Лекция 4

МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

§ 1. Определение и пример

Определение 1. *Множество* Y *называется метрическим пространством, если на нём задана вещественная функция* $d : Y \otimes Y \to \mathbb{R}^1_+$ *такая, что выполнены следующие свойства*:

(i) $d(x, y) = 0$ *тогда и только тогда, когда* $x = y$;

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$ *для всех* $x, y \in Y$;

(iii) $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$ *для всех* $x, y, z \in Y$.

ПРИМЕР 1.

Рассмотрим полностью один нетривиальный пример. Пусть l^p при $p > 1$ — линейное пространство последовательностей комплексных чисел вида

$$x = \{x_k\}_{k=1}^{+\infty}, \quad x_k \in \mathbb{C}$$

таких, что

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |x_k|^p < +\infty.$$

Введём метрику на этом линейном пространстве по формуле

$$d(x, y) = \left(\sum_{k=1}^{+\infty} |x_k - y_k|^p \right)^{1/p}. \tag{1.1}$$

Утверждение 1. *Функция* $d(x, y)$ *является метрикой на линейном пространстве* l^p *при* $p > 1$.

□ Действительно, первые два свойства очевидны и в доказательстве нуждается только неравенство треугольника. Доказательство проведём в несколько шагов.

Шаг 1.

Пусть сначала $\{x_k\}$ и $\{y_k\}$ — это последовательности неотрицательных чисел. Пусть

$$a = \frac{x_i^p}{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^p}, \quad b = \frac{y_i^p}{\sum\limits_{k=1}^{n} y_k^p}.$$

Тогда из полученного нами в лекции 3 арифметического неравенства Гёльдера приходим к неравенству

$$\frac{x_i y_i}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^p\right)^{1/p} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} y_k^q\right)^{1/q}} \leqslant \frac{1}{p}\frac{x_i^p}{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^p} + \frac{1}{q}\frac{y_i^p}{\sum\limits_{k=1}^{n} y_k^p}.$$

Теперь просуммируем по $i = \overline{1,n}$ и получим неравенство

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^p\right)^{1/p} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} y_k^q\right)^{1/q}} \leqslant \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Таким образом, приходим к неравенству Гёльдера

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^q\right)^{1/q}.$$

Итак, имеет место следующая цепочка выражений:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p = \sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^{p-1}x_i + \sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^{p-1}y_i \leqslant$$
$$\leqslant \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p\right)^{(p-1)/p} \left[\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^p\right)^{1/p}\right]. \quad (1.2)$$

Значит,

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^p\right)^{1/p}.$$

Пусть $\{x_k\}$ и $\{y_k\}$ — это комплексные последовательности, тогда по доказанному получаем следующее неравенство:

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(|x_i|+|y_i|)^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p\right)^{1/p}.$$

Наконец, осталось воспользоваться очевидным неравенством

$$|x_i + y_i| \leqslant |x_i| + |y_i|.$$

Теперь нужно перейти к пределу при $n \to +\infty$ и получить неравенство Минковского для линейного пространства l^p при $p > 1$. Случай $p = 1$ рассматривается очевидным образом. ⊠

§ 2. Открытые и замкнутые множества

Определение 2. *Открытый шар $O(a,r)$ и замкнутый шар $K(a,r)$ метрического пространства (X,d) :*

$$O(a,r) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in X : \ d(x,a) < r\}, \quad K(a,r) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in X : \ d(x,a) \leqslant r\}.$$

ПРИМЕР 2. Хорошо изученный случай — это метрическое пространство $\big(\mathbb{R}^N, |x-y|\big)$. В этом случае открытый шар — это собственно шар (без границы) с центром в точке $a \in \mathbb{R}^N$ и радиуса $r > 0$

$$B(a,r) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{x \in \mathbb{R}^N : \ |x-a| = \left(\sum_{i=1}^N (x_i - a_i)^2\right)^{1/2} < r\right\},$$

а замкнутый шар — это шар $B(a,r)$ с границей $|x-a| = r$:

$$B(a,r) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{x \in \mathbb{R}^N : \ |x-a| = \left(\sum_{i=1}^N (x_i - a_i)^2\right)^{1/2} \leqslant r\right\}.$$

Определение 3. *Открытое множество — множество, содержащее вместе с каждой своей точкой некоторый открытый шар. Замкнутое множество — дополнение открытого.*

Замечание 1. В разъяснении нуждается определение замкнутого множества. В курсе вещественного анализа мы рассматривали замкнутое множество как множество, к которому добавлены все его предельные точки, т. е. множество A замкнуто тогда, когда любая сходящаяся последовательность его точек $\{x_n\} \subset A$ сходится в нём — *найдётся такая точка $x_0 \in A$, что*

$$|x_n - x_0| \to +0 \quad \textit{при} \quad n \to +\infty.$$

Сначала дадим такое определение *предельной точки*.

Определение 4. *Точка x_0 множества A, не обязательно принадлежащая самому множеству A, называется предельной точкой множества A, если любой открытый шар с центром в этой точке содержит точку этого множества, отличную от данной.*

Теперь дадим определение *предела последовательности*.

