = \ker(\mathcal{A} - \lambda I)^m. \tag{1.10}$$

Доказательство. Из цепочки вложений (1.7) леммы 6 получаем, что если все вложения строгие, то из (1.8) вытекает $\dim V^{\lambda}(A) = = +\infty$ и при этом $V^{\lambda}(A) \subset \mathcal{L}$. Следовательно, $\dim \mathcal{L} = \infty$, что противоречит нашему предположению $\dim \mathcal{L} < +\infty$. Итак, найдется такое $m \in \mathbb{N}$, что:

$$\ker(\mathcal{A} - \lambda I)^m = \ker(\mathcal{A} - \lambda I)^{m+1} = \cdots.$$

Лемма доказана.

Определение 3. *Скажем, что базис в $V^{\lambda}(A)$ согласован с цепочкой вложений* (1.7) *если он составлен таким образом, что если в линейном подпространстве* $\ker(\mathcal{A} - \lambda I)^s$ *он выбран, то сле-*

дующие элементы базиса являются дополнительными в линейном подпространстве $\ker(\mathcal{A}-\lambda I)^{s+1}$.

Лемма 8. *В базисе линейного подпространства* $V^\lambda(A)\subset\mathcal{L}$, *согласованного с цепочкой вложений* (1.7), *сужение оператора* A *на* $V^\lambda(A)$ *имеет треугольную матрицу с числами* λ *на диагонали.*

Доказательство. Рассмотрим частный случай $V^\lambda(A) = \ker(\mathcal{A}-\lambda I)^2$, на котором будет понятно, что будет в общей ситуации. Итак, пусть:

$$\{\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_{k_1},\mathbf{f}_1,\ldots,\mathbf{f}_{k_2}\} \tag{1.11}$$

базис в $V^\lambda(A)$, согласованный с цепочкой вложений:

$$\ker(\mathcal{A}-\lambda I)\subset\ker(\mathcal{A}-\lambda I)^2,$$

т.е

$$\{\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_{k_1}\} - \text{базис в} \quad \ker(\mathcal{A}-\lambda I), \tag{1.12}$$

$$\{\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_{k_1},\mathbf{f}_1,\ldots,\mathbf{f}_{k_2}\} - \text{базис в} \quad \ker(\mathcal{A}-\lambda I)^2. \tag{1.13}$$

Введем следующее обозначение:

$$\mathcal{B} := \mathcal{A}-\lambda I. \tag{1.14}$$

Тогда имеем:

$$\mathcal{B}\mathbf{e}_1=\vartheta,\ldots,\mathcal{B}\mathbf{e}_{k_1}=\vartheta, \tag{1.15}$$

$$\{\mathcal{B}\mathbf{f}_1,\ldots,\mathcal{B}\mathbf{f}_{k_2}\}\subset\ker\mathcal{B}=L(\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_{k_1}). \tag{1.16}$$

Отсюда приходим к выводу о том, что матрица оператора B в согласованном базисе имеет следующий вид:

$$(\mathcal{B}\mathbf{e}_1,\ldots,\mathcal{B}\mathbf{e}_{k_1},\mathcal{B}\mathbf{f}_1,\ldots,\mathcal{B}\mathbf{f}_{k_2}) = (\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_{k_1},\mathbf{f}_1,\ldots,\mathbf{f}_{k_2})\cdot B, \tag{1.17}$$

$$B=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & b^1_{k_1+1} & \cdots & b^1_{k_1+k_2}\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & b^{k_1}_{k_1+1} & \cdots & b^{k_1}_{k_1+k_2}\\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.18}$$

Поскольку $\mathcal{A}=\mathcal{B}+\lambda I$, то матрица оператора A в согласованном базисе примет следующий вид:

$$A=\begin{pmatrix} \lambda & \cdots & 0 & b^1_{k_1+1} & \cdots & b^1_{k_1+k_2}\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \lambda & b^{k_1}_{k_1+1} & \cdots & b^{k_1}_{k_1+k_2}\\ 0 & \cdots & 0 & \lambda & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix}. \tag{1.19}$$

Лемма доказана.

Лемма 9. *Характеристический многочлен ограничения оператора* $\mathcal{A}$ *на* $V^\lambda(A)$ *равен*:

$$(\lambda - t)^k, \quad k = \dim V^\lambda(A), \tag{1.20}$$

а при $\mu \neq \lambda$ *оператор* $\mathcal{A} - \mu I$ *невырожден на* $V^\lambda(A)$.

Доказательство. Для доказательства (1.20) заметим, что размер матрицы сужения оператора A на $V^\lambda(A)$ равен $k \times k$, где $k = \dim V^\lambda(A)$, причем в базисе, согласованном с цепочкой вложений (1.7) матрица оператора $A - tI$ согласно результату леммы 8 имеет треугольный вид, причем на диагонали расположены числа $\lambda - t$. Действительно, в силу леммы 2 множество $V^\lambda(A)$ является линейным пространством. Рассмотрим сужение оператора A на это линейное пространство. Пусть $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k\}$ — базис в $V^\lambda(A)$. Тогда справедливо следующее равенство:

$$A(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k) = A_e(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k), \quad A_e \in \mathbb{K}^{k \times k}.$$

Следовательно,

$$\det(\mathcal{A}|_{V^\lambda} - tI) = (\lambda - t)^k,$$

где символом $\mathcal{A}|_{V^\lambda}$ мы обозначили сужение оператора $\mathcal{A}$ на линейное подпространство $V^\lambda(A)$.

Второе утверждение докажем от противного. Пусть $\mu \neq \lambda$ и при этом имеем:

$$(A|_{V^\lambda} - \mu I|_{V^\lambda})e = \vartheta \quad \text{для всех} \quad e \in V^\lambda(A).$$

Значит,

$$A|_{V^\lambda} - \mu I|_{V^\lambda} = O|_{V^\lambda} \Rightarrow 0 = \det(A|_{V^\lambda} - \mu I|_{V^\lambda}) = \\ = \det(\lambda I|_{V^\lambda} - \mu I|_{V^\lambda}) = (\lambda - \mu)^k \neq 0.$$

Полученное противоречие доказывает утверждение. Значит, сужение оператора $\mathcal{A} - \mu I$ на $V^\lambda(A)$ — невырожденный оператор при $\mu \neq \lambda$.

Лемма доказана.

Лемма 10. *Высота любого корневого вектора* $e \in V^\lambda(A)$ *не превосходит размерность* $\dim V^\lambda(A)$ *корневого подпространства* $V^\lambda(A)$, *если* $\dim \mathcal{L} < +\infty$.

Доказательство. Пусть корневой вектор $e_0 \in V^\lambda(A)$ имеет высоту $m_0 \in \mathbb{N}$, т.е.

$$(\mathcal{A} - \lambda I)^{m_0} e_0 = \vartheta, \quad (\mathcal{A} - \lambda I)^{m_0 - 1} e_0 \neq \vartheta. \tag{1.21}$$

Заметим, что поскольку $\dim \mathcal{L} < +\infty$, то в силу результата (1.11) леммы 7 найдется такое минимальное $m_1 \in \mathbb{N}$, что

$$V^\lambda(A) = \ker(\mathcal{A} - \lambda I)^{m_1}. \tag{1.22}$$

С одной стороны, поскольку $e_0 \in V^{\lambda}(A)$, то из (1.21) и (1.22) получаем, что $m_0 \leqslant m_1$. С другой стороны, из (1.22) и результата леммы 7 имеют место следующие строгие вложения:

$$\ker(\mathcal{A} - \lambda I) \subset \ker(\mathcal{A} - \lambda I)^2 \subset \cdots$$
$$\cdots \subset \ker(\mathcal{A} - \lambda I)^{m_1 - 1} \subset \ker(\mathcal{A} - \lambda I)^{m_1}. \quad (1.23)$$

Строгие вложения означает, что существуют m_1 линейно независимых векторов $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{m_1}\}$, которые принадлежат следующим множествам:

$$\mathbf{e}_1 \in \ker(\mathcal{A} - \lambda I), \quad \mathbf{e}_2 \in \ker(\mathcal{A} - \lambda I)^2 \setminus \ker(\mathcal{A} - \lambda I), \ldots,$$
$$\ldots, \mathbf{e}_{m_1} \in \ker(\mathcal{A} - \lambda I)^{m_1} \setminus \ker(\mathcal{A} - \lambda I)^{m_1 - 1}.$$

Это означает, что $\dim V^{\lambda}(A) \geqslant m_1 \geqslant m_0$.

