

Вопросы по курсу «Основы теории категорий»

А. Основные понятия. Дать определения, привести примеры.

1. Категория.
2. Изоморфизм.
3. Мономорфизм, эпиморфизм.
4. Морфизм, обратимый слева (расщепляющийся мономорфизм); морфизм, обратимый справа (расщепляющийся эпиморфизм).
5. Начальный, конечный объект.
6. Произведение, копроизведение.
7. Уравнитель, коуравнитель.
8. Предел, копредел.
9. ~~Расслоенное произведение, декартов квадрат.~~
10. ~~Обратный образ.~~
11. Функтор (ковариантный, контравариантный).
12. Свободный (косвободный) объект.
13. Левый (правый) сопряженный функтор. Построение через свободный (косвободный) объект.
14. Единица (коединица) сопряжения.
15. Естественное преобразование (функторный морфизм).
16. Естественный изоморфизм.
17. Эквивалентные категории.
18. ~~Категория функторов.~~
19. Ситуация сопряжения. Эквивалентные условия.
20. ~~Тройка.~~
21. ~~Категория Клейсли.~~

В. Доказать утверждения:

1. Доказать что вложение $i: \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{Z}$ не является обратимым слева или справа в Mon . (а в Set ?)
2. обр. слева \Rightarrow моно;
обр. справа \Rightarrow эпи.
3. изо \Rightarrow обр. слева \Rightarrow уравнитель \Rightarrow моно,
изо \Rightarrow обр. справа \Rightarrow коуравнитель \Rightarrow эпи.
4. эпи, уравнитель \Rightarrow изо;
моно, коуравнитель \Rightarrow изо.
5. моно, эпи не \Rightarrow изо (привести контрпример).
6. моно не \Rightarrow уравнитель (привести контрпример).
7. уравнитель не \Rightarrow обр. слева (привести контрпример).
8. Начальный (конечный) объект единственен с точностью до изоморфизма.
9. Произведение (копроизведение) единственно с точностью до изоморфизма.
10. Уравнитель (коуравнитель) единственен с точностью до изоморфизма.
11. Пусть $f: A \rightarrow B$. Доказать существование и найти $\text{eq}(f, f)$ и $\text{coeq}(f, f)$.
12. $A \times \top \cong A$; $A + \perp \cong A$.
13. $(A \times B) \times C \cong A \times (B \times C)$; $(A + B) + C \cong A + (B + C)$.

$$14. [f, g] \circ h = [f \circ h, g \circ h]; \quad h \circ \langle f, g \rangle = \langle h \circ f, h \circ g \rangle.$$

Здесь и далее $[f, g]$ – единственный морфизм, порождаемый морфизмами f и g в определении произведения.

Аналогично, $\langle f, g \rangle$ – единственный морфизм, порождаемый морфизмами f и g в определении копроизведения.

$$15. (f \times g) \circ [h, r] = [f \circ h, g \circ r]; \quad \langle h, r \rangle \circ (f + g) = \langle h \circ f, r \circ g \rangle.$$

$$16. (f \times g) \circ (h \times r) = (f \circ h) \times (g \circ r); \quad (f + g) \circ (h + r) = (f \circ h) + (g \circ r).$$

17. Обратный образ мономорфизма — мономорфизм.

18. Обратный образ уравнителя — уравнитель.

19. Обратный образ обратимого справа — обратим справа.

20. Квадраты A и B Декартовы \Rightarrow периметр Декартов

A	B
-----	-----

21. Предел (копредел) единственен с точностью до изоморфизма.

22. Композиция функторов – функтор.

23. Функтор сохраняет изоморфизмы, обратимые слева (справа).

24. Свободный (косвободный) объект единственен с точностью до изоморфизма.

25. Существование левого сопряженного функтора (если существуют свободные объекты).

26. Существование правого сопряженного функтора (если существуют косвободные объекты).

27. Обратный от естественного изоморфизма – естественный изоморфизм.

28. Тройка в категории образованной частично упорядоченным множеством.

29. Сопряженные функторы порождают тройку.

С. Доказать существование, построить:

1. Парные произведения в категориях Set , Lin , Mon , Grp , Matr , \mathbf{P} (порожд. част. упор. множеством (\mathbf{P}, \leq))
2. Парные копроизведения в категориях Set , Lin , Mon , Grp , Matr , \mathbf{P}
3. Найти $2 \times 3 = ?$, $2 + 3 = ?$ In Set , FinOrd , Matr , \mathbf{Z}_+ . Здесь \mathbf{Z}_+ – категория, порожденная част. упор. множеством неотрицательных целых чисел (\mathbf{Z}_+, \leq)
4. Произвольные произведения в категориях Set , Lin , Mon , \mathbf{P}
5. Произвольные копроизведения в категориях Set , Lin , Mon , \mathbf{P}
6. Что из себя представляет (и в каких случаях существует) произведение пустого множества объектов?
7. Уравнители в категориях Set , Lin , Mon
8. Кравнители в категориях Set , Lin
9. Предел произвольной диаграммы через произведения и уравнители (копредела через копроизведения и коуравнители).
10. ~~Расслоенное произведение через произведение и уравнитель.~~
11. Дать опр. эквивалентности категорий. Доказать $\text{FinLin} \cong \text{Matr}$.
12. Свободный моноид, свободная группа, свободное векторное пространство.
13. Левый сопряженный для забывающих функторов: $\text{Mon} \rightarrow \text{Set}$, $\text{Grp} \rightarrow \text{Set}$, $\text{Lin} \rightarrow \text{Set}$.
14. Левый сопряженный для функторов вложения: $\mathbf{POSet} \rightarrow \mathbf{PrOSet}$ (част. упор. множества и ~~пред упорядоченные множества~~), $\mathbf{CMetC} \rightarrow \mathbf{MetC}$ (полные метрические пространства с непр. отображениями и метрические пространства с непр. отображениями).
15. Левый и правый сопряженные для забывающего функтора: $\text{Top} \rightarrow \text{Set}$.