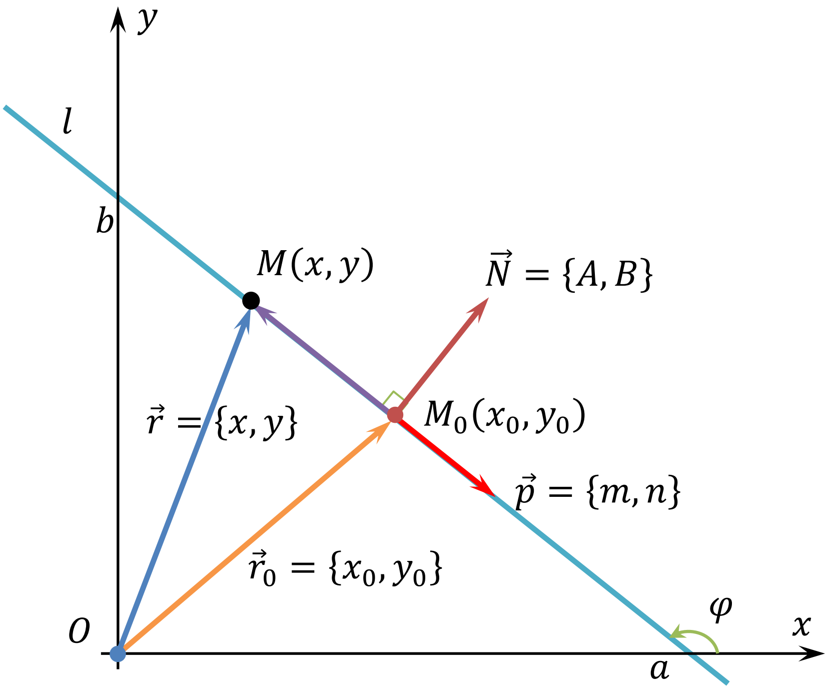
Лекция 6

Прямая на плоскости

Уравнение прямой, проходящей через заданную точку и имеющей заданный вектор нормали



На плоскости, где введена прямоугольная система координат, рассмотрим прямую l. Пусть прямая l проходит через точку $M_0(x_0,y_0)$.

Определение. Любой *ненулевой* вектор, перпендикулярный прямой l, называется *вектором нормали* к прямой l.

Пусть вектор $\vec{N} = \{A,B\}$ является вектором нормали к прямой l.

Произвольная точка плоскости $M(x,y)$ принадлежит прямой l тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{M_0M} \perp \vec{N}$, т.е. $\left(\overrightarrow{M_0M}, \vec{N}\right) = 0$.

Выразим скалярное произведение через координаты векторов $\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0\}$ и $\vec{N} = \{A,B\}$:

$$\boxed{A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.}$$

Это уравнение прямой l, проходящей через заданную точку $M_0(x_0,y_0)$ и имеющей заданный вектор нормали $\vec{N} = \{A,B\}$. Прямоугольные координаты любой точки прямой l удовлетворяют данному уравнению и наоборот, всякая точка плоскости, прямоугольные координаты которой удовлетворяют данному уравнению, лежит на прямой l.

Общее уравнение прямой

Если мы раскроем скобки в полученном выше уравнении прямой и обозначим $-Ax_0 - By_0$ через C, то получим *общее уравнение* прямой l:

$$\boxed{Ax + By + C = 0.} \qquad (1)$$

Теорема 6.1. Любая прямая на плоскости задаётся уравнением вида (1) в декартовой системе координат. Любое уравнение вида (1), где $A, B, C \in \mathbb{R}$, $|A| + |B| \neq 0$, задаёт в декартовой системе координат на плоскости некоторую прямую.