Лемма доказана.

Теорема 1. *Размерность* $\dim V^{\lambda}(A)$ *корневого подпространства* $V^{\lambda}(A)$ *равна кратности соответствующего корня* λ *характеристического многочлена.*

Доказательство. Выберем базис $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ линейного пространства $\mathcal{L}$ таким образом, чтобы $V^{\lambda}(A) = L(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k)$. В силу результата леммы 4 линейное подпространство $V_{\lambda}(A)$ инвариантно относительно оператора A. Как ранее мы установили, тогда

$$(\mathcal{A}\mathbf{e}_1, \ldots, \mathcal{A}\mathbf{e}_k, \mathcal{A}\mathbf{e}_{k+1}, \ldots, \mathcal{A}\mathbf{e}_n) = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_{k+1}, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot A, \quad (1.24)$$

где матрица A имеет следующий вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_k^1 & a_{k+1}^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^k & \cdots & a_k^k & a_{k+1}^k & \cdots & a_n^k \\ 0 & \cdots & 0 & a_{k+1}^{k+1} & \cdots & a_n^{k+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{k+1}^n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}, \quad (1.25)$$

которую перепишем в блочном виде:

$$A = \left(\begin{array}{c|c} B & D \\ \hline O & C \end{array}\right), \quad (1.26)$$

$$B = \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_k^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^k & \cdots & a_k^k \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{k \times k}, \quad (1.27)$$

$$D = \begin{pmatrix} a_{k+1}^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k+1}^k & \cdots & a_n^k \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{k \times (n-k)}, \quad (1.28)$$

$$C = \begin{pmatrix} a_{k+1}^{k+1} & \cdots & a_n^{k+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k+1}^n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{(n-k)\times(n-k)}, \quad O \in \mathbb{K}^{(n-k)\times k}. \tag{1.29}$$

Отметим, что B — матрица сужения оператора $\mathcal{A}$ на инвариантное корневое подпространство $V^\lambda(A) = L(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k)$. Из вида матрицы (1.26) справедливо следующее равенство для характеристического многочлена оператора $\mathcal{A}$:

$$f_A(t) = f_B(t)\det(C - tI) = (t-\lambda)^k \det(C - tI). \tag{1.30}$$

Пусть $\mathcal{C}$ — линейный оператор в подпространстве $\mathcal{W} = L(\mathbf{e}_{k+1}, \ldots, \mathbf{e}_n)$, который в базисе $\{\mathbf{e}_{k+1}, \ldots, \mathbf{e}_n)\}$ имеет матрицу C. Докажем, что число $\lambda \in \mathbb{K}$ не является корнем многочлена $\det(C - tI)$, т.е. собственным значением оператора $\mathcal{C}$.

Предположим, что λ — собственное значение оператора $\mathcal{C}$, т.е. найдется такой вектор $e \in \mathcal{W}$, что выполнено равенство:

$$\mathcal{C}e = \lambda \cdot e, \quad e \neq \vartheta. \tag{1.31}$$

Из равенства (1.29) получаем, что:

$$(\mathcal{C}\mathbf{e}_{k+1}, \ldots, \mathcal{C}\mathbf{e}_n) = (\mathbf{e}_{k+1}, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot C \tag{1.32}$$

или в развернутой форме:

$$\mathcal{C}\mathbf{e}_{k+1} = a_{k+1}^{k+1} \cdot \mathbf{e}_{k+1} + \cdots + a_{k+1}^n \cdot \mathbf{e}_n, \tag{1.33}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\mathcal{C}\mathbf{e}_n = a_n^{k+1} \cdot \mathbf{e}_{k+1} + \cdots + a_n^n \cdot \mathbf{e}_n. \tag{1.34}$$

Из равенства (1.25) с учетом (1.33)–(1.34) вытекают равенства:

$$\mathcal{A}\mathbf{e}_{k+1} = a_{k+1}^1 \cdot \mathbf{e}_1 + \cdots + a_{k+1}^k \cdot \mathbf{e}_k + a_{k+1}^{k+1} \cdot \mathbf{e}_{k+1} + \cdots + a_{k+1}^n \cdot \mathbf{e}_n = \\ = a_{k+1}^1 \cdot \mathbf{e}_1 + \cdots + a_{k+1}^k \cdot \mathbf{e}_k + \mathcal{C}\mathbf{e}_{k+1}, \tag{1.35}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\mathcal{A}\mathbf{e}_n = a_n^1 \cdot \mathbf{e}_1 + \cdots + a_n^k \cdot \mathbf{e}_k + a_n^{k+1} \cdot \mathbf{e}_{k+1} + \cdots + a_n^n \cdot \mathbf{e}_n = \\ = a_n^1 \cdot \mathbf{e}_1 + \cdots + a_n^k \cdot \mathbf{e}_k + \mathcal{C}\mathbf{e}_n. \tag{1.36}$$

Поскольку $e \in \mathcal{W} = L(\mathbf{e}_{k+1}, \ldots, \mathbf{e}_n)$, то справедливо равенство:

$$e = c^{k+1} \cdot \mathbf{e}_{k+1} + \cdots + c^n \cdot \mathbf{e}_n. \tag{1.37}$$

Отсюда получаем:

$$\mathcal{A}e = c^{k+1} \cdot \mathcal{A}\mathbf{e}_{k+1} + \cdots + c^n \cdot \mathcal{A}\mathbf{e}_n. \tag{1.38}$$

Из (1.35)–(1.36) и из (1.37) с учетом (1.38) вытекает равенство:

$$\mathcal{A}e = u + \mathcal{C}e = u + \lambda \cdot e, \tag{1.39}$$

$$u = c^{k+1} \cdot (a^1_{k+1} \cdot \mathbf{e}_1 + \dots + a^k_{k+1} \cdot \mathbf{e}_k) + \dots$$
$$\dots + c^n \cdot (a^1_n \cdot \mathbf{e}_1 + \dots + a^k_n \cdot \mathbf{e}_k) \in L(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k) = V^\lambda(A). \quad (1.40)$$

Но тогда:

$$u \in V^\lambda(A) \Rightarrow u \in \ker(\mathcal{A} - \lambda I)^m, \quad m \in \mathbb{N},$$
$$(\mathcal{A} - \lambda I)e = u \in V^\lambda(A) \Rightarrow e \in \ker(\mathcal{A} - \lambda I)^{m+1}.$$

Значит, e — корневой вектор и поэтому $e \in V^\lambda(A) = L(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k)$ и $e \in \in \mathcal{W} = L(\mathbf{e}_{k+1}, \dots, \mathbf{e}_n)$. Но тогда $e = \vartheta$. Пришли к противоречие с тем, что e — собственный вектор оператора $\mathcal{C}$. Значит, λ не является корнем характеристического многочлена $\det(C - tI)$.

Теорема доказана.

Лемма 11. *Корневые подпространства, отвечающие различным корням $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, линейно независимы.*

Доказательство. Доказательство проведем по индукции. Предположим, что для $(k-1)$–го корневые подпространства, отвечающие различным корням, линейно независимы. Докажем, что k корневых подпространств тоже линейно независимы. Отметим, что одно корневое подпространство содержит ненулевой вектор и поэтому линейно независимо.

Пусть $\mathbf{e}_1 \in V^{\lambda_1}(A)$, ... $\mathbf{e}_k \in V^{\lambda_k}(A)$ — произвольные ненулевые векторы. Рассмотрим их линейную комбинацию:

$$\alpha^1 \cdot \mathbf{e}_1 + \dots + \alpha^{k-1} \cdot \mathbf{e}_{k-1} + \alpha^k \cdot \mathbf{e}_k = \vartheta. \quad (1.41)$$

Пусть корневой вектор $\mathbf{e}_k$ имеет высоту $m \in \mathbb{N}$. Тогда:

$$(\mathcal{A} - \lambda_k I)^m \mathbf{e}_k = \vartheta, \quad (\mathcal{A} - \lambda_k I)^{m-1} \mathbf{e}_k \neq \vartheta. \quad (1.42)$$

В силу результата леммы 9 имеем:

$$\mathbf{e}_1 \notin \ker(\mathcal{A} - \lambda_k I)^m, \dots, \mathbf{e}_{k-1} \notin \ker(\mathcal{A} - \lambda_k I)^m. \quad (1.43)$$

И поэтому, с одной стороны,

$$(\mathcal{A} - \lambda_k I)^m \mathbf{e}_1 \neq \vartheta, \dots, (\mathcal{A} - \lambda_k I)^m \mathbf{e}_{k-1} \neq \vartheta. \quad (1.44)$$