Определение 5. *Пределом последовательности $\{x_n\} \subset X$ называется такая точка $x_0 \in X$, что*

$$d(x_n, x_0) \to +0 \quad \textit{при} \quad n \to +\infty.$$

При этом говорят, что последовательность $\{x_n\}$ сходится к x_0 по метрике d, и пишут

$$x_n \xrightarrow{d} x_0.$$

Справедливо следующее утверждение:

Утверждение 2. *Для каждой предельной точки x_0 множества A найдётся последовательность $\{x_n\} \subset A$ такая, что*

$$x_n \xrightarrow{d} x_0 \quad \textit{при} \quad n \to +\infty.$$

☐ Действительно, рассмотрим вложенные шары $O_n = O(x_0, r_n)$ радиусов $r_n = 1/n$ при $n \in \mathbb{N}$ и в каждом шаре O_n возьмём точку $x_n \in O_n$, отличную от точки x_0. Поскольку $r_n \to +0$ при $n \to +\infty$, то

$$d(x_n, x_0) < \frac{1}{n} \Rightarrow x_n \xrightarrow{d} x_0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

⊠

Справедливо следующее утверждение:

Утверждение 3. *Замкнутое множество содержит все свои предельные точки.*

☐ Действительно, пусть $G \subset X$ — замкнутое множество. Тогда найдётся такое открытое множество $U \subset X$, что $G = X \backslash U$. Пусть $\{x_n\} \subset G$ и пусть

$$x_n \xrightarrow{d} x_0.$$

Докажем, что $x_0 \in G = X \backslash U$. Пусть нет — $x_0 \in U$. Тогда в силу открытости множества U найдётся такое число $r > 0$, что $O(x_0, r) \subset U$, но начиная с некоторого номера $n_0 \in \mathbb{N}$

$$\{x_n\}_{n=n_0}^{+\infty} \subset O(x_0, r) \subset U, \quad \{x_n\} \subset G = X \backslash U.$$

Полученное противоречие доказывает утверждение. ⊠

Дадим определения *внутренней* и *внешней* точек.

Определение 6. *Внутренняя точка множества — содержится во множестве вместе с некоторым открытым шаром. Внешняя точка — содержится вместе с некоторым открытым шаром в дополнении множества.*

Определение 7. *Точка $x_0 \in M$ называется изолированной точкой множества M, если существует такой открытый шар $O(x_0, \varepsilon)$ с центром в этой точке, что $O(x_0, \varepsilon) \cap M = \{x_0\}$.*

Дадим определения окрестности и открытой окрестности.

Определение 8. *Окрестностью точки метрического пространства называется любое множество, содержащее данную точку вместе с некоторым открытым шаром.*

Определение 9. *Открытой окрестностью точки называется произвольное открытое множество, содержащее данную точку.*

ПРИМЕР 3. Напомним определения ε-окрестности и замкнутой ε-окрестности точки x_0 в пространстве $\mathbb{R}^N$:

$$U_\varepsilon(x_0) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{x \in \mathbb{R}^N : \, |x - x_0| < \varepsilon\right\}, \quad \overline{U}_\varepsilon(x_0) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{x \in \mathbb{R}^N : \, |x - x_0| \leqslant \varepsilon\right\}.$$

Справедлива следующая лемма, называемая *леммой о топологии.*
Лемма 1. *Имеют место следующие топологические свойства метрических пространств*:

(i) *Объединение любого числа открытых множеств и пересечение конечного числа открытых множеств — открытое множество*;

(ii) *Пересечение любого числа и объединение конечного числа замкнутых множеств — замкнутое множества*;

(iii) *Само пространство X и $\varnothing$ — это открыто-замкнутые множества.*

Доказательство.

Итак, пусть $\{\Sigma_\alpha : \alpha \in A\}$ — произвольное семейство открытых множеств и пусть

$$x \in \bigcup_{\alpha \in A} \Sigma_\alpha,$$

тогда найдётся такое $\alpha_0 \in A$ и такой открытый шар $O(x,r)$ что

$$x \in O(x,r) \subset \Sigma_{\alpha_0} \subset \bigcup_{\alpha \in A} \Sigma_\alpha.$$

Следовательно, объединение произвольного числа открытых множеств — это открытое множество.

Пусть теперь

$$\Sigma \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{k=1}^{n} \Sigma_k \text{ – пересечение конечного числа открытых множеств.}$$

Пусть $x \in \Sigma$, тогда найдутся такие открытые шары $O(x,r_k)$, что

$$x \in O(x,r_k) \subset \Sigma_k.$$

Определим теперь $r = \min\{r_k,\ k = \overline{1,n}\}$, тогда очевидно, что

$$x \in O(x,r) = \bigcap_{k=1}^{n} O(x,r_k) \subset \Sigma.$$

Второе утверждение леммы о топологии вытекает из первого переходом к дополнениям. Действительно, пусть

$$\{S_\alpha :\ \alpha \in A\} \text{ – произвольное семейство замкнутых множеств.}$$

Тогда имеет место следующая цепочка равенств множеств:

$$\bigcap_{\alpha \in A} S_\alpha = \bigcap_{\alpha \in A} (X \backslash \Sigma_\alpha) = X \backslash \left(\bigcup_{\alpha \in A} \Sigma_\alpha \right),$$

где мы ввели обозначение

$$S_\alpha = X \backslash \Sigma_\alpha.$$

С другой стороны, имеет место следующая цепочка равенств множеств:

$$\bigcup_{k=1}^{n} S_k = \bigcup_{k=1}^{n} (X\backslash\Sigma_k) = X\backslash\left(\bigcap_{k=1}^{n}\Sigma_k\right), \quad S_k = X\backslash\Sigma_k.$$

Поэтому можно провести следующие рассуждения. Пусть $\{G_\alpha\}$ при $\alpha \in A$ — это произвольное семейство замкнутых множеств. Тогда согласно определению замкнутого множества найдутся такие открытые множества U_α, что $G_\alpha = X\backslash U_\alpha$. Поэтому в силу формул двойственности имеем

$$\bigcap_{\alpha\in A} G_\alpha = \bigcap_{\alpha\in A} (X\backslash U_\alpha) = X\backslash \bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha - \text{замкнуто},$$

поскольку, как мы доказали,

$$\bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha - \text{открыто}.$$

Аналогичным образом, доказывается, что

$$\bigcup_{k=1}^{n} G_n - \text{замкнуто}.$$

Осталось заметить, что пустое множество $\varnothing$ мы по определению считаем открытым. Тогда доказательство пункта (iii) основано на формулах двойственности

$$X\backslash X = \varnothing, \quad X\backslash\varnothing = X.$$

Отсюда приходим к утверждению.

