

Лекция 8

ПРЯМАЯ НА ПЛОСКОСТИ

§ 1. Различные уравнения прямой на плоскости

Определение 1. *Направляющим вектором прямой называется любой ненулевой вектор, коллинеарный этой прямой.*

Пусть O — это некоторая фиксированная точка плоскости, точка M_0 с радиус-вектором $\mathbf{r}_0 = \overrightarrow{OM_0}$ лежит на данной прямой с направляющим вектором \mathbf{a} . Нетрудно заметить, что точка M с радиус-вектором $\mathbf{r} = \overrightarrow{OM}$ лежит на этой прямой, тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{M_0M}$ и \mathbf{a} коллинеарны, т. е. найдётся такое число t , что имеет место следующее равенство:

$$\overrightarrow{M_0M} = t\mathbf{a}, \quad (1.1)$$

а поскольку $\overrightarrow{M_0M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_0} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$, то

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{a}, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (1.2)$$

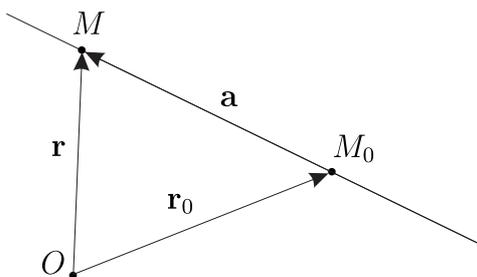


Рис. 1. Векторное уравнение прямой.

Определение 2. *Уравнение (1.2) называется векторным параметрическим уравнением прямой.*

Пусть на плоскости задан произвольный базис $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$. Пусть все введённые векторы заданы своими разложениями по базису:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{r}_0 = x_0\mathbf{e}_1 + y_0\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{a} = l\mathbf{e}_1 + m\mathbf{e}_2. \quad (1.3)$$

После подстановки равенств (1.3) в (1.2) получим следующее уравнение:

$$(x - x_0 - lt)\mathbf{e}_1 + (y - y_0 - mt)\mathbf{e}_2 = \mathbf{0}, \quad (1.4)$$

а поскольку $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ — это базис, то приходим к следующим равенствам:

$$x = x_0 + lt, \quad y = y_0 + mt, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (1.5)$$

Эти равенства можно записать в виде одного равенства

$$\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix}. \quad (1.6)$$

Справедлива следующая теорема:

Теорема 1. В общей декартовой системе координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ на плоскости уравнения прямой (1.5) эквивалентно равенству

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & l \\ y - y_0 & m \end{vmatrix} = 0. \quad (1.7)$$

Доказательство.

Из уравнений (1.5), записанных в виде одного равенства (1.6), вытекает равенство (1.7). Обратно, если выполнено равенство (1.7), то в силу результата леммы ?? шестой лекции найдутся такие числа α, β , не равные одновременно нулю, что

$$\alpha \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Если $\alpha = 0$, то $\beta \neq 0$ и имеет место равенство

$$\begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда направляющий вектор $\mathbf{a} = l\mathbf{e}_1 + m\mathbf{e}_2 = \mathbf{0}$ — это противоречит определению 1 направляющего вектора. Следовательно, $\alpha \neq 0$ и мы приходим к равенству (1.6), которое равносильно равенствам (1.5).

Теорема доказана.

Из равенства (1.7) вытекает следующее уравнение:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}, \quad \text{если } l \neq 0, \quad m \neq 0. \quad (1.8)$$

Замечание 1. Заметим, что одновременно числа l и m в ноль обращаться не могут. Если $l = 0$, то из равенства (1.7) получим $x = x_0$, если же $m = 0$, то получим $y = y_0$. Уравнения $x = x_0$ и $y = y_0$ — это уравнения прямых, проходящих через точки $(x_0, 0)$ и $(0, y_0)$, и параллельных оси Oy и Ox соответственно. При этом мы распространим равенства (1.8) и на эти два случая:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}, \quad (1.9)$$

где если знаменатель равен нулю, то и числитель тоже равен нулю.

Определение 3. Уравнения (1.7) и (1.9) называются каноническими уравнениями прямой на плоскости.