По предположению индукции ненулевые векторы

$$(\mathcal{A} - \lambda_k I)^m \mathbf{e}_1 \in V^{\lambda_1}(A), \dots, (\mathcal{A} - \lambda_k I)^m \mathbf{e}_{k-1} \in V^{\lambda_{k-1}}(A)$$

линейно независимы. Применим линейный оператор $(\mathcal{A} - \lambda_k I)^m$ к обеим частям равенства (1.41) и с учетом (1.42) получим равенство:

$$\alpha^1 \cdot (\mathcal{A} - \lambda_k I)^m \mathbf{e}_1 + \dots + \alpha^{k-1} \cdot (\mathcal{A} - \lambda_k I)^m \mathbf{e}_{k-1} = \vartheta. \quad (1.45)$$

По предположению индукции отсюда получаем, что:

$$\alpha^1 = \dots = \alpha^{k-1} = 0.$$

Отсюда и из (1.41) получаем, что:

$$\alpha^k \cdot \mathbf{e}_k = \vartheta \Rightarrow \alpha^k = 0,$$

поскольку $\mathbf{e}_k \neq \vartheta$. Таким образом, ненулевые векторы $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k\}$, произвольным образом выбранные из соответствующих корневых подпространств, являются линейно независимыми. Значит, линейно независимы и все корневые подпространства.

Лемма доказана.

Теорема 2. *Если характеристический многочлен*:

$$f_A(t) = \det(\mathcal{A} - tI)$$

разлагается на линейные множители, то:

$$\mathcal{L} = V^{\lambda_1}(A) \oplus \dots \oplus V^{\lambda_s}(A), \tag{1.46}$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ — *различные корни многочлена* $f_A(t)$.

Доказательство. Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ — различные корни кратности $k_1, \dots, k_s$ характеристического многочлена $f_A(t)$. Поскольку многочлен представим в виде (разлагается на линейные множители):

$$f_A(t) = (\lambda_1 - t)^{k_1} \cdots (t - \lambda_s)^{k_s},$$

то $k_1 + \dots + k_s = n$, где $n = \dim \mathcal{L}$. Но тогда в силу результата теоремы 1 имеем:

$$k_1 = \dim V^{\lambda_1}(A), \dots, k_s = \dim V^{\lambda_s}(A), \tag{1.47}$$

а в силу результата леммы 11 корневые подпространства:

$$V^{\lambda_1}(A), \dots, V^{\lambda_s}(A)$$

линейно независимы. Тогда:

$$\dim V = k_1 + \dots + k_s = n, \quad V := V^{\lambda_1}(A) \oplus \dots \oplus V^{\lambda_s}(A) \Rightarrow \\ \Rightarrow \mathcal{L} = V^{\lambda_1}(A) \oplus \dots \oplus V^{\lambda_s}(A). \tag{1.48}$$

Теорема доказана.

Замечание 2. В силу результата леммы 4 оператор $\mathcal{A} \in L(\mathcal{L}; \mathcal{L})$ инвариантен на каждом из корневых подпространств $V^{\lambda_1}(A), \dots, V^{\lambda_s}(A)$. Поэтому нам теперь достаточно изучить сужение оператора $\mathcal{A}$ на корневом подпространстве.

§ 2. Нильпотентные операторы

Определение 4. *Линейный оператор* $\mathcal{N} \in L(\mathcal{L}; \mathcal{L})$ *называется нильпотентным, если существует такое* $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, *что* $\mathcal{N}^m = O$. *Наименьшее из таких* m *называется высотой нильпотентного оператора* $\mathcal{N}$.

Пример 2. *Оператор дифференцирования в пространстве полиномов.* Выберем в пространстве многочленов P^n степени не выше $n \in \mathbb{N}$ базис следующим образом:

$$\mathbf{e}_1 = 1, \quad \mathbf{e}_2 = t, \quad \mathbf{e}_3 = \frac{t^2}{2!}, \quad \cdots, \quad \mathbf{e}_{n+1} = \frac{t^n}{n!}.$$

Заметим, что:

$$D_t \mathbf{e}_1 = \vartheta \in P^n, \quad D_t \mathbf{e}_{k+1} = \mathbf{e}_k, \quad k = \overline{1, n+1},$$

и поэтому справедливо равенство:

$$(D_t \mathbf{e}_1, D_t \mathbf{e}_2, \ldots, D_t \mathbf{e}_{n+1}) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_{n+1}) D,$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно заметить, что:

$$D_t^{n+1} p(t) = 0 \quad \text{для любого} \quad p(t) \in P^n,$$

причем:

$$D_t^n \mathbf{e}_{n+1} = 1 \neq 0.$$

Следовательно, оператор дифференцирования D_t является нильпотентным оператором на P^n высоты $n+1$.

Замечание 3. Заметим, что $V^\lambda(A) = \ker(\mathcal{A} - \lambda I)^m$ для некоторого минимального $m \in \mathbb{N}$. Поэтому оператор:

$$\mathcal{N} = \mathcal{A} - \lambda I$$

является нильпотентным оператором степени m на линейном пространстве $V^\lambda(A) = \ker(\mathcal{A} - \lambda I)^m$. Поэтому наша задача заключается в изучении нильпотентных операторов, действующих в конечномерных линейных пространствах.

Итак, пусть $\mathcal{N} \in L(\mathcal{L}; \mathcal{L})$ — нильпотентный оператор.

Определение 5. *Высотой вектора $e \in \mathcal{L}$ относительно нильпотентного оператора $\mathcal{N}$ называется наименьшее $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, для которого*:

$$\mathcal{N}^m e = \vartheta, \tag{2.1}$$

т.е. высота вектора e как корневого вектора оператора $\mathcal{N}$, отвечающего корню $\lambda = 0$.

Лемма 12. *Высота вектора, как корневого вектора оператора $\mathcal{N}$, соответствующего корню 0, не превосходит высоты самого оператора $\mathcal{N}$, причем существуют векторы, высота которых равна высоте оператора $\mathcal{N}$.*

Доказательство. Прямое следствие определения 5.

Лемма доказана.

Обозначение. Будем высоту вектора $e \in \mathcal{L}$ относительно нильпотентного оператора $\mathcal{N}$ обозначать $\operatorname{ht} e$.

Лемма 13. *Если $e \in \mathcal{L}$ — вектор высоты m относительно нильпотентного оператора $\mathcal{N}$, то векторы*:

$$e,\ \mathcal{N}e,\ \mathcal{N}^2e,\ \ldots,\ \mathcal{N}^{m-1}e \tag{2.2}$$

линейно независимы. Кроме того, если:

$$u = \lambda_0 \cdot e + \lambda_1 \cdot \mathcal{N}e + \cdots + \lambda_{m-1} \cdot \mathcal{N}^{m-1}e, \tag{2.3}$$

причем в правой части этого равенства находится нетривиальная линейная комбинация, то и ненулевой вектор высоты $m-k$, где $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ — номер первого ненулевого коэффициента.

Доказательство. *Шаг 1.* Действительно, рассмотрим следующую линейную комбинацию:

$$\alpha^1 \cdot e + \alpha^2 \cdot \mathcal{N}e + \cdots + \alpha^m \cdot \mathcal{N}^{m-1}e = \vartheta. \tag{2.4}$$

Сначала применим к обеим частям равенства (2.4) линейный оператор $\mathcal{N}^{m-1}$. Поскольку:

$$\mathcal{N}^{m-1}e \neq \vartheta, \quad \mathcal{N}^m e = \vartheta, \tag{2.5}$$

то получим равенство:

$$\alpha^1 \cdot \mathcal{N}^{m-1}e = \vartheta \Rightarrow \alpha^1 = 0. \tag{2.6}$$

Из (2.4) с учетом (2.6) получим равенство:

$$\alpha^2 \cdot \mathcal{N}e + \cdots + \alpha^m \cdot \mathcal{N}^{m-1}e = \vartheta. \tag{2.7}$$

Теперь применим к обеим частям равенства (2.7) линейный оператор $\mathcal{N}^{m-2}$ и с учетом (2.5) получим равенство:

$$\alpha^2 \cdot \mathcal{N}^{m-1}e = \vartheta \Rightarrow \alpha^2 = 0. \tag{2.8}$$

Продолжая таким образом, мы получим равенства:

$$\alpha^1 = \alpha^2 = \cdots = \alpha^m = 0.$$

Первая часть утверждения леммы доказана.