Лемма доказана.

ПРИМЕР 4. Рассмотрим пример счётной системы открытых множеств, пересечение которых замкнуто, и пример счётной системы замкнутых множеств, объединение которых открыто. Положим

$$O_n = O\left(0, 1+\frac{1}{n}\right) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \ |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < 1 + \frac{1}{n}\right\},$$

$$K_n = K\left(0, 1-\frac{1}{2n}\right) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \ |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leqslant 1 - \frac{1}{2n}\right\}$$

при $n \in \mathbb{N}$. Справедливы следующие равенства (докажите сами!):

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} O_n = K(0,1), \quad \bigcup_{n=1}^{+\infty} K_n = O(0,1).$$

Дадим определение замыкания множества.

Определение 10. *Пересечение всех замкнутых множеств, содержащих множество A, называется замыканием множества и обозначается $\overline{A}$.*

Справедливы следующие свойства замыкания множества, которые мы собрали в одной лемме.

Лемма 2. *Справедливы следующие свойства*:

(i) $A \subset \overline{A}$, $\overline{A} = \overline{\overline{A}}$;

(ii) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;

(iii) $\overline{\varnothing} = \varnothing$, $\overline{X} = X$;

(iv) *вообще говоря*, $\overline{A \cap B} \neq \overline{A} \cap \overline{B}$.

Доказательство. Докажем (i). Действительно,

$$\overline{A} = \bigcap_{\alpha} B_\alpha, \quad A \subset B_\alpha - \text{замкнуто} \Rightarrow A \subset \overline{A}.$$

Следовательно, $\overline{A} \subset \overline{\overline{A}}$. Пусть

$$\overline{A} = \bigcap_{\alpha} B_\alpha, \quad A \subset B_\alpha \Rightarrow \overline{A} \subset B_\alpha \Rightarrow \overline{\overline{A}} \subset \bigcap_{\alpha} B_\alpha = \overline{A} \Rightarrow \overline{\overline{A}} \subset \overline{A}.$$

Следовательно, $\overline{A} = \overline{\overline{A}}$.

Докажем (ii). Действительно, любое покрытие множества $A \cup B$ замкнутыми множествами C_α представимо в виде объединения покрытия множеств A и B замкнутыми множествами A_α и B_β. Отсюда следует утверждение (ii).

Докажем (iii). Действительно,

$$\varnothing = \varnothing - \text{замкнуто} \Rightarrow \varnothing = \overline{\varnothing}, \quad X = X - \text{замкнуто} \Rightarrow X = \overline{X}.$$

И это утверждение справедливо для любого замкнутого множества $A \subset X$. Замыкание замкнутого множества совпадает с самим множеством.

Для доказательства утверждения (iv) приведём пример.

ПРИМЕР 5. Пусть $\mathbb{Q}$ — множество рациональных числе, а $\mathbb{J}$ — множество иррациональных чисел.

$$A = [0,1] \cap \mathbb{Q}, \ B = [0,1] \cap \mathbb{J}, \ \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}^1, \ \overline{\mathbb{J}} = \mathbb{R}^1 \Rightarrow \overline{A} = [0,1], \ \overline{B} = [0,1].$$

При этом $\overline{A \cap B} = \overline{\varnothing} = \varnothing$ и $\overline{A} \cup \overline{B} = [0,1]$.

Лемма доказана.

Ясно, что всякое подмножество Y метрического пространства (X,d) является метрическим пространством (Y,d). Мы ранее выяснили, что в метрическом пространстве (X,d) открыто-замкнутыми множествами заведомо являются само множество X и $\varnothing$. Однако существуют такие метрические пространства, у которых есть и другие открыто-замкнутые множества. Дадим определение *связного метрического пространства*.

Определение 11. *Метрическое пространство* (X,d) *называется топологически связным, если в нем нет других открыто-замкнутых множеств, кроме* X *и* $\varnothing$.

ПРИМЕР 6. Пусть A_1 и A_2 — это два непересекающихся замкнутых подмножества множества $\mathbb{R}^2$ с метрикой d. Тогда $(A_1 \cup A_2, d)$

— это несвязное метрическое пространство. Справедливы следующие равенства:

$$A_1 = (A_1 \cup A_2) \setminus A_2 - \text{открыто}, \quad A_2 = (A_1 \cup A_2) \setminus A_1 - \text{открыто}.$$

Следовательно, множества A_1 и A_2 в метрическом пространстве

$$(A_1 \cup A_2, d)$$

одновременно открыты и замкнуты.

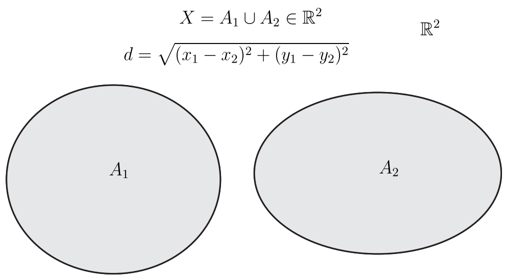

Рис. 1. Несвязное метрическое пространство.

§ 3. Плотные и неплотные множества

Дадим определения *плотных и нигде не плотных множеств* в метрических пространствах.

Определение 12. *Множество A метрического пространства (X, d) называется плотным во множестве B этого же пространства, если $B \subset \overline{A}$.*

ПРИМЕР 7. Пусть $A = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$, $B = [0, 1]$, тогда $\overline{A} = B$.