Справедливо следующее утверждение:

Теорема 2. В общей декартовой системе координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ канонические уравнения прямой могут быть записаны следующим образом:

$$Ax + By + C = 0, \quad A^2 + B^2 > 0. \quad (1.10)$$

Доказательство.

Из уравнения (1.7) вытекает равенство

$$m(x - x_0) = l(y - y_0) \Leftrightarrow mx - ly - mx_0 + ly_0 = 0 \Leftrightarrow Ax + By + C = 0,$$

где

$$A = m, \quad B = -l, \quad C = -mx_0 + ly_0, \quad A^2 + B^2 > 0.$$

Обратно пусть задано уравнение (1.10) и поскольку $A^2 + B^2 > 0$, то существует такая точка $M_0(x_0, y_0)$, что

$$Ax_0 + By_0 + C = 0,$$

но тогда

$$C = -Ax_0 - By_0 \Rightarrow A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x - x_0 & -B \\ y - y_0 & A \end{vmatrix} = 0,$$

т. е. имеет место равенство (1.7) при $l = -B$, $m = A$. В частности, одним из направляющих векторов прямой является вектор

$$\mathbf{a} = -B\mathbf{e}_1 + A\mathbf{e}_2. \quad (1.11)$$

Теорема доказана.

Определение 4. Уравнение (1.10) называется общим уравнением прямой на плоскости.

Замечание 2. Числа A и B не могут одновременно обращаться в ноль.

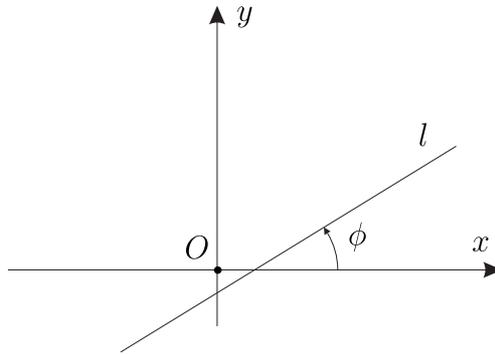


Рис. 2. Уравнение прямой.

Если $B \neq 0$, то из общего уравнения прямой в прямоугольной декартовой системе координат можно получить уравнение прямой с угловым коэффициентом:

$$y = kx + b, \quad k = -\frac{A}{B}, \quad b = -\frac{C}{B}. \quad (1.12)$$

Можно доказать, что $k = \tan \varphi$, где $\varphi \in [0, 2\pi)$ — это угол между осью Ox и направляющим вектором прямой \mathbf{a} , отсчитываемый против часовой стрелки.

§ 2. Направляющий вектор прямой

Пусть прямая задана своим общим уравнением

$$Ax + By + C = 0, \quad A^2 + B^2 > 0, \quad (2.1)$$

в некоторой общей декартовой системе координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$, то как мы выяснили в процессе доказательства теоремы 2 в силу теоремы 1 вектор $\mathbf{a} = -B\mathbf{e}_1 + A\mathbf{e}_2$ является одним из направляющих векторов прямой (см. формулу 1.11). Справедливо следующее утверждение:

Теорема 3. Для того чтобы вектор $\mathbf{a} = l\mathbf{e}_1 + m\mathbf{e}_2$ был коллинеарен прямой, заданной уравнением

$$Ax + By + C = 0, \quad A^2 + B^2 > 0$$

в общей декартовой системе координат, необходимо и достаточно, чтобы

$$Al + Bm = 0. \quad (2.2)$$

Доказательство.

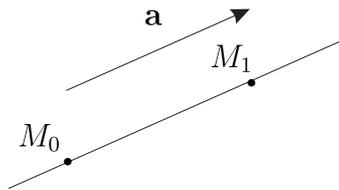


Рис. 3. К теореме 3.

Отложим вектор $\mathbf{a} = \{l, m\}$ от точки $M_0 = (x_0, y_0)$ данной прямой; конец полученного направленного отрезка имеет координаты $M_1 = (x_0 + l, y_0 + m)$.