Шаг 2. Для доказательства второго утверждения заметим, что если $\lambda_k \neq 0$ — первый ненулевой коэффициент в правой части (2.3), то справедливы следующие равенства:

$$\mathcal{N}^{m-k-1}u = \lambda_k \cdot \mathcal{N}^{m-1}e \neq \vartheta, \quad \mathcal{N}^{m-k}u = \lambda_k \cdot \mathcal{N}^m e = \vartheta,$$

где мы воспользовались соотношениями (2.5). Таким образом, вектор u имеет высоту $m-k$.

Лемма доказана.

Определение 6. *Подпространство $L(e, \mathcal{N}e, \ldots, \mathcal{N}^{m-1}e) \subset \mathcal{L}$, где $m = \operatorname{ht} e$, называется циклическим подпространством нильпотентного оператора $\mathcal{N}$ в $\mathcal{L}$, порожденным вектором e.*

Лемма 14. *Циклическое подпространство $L(e, \mathcal{N}e, \ldots, \mathcal{N}^{m-1}e)$ инвариантно относительно оператора $\mathcal{N}$ и ограничение оператора $\mathcal{N}$ на это подпространство имеет высоту m.*

Доказательство. Заметим, что поскольку m — высота вектора e относительно нильпотентного оператора $\mathcal{N}$, то справедливы следующие соотношения:

$$\mathcal{N}e \in L(e, \mathcal{N}e, \ldots, \mathcal{N}^{m-1}e), \tag{2.9}$$

$$\mathcal{N}\mathcal{N}e = \mathcal{N}^2 e \in L(e, \mathcal{N}e, \ldots, \mathcal{N}^{m-1}e), \tag{2.10}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\mathcal{N}\mathcal{N}^{m-2}e = \mathcal{N}^{m-1}e \in L(e, \mathcal{N}e, \ldots, \mathcal{N}^{m-1}e), \tag{2.11}$$

$$\mathcal{N}\mathcal{N}^{m-1}e = \mathcal{N}^{m}e = \vartheta \in L(e, \mathcal{N}e, \ldots, \mathcal{N}^{m-1}e). \tag{2.12}$$

Из соотношений (2.9)–(2.12) вытекает первое утверждение. Заметим, что:

$$\mathcal{N}^{m-1}e \neq \vartheta, \quad \mathcal{N}^{m}e = \vartheta.$$

Пусть $u \in L(e, \mathcal{N}e, \ldots, \mathcal{N}^{m-1}e)$. Тогда:

$$u = \alpha_0 \cdot e + \alpha_1 \cdot \mathcal{N}e + \alpha_2 \cdot \mathcal{N}^2 e + \cdots + \alpha_{m-1} \cdot \mathcal{N}^{m-1}e.$$

Поскольку $\operatorname{ht} e = m$, то

$$\mathcal{N}^{m}u = \vartheta, \quad \mathcal{N}^{m-1}e \neq \vartheta.$$

Значит, оператор $\mathcal{N}$ является нильпотентным на $L(e, \mathcal{N}e, \ldots, \mathcal{N}^{m-1}e)$ высоты $m \in \mathbb{N}$.

Лемма доказана.

Лемма 15. *В базисе*

$$\mathbf{e}_1 = \mathcal{N}^{m-1}e,\ \mathbf{e}_2 = \mathcal{N}^{m-2}e,\ \ldots,\ \mathbf{e}_{m-1} = \mathcal{N}e,\ \mathbf{e}_m = e, \tag{2.13}$$

где $m = \operatorname{ht} e$, *ограничение оператора* $\mathcal{N}$ *на циклическое подпространство* $L(e, \mathcal{N}e, \ldots, \mathcal{N}^{m-1}e)$ *имеет следующую матрицу размера* $m \times m$*:*

$$J(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.14}$$

Доказательство. Заметим, что справедливы равенства:

$$\mathcal{N}\mathbf{e}_1 = \vartheta,\ \ldots,\ \mathcal{N}\mathbf{e}_{k+1} = \mathbf{e}_k \quad \text{при} \quad k = \overline{2, m-1}. \tag{2.15}$$

Поэтому справедливо следующее равенство:

$$(\mathcal{N}\mathbf{e}_1, \mathcal{N}\mathbf{e}_2, \mathcal{N}\mathbf{e}_3 \ldots, \mathcal{N}\mathbf{e}_{m-1}, \mathcal{N}\mathbf{e}_m) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \ldots, \mathbf{e}_{m-1}, \mathbf{e}_m) \cdot J(0).$$

Лемма доказана.

Определение 7. $J(0)$ *называется жордановой клеткой.*

Лемма 16. *Справедливы следующие равенства*: $(J(0))^{m-1} \neq O$, $(J(0))^m = O$.

Доказательство. Следует из того, что ограничение нильпотентного оператора $\mathcal{N}$ порядка $m \in \mathbb{N}$ на циклическое подпространство $L(e, \mathcal{N}e, \ldots, \mathcal{N}^{m-1}e)$ в базисе (2.13) имеет матрицу $J(0)$. Поэтому:

$$
\begin{gathered}
(\mathcal{N}^m \mathbf{e}_1, \mathcal{N}^m \mathbf{e}_2, \mathcal{N}^m \mathbf{e}_3 \ldots, \mathcal{N}^m \mathbf{e}_{m-1}, \mathcal{N}^m \mathbf{e}_m) = \\
= (O\mathbf{e}_1, O\mathbf{e}_2, O\mathbf{e}_3 \ldots, O\mathbf{e}_{m-1}, O\mathbf{e}_m) = (\vartheta, \ldots, \vartheta) = \\
= (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \ldots, \mathbf{e}_{m-1}, \mathbf{e}_m) \cdot (J(0))^m,
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
(\vartheta, \vartheta, \ldots, \vartheta, \mathcal{N}^{m-1}e) = \\
= (\mathcal{N}^{m-1}\mathbf{e}_1, \mathcal{N}^{m-1}\mathbf{e}_2, \mathcal{N}^{m-1}\mathbf{e}_3 \ldots, \mathcal{N}^{m-1}\mathbf{e}_{m-1}, \mathcal{N}^{m-1}\mathbf{e}_m) = \\
= (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \ldots, \mathbf{e}_{m-1}, \mathbf{e}_m) \cdot (J(0))^{m-1}.
\end{gathered}
$$

Здесь мы воспользовались следующими равенствами, справедливыми для произвольного линейного оператора $\mathcal{A} \in L(\mathcal{L}; \mathcal{L})$ с базисом $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ линейного пространства $\mathcal{L}$:

$$
\mathcal{A}(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) = (\mathcal{A}\mathbf{e}_1, \ldots, \mathcal{A}\mathbf{e}_n) = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot A_e,
$$

$$
\begin{gathered}
\mathcal{A}^2(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) = \mathcal{A}(\mathcal{A}\mathbf{e}_1, \ldots, \mathcal{A}\mathbf{e}_n) = \mathcal{A}(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot A_e = \\
= (\mathcal{A}\mathbf{e}_1, \ldots, \mathcal{A}\mathbf{e}_n) \cdot A_e = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot A_e^2.
\end{gathered}
$$

Лемма доказана.

Теорема 3. *Пусть $e \in \mathcal{L}$ — вектор максимальной высоты m (равной высоте нильпотентного оператора $\mathcal{N}$) и*

$$
\mathcal{U} = L(e, \mathcal{N}e, \ldots, \mathcal{N}^{m-1}e) \tag{2.16}
$$

— порожденное им циклическое подпространство. Тогда существует инвариантное относительно $\mathcal{N}$ подпространство $\mathcal{W} \subset \mathcal{L}$, дополнительное к $\mathcal{U}$, т.е. такое, что:

$$
\mathcal{L} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{W}. \tag{2.17}
$$

Доказательство. *Шаг 1.* Нам нужно доказать существование такого инвариантного подпространства $\mathcal{W} \subset \mathcal{L}$, что $\mathcal{U} \cap \mathcal{W} = \{\vartheta\}$ и $\mathcal{U} + \mathcal{W} = \mathcal{L}$. Заведомо существуют такие линейные подпространства $\mathcal{W}$, удовлетворяющие первому свойству, например, $\mathcal{W} = \{\vartheta\}$. Выберем из них максимальное, т.е. такое, которое нельзя увеличить с сохранением указанного свойства. Обозначим его через $\mathcal{W}$ и докажем, что

$$
\mathcal{U} + \mathcal{W} = \mathcal{L}.
$$

Шаг 2. Предположим, что это не так и существует такой вектор, что

$$
v \notin \mathcal{U} + \mathcal{W}. \tag{2.18}
$$

Поскольку $\mathcal{N}$ — нильпотентный оператор степени $m \in \mathbb{N}$, то имеем:

$$\mathcal{N}^m v = \vartheta \in \mathcal{U} + \mathcal{W}. \tag{2.19}$$

Из (2.18) и (2.19) вытекает существование такого $k \in \overline{1, m}$, что:

$$\mathcal{N}^{k-1} v \notin \mathcal{U} + \mathcal{W}, \quad \mathcal{N}^k v \in \mathcal{U} + \mathcal{W}. \tag{2.20}$$

Сделаем замену:

$$\mathcal{N}^{k-1} v \to v. \tag{2.21}$$

Тогда с учетом (2.20) получим, что:

$$\mathcal{N} v \in \mathcal{U} + \mathcal{W}. \tag{2.22}$$

Из (2.22) вытекает, что:

$$\mathcal{N} v = u + w, \quad u \in \mathcal{U}, \quad w \in \mathcal{W}. \tag{2.23}$$

Применим к обеим частям равенства (2.23) оператор $\mathcal{N}^{m-1}$ и получим равенство:

$$\vartheta = \mathcal{N}^{m-1} u + \mathcal{N}^{m-1} w, \tag{2.24}$$

поскольку $\mathcal{N}^m = O$. По построению линейные подпространства $\mathcal{U}$ и $\mathcal{W}$ инвариантны относительно оператора $\mathcal{N}$. Поэтому:

$$u \in \mathcal{U} \Rightarrow \mathcal{N}^{m-1} u \in \mathcal{U}, \tag{2.25}$$

$$w \in \mathcal{W} \Rightarrow \mathcal{N}^{m-1} w \in \mathcal{W}, \tag{2.26}$$

$$\mathcal{U} \cap \mathcal{W} = \{\vartheta\}. \tag{2.27}$$

Из (2.24) с учетом (2.25)–(2.27) получаем, в частности, равенство:

$$\mathcal{N}^{m-1} u = \vartheta. \tag{2.28}$$

Значит, высота вектора $\operatorname{ht} u < m$. В силу результата леммы 13 справедливо равенство:

$$u = \lambda_0 \cdot e + \lambda_1 \cdot \mathcal{N} e + \cdots + \lambda_{m-1} \cdot \mathcal{N}^{m-1} e. \tag{2.29}$$

Применим к обеим частям равенства (2.29) оператор $\mathcal{N}^{m-1}$ и с учетом (2.28), а также того, что $\mathcal{N}^m = O$, получим равенство:

$$\lambda_0 \cdot \mathcal{N}^{m-1} e = \vartheta \Rightarrow \lambda_0 = 0, \tag{2.30}$$

поскольку вектор e имеет высоту m. Из (2.29) и (2.30) вытекает:

$$u = \lambda_1 \cdot \mathcal{N} e + \cdots + \lambda_{m-1} \cdot \mathcal{N}^{m-1} e \in L(\mathcal{N} e, \ldots, \mathcal{N}^{m-1} e) = \mathcal{N}\mathcal{U}. \tag{2.31}$$

Последнее вложение означает, что найдется такой вектор $u' \in \mathcal{U}$, что

$$u = \mathcal{N} u', \quad u' \in \mathcal{U}. \tag{2.32}$$

Из равенств (2.23) и (2.32) получаем, что

$$\mathcal{N}(v - u') = w \in \mathcal{W}. \tag{2.33}$$

Заменим v на $v - u'$. Тогда из (2.33) получаем:

$$\mathcal{N}(v) \in \mathcal{W}. \tag{2.34}$$

Шаг 3. Рассмотрим линейное пространство:

$$\mathcal{W}' := \mathcal{W} + L(v). \tag{2.35}$$

Заметим, что $\mathcal{W}'$ инвариантно относительно оператора $\mathcal{N}$. Действительно, пусть $z' \in \mathcal{W}'$. Тогда найдутся такие $y \in \mathcal{W}$ и $x = \lambda v \in L(v)$, что справедливо равенство:

$$z' = y + \lambda \cdot v \Rightarrow \mathcal{N}z' = \mathcal{N}y + \lambda \cdot \mathcal{N}v \in \mathcal{W} + \mathcal{W} \subset \mathcal{W}, \tag{2.36}$$

где мы воспользовались вложением (2.34).

Докажем теперь, что

$$\mathcal{U} \cap \mathcal{W}' = \{\vartheta\}.$$

Предположим противное:

$$y \in \mathcal{U} \cap \mathcal{W}', \quad y \neq \vartheta. \tag{2.37}$$

Тогда вектор y имеет следующий вид:

$$y = z + \lambda \cdot v, \quad z \in \mathcal{W}. \tag{2.38}$$

Заметим, что $\lambda \neq 0$. Действительно, если $\lambda = 0$, то из (2.38) получаем $y \in \mathcal{W}$, а в силу (2.37) получаем, что $y \in \mathcal{U}$. Итак,

$$y \in \mathcal{U} \cap \mathcal{W} = \{\vartheta\}.$$

Полученное противоречие доказывает, что $\lambda \neq 0$. Без ограничения общности можно считать, что $\lambda = 1$. Тогда из (2.38) получаем выражение

$$v = y - z \in \mathcal{U} + \mathcal{W},$$

что противоречит соотношению (2.18).

Теорема доказана.

Теорема 4. *Линейное пространство $\mathcal{L}$, на котором определен нильпотентный оператор $\mathcal{N}$, может быть разложено в прямую сумму циклических подпространств оператора $\mathcal{N}$. Количество слагаемых в таком разложении равно* $\dim \ker \mathcal{N}$.

Доказательство. *Шаг 1.* Будем доказывать первое утверждение теоремы индукцией по $n = \dim \mathcal{L}$. При $n = 1$ утверждение теоремы очевидно. Предположим, что при $\dim \mathcal{L} = n - 1$ первое утверждение теоремы выполнено. Пусть $\mathcal{U} \subset \mathcal{L}$ — циклическое подпространство, порожденное каким–либо вектором максимальной высоты. Согласно теореме 3 существует такое инвариантное относительно $\mathcal{N}$ подпространство $\mathcal{W} \subset \mathcal{L}$, что

$$\mathcal{L} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{W} \Rightarrow \dim \mathcal{W} \leqslant n - 1.$$

По предположению индукции подпространство $\mathcal{W}$ можно разложить в прямую сумму циклических подпространств. Вместе с циклическим подпространством $\mathcal{U}$ все линейное пространство $\mathcal{L}$ можно представить в виде прямой суммы циклических подпространств.

Шаг 2. Пусть:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{L}_k \tag{2.39}$$

— разложение пространства $\mathcal{L}$ в прямую сумму циклических подпространств нильпотентного оператора $\mathcal{N}$. Очевидно, что

$$\ker \mathcal{N} = \ker \mathcal{N}|_{L_1} \oplus \cdots \oplus \ker \mathcal{N}|_{L_k}. \tag{2.40}$$

Докажем, что

$$\ker \mathcal{N}|_{L_j} = 1 \quad \text{для всех} \quad j = \overline{1,k}. \tag{2.41}$$

Действительно, базис в любом циклическом подпространстве $\mathcal{U}$ относительно оператора $\mathcal{N}$ образуют векторы:

$$\{e, \mathcal{N}e, \ldots, \mathcal{N}^{m-1}e\}, \tag{2.42}$$

где m — высота нильпотентного оператора $\mathcal{N}$, а $e \in \mathcal{U}$ — вектор высоты m, т.е.

$$\mathcal{N}^{m-1}e \neq \vartheta, \quad \mathcal{N}^m e = \vartheta. \tag{2.43}$$

Поэтому только крайний вектор:

$$\mathcal{N}^{m-1}e \in \ker \mathcal{N}|_U \subset \mathcal{U},$$

а остальные векторы из семейства (2.42) не принадлежат ядру $\ker \mathcal{N}|_U$. Стало быть,

$$\dim \ker \mathcal{N}|_U = 1. \tag{2.44}$$

Итак, (2.41) доказано. Поэтому из (2.40) и (2.41) вытекает равенство:

$$\dim \ker \mathcal{N} = k. \tag{2.45}$$

Сравнивая (2.39) с (2.45), приходим ко второму утверждению теоремы.

Теорема доказана.

Теорема 5. *Для нильпотентности линейного оператора* $\mathcal{N} \in L(\mathcal{L};\mathcal{L})$, $\dim \mathcal{L} = n \in \mathbb{N}$ *необходимо и достаточно, чтобы он имел нулевое собственное значение кратности* n.

Доказательство. *Шаг 1. Необходимость.* Пусть $\mathcal{N}^k = O$ и $Ax = \lambda \cdot x$, $x \neq \vartheta$. Тогда имеем:

$$\vartheta = O^k x = A^k x = \lambda^k \cdot x \Rightarrow \lambda = 0.$$

Шаг 2. Достаточность. Доказательство достаточности основано на теореме Гамильтона–Кэли, что выходит за рамки настоящего курса.

Теорема доказана.

§ 3. Жорданова форма

Возвращаясь к линейному оператору $\mathcal{A} \in L(\mathcal{L};\mathcal{L})$, заметим, что корневое подпространство:

$$V^{\lambda}(A) = \ker(\mathcal{A} - \lambda I)^m$$

является циклическим для оператора $\mathcal{N} := (\mathcal{A} - \lambda I)|_{V^{\lambda}}$. Действительно, оператор $\mathcal{N}$ обладает свойствами:

$$\mathcal{N}^m = O, \quad \mathcal{N}^{m-1} \neq O \quad \text{на} \quad V^{\lambda}(A).$$

Поэтому в $V^{\lambda}(A)$ существует вектор e максимальной высоты m. Поэтому, с одной стороны, в силу результата леммы 13 следующее семейство векторов является линейно независимым:

$$\left\{e, \mathcal{N}e, \ldots, \mathcal{N}^{m-1}e\right\} \subset V^{\lambda}(A), \tag{3.1}$$

где последнее вложение выполнено, поскольку оператор $\mathcal{N}$ инвариантен на $V^{\lambda}(A)$ в силу результата леммы 4. Отметим, что на каждом циклическом подпространстве:

$$\mathcal{U} = L(e, \mathcal{N}e, \ldots, \mathcal{N}^{m-1}e) \subset V^{\lambda}(A).$$

оператор $\mathcal{A} = \mathcal{N} + \lambda I$ имеет матрицу следующего вида:

$$J(\lambda) = J(0) + \lambda I = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

Определение 8. *Квадратная матрица $J(\lambda)$ вида (3.2) называется жордановой клеткой с собственным значением $\lambda \in \mathbb{K}$. Жордановым блоком, соответствующим собственному значению $\lambda \in \mathbb{K}$, называется клеточно–диагональная квадратная матрица*:

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} J_{i_1}(\lambda) & & & O \\ & J_{i_2}(\lambda) & & \\ & & \ddots & \\ O & & & J_{i_s}(\lambda) \end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

Замечание 4. Заметим, что $J_{i_1}, J_{i_2}, \ldots, J_{i_s}$ — какие-то жордановы клетки, причем порядок жордановой клетки J_{i_k} равен i_k и ниже в лемме 19 будет доказано, что s — геометрическая кратность собственного значения λ, а в силу леммы 18 $i_1 + i_2 + \cdots + i_s = m_{\lambda}$, где m_{λ} — алгебраическая кратность собственного значения λ.

Определение 9. *Блочно-диагональная матрица A, составленная из жордановых блоков*:

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} A(\lambda_1) & & & O \\ & A(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ O & & & A_p(\lambda_p) \end{pmatrix}, \quad \lambda_j \neq \lambda_k, \quad j \neq k$$

называется жордановой формой.

Теорема 6. *Если характеристический многочлен*:

$$f_A(t) = \det(\mathcal{A} - tI)$$

разлагается на линейные множители в поле $\mathbb{K}$, то существует базис, в котором матрица оператора $\mathcal{A}$ жорданова.

Доказательство. Прямое следствие теорем 2 и 4.

Теорема доказана.

Лемма 17. *Матрица любого линейного оператора*:

$$\mathcal{A} \in L(\mathcal{L}; \mathcal{L}),$$

где $\mathcal{L}$ — линейное пространство над полем комплексных чисел, может быть приведена к жордановой форме.

Определение 10. *Базис, в котором матрица линейного оператора имеет жорданову форму, называется жордановым.*

Лемма 18. *В жордановой форме матрицы оператора $\mathcal{A}$ сумма порядков жордановых клеток с собственным значением λ равна* $\dim V^{\lambda}(A)$, *т.е. кратности λ как корня характеристического многочлена $f_A(t) = \det(\mathcal{A} - tI)$.*

Доказательство. В силу теоремы 4 линейное подпространство $V^{\lambda}(A)$ может быть разложена в прямую сумму циклических подпространств нильпотентного оператора:

$$\mathcal{N} = (\mathcal{A} - \lambda I)|_{V^{\lambda}}.$$

Поэтому объединение базисов соответствующих базисов циклических подпространств образует базис всего корневого подпространства $V^{\lambda}(A)$. Но это и означает, что сумма порядков жордановых клеток, соответствующих собственному значению λ равна размерности $V^{\lambda}(A)$.

Лемма доказана.

Лемма 19. *Число жордановых клеток с собственным значением λ равно* $\dim V_{\lambda}(A)$.

Доказательство. Для доказательства утверждения леммы нужно воспользоваться вторым утверждением теоремы 4, в которой:

$$\mathcal{N} = (\mathcal{A} - \lambda I)|_{V^{\lambda(A)}}.$$

Лемма доказана.

Лемма 20. *Максимальный порядок жордановых клеток с собственным значением λ в жордановой форме матрицы оператора $\mathcal{A}$ равен высоте нильпотентного оператора $\mathcal{N} = (\mathcal{A} - \lambda I)|_{V^\lambda(A)}$.*

Доказательство. *Существование.* Пусть высота нильпотентного оператора $\mathcal{N}$ из условия леммы равна $m \in \mathbb{N}$, что означает, что существует вектор $e \in V^\lambda(A)$ такой, что:

$$\mathcal{N}^{m-1}e \neq \vartheta, \quad \mathcal{N}^m e = \vartheta.$$

Поэтому существует циклическое подпространство:

$$L(e, \mathcal{N}e, \ldots, \mathcal{N}^{m-1}e),$$

размерность которого равна m и соответствующая жорданова клетка имеет размер $m \times m$.

Максимальность. Предположим, что жорданова клетка имеет размер $p \times p$ при $p > m$. Это означает что существует циклическое подпространство:

$$L(f, \mathcal{N}f, \ldots, \mathcal{N}^{p-1}f).$$

Но отсюда вытекает, что:

$$\mathcal{N}^{p-1}f \neq \vartheta, \quad p \geqslant m + 1.$$

Пришли к противоречию с тем, что высота нильпотентного оператора $\mathcal{N}$ равна m.

Лемма доказана.

Лемма 21. *Справедливо равенство*:

$$\ker(\mathcal{A} - \lambda I)^{m_\lambda} = V^\lambda(A), \tag{3.4}$$

где m_λ — алгебраическая кратность корня λ характеристического многочлена $\det(A - \lambda I)$.

Доказательство. *Шаг 1.* Введем привычные обозначения. Пусть $\mathcal{N} := \mathcal{A} - \lambda I$. Предположим, что высота нильпотентного оператора $\mathcal{N}$ равна $n \in \mathbb{N}$, а алгебраическая кратность m_λ корня $\lambda \in \mathbb{K}$ меньше n. Тогда найдется такой вектор $e \in V^\lambda(A)$, высота которого равна n. Но тогда размерность циклического подпространства $L(e, \mathcal{N}e, \ldots, \mathcal{N}^{n-1}e)$ равна:

$$n > m_\lambda = \dim V^\lambda(A) \geqslant \dim L(e, \mathcal{N}e, \ldots, \mathcal{N}^{n-1}e) = n.$$

Полученное противоречие доказывает, что высота n ограничения оператора $\mathcal{A} - \lambda I$ на корневое пространство $V^\lambda(A)$ не превосходит алгебраической кратности m_λ корня λ характеристического многочлена.

Шаг 2. С одной стороны, с учетом обозначений первого шага имеем:

$$\ker(A - \lambda I)^n = V^\lambda(A), \quad n \leqslant m_\lambda,$$

а, с другой стороны, для ограничения оператора $\mathcal{A} - \lambda I$ на линейное подпространство $V^{\lambda}(A)$ справедливо равенство:

$$\ker(A - \lambda I)^n = \ker(A - \lambda I)^p \quad \text{для всех} \quad p \geqslant n.$$

Таким образом, приходим к равенству (3.4).

Лемма доказана.

§ 4. Жорданова лестница

Пусть высота нильпотентного оператора $\mathcal{N} \in L(\mathcal{L}; \mathcal{L})$ $(0 < \dim \mathcal{L} < +\infty)$ равна $k \in \mathbb{N}$. Сначала выберем какую–либо максимальную систему векторов:

$$\{\mathbf{e}_1^{(k)}, \mathbf{e}_2^{(k)}, \dots, \mathbf{e}_{r_k}^{(k)}\} \subset \ker \mathcal{N}^k = \mathcal{L},$$

которая является линейно независимой над $\ker \mathcal{N}^{k-1}$ и, в частности,

$$\{\mathbf{e}_1^{(k)}, \mathbf{e}_2^{(k)}, \dots, \mathbf{e}_{r_k}^{(k)}\} \not\subset \ker \mathcal{N}^{k-1}.$$

Заметим, что:

$$\ker \mathcal{N} \subset \dots \subset \ker \mathcal{N}^{k-1} \subset \mathcal{N}^k = \mathcal{L},$$

причем все вложения строгие. Векторы из набора $\{\mathbf{e}_1^{(k)}, \mathbf{e}_2^{(k)}, \dots, \mathbf{e}_{r_k}^{(k)}\}$ являются старшими корневыми векторами и им соответствуют жордановы клетки размера k.

Теперь применим к семейству векторов $\{\mathbf{e}_1^{(k)}, \mathbf{e}_2^{(k)}, \dots, \mathbf{e}_{r_k}^{(k)}\}$ оператор $\mathcal{N}$ и получим следующий набор векторов:

$$\{\mathbf{e}_1^{(k-1)}, \mathbf{e}_2^{(k-1)}, \dots, \mathbf{e}_{r_k}^{(k-1)}\}, \quad \mathbf{e}_j^{(k-1)} = \mathcal{N}\mathbf{e}_j^{(k)}, \quad j = \overline{1, r_k}. \tag{4.1}$$

Таким образом, из (4.1) получаем, что

$$\{\mathbf{e}_1^{(k-1)}, \mathbf{e}_2^{(k-1)}, \dots, \mathbf{e}_{r_k}^{(k-1)}\} \subset \ker \mathcal{N}^{k-1}. \tag{4.2}$$

Дополним семейство векторов $\{\mathbf{e}_1^{(k-1)}, \mathbf{e}_2^{(k-1)}, \dots, \mathbf{e}_{r_k}^{(k-1)}\}$ векторами $\{\mathbf{e}_{r_k+1}^{k-1}, \dots, \mathbf{e}_{s_k-1}^{(k-1)}\}$ так, чтобы семейство векторов:

$$\{\mathbf{e}_1^{(k-1)}, \dots, \mathbf{e}_{r_k}^{(k-1)}, \mathbf{e}_{r_k+1}^{k-1}, \dots, \mathbf{e}_{s_k-1}^{(k-1)}\} \subset \ker \mathcal{N}^{k-1}$$

было линейно независимо над $\ker \mathcal{N}^{k-2}$. Итак далее. В результате получим следующую лестницу Жордана:

$$
\begin{array}{|c||cccccccc}
\ker \mathcal{N}^k & \mathbf{e}_1^{(k)} & \cdots & \mathbf{e}_{r_k}^{(k)} & & & & & \\
 & \downarrow \mathcal{N} & & \downarrow \mathcal{N} & & & & & \\
\ker \mathcal{N}^{k-1} & \mathbf{e}_1^{(k-1)} & \cdots & \mathbf{e}_{r_k}^{(k-1)} & \mathbf{e}_{r_k+1}^{(k-1)} & \cdots & \mathbf{e}_{s_{k-1}}^{(k-1)} & & \\
 & \downarrow \mathcal{N} & & \downarrow \mathcal{N} & \downarrow \mathcal{N} & & \downarrow \mathcal{N} & & \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \\
 & \downarrow \mathcal{N} & & \downarrow \mathcal{N} & \downarrow \mathcal{N} & & \downarrow \mathcal{N} & & \\
\ker \mathcal{N} & \mathbf{e}_1^{(1)} & \cdots & \mathbf{e}_{r_k}^{(1)} & \mathbf{e}_{r_k+1}^{(1)} & \cdots & \mathbf{e}_{s_{k-1}}^{(1)} & \mathbf{e}_{s_2+1}^{(1)} \;\cdots & \mathbf{e}_{s_1}^{(1)}
\end{array}
$$

На некоторой ступеньке жордановой лестницы мы получим максимальное $(= \dim \mathcal{L})$ число линейно независимых собственных и присоединенных векторов.

§ 5. Примеры решения задач

З а д а ч а 1. *Корневые подпространства.* Найти все собственные значения и корневые подпространства линейного оператора $\mathcal{A} \in L(\mathcal{L};\mathcal{L})$, заданного в некотором базисе линейного пространства $\mathcal{L}$, матрицей:

$$
A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ -4 & -4 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}. \tag{5.1}
$$

Решение. Шаг 1. Найдем характеристический многочлен заданного линейного оператора $\mathcal{A}$ матрицей A в некотором базисе линейного пространства $\mathcal{L}$.

$$
\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 & -1 \\ -4 & -4 & 1-\lambda & 3 \\ 4 & 4 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} =
$$

$$
= \{\text{вычитаем из первого столбца второй}\} =
$$

$$
= \begin{vmatrix} -\lambda & 3 & 1 & 0 \\ \lambda & 1-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & -4 & 1-\lambda & 3 \\ 0 & 4 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} =
$$

$$
= \{\text{прибавляем ко второй строчке первую}\} =
$$

$$
= \begin{vmatrix} -\lambda & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & -4 & 1-\lambda & 3 \\ 0 & 4 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} =
$$

$$
= \{\text{прибавляем к четвертой строчке третью}\} =
$$

$$= \begin{vmatrix} -\lambda & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & -4 & 1-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -\lambda \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & -1 \\ -4 & 1-\lambda & 3 \\ 0 & 2-\lambda & 2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \{\text{вычитаем из второго столбца третий}\} =$$

$$= -\lambda \begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 & -1 \\ -4 & -2-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -\lambda(2-\lambda) \begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 \\ -4 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(2-\lambda)^2. \quad (5.2)$$

Шаг 2. В силу итогового равенства (5.2) видим, что характеристический многочлен разлагается на линейные множители с алгебраической кратностью, равной двум. Тогда из теоремы 2 получаем, что линейное пространство $\mathcal{L}$ разлагается в прямую сумму:

$$\mathcal{L} = V^0(A) \oplus V^2(A), \quad (5.3)$$

причем в силу теоремы 1 имеем:

$$\dim V^0(A) = 2, \quad \dim V^2(A) = 2. \quad (5.4)$$

Кроме того, в силу леммы 3.4 справедливы равенства:

$$V^0(A) = \ker(A - 0I)^2, \quad V^2(A) = \ker(A - 2I)^2. \quad (5.5)$$

Поэтому нам нужно базис в линейных подпространствах $\ker(A - 0I)^2$ и $\ker(A - 2I)^2$.

Шаг 3. Базис в $\ker(A - 0I)^2$. Нетрудно вычислить, что

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ -4 & -4 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ -4 & -4 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 8 & 8 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & -8 & 0 & 4 \\ 8 & 8 & 4 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.6)$$

Пользуясь элементарными преобразованиями справедливы следующие соотношения:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 8 & 8 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & -8 & 0 & 4 \\ 8 & 8 & 4 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (5.7)$$

Рассмотрим следующую однородную систему линейных уравнений:

$$A^2 \cdot X = O, \quad X^T = (x^1, x^2, x^3, x^4), \qquad (5.8)$$

которая в силу (5.7) эквивалентна следующей системе уравнений:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad (5.9)$$

ФСР системы уравнений (5.9) состоят из двух столбцов:

$$F_1 = (1, 0, -2, 2)^T, \quad F_2 = (0, 1, -2, 2)^T. \qquad (5.10)$$

Если исходный базис линейного пространства $\mathcal{L}$ обозначить $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_4\}$, то базис в $V^0(A)$ можно записать в следующем виде:

$$\mathbf{f}_1 = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_4) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_2 = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_4) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}. \qquad (5.11)$$

Шаг 4. Базис в $V^2(A)$. Справедливы следующие равенства:

$$(A - 2I)^2 =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ -4 & -4 & -1 & 3 \\ 4 & 4 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ -4 & -4 & -1 & 3 \\ 4 & 4 & 1 & -3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 4 \\ 8 & 8 & 0 & -8 \\ -8 & -8 & 0 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (5.12)$$

Поэтому однородная линейная система уравнений:

$$(A - 2I)^2 \cdot X = O, \quad X^T = (x^1, x^2, x^3, x^4)$$

в силу (5.12) эквивалентна следующей:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

ФСР этой системы уравнений состоит из двух столбцов:

$$F_3 = (0,0,1,0)^T, \quad F_4 = (1,0,0,1)^T.$$

Если исходный базис линейного пространства $\mathcal{L}$ обозначить $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_4\}$, то базис в $V^2(A)$ можно записать в следующем виде:

$$\mathbf{f}_3 = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_4) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_4 = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_4) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{5.13}$$

З а д а ч а 2. *Примеры жордановых блоков.* В силу результата теоремы 2 нам достаточно рассмотреть простой случай, когда характеристический многочлен матрицы A имеет вид:

$$\det(A - \lambda I) = (\lambda_0 - \lambda)^m, \tag{5.14}$$

где m — алгебраическая кратность корня λ_0. Пусть $s \in \mathbb{N}$ — его геометрическая кратность. Ранее доказано, что $s \leqslant m$. В силу лемм 18 и 19, справедливы утверждения из замечания 4.

З а д а ч а 3. Пусть $m = 3$ и $s = 1$. Тогда жорданов блок состоит из одной жордановой клетки порядка 3 :

$$A(\lambda_0) = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}. \tag{5.15}$$

З а д а ч а 4. Пусть $m = 3$ и $s = 2$. Тогда жорданов блок состоит из двух жордановых клеток порядков 1 и 2 :

$$A(\lambda_0) = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}, \quad A(\lambda_0) = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}.$$

З а д а ч а 5. Пусть $m = 4$ и $s = 3$. Тогда жорданов блок состоит из трех жордановых клеток суммарной размерности 4, т.е. один блок порядка 2 и два блока порядка 1:

$$A(\lambda_0) = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}, \quad A(\lambda_0) = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix},$$

$$A(\lambda_0) = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}.$$

Задача 6. Найти жорданов базис, в котором матрица:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \tag{5.16}$$

имеет жорданову форму.

Решение. Шаг 1. Собственные векторы. Прежде всего найдем корни характеристического многочлена:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -4 & 4-\lambda & 0 \\ -2 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (2-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -4 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^3. \tag{5.17}$$

Итак, матрица A имеет собственное значение $\lambda = 3$ алгебраической кратности $m = 3$. Найдем геометрическую кратность n собственного значения $\lambda = 2$. Рассмотрим матрицу:

$$\mathcal{N} := A - 2I = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.18}$$

Заметим, что $\operatorname{rang} \mathcal{N} = 1$. Тогда размерность $V_2(A) = \ker(\mathcal{N})$ равна 2, т.е. геометрическая кратность $n = 2$. Следовательно, жорданова форма матрицы A состоит из двух жордановых клеток размеров 2 и 1:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Теперь рассмотрим однородную систему уравнений:

$$\mathcal{N} \cdot X = O, \quad X = (x^1, x^2, x^3)^T, \quad O = (0,0,0)^T. \tag{5.19}$$

С учетом (5.18) система уравнений (5.19) эквивалентна следующему одному уравнению:

$$x^2 = 2x^1. \tag{5.20}$$

Таким образом, базис в $\ker \mathcal{N} = \ker(A - 2I)$ образуют два столбца:

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{5.21}$$

Однако базис в $\mathbb{R}^3$ должен состоять из трех столбцов, поэтому приходим к выводу о том, что нам нужно найти еще один присоединенный столбец.

Шаг 2. Присоединенный столбец. Справедливы равенства:

$$\mathcal{N}^2 = \mathcal{N} \cdot \mathcal{N} = \\ = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.22)$$

Следовательно,

$$\ker \mathcal{N}^2 = \mathbb{R}^3.$$

Заметим, что столбец:

$$F_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 = \ker \mathcal{N}^2, \quad F_1 \notin \ker \mathcal{N}, \quad (5.23)$$

поскольку столбцы X_1, X_2, F_1 линейно независимы. Иначе говоря,

$$\mathcal{N}^2 \cdot F_1 = O, \quad \mathcal{N} \cdot F_1 \neq O, \quad O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.24)$$

Стало быть,

$$\mathcal{N} \cdot F_1 \in \ker \mathcal{N}, \quad \mathcal{N} \cdot F_1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} \in \ker \mathcal{N}. \quad (5.25)$$

Поскольку в силу шага 1 $\dim \ker \mathcal{N} = 2$, то дополним столбец $\mathcal{N} \cdot F_1$ до базиса в $\ker \mathcal{N}$, например, столбцом $X_2 \in \ker \mathcal{N}$ из формулы (5.21). Итак, мы построили следующее линейно независимое семейство, состоящее из трех столбцов:

$$E_1 = \mathcal{N} \cdot F_1, \quad E_2 = F_1, \quad E_3 = X_2. \quad (5.26)$$

Но тогда справедливы равенства:

$$\mathcal{N} \cdot E_1 = O, \quad \mathcal{N} \cdot E_2 = E_1, \quad \mathcal{N} \cdot E_3 = O, \quad O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.27)$$

В базисе $\{E_1, E_2, E_3\}$ линейного пространства $\mathbb{R}^3$ матрица A некоторого оператора примет следующую жорданову форму:

$$(A \cdot E_1, A \cdot E_2, A \cdot E_3) = (E_1, E_2, E_3) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

З а д а ч а 7. Найти жорданов базис и жорданову форму линейного оператора d^3/dx^3 в линейном пространстве $P^3(x)$ полиномов степени не выше 3.

Решение. Сначала выберем базис в $P^3(x)$ следующим образом:

$$\mathbf{e}_1 = 1, \quad \mathbf{e}_2 = x, \quad \mathbf{e}_3 = \frac{x^2}{2!}, \quad \mathbf{e}_4 = \frac{x^3}{3!}. \tag{5.28}$$

Отметим, что оператор d^3/dx^3 является нильпотентным высоты, равной 2. Поэтому единственным собственным вектором этого оператора является число $\lambda = 0$, причем алгебраической кратности $m = 4$. Найдем его геометрическую кратность. Несложно заметить, что

$$\ker\{d^3/dx^3\} = \{u = c_1\mathbf{e}_1 + c_2\mathbf{e}_2 + c_3\mathbf{e}_3,\ c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}^3\}. \tag{5.29}$$

Отсюда получаем, что $\dim\ker\{d^3/dx^3\} = 3$, т.е. геометрическая кратность собственного значения $\lambda = 0$ равна 3. Значит жорданова форма состоит из трех жордановых клеток суммарной размерности 4, т.е. состоит из клетки размера 2 и двух клеток размерности 1 :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что

$$\ker\{(d^3/dx^3)^2\} = \ker\{d^6/dx^6\} = P^3(x),$$

$$\mathbf{e}_4 \in \ker\{(d^3/dx^3)^2\}, \quad \mathbf{e}_4 \notin \ker\{d^3/dx^3\} \Rightarrow d^3/dx^3\mathbf{e}_4 \in \ker\{d^3/dx^3\}.$$

Дополним вектор

$$d^3/dx^3\mathbf{e}_4$$

до базиса в $\ker\{d^3/dx^3\}$, например, векторами $\mathbf{e}_3$ и $\mathbf{e}_2$. Итак, предъявим базис:

$$\mathbf{f}_1 = d^3/dx^3\mathbf{e}_4, \quad \mathbf{f}_2 = \mathbf{e}_4, \quad \mathbf{f}_3 = \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{f}_4 = \mathbf{e}_2. \tag{5.30}$$

Заметим, что справедливы следующие равенства:

$$d^3/dx^3\mathbf{f}_1 = \vartheta, \quad d^3/dx^3\mathbf{f}_2 = \mathbf{f}_1, \tag{5.31}$$

$$d^3/dx^3\mathbf{f}_3 = \vartheta, \quad d^3/dx^3\mathbf{f}_4 = \vartheta. \tag{5.32}$$

Поэтому из (5.31) и (5.32) вытекает равенство:

$$(d^3/dx^3\mathbf{f}_1, d^3/dx^3\mathbf{f}_2, d^3/dx^3\mathbf{f}_3, d^3/dx^3\mathbf{f}_4) =$$

$$= (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3, \mathbf{f}_4) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.33)$$

из которого вытекает, что $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3, \mathbf{f}_4\}$ — это жорданов базис для линейного оператора d^3/dx^3, в котором этот оператор имеет жорданову форму.