Доказательство. То, что любая прямая задаётся уравнением вида (1), уже доказано выше. Теперь докажем, что любое уравнение вида (1), где $A, B, C \in \mathbb{R}$, $|A| + |B| \neq 0$, задаёт некоторую прямую на плоскости. Поскольку среди коэффициентов A и B хотя бы один отличен от нуля, то уравнение (1) имеет хотя бы одно решение (x_0, y_0)[1]. Тогда

$$Ax_0 + By_0 + C = 0.$$

Выразив отсюда C и подставив в (1), запишем уравнение (1) в эквивалентном виде:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \qquad (2)$$

Проведём через точку $M_0(x_0, y_0)$ на плоскости прямую l, перпендикулярную вектору $\vec{N} = \{A, B\}$. Как доказано выше, она задаётся уравнением (2). Теорема доказана.

Замечание. Если умножить уравнение (1) на некоторое ненулевое число λ, то получим эквивалентное уравнение, но с другими коэффициентами. Поэтому одна и та же прямая l на плоскости может задаваться различными уравнениями вида (1).

Уравнение прямой в отрезках

Если $A, B, C \neq 0$, то из общего уравнения прямой можно получить уравнение прямой *в отрезках:*

$$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,}$$

где $a = -\frac{C}{A}$, $b = -\frac{C}{B}$ — отрезки, которые прямая отсекает на координатных осях.

Уравнение прямой с угловым коэффициентом

Если $B \neq 0$, то из общего уравнения прямой можно получить уравнение прямой *с угловым коэффициентом*:

$$\boxed{y = kx + b,}$$

где коэффициент $k = -\frac{b}{a} = -\frac{A}{B}$ называется *угловым коэффициентом*. Он равен тангенсу угла наклона прямой к оси Ox: $k = \operatorname{tg} \varphi$.

Уравнение прямой с угловым коэффициентом k, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$:

$$\boxed{y = k(x - x_0) + y_0.}$$

Необходимое и достаточное условие перпендикулярности прямых $y = k_1 x + b_1$ и $y = k_2 x + b_2$:

[1] В самом деле, если $A \neq 0$, то $x = -\frac{C}{A}$, $y = 0$ является одним из решений уравнения (1); если $B \neq 0$, то $x = 0$, $y = -\frac{C}{B}$ является одним из решений уравнения (1).

$k_1 k_2 = -1$.

Параметрические уравнения прямой

Определение. Любой *ненулевой* вектор, параллельный прямой l, называется её *направляющим вектором.*

Пусть $\vec{p} = \{m, n\}$ — направляющий вектор прямой l. Произвольная точка M принадлежит прямой l тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{M_0 M} \parallel \vec{p}$. По теореме 2.1 это эквивалентно тому, что $\exists t \in \mathbb{R}$: $\overrightarrow{M_0 M} = t\vec{p}$. Поскольку $\overrightarrow{M_0 M} = \vec{r} - \vec{r}_0$, где $\vec{r}$ — радиус-вектор точки M, $\vec{r}_0$ — радиус-вектор точки M_0, то получаем *параметрическое уравнение* прямой l в векторном виде:

$$\boxed{\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{p}.}$$

Каждой точке прямой l соответствует некоторое значение *параметра* t и наоборот, каждому значению $t \in (-\infty, +\infty)$ соответствует некоторая точка прямой l, причём различным значениям параметра t соответствуют различные точки прямой l.

Если $t \in [a, +\infty)$, получим полупрямую; если $t \in [a, b]$ — отрезок прямой l.

Параметрическому уравнению прямой можно дать механическую интерпретацию. Если t — это время, то данное уравнение описывает закон движения материальной точки с постоянной скоростью $\vec{p}$. Такая точка будет двигаться прямолинейно.

Запишем *параметрические уравнения* прямой на плоскости в координатной форме:

$$\boxed{\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt. \end{cases}}$$

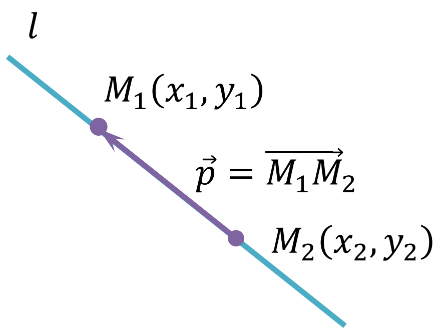
Каноническое уравнение прямой

Исключив из параметрических уравнений прямой параметр t, получим

$$\boxed{\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}.}$$

Это *каноническое уравнение* прямой l. В знаменателях допускаются нули; в этом случае соотношение нужно перемножить «крест-накрест», как пропорцию.

Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки

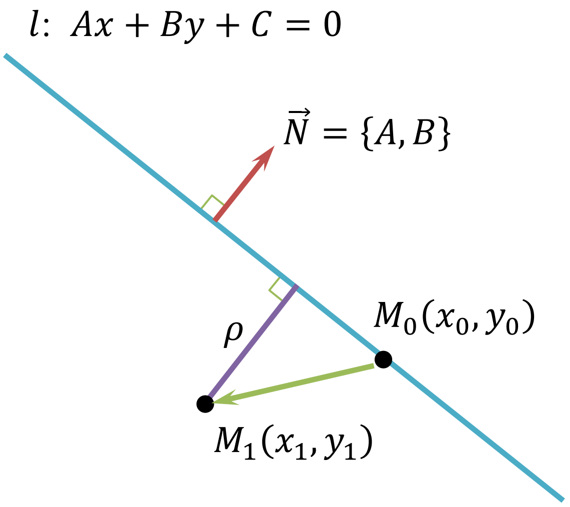


Если заданы две *различные* точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, принадлежащие прямой l, то вектор $\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1\}$ будет являться направляющим вектором прямой l. В качестве опорной точки можно взять любую из точек M_1, M_2; например, M_1. Тогда каноническое уравнение прямой примет вид:

$$\boxed{\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.}$$

Это уравнение прямой l, проходящей через две заданные точки на плоскости.

Расстояние от точки до прямой



Пусть дана прямая l, заданная общим уравнением
$Ax + By + C = 0$.
Вектор $\vec{N} = \{A, B\}$ является её вектором нормали.
Пусть дана точка $M_1(x_1, y_1)$ на плоскости. Требуется найти расстояние $\rho(M_1, l)$ от точки M_1 до прямой l.
Пусть $M_0(x_0, y_0)$ — некоторая точка, лежащая на прямой l.

Расстояние от точки M_1 до прямой l равно модулю проекции вектора $\overrightarrow{M_0M_1}$ на ось, образованную вектором $\vec{N}$:

$$\rho(M_1, l) = \left|\text{Пр}_N \overrightarrow{M_0M_1}\right| = \frac{\left|\left(\overrightarrow{M_0M_1}, \vec{N}\right)\right|}{\left|\vec{N}\right|}.$$

С другой стороны,

$$\left(\overrightarrow{M_0M_1}, \vec{N}\right) = A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0) = Ax_1 + By_1 - (Ax_0 + By_0).$$

Поскольку точка $M_0(x_0, y_0)$ лежит на прямой l, то её координаты удовлетворяют уравнению прямой l:

$$Ax_0 + By_0 + C = 0,$$

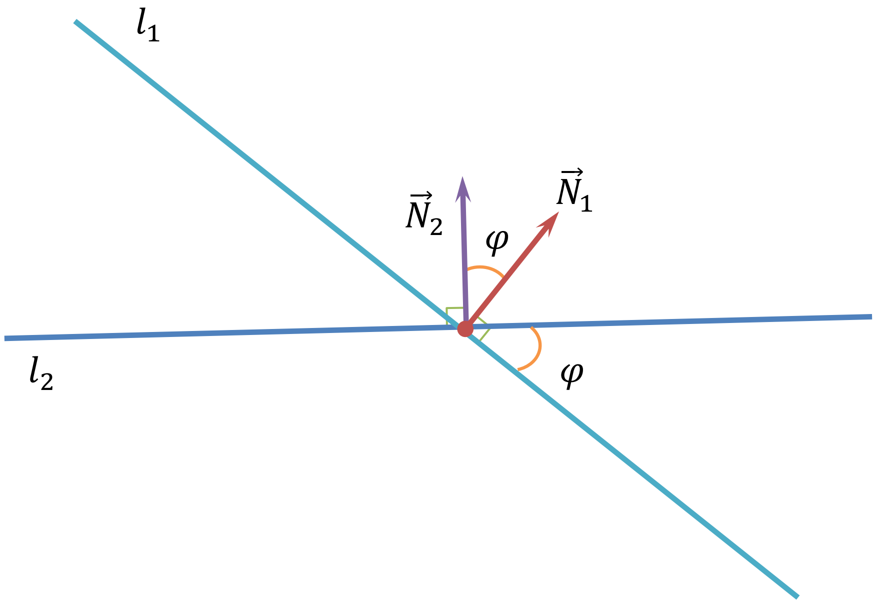
откуда $-(Ax_0 + By_0) = C$, и тогда

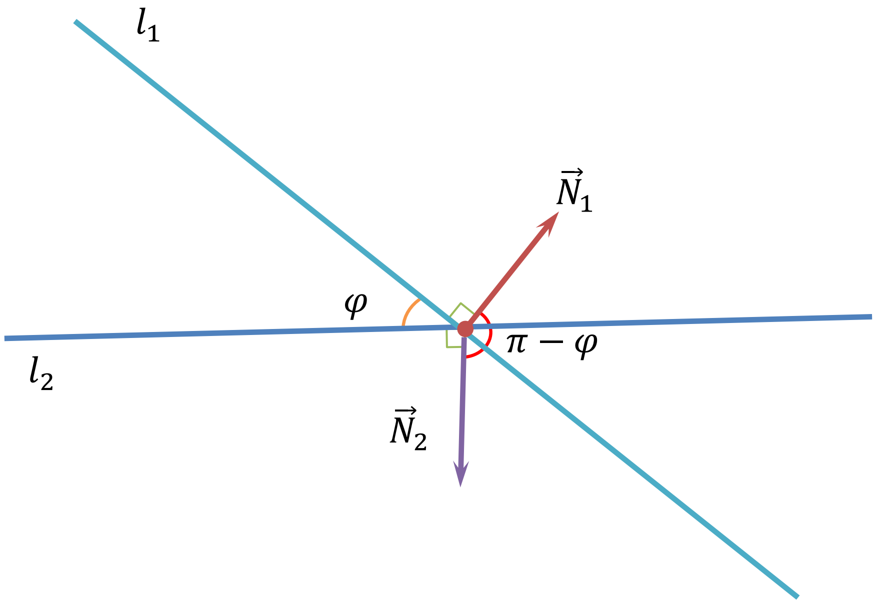
$$\left(\overrightarrow{M_0M_1}, \vec{N}\right) = Ax_1 + By_1 + C.$$

Подставив полученное значение скалярного произведения в выражение для $\rho(M_1, l)$, окончательно получим

$$\boxed{\rho(M_1, l) = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.}$$

Угол между прямыми





Определение. Если прямые l_1 и l_2 параллельны или совпадают, то угол между ними равен нулю.

Пусть теперь прямые l_1 и l_2 пересекаются в одной точке. Углом φ между прямыми l_1 и l_2 называется тот из углов, образованных этими прямыми, который лежит в пределах от 0 до $\frac{\pi}{2}$.

Если векторы нормалей к прямым l_1 и l_2 составляют острый или прямой угол, то этот угол равен углу φ между прямыми. Если же векторы нормалей составляют тупой угол, то он равен $\pi - \varphi$. Таким образом, либо

$$\left(\vec{N}_1, \vec{N}_2\right) = \left|\vec{N}_1\right| \cdot \left|\vec{N}_2\right| \cdot \cos\varphi,$$

либо

$$\left(\vec{N}_1, \vec{N}_2\right) =$$
$$= \left|\vec{N}_1\right| \cdot \left|\vec{N}_2\right| \cdot \cos(\pi - \varphi) =$$
$$= -\left|\vec{N}_1\right| \cdot \left|\vec{N}_2\right| \cdot \cos\varphi,$$

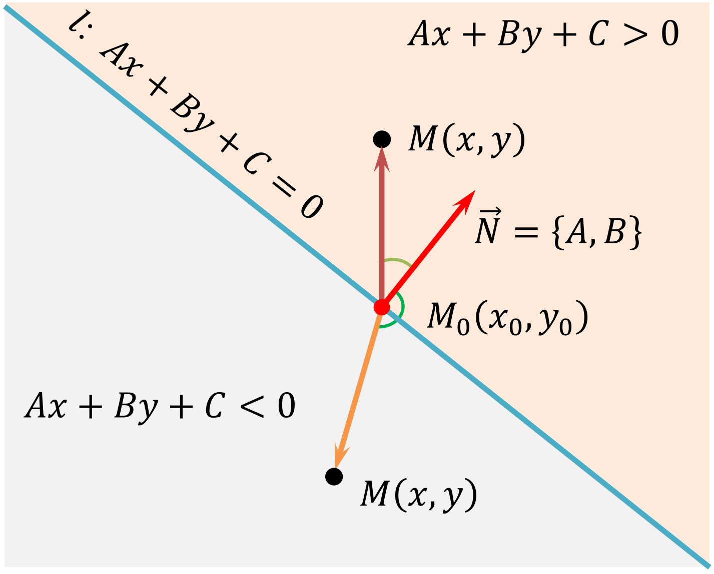
откуда

$$\boxed{\varphi = \arccos\frac{\left|\left(\vec{N}_1, \vec{N}_2\right)\right|}{\left|\vec{N}_1\right| \cdot \left|\vec{N}_2\right|}.}$$

Аналогично угол между прямыми l_1 и l_2 выражается через угол между их направляющими векторами:

$$\boxed{\varphi = \arccos\frac{|(\vec{p}_1, \vec{p}_2)|}{|\vec{p}_1| \cdot |\vec{p}_2|}.}$$

Расположение точек относительно прямой



Теорема 6.2. Прямая $Ax + By + C = 0$ делит плоскость на две полуплоскости, в одной из которых $Ax + By + C > 0$, а в другой — $Ax + By + C < 0$.

Доказательство. Рассмотрим прямую l, заданную уравнением $Ax + By + C = 0$. Вектор $\vec{N} = \{A, B\}$ является вектором нормали к прямой l. Пусть $M_0(x_0, y_0)$ — произвольная точка, принадлежащая l. Рассмотрим произвольную точку плоскости $M(x, y)$.

Прямая l делит плоскость на две полуплоскости.

Если точка M лежит в одной полуплоскости, то вектор $\overrightarrow{M_0M}$ образует острый или нулевой угол с вектором $\vec{N}$, если точка M лежит в другой полуплоскости — тупой или развёрнутый угол. Тогда в одной полуплоскости выполнятся неравенство $\left(\overrightarrow{M_0M}, \vec{N}\right) > 0$, а в другой полуплоскости выполняется неравенство $\left(\overrightarrow{M_0M}, \vec{N}\right) < 0$.

С другой стороны,

$$\left(\overrightarrow{M_0M}, \vec{N}\right) = A(x - x_0) + B(y - y_0) = Ax + By - (Ax_0 + By_0).$$

Поскольку точка M_0 принадлежит прямой l, то $Ax_0 + By_0 + C = 0$, поэтому

$$\left(\overrightarrow{M_0M}, \vec{N}\right) = Ax + By + C.$$

Тогда в одной полуплоскости $Ax + By + C > 0$, а в другой полуплоскости — $Ax + By + C < 0$, ч.т.д.

Следствие. Точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ лежат по одну сторону от прямой $Ax + By + C = 0$, если знаки величин $Ax_1 + By_1 + C$ и $Ax_2 + By_2 + C$ одинаковы, и по разные стороны от прямой, если знаки этих величин противоположны.