Определение 13. *Множество A называется всюду плотным в метрическом пространстве (X, d), если $\overline{A} = X$.*

Определение 14. *Множество A называется нигде не плотным в метрическом пространстве, если всякое открытое множество метрического пространства (X, d) содержит другое открытое множество, целиком свободное от точек множества A.*

ПРИМЕР 8. Тривиальным примером нигде не плотного множества в метрическом пространстве $(X = [0, 1], d(x, y) = |x - y|)$ является любое конечное множество точек $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$.

ПРИМЕР 9. Рассмотрим линейное пространство $\mathbb{C}[0, 1]$ относительно метрики

$$d(f, g) = \sup_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)|.$$

Это пространство является сепарабельным, поскольку в силу известной теоремы Стоуна любую непрерывную функцию можно приблизить полиномом с рациональными коэффициентами

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad a_k \in \mathbb{Q}. \tag{3.1}$$

Именно, для любой функции $f(x) \in \mathbb{C}[0,1]$ и для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такой многочлен $P_n(x)$ вида (3.1), что имеет место неравенство

$$d(f(x), P_n(x)) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - P_n(x)| < \varepsilon. \tag{3.2}$$

Рассмотрим множество всех многочленов с рациональными коэффициентами $E_0 = \{P_n(x)\}$. Ясно, что предельными точками этого множества в силу неравенства (3.2) являются все непрерывные функции на отрезке $[0,1]$.

Определение 15. *Метрическое пространство (X, d) называется сепарабельным, если в нём существует счётное всюду плотное множество.*

ПРИМЕР 10. Введём в рассмотрение метрическое пространство l^∞ [1]. Рассмотрим всевозможные последовательности вещественных чисел $\{x_k\}$, для которых

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k| < +\infty.$$

Введём на этом пространстве следующую метрику:

$$d(x, y) = \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k - y_k|.$$

Докажем, что это пространство не является сепарабельным.

С этой целью нам нужно предъявить такое подмножество E_0 множества l^∞, которое нельзя приблизить с любой наперед заданной точностью элементами любого счётного множества.

В качестве такого множества E_0 возьмём произвольные последовательности, состоящие из нулей и единиц:

$$\{x_k\}, \quad x_k = 0 \quad \text{либо} \quad x_k = 1.$$

Можно проверить, что мощность этого множества E_0 — континуум. Кроме того,

$$d(x_0, y_0) = 1 \quad \text{для всех} \quad x_0, y_0 \in E_0.$$

С другой стороны,

$$O(x_0, 1/2) \cap O(y_0, 1/2) = \varnothing \quad \text{для всех} \quad x_0, y_0 \in E_0.$$

Возьмём в каждом из шаров $O(x_0, 1/2)$ точку x, когда x_0 пробегает все множество E_0. Образованное множество M имеет ту же мощность, что и множество E_0. Поэтому множество, которое с любой точностью по метрике d приближает множество E_0 должно иметь мощность кон-

[1] В некоторых книгах это пространство обозначается как m.

тинуума. Следовательно, *счётного* всюду полного множества в l^∞ не существует.

§ 4. Множество Кантора

Дадим определение *совершенного множества.*

Определение 16. *Множество метрического пространства называется совершенным, если оно замкнуто и состоит из предельных точек.*

Предъявим алгоритм построения так называемого множества Кантора. Рассмотрим отрезок $I = [0, 1]$, который мы разделим на три равные части и выкинем из него интервал $(1/3, 2/3)$. Теперь оставшиеся отрезки также разделим на три равные части и из них также выкинем серединные интервалы $(1/9, 2/9)$ и $(7/9, 8/9)$ и т.д. В результате на $n-$ом шаге получим замкнутое множество I_n длиной 3^{-n}, причём выполнена цепочка вложений

$$I \supset I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_n \supset \ldots .$$

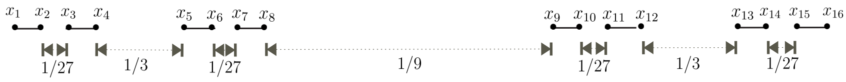

Рис. 2. Построение множества Кантора.

Введем множество Кантора

$$K \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n. \tag{4.1}$$

Справедлива следующая лемма:

Лемма 3. *Множество Кантора K является совершенным и нигде не плотным множеством.*

Доказательство.

Шаг 1. Прежде всего заметим, что по построению I_n замкнуты в метрическом пространстве $(X = [0, 1], d(x, y) = |x - y|)$. Поэтому множество Кантора K как пересечение счётного числа замкнутых множеств замкнуто.

Шаг 2. Докажем, что каждая точка множества Кантора K является его предельной точкой.

Действительно, пусть $x \in K$. Рассмотрим произвольную окрестность этой точки Σ_x, которая согласно определению содержит открытый интервал $\sigma_x \stackrel{\text{def}}{=} (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset \Sigma_x$ с центром в точке x. Пусть Λ_n — это тот отрезок из множества I_n, который содержит точку x. Заметим, что при достаточно большом $n \in \mathbb{N}$ имеем $\Lambda_n \in \sigma_x$. Пусть $a_n \in \Lambda_n$ — это тот конец отрезка Λ_n, который не совпадает с $x \neq a_n$. Следовательно, для произвольной окрестности Σ_x точки x нашлась точка $a_n \in K$ такая, что $x \neq a_n \in \Sigma_x$.

Таким образом, множество Кантора совершенно.

Шаг 3. Докажем, что множество Кантора K является нигде не плотным множеством на отрезке $[0,1]$. Пусть Σ — это произвольное открытое множество на отрезке $[0,1]$. Ясно, что если на этом множестве нет точек Канторова множества, то доказывать нечего. Пусть, однако, $x \in K \cap \Sigma$. Теперь возьмём тот отрезок Λ_m, который содержит точку x. Возьмём теперь интервал с центром в середине этого отрезка Λ_m и радиуса 2^{-m-1}. Этот интервал не принадлежит Канторову множеству.

Таким образом, нигде не плотность доказана.

Лемма доказана.