□ Действительно, имеют место следующие равенства:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM_0} + \overrightarrow{M_0M_1} &= \overrightarrow{OM_1}, \\ \overrightarrow{OM_0} = x_0\mathbf{e}_1 + y_0\mathbf{e}_2, \quad \overrightarrow{M_0M_1} &= l\mathbf{e}_1 + m\mathbf{e}_2, \end{aligned}$$

тогда

$$\overrightarrow{OM_1} = (x_0 + l)\mathbf{e}_1 + (y_0 + m)\mathbf{e}_2 = \{x_0 + l, y_0 + m\}. \quad \square$$

Вектор \mathbf{a} коллинеарен прямой, тогда и только тогда, когда точка M_1 принадлежит прямой, т. е.

$$\begin{aligned} A(x_0 + l) + B(y_0 + m) + C = 0 &\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow Al + Bm + Ax_0 + By_0 + C = 0 \Leftrightarrow Al + Bm = 0. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Замечание 3. Если рассматриваемая декартова система координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ является прямоугольной, то вектор $\mathbf{n} = \{A, B\}$ ортогонален направляющему вектору $\mathbf{a} = \{l, m\}$:

$$(\mathbf{n}, \mathbf{a}) = Al + Bm = 0.$$

Докажем, что вектор $\mathbf{n} = \{A, B\}$ в прямоугольной декартовой системе координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ является вектором нормали к прямой.

□ Действительно, пусть прямая задана своим общим уравнением

$$Ax + By + C = 0, \quad A^2 + B^2 > 0,$$

в котором $M = (x, y)$ — это координаты точки M , лежащей на прямой. Поскольку $A^2 + B^2 > 0$, то существует точка $M_0 = (x_0, y_0)$ такая, что

$$Ax_0 + By_0 + C = 0.$$

Тогда приходим к равенству

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \Leftrightarrow (\mathbf{n}, \overrightarrow{M_0M}) = 0,$$

но точки M и M_0 лежат на прямой тогда и только тогда, когда вектор $\overrightarrow{M_0M}$ коллинеарен прямой, но тогда из последнего равенства вытекает, что вектор \mathbf{n} перпендикулярен прямой. □

Замечание 4. В общей декартовой системе координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ вектор $\mathbf{n} = \{A, B\}$, вообще говоря, не будет нормалью к прямой.

Справедлива следующая теорема:

Теорема 4. Уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, заданных в общей декартовой системе координат, имеет один из следующих видов:

$$x = x_1 + (x_2 - x_1)t, \quad y = y_1 + (y_2 - y_1)t, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (2.3)$$

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & x_2 - x_1 \\ y - y_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix} = 0, \quad (2.4)$$

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \quad (2.5)$$

Доказательство.

В качестве точки $M_0(x_0, y_0)$ возьмём точку $M_1(x_1, y_1)$, а в качестве направляющего вектора \mathbf{a} искомой прямой возьмём вектор

$$\mathbf{a} = \overrightarrow{M_1M_2} = l\mathbf{e}_1 + m\mathbf{e}_2, \quad l = x_2 - x_1, \quad m = y_2 - y_1.$$

Тогда уравнение прямой, проходящей через точку $M_1(x_1, y_1)$ и имеющую направляющий вектор \mathbf{a} примет следующий вид (см. формулы (1.5)):

$$x = x_1 + (x_2 - x_1)t, \quad y = y_1 + (y_2 - y_1)t.$$

Далее нужно переписать равенства (1.7) и (1.9) для данного случая. Кроме того, нужно воспользоваться свойством определителя квадратной матрицы.

Теорема доказана.

§ 3. Частные случаи расположения прямой

Пусть уравнение прямой в общей декартовой системе координат задано своим общим уравнением:

$$Ax + By + C = 0, \quad A^2 + B^2 > 0. \quad (3.1)$$

Сделаем следующие наблюдения:

Наблюдение 1. Прямая $Ax + By + C = 0$ параллельна оси Ox тогда и только тогда, когда направляющий вектор прямой $\mathbf{a} = \{-B, A\}$ коллинеарен оси Ox , т. е. когда $A = 0$.

Наблюдение 2. Прямая $Ax + By + C = 0$ параллельна оси Oy тогда и только тогда, когда направляющий вектор прямой $\mathbf{a} = \{-B, A\}$ коллинеарен оси Oy , т. е. когда $B = 0$.

Наблюдение 3. Прямая $Ax + By + C = 0$ проходит через начало координат, тогда и только тогда, когда $C = 0$.

§ 4. Взаимное расположения двух прямых

Пусть две прямые заданы своими общими уравнениями в некоторой общей декартовой системе координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$:

$$l_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0, \quad l_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0, \quad (4.1)$$

где $A_1^2 + B_1^2 > 0$ и $A_2^2 + B_2^2 > 0$. Введём направляющие векторы этих прямых (см. формулу (1.11)):

$$\mathbf{a}_1 = (-B_1)\mathbf{e}_1 + A_1\mathbf{e}_2 = \{-B_1, A_1\}, \quad \mathbf{a}_2 = (-B_2)\mathbf{e}_1 + A_2\mathbf{e}_2 = \{-B_2, A_2\}.$$

Наблюдение 1. Прямые l_1 и l_2 пересекаются, тогда и только тогда, когда векторы \mathbf{a}_1 и \mathbf{a}_2 не коллинеарны, т. е. тогда и только тогда, когда

$$\begin{vmatrix} -B_1 & A_1 \\ -B_2 & A_2 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}.$$

□ Действительно, как мы доказали ранее векторы \mathbf{a}_1 и \mathbf{a}_2 коллинеарны тогда и только тогда, когда они линейно зависимы, т. е. найдутся такие числа α и β , не равные одновременно нулю, что

$$\alpha \mathbf{a}_1 + \beta \mathbf{a}_2 = \mathbf{0} \Leftrightarrow (\alpha(-B_1) + \beta(-B_2))\mathbf{e}_1 + (\alpha A_1 + \beta A_2)\mathbf{e}_2 = \mathbf{0},$$

а поскольку $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ линейно независимое семейство, то

$$\begin{aligned} \alpha(-B_1) + \beta(-B_2) = 0, \quad \alpha A_1 + \beta A_2 = 0 &\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \alpha \begin{pmatrix} -B_1 \\ A_1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -B_2 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

а поскольку числа α и β не равны одновременно нулю приходим к следующему необходимому и достаточному условию коллинеарности векторов

$$\begin{vmatrix} -B_1 & -B_2 \\ A_1 & A_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -B_1 & A_1 \\ -B_2 & A_2 \end{vmatrix} = 0.$$

По условию векторы \mathbf{a}_1 и \mathbf{a}_2 неколлинеарны, поэтому

$$\begin{vmatrix} -B_1 & A_1 \\ -B_2 & A_2 \end{vmatrix} \neq 0. \quad \square$$

Наблюдение 2. Прямые l_1 и l_2 параллельны или совпадают, тогда и только тогда, когда векторы \mathbf{a}_1 и \mathbf{a}_2 коллинеарны, т. е. если

$$\begin{vmatrix} -B_1 & A_1 \\ -B_2 & A_2 \end{vmatrix} = 0. \quad (4.2)$$

Заметим, что

$$0 = \begin{vmatrix} -B_1 & A_1 \\ -B_2 & A_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} A_2 & A_1 \\ B_2 & B_1 \end{vmatrix}. \quad (4.3)$$

Воспользуемся результатом леммы ?? шестой лекции и получим, что существуют такие числа α и β , не равные одновременно нулю, что

$$\alpha \begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha^2 + \beta^2 > 0. \quad (4.4)$$

Без ограничения общности можно считать, что $\alpha \neq 0$. Тогда из (4.4) вытекают следующие два равенства:

$$A_2 = \lambda A_1, \quad B_2 = \lambda B_1, \quad \lambda = -\frac{\beta}{\alpha}. \quad (4.5)$$

Теперь нам нужно рассмотреть систему уравнений (4.6), которая с учётом (4.5) примет следующий вид:

$$A_1 x + B_1 y + C_1 = 0, \quad \lambda(A_1 x + B_1 y) + C_2 = 0. \quad (4.6)$$

Эта система уравнений не имеет решений, тогда и только тогда, когда $C_2 \neq \lambda C_1$ и имеет бесконечно много решений, тогда и только тогда, когда $C_2 = \lambda C_1$. Итак, если

$$A_2 = \lambda A_1, \quad B_2 = \lambda B_1, \quad C_2 \neq \lambda C_1, \quad (4.7)$$

то прямые параллельны, но не совпадают, а если

$$A_2 = \lambda A_1, \quad B_2 = \lambda B_1, \quad C_2 = \lambda C_1, \quad (4.8)$$

то прямые совпадают.

§ 5. Полуплоскости, определяемые прямой

Справедлива следующая теорема:

Теорема 5. Пусть в общей декартовой системе координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ прямая линия задана общим уравнением:

$$Ax + By + C = 0.$$

Тогда для координат x, y всех точек $M(x, y)$, лежащих по одну сторону от прямой, выполняется неравенство

$$Ax + By + C > 0,$$

а для координат x, y всех точек $M(x, y)$, лежащих по другую сторону от прямой, выполняется неравенство

$$Ax + By + C < 0.$$

Доказательство.

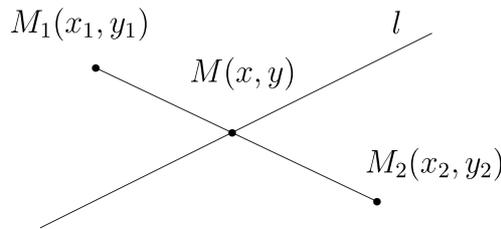


Рис. 4. К теореме 5.

Пусть $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ — это две произвольные точки, лежащие по разные стороны от прямой l , заданной общим уравнением

$$Ax + By + C = 0, \quad A^2 + B^2 > 0,$$

в общей декартовой системе координат. Это означает, что существует внутренняя точка $M(x, y)$ отрезка M_1M_2 , лежащая на прямой l . Тогда найдётся такое $\lambda > 0$, что справедливо следующее равенство:

$$\overrightarrow{M_1M} = \lambda \overrightarrow{MM_2}, \quad (5.1)$$

поскольку направленные отрезки $\overrightarrow{M_1M}$ и $\overrightarrow{MM_2}$ коллинеарны и сонаправлены. Запишем равенство (5.1) в координатах:

$$x - x_1 = \lambda(x_2 - x), \quad y - y_1 = \lambda(y_2 - y). \quad (5.2)$$

Из (5.2) вытекают следующие равенства:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$

Точка $M(x, y) \in l$, поэтому имеет место следующее равенство:

$$A \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} + B \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} + C = 0,$$

из которого вытекает равенство

$$0 < \lambda = -\frac{Ax_1 + By_1 + C}{Ax_2 + By_2 + C} \Rightarrow (Ax_1 + By_1 + C)(Ax_2 + By_2 + C) < 0.$$

Сначала фиксируем точку $M_1(x_1, y_1)$, а точку $M_2(x_2, y_2)$ будем менять, оставаясь в заданной полуплоскости. Ясно, что знак выражения $Ax_2 + By_2 + C$ будет оставаться неизменным. Теперь зафиксируем точку $M_2(x_2, y_2)$, а точку $M_1(x_1, y_1)$ будем менять, оставаясь в заданной полуплоскости. Ясно, что знак выражения $Ax_1 + By_1 + C$ будет тоже оставаться неизменным.

Следовательно, одна полуплоскость задаётся неравенством $Ax + By + C > 0$, а другая полуплоскость — уравнением $Ax + By + C < 0$.

Теорема доказана.

Справедлива ещё одна теорема в этом направлении.

Теорема 6. Пусть прямая l задана общим уравнением

$$Ax + By + C = 0, \quad A^2 + B^2 > 0$$

в общей декартовой системе координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$. Если от произвольной точки $M_0(x_0, y_0)$ прямой l отложить вектор $\mathbf{n} \equiv \{A, B\}$, то конец $M_1(x_1, y_1)$ полученного направленного отрезка $\overrightarrow{M_0M_1}$ будет лежать в полуплоскости, определяемой неравенством:

$$Ax_1 + By_1 + C > 0.$$

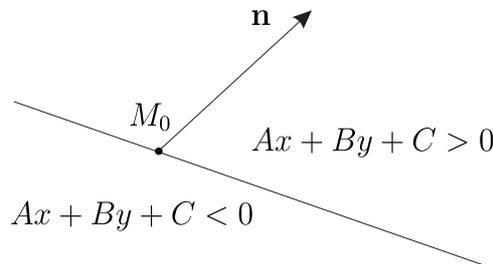


Рис. 5. К теореме 6.

Доказательство.

Согласно условию теоремы имеем

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM_1} &= \overrightarrow{OM_0} + \overrightarrow{M_0M_1} = \\ &= \mathbf{r}_0 + \mathbf{n} = (x_0 + A)\mathbf{e}_1 + (y_0 + B)\mathbf{e}_2 = \{x_0 + A, y_0 + B\}.\end{aligned}$$

Далее

$$\begin{aligned}M_1(x_1, y_1), \quad x_1 = x_0 + A, \quad y_1 = y_0 + B \Rightarrow \\ \Rightarrow Ax_1 + By_1 + C = Ax_0 + By_0 + C + A^2 + B^2 = A^2 + B^2 > 0.\end{aligned}$$

Теорема доказана.

Наблюдение. Можно сделать более общее наблюдение в направлении этой теоремы. Пусть относительно общей декартовой системы координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ задан произвольный вектор $\mathbf{b} = \{b_1, b_2\}$ и задано общее уравнение прямой

$$l: \quad Ax + By + C = 0.$$

Пусть произвольная точка $M_0(x_0, y_0) \in l$. Тогда отложим от этой точки вектор \mathbf{b} и в результате получим направленный отрезок $\overrightarrow{M_0M_1}$, где

$$M_1(x_1, y_1), \quad x_1 = x_0 + b_1, \quad y_1 = y_0 + b_2.$$

Справедлива цепочка равенств

$$Ax_1 + By_1 + C = Ax_0 + By_0 + C + Ab_1 + Bb_2 = Ab_1 + Bb_2.$$

Если $Ab_1 + Bb_2 > 0$, то вектор \mathbf{b} направлен в сторону «положительной» полуплоскости $Ax + By + C > 0$, а если $Ab_1 + Bb_2 < 0$, то \mathbf{b} направлен в сторону «отрицательной» полуплоскости $Ax + By + C < 0$.

§ 6. Нормальное уравнение прямой

Справедливо следующее важное утверждение:

Теорема 7. В произвольной общей декартовой системе координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ общее уравнение прямой

$$Ax + By + C = 0, \quad A^2 + B^2 > 0 \tag{6.1}$$

эквивалентно нормальному уравнению прямой:

$$(\mathbf{n}, \mathbf{r}) + C = 0, \tag{6.2}$$

где вектор \mathbf{n} однозначно определяется упорядоченной двойкой A, B .

Доказательство. Пусть $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ — общая декартова система координат на плоскости π , в которой задано общее уравнение прямой

(6.1) на плоскости π в пространстве и \mathbf{e}_3 — это произвольный вектор нормали к плоскости π . Введём следующий вектор

$$\mathbf{n} = \frac{A[\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3] + B[\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1]}{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)}. \quad (6.3)$$

Заметим, что

$$(\mathbf{n}, \mathbf{e}_1) = A, \quad (\mathbf{n}, \mathbf{e}_2) = B.$$

В силу линейности скалярного произведения имеем

$$Ax + By + C = 0 \Rightarrow (\mathbf{n}, \mathbf{e}_1)x + (\mathbf{n}, \mathbf{e}_2)y + C = 0 \Rightarrow (\mathbf{n}, \mathbf{r}) + C = 0,$$

где $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2$.

Обратно, пусть задано уравнение (6.2), тогда в силу линейности скалярного произведения из этого уравнения вытекает уравнение (6.1), в котором

$$A = (\mathbf{n}, \mathbf{e}_1), \quad B = (\mathbf{n}, \mathbf{e}_2).$$

Теорема доказана.

Справедлива следующая теорема:

Теорема 8. Пусть на плоскости даны точка $M_1(\mathbf{r}_1)$ и прямая, заданная уравнением $(\mathbf{r}, \mathbf{n}) + C = 0$. Тогда

1. радиус-вектор \mathbf{r}_2 точки M_2 , являющейся ортогональной проекцией точки $M_1(\mathbf{r}_1)$ на прямую l , выражается формулой

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 - \frac{(\mathbf{r}_1, \mathbf{n}) + C}{(\mathbf{n}, \mathbf{n})} \mathbf{n}; \quad (6.4)$$

2. расстояние от точки $M_1(\mathbf{r}_1)$ до прямой l выражается формулой

$$d(M_1, l) = \frac{|(\mathbf{r}_1, \mathbf{n}) + C|}{|\mathbf{n}|}; \quad (6.5)$$

3. Радиус вектор \mathbf{r}_3 точки M_3 , симметричной точке $M_1(\mathbf{r}_1)$ относительно прямой l , выражается формулой

$$\mathbf{r}_3 = \mathbf{r}_1 - 2 \frac{(\mathbf{r}_1, \mathbf{n}) + C}{(\mathbf{n}, \mathbf{n})} \mathbf{n}. \quad (6.6)$$

Доказательство.

Пункт 1. Имеет место равенство

$$\overrightarrow{M_1 M_2} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = \lambda \mathbf{n} \quad (6.7)$$

при некотором $\lambda \in \mathbb{R}$. Заметим, что

$$(\mathbf{r}_2, \mathbf{n}) + C = 0,$$

поэтому умножим скалярно на \mathbf{n} обе части равенства (6.7) и получим равенство

$$-C - (\mathbf{r}_1, \mathbf{n}) = \lambda(\mathbf{n}, \mathbf{n}) \Rightarrow \lambda = -\frac{(\mathbf{r}_1, \mathbf{n}) + C}{(\mathbf{n}, \mathbf{n})}. \quad (6.8)$$

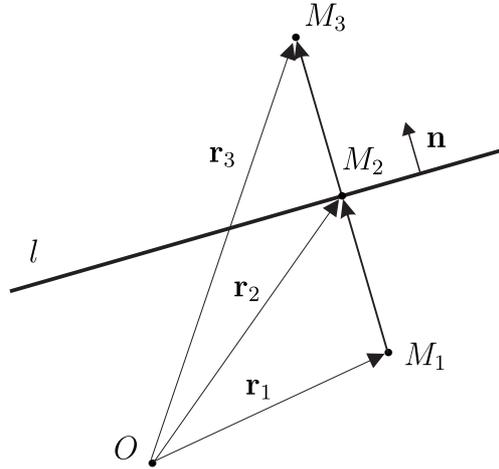


Рис. 6. К теореме 8.

Из (6.7) и (6.8) получим искомое равенство

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 - \frac{(\mathbf{r}_1, \mathbf{n}) + C}{(\mathbf{n}, \mathbf{n})} \mathbf{n}. \quad (6.9)$$

Пункт 2. Из формул (6.7) и (6.9) получим цепочку равенств

$$d(M_1, l) = |\overrightarrow{M_1 M_2}| = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1| = \left| \frac{(\mathbf{r}_1, \mathbf{n}) + C}{(\mathbf{n}, \mathbf{n})} \mathbf{n} \right| = \frac{|(\mathbf{r}_1, \mathbf{n}) + C|}{|\mathbf{n}|}.$$

Пункт 3. Действительно,

$$\mathbf{r}_3 = \overrightarrow{OM_3} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1 M_3} = \mathbf{r}_1 + 2\overrightarrow{M_1 M_2} = \mathbf{r}_1 - 2 \frac{(\mathbf{r}_1, \mathbf{n}) + C}{(\mathbf{n}, \mathbf{n})} \mathbf{n}.$$

Теорема доказана.

Наконец, дадим определение нормированного уравнения прямой в декартовой прямоугольной системе координат $\{O, \mathbf{i}, \mathbf{j}\}$:

Определение 5. Нормированным уравнением прямой называется уравнение следующего вида:

$$(\mathbf{n}, \mathbf{r}) - p = 0, \quad |\mathbf{n}| = 1, \quad p \geq 0. \quad (6.10)$$

Пусть $p > 0$. Перепишем нормированное уравнение (6.10) в общем виде

$$Ax + By + C = 0, \quad A = (\mathbf{n}, \mathbf{i}), \quad B = (\mathbf{n}, \mathbf{j}), \quad C = -p < 0.$$

Поскольку $C < 0$, то начало координат $O = (0, 0)$ лежит в отрицательной полуплоскости

$$A \cdot 0 + B \cdot 0 + C < 0.$$

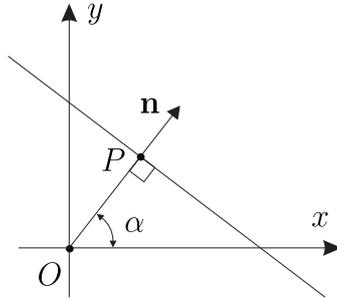


Рис. 7. Нормированное уравнение прямой.

Опустим из начала координат перпендикуляр к прямой. Обозначим через P основание перпендикуляра. Заметим, что вектор нормали $\mathbf{n} = \{A, B\}$ к прямой направлен в сторону положительной полуплоскости

$$Ax + By + C > 0.$$

Но тогда направленный отрезок \overrightarrow{OP} и вектор \mathbf{n} не только коллинеарны но и сонаправлены. Пусть $\alpha \in [0, \pi]$ — угол между векторами \mathbf{n} и \mathbf{i} . Тогда справедливы следующие равенства:

$$(\mathbf{n}, \mathbf{i}) = \cos \alpha, \quad (6.11)$$

$$(\mathbf{n}, \mathbf{j}) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha, \quad \text{если } (\mathbf{n}, \mathbf{j}) > 0, \quad (6.12)$$

$$(\mathbf{n}, \mathbf{j}) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha, \quad \text{если } (\mathbf{n}, \mathbf{j}) < 0. \quad (6.13)$$

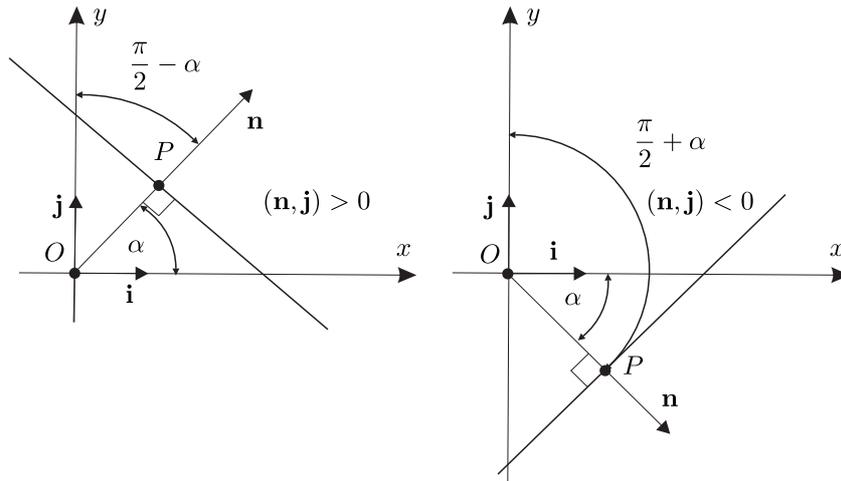


Рис. 8. К выводу нормального уравнения прямой.

Теперь наша задача записать формулы (6.12) и (6.13) единообразно. С этой целью введём угол $\vartheta \in [0, 2\pi)$ между вектором \mathbf{n} и осью Ox , отсчитываемый против часовой стрелки от оси Ox . Тогда

$$\alpha = \vartheta, \quad \text{если } (\mathbf{n}, \mathbf{j}) > 0 \Rightarrow \cos \alpha = \cos \vartheta, \quad \sin \alpha = \sin \vartheta, \quad (6.14)$$

$$\alpha = 2\pi - \vartheta, \quad \text{если } (\mathbf{n}, \mathbf{j}) < 0 \Rightarrow \cos \alpha = \cos \vartheta, \quad \sin \alpha = -\sin \vartheta. \quad (6.15)$$

Следовательно, из равенств (6.11)–(6.15) имеем

$$(\mathbf{n}, \mathbf{i}) = \cos \vartheta, \quad (\mathbf{n}, \mathbf{j}) = \sin \vartheta. \quad (6.16)$$

Итак, из уравнения (6.10) получаем равенства:

$$(\mathbf{n}, \mathbf{i})x + (\mathbf{n}, \mathbf{j})y - p = 0, \quad (6.17)$$

из которого и из равенств (6.16) приходим к следующему равенству:

$$x \cos \vartheta + y \sin \vartheta - p = 0, \quad p \geq 0, \quad (6.18)$$

где $\vartheta \in [0, 2\pi)$ — угол между вектором \mathbf{n} и осью Ox , отсчитываемый против часовой стрелки от оси Ox . Причём из формулы (6.5) вытекает, что параметр p равен расстоянию от начало координат, до прямой, заданной уравнением (6.18).