§ 5. Непрерывные отображения метрических пространств

Как вам известно из курса математического анализа существуют два определения непрерывности отображений метрических пространств. Дадим определение по Коши.

Определение 17. *Отображение*

$$g : (X, d) \to (Y, \rho)$$

называется непрерывным по Коши в точке $x_0 \in X$, если для всякой окрестности $\Sigma_{g(x_0)} \subset Y$ точки $g(x_0) \in Y$ найдётся такая окрестность $\Sigma_{x_0} \subset X$ точки x_0, что

$$g(\Sigma_{x_0}) \subset \Sigma_{g(x_0)}.$$

Теперь дадим определение по Хайне.

Определение 18. *Отображение*

$$g : (X, d) \to (Y, \rho)$$

называется непрерывным по Хайне в точке $x_0 \in X$, если для всякой сходящейся к точке x_0 последовательности $\{x_n\}$ соответствующая последовательность $\{g(x_n)\}$ сходится к точке $g(x_0)$ в метрическом пространстве (Y, ρ) :

$$x_n \xrightarrow{d} x_0 \Rightarrow g(x_n) \xrightarrow{\rho} g(x_0) \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Справедлива следующая лемма:

Лемма 4. *Точка a принадлежит замыканию $\overline{A}$ множества A метрического пространства (X, d) тогда и только тогда, когда существует такая последовательность $\{x_n\} \subset A$, что*

$$x_n \to a. \tag{5.1}$$

Доказательство.

Шаг 1. Пусть $a \in \overline{A}$. По определению

$$\overline{A} = \bigcap_{\alpha} A_\alpha, \quad A \subset A_\alpha, \quad A_\alpha \text{ — замкнутые.}$$

Предположим, что найдётся такое $n_0 \in \mathbb{N}$, что

$$O(a, 1/n_0) \cap A = \varnothing.$$

Тогда

$$O(a, 1/n_0) \subset X \backslash A, \quad B_a = X \backslash O(a, 1/n_0) \text{ – замкнуто,}$$

причём $A \subset B_a$. Стало быть,

$$a \in \overline{A} \subset B_a \quad \text{и} \quad a \notin B_a.$$

Полученное противоречие доказывает, что для любого $n \in \mathbb{N}$

$$O(a, 1/n) \cap A \neq \varnothing \Rightarrow \text{последовательность (5.1) существует.}$$

Шаг 2. Пусть теперь

$$\{x_n\} \subset A \quad \text{и} \quad x_n \xrightarrow{d} a.$$

Докажем, что $a \in \overline{A}$. Действительно,

$$\{x_n\} \subset A \subset A_\alpha \text{ – произвольное замкнутое множество.}$$

Тогда $a \in A_\alpha$. Этот доказывается так. Пусть нет и

$$a \notin A_\alpha \Rightarrow a \in X \backslash A_\alpha \Rightarrow \exists O(a, r) \subset X \backslash A_\alpha$$

с положительным радиусом $r > 0$, поскольку $X \backslash A_\alpha$ открыто. Но начиная с некоторого номера $n_0 \in \mathbb{N}$ имеем

$$\{x_n\}_{n=n_0}^{+\infty} \subset O(a, r) \subset X \backslash A_\alpha,$$

а, с другой стороны, имеем

$$\{x_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset A_\alpha.$$

Следовательно,

$$a \in \bigcap_{\alpha} A_\alpha = \overline{A}.$$

Лемма доказана.

Отметим, что в частном случае, когда a — изолированная точка множества A, имеем $x_n = a$, $a \in \overline{A}$.

Дадим определение образа множества при отображении g.

Определение 19. *Образом $V \subset Y$ множества $U \subset X$ при отображении*

$$g : X \to Y$$

называется множество

$$V \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in Y : \, y = g(x), \; x \in U\}.$$

Определение 20. *Полным прообразом* $U \subset X$ *множества* $V \subset \subset Y$ *при отображении*

$$g : X \to Y$$

называется множество

$$U \overset{\text{def}}{=} \{x \in X: \ g(x) = y \in V \subset Y\}, \quad y \text{ пробегает всё } V.$$

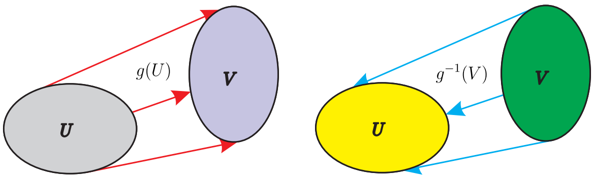

Рис. 3. Образ и прообраз множества.

Докажем теорему *об открытом отображении.*

Теорема 1. *Отображение*

$$g : (X, d) \to (Y, \rho)$$

является непрерывным тогда и только тогда, когда полный прообраз $G \subset X$ *открытого множества* $\Sigma \subset Y$ *открыт в* X.

Доказательство.

Пусть g — непрерывное отображение по Коши и пусть S — открытое множество в (Y, ρ). Если полный прообраз множества S пуст, то он, очевидно, открытое множество. Пусть прообраз множества S непуст. Для всякой точки

$$x_0 \in g^{-1}(S)$$

в силу непрерывности g (поскольку $g(x_0) \in S$) найдётся такая открытая окрестность $\Sigma_{x_0} \ni x_0$, что

$$g(\Sigma_{x_0}) \subset S.$$

Тогда множество

$$\bigcup_{x_0 \in g^{-1}(S)} \Sigma_{x_0},$$

очевидно, открыто и является согласно определению полным прообразом.

Теперь докажем утверждение в обратную сторону. Пусть $\Sigma_{g(x_0)}$ — это открытая окрестность точки $g(x_0)$. Тогда

$$g^{-1}(\Sigma_{g(x_0)})$$

— это открытое множество метрического пространства (X, d), образ которого содержится в $\Sigma_{g(x_0)}$. Следовательно, $g(x)$ — непрерывное отображение согласно определению по Коши.

Теорема доказана.

Следствие. Переходя к дополнениям и учитывая, что (если функция g определена на всём пространстве X) полный прообраз дополнения есть дополнение полного прообраза, получаем эквивалентное условие непрерывности: прообраз всякого замкнутого множества замкнут.

Теперь мы можем доказать теорему об эквивалентности определений по Коши и по Хайне.

Теорема 2. *Определение по Коши эквивалентно определению по Хайне.*

Замечание 2. Отметим, что это достаточно сильное утверждение, поскольку в более общих топологических пространствах, которые мы скоро будем изучать, из определения по Хайне, вообще говоря, не следует определение по Коши, хотя из определения по Коши всегда следует определение по Хайне.

Доказательство.

Пусть
$$g : (X, d) \to (Y, \rho)$$
есть непрерывное отображение по Коши. Докажем, что оно непрерывно по Хайне. Действительно, пусть
$$x_n \xrightarrow{d} x_0 \quad \text{в} \quad (X, d) \quad \text{при} \quad n \to +\infty,$$
тогда для любой окрестности $\Sigma_{g(x_0)} \subset Y$ найдётся такая окрестность $S_{x_0} \subset X$ точки x_0, что
$$g(S_{x_0}) \subset \Sigma_{g(x_0)}.$$
Но $x_n \in S_{x_0}$ начиная с некоторого номера $n_0 \in \mathbb{N}$ и поэтому
$$g(x_n) \in g(S_{x_0}) \subset \Sigma_{g(x_0)} \quad \text{при} \quad n \geqslant n_0.$$
Значит, последовательность $\{g(x_n)\}$ сходится к $g(x_0)$.

Докажем теперь утверждение в обратную сторону. Итак, пусть Σ — это открытое множество метрического пространства (Y, ρ). Докажем, что его полный прообраз
$$G := \{x \in X : \ g(x) \in \Sigma\}$$
является открытым множеством. Пусть нет. Тогда *найдётся такая точка* x_0, *что*
$$x_0 \in G \quad \text{и} \quad x_0 \in \overline{X \backslash G}.$$

□ Действительно, согласно отрицанию определения открытого множества G для любого шара $U(x_0, r)$ имеем одновременно
$$x_0 \in G \quad \text{и} \quad U(x_0, r) \cap (X \backslash G) \neq \varnothing.$$

Следовательно,

$$x_0 \text{ — предельная точка множества } X \backslash G \Rightarrow x_0 \in \overline{X \backslash G}. \quad \boxtimes$$

Но тогда найдётся такая последовательность $\{x_n\}$, $x_n \notin G$, что

$$x_n \xrightarrow{d} x_0 \quad \text{в} \quad (X, d).$$

З а м е ч а н и е 3. В этом месте существенно, что топология окрестностей точки $x_0 \in X$ может быть задана счётной системой окрестностей

$$O(x_0, 1/n) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ x \in X : \ d(x, x_0) < \frac{1}{n} \right\}.$$

В случае общих топологических пространств локально в некоторой точке $x_0 \in X$ её система окрестностей не может быть задана счётным семейством окрестностей. Поэтому в случае общих топологических пространств это место доказательство не проходит — нельзя выделить сходящуюся к точке x_0 последовательность и теорема неверна.

При этом согласно определению полного прообраза G имеем

$$g(x_n) \notin \Sigma \text{ при всех } n \in \mathbb{N}.$$

С другой стороны,

$$g(x_n) \xrightarrow{\rho} g(x_0) \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Поскольку всякая точка открытого множества является согласно определению предельной, то в силу открытости множества Σ начиная с некоторого натурального числа n_0

$$\{g(x_n)\}_{n=n_0}^{+\infty} \subset \Sigma.$$

Полученное противоречие доказывает теорему.

Т е о р е м а д о к а з а н а.

§ 6. Компактные метрические пространства

О п р е д е л е н и е 21. *Открытым покрытием множества A называется произвольное семейство $\{G_\alpha\}$ открытых множеств такое, что*

$$A \subset \bigcup_{\alpha} G_\alpha.$$

О п р е д е л е н и е 22. *Метрическое пространство (X, d) называется компактным (или просто компактом), если из всякого его покрытия открытыми множествами можно выделить конечное подпокрытие.*

П Р И М Е Р 11. Компактом в метрическом пространстве $(X = \mathbb{R}^1, d(x, y) = |x - y|)$ является, например, отрезок $[0, 1]$.

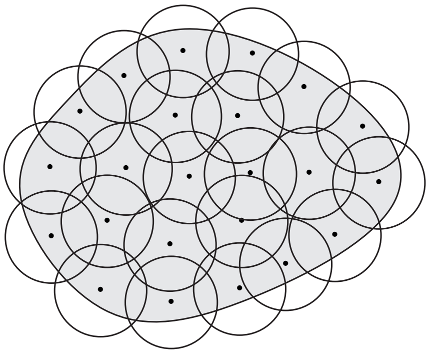

Рис. 4. Покрытие множества.

Определение 23. *Метрическое пространство (X, d) называется локально компактным, если всякая его точка имеет окрестность, замыкание которой компактно.*

Определение 24. *Произвольное семейство множеств $\{F_\alpha\}$ называется центрированным, если всякое его конечное подсемейство имеет непустое пересечение.*

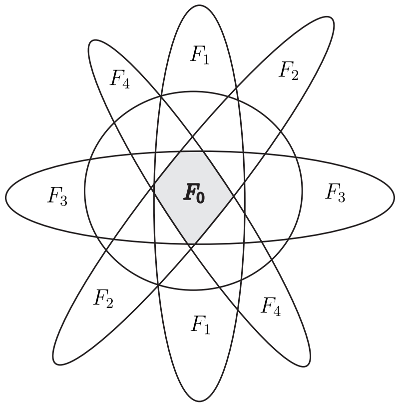

Рис. 5. Центрированная система множеств.

Докажем важную теорему о необходимом и достаточном условии компактности метрического пространства.

Теорема 3. *Для того чтобы метрическое пространство (X, d) было компактным, необходимо и достаточно, чтобы всякая центрированная система его замкнутых подмножеств имела непустое пересечение.*

Доказательство.

Пусть (X, d) компактно и $\{F_\alpha\}$ — это произвольная центрированная система его замкнутых подмножеств. Тогда $G_\alpha = X \setminus F_\alpha$ — это семейство открытых множеств.

Предположим, что

$$\bigcap_\alpha F_\alpha = \varnothing \Rightarrow X = X\backslash\varnothing = X\backslash\left(\bigcap_\alpha F_\alpha\right) = \bigcup_\alpha (X\backslash F_\alpha) = \bigcup_\alpha G_\alpha.$$

Тогда

$$X = \bigcup_\alpha G_\alpha \Rightarrow \text{найдётся конечная подсистема } \{G_{\alpha_k}\}_{k=1}^n, \quad X = \bigcup_{k=1}^n G_{\alpha_k}.$$

Тогда

$$\varnothing = X\backslash X = X\backslash \bigcup_{k=1}^n G_{\alpha_k} = \bigcap_{k=1}^n X\backslash G_{\alpha_k} = \bigcap_{k=1}^n F_{\alpha_k}.$$

Следовательно, система $\{F_\alpha\}$ не является центрированной.

Теперь мы докажем утверждение в обратную сторону.

Итак, пусть всякая центрированная система его замкнутых множеств имеет непустое пересечение. Пусть $\{G_\alpha\}$ — открытое покрытие множества X, тогда

$$X = \bigcup_\alpha G_\alpha, \quad \{F_\alpha\} = \{X\backslash G_\alpha\}$$

— это система замкнутых множеств, причём

$$X = \bigcup_\alpha G_\alpha \Rightarrow \varnothing = X\backslash X = X\backslash\left(\bigcup_\alpha G_\alpha\right) = \bigcap_\alpha (X\backslash G_\alpha) = \bigcap_\alpha F_\alpha.$$

Итак,

$$\bigcap_\alpha F_\alpha = \varnothing,$$

так как $\{G_\alpha\}$ покрывает X. Следовательно, $\{F_\alpha\}$ не является центрированной. Значит, некоторая его конечная подсистема

$$\{F_k\}_{k=1}^N$$

имеет пустое пересечение. Следовательно,

$$\bigcap_{k=1}^N F_{\alpha_k} = \varnothing \Rightarrow X = X\backslash\varnothing = X\backslash\left(\bigcap_{k=1}^N F_{\alpha_k}\right) = \bigcup_{k=1}^N (X\backslash F_{\alpha_k}) = \bigcup_{k=1}^N G_{\alpha_k}.$$

Таким образом,

$$\{G_{\alpha_k}\}_{k=1}^N, \quad G_{\alpha_k} = X\backslash F_{\alpha_k} \quad \text{покрывает} \quad X.$$

Значит, X — компакт.

Теорема доказана.

Лемма 5. *Справедливы следующие свойства компактов*:

(i) *Замкнутое подмножество компактного метрического пространства является компактом*;

(ii) *Образ компактного пространства при непрерывном отображении — компактное пространство*;

(iii) *Компактное подмножество метрического пространства, рассматриваемое как метрическое пространство, замкнуто.*

Доказательство.

Докажем свойство (i). Действительно, пусть (X,d) — это компакт и A замкнуто в (X,d). Тогда

$$X_1 = X \backslash A - \text{открыто}.$$

Пусть $\{U_\alpha\}$ — это произвольное открытое покрытие множества A. Тогда

$$X = X_1 \bigcup \left(\bigcup_\alpha U_\alpha \right) \Rightarrow \text{найдётся такая конечная подсистема } \{U_{\alpha_k}\}_{k=1}^n,$$

что

$$X = X_1 \bigcup \left(\bigcup_{k=1}^n U_{\alpha_k} \right) \Rightarrow A \subset \bigcup_{k=1}^n U_{\alpha_k}.$$

Следовательно, A — это компакт.

Докажем свойство (ii). Пусть

$$g(x) : (X,d) \to (Y,\rho) - \text{непрерывное отображение}.$$

Пусть

$$Y = \bigcup_\alpha V_\alpha, \quad V_\alpha - \text{открыто в } (Y,\rho).$$

По теореме об открытом отображении

$$U_\alpha = g^{-1}(V_\alpha) - \text{открыто в } (X,d).$$

Следовательно,

$$X = g^{-1}(Y) = g^{-1}\left(\bigcup_\alpha V_\alpha \right) = \bigcup_\alpha g^{-1}\left(V_\alpha\right).$$

Поскольку (X,d) — компакт, то найдётся конечная подсистема

$$\left\{g^{-1}\left(V_{\alpha_k}\right\}_{k=1}^n\right), \quad X = \bigcup_{k=1}^n g^{-1}\left(V_{\alpha_k}\right) = g^{-1}\left(\bigcup_{k=1}^n V_{\alpha_k} \right) \Rightarrow Y = \bigcup_{k=1}^n V_{\alpha_k}.$$

Следовательно, (Y,ρ) — это компакт.

Докажем свойство (iii). Действительно, пусть A — компакт в (X,d) и $y \notin A$. Тогда для любой точки $x \in A$ найдутся такие открытые окрестности $x \in U_x$ и $y \in V_x(y)$, что

$$U_x \bigcap V_x(y) = \varnothing.$$

Кроме того,

$$A \subset \bigcup_{x \in A} U_x \Rightarrow A \subset \bigcup_{k=1}^{n} U_{x_k} \Rightarrow \left(\bigcap_{k=1}^{n} V_{x_k}(y)\right) \bigcap \left(\bigcup_{k=1}^{n} U_{x_k}\right) = \varnothing.$$

Следовательно, y входит в $X \backslash A$ вместе с некоторой открытой окрестностью:

$$y \in \bigcap_{k=1}^{n} V_{x_k} \subset X \backslash A \Rightarrow A - \text{замкнуто}.$$

Лемма доказана.

§ 7. База топологии метрического пространства

Дадим определение базы топологии метрического пространства.

Определение 25. *Базой топологии $\mathfrak{B}$ метрического пространства (X, d) называется такая система открытых множеств, что любое открытое множество Σ можно представить в виде*

$$\Sigma = \bigcup_{\alpha} B_\alpha, \quad B_\alpha \in \mathfrak{B}.$$

Например, на плоскости база топологии — это множества $O(x, 1/m)$ при $m \in \mathbb{N}$:

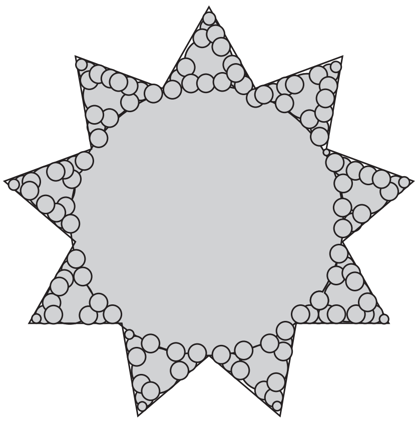

Рис. 6. Открытые шары радиусов $1/m$ при $m \in \mathbb{N}$ — база топологии на $\mathbb{R}^2$.

Справедлива следующая лемма:

Лемма 6. *Для того чтобы система открытых множеств $\mathfrak{B}$ была базой топологии метрического пространства (X, d), необходимо и достаточно, чтобы для всякого открытого множества G и всякой его точки $a \in G$ нашлось такое множество $\Sigma_a \in \mathfrak{B}$, что $a \in \Sigma_a \subset G$.*

Доказательство.

Пусть $\mathfrak{B}$ — база топологии. Тогда для любого открытого множества G и любой его точки $a \in G$ найдётся такая подсистема

$$\{\Sigma_\alpha\} \in \mathfrak{B},$$

что

$$G = \bigcup_{\alpha} \Sigma_\alpha \Rightarrow \exists \alpha_0 : a \in \Sigma_{\alpha_0} \subset G.$$

Пусть теперь для всякого открытого множества G и его точки $a \in G$ найдётся такое $\Sigma_a \in \mathfrak{B}$, что

$$a \in \Sigma_a \subset G.$$

Но тогда

$$G = \bigcup_{a \in G} \Sigma_a.$$

Значит, $\mathfrak{B}$ — база топологии.

Лемма доказана.

Определение 26. *Метрическое пространство называется пространством со счётной базой, если существует хотя бы одна база топологии, состоящая из счётного числа множеств.*

ПРИМЕР 12. Примером пространства со счётной базой является пространство $(X = \mathbb{R}^1, d(x,y) = |x-y|)$. Действительно, в качестве базы топологии возьмём следующую счётную систему множеств:

$$\mathfrak{B} = \{(a_n - 1/m, a_n + 1/m)\}, \quad m \in \mathbb{N}, \quad a_n \in \mathbb{Q}.$$

Справедлива следующая лемма, обобщающая этот результат:

Лемма 7. *Метрическое пространство является пространством со счётной базой, если в нём существует счётное всюду плотное множество, т. е. если это метрическое пространство сепарабельно.*

Рекомендуется доказать её самостоятельно, опираясь на лемму 6.

§ 8. Полнота метрических пространств

Определение 27. *Последовательность $\{x_n\}$ метрического пространства (X,d) называется фундаментальной, если*

$$d(x_n, x_m) \to 0 \quad \textit{при} \quad n, m \to +\infty.$$

ПРИМЕР 13. В метрическом пространстве $(X = [0,1], d(x,y) = |x-y|)$ всякая фундаментальная последовательность сходится. С другой стороны, приведём пример метрического пространства, в котором не всякая фундаментальная последовательность сходится. Действительно, пример такой:

$$X = \mathbb{C}^{(1)}([0,1]), \quad d(f,g) = \sup_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)|.$$

П Р И М Е Р 14. Рассмотрим следующую последовательность:

$$f_n(x) = \begin{cases} x, & \text{если} \quad x \in [0, 1/2 - \frac{1}{2+n}]; \\ \omega_n(x), & \text{если} \quad x \in [1/2 - \frac{1}{2+n}, 1/2 + \frac{1}{2+n}]; \\ 1 - x, & \text{если} \quad x \in [1/2 + \frac{1}{2+n}, 1], \end{cases}$$

где

$$\omega_n(x) \in \mathbb{C}^{(1)}\left(\left[1/2 - \frac{1}{2+n}, 1/2 + \frac{1}{2+n}\right]\right),$$

$$\omega_n\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2+n}\right) = 1/2 - \frac{1}{2+n}, \quad \omega_n\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2+n}\right) = 1/2 - \frac{1}{2+n},$$

$$\omega_n'\left(1/2 - \frac{1}{2+n}\right) = 1, \quad \omega_n'\left(1/2 + \frac{1}{2+n}\right) = -1.$$

Такая гладкая функция $\omega_n(x)$ существует.

Теперь заметим, что построенная последовательность $\{f_n(x)\}$ является фундаментальной в $\mathbb{C}^{(1)}([0,1])$ и сходится к функции

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \in [0, 1/2]; \\ 1 - x, & \text{если } x \in [1/2, 1], \end{cases}$$

которая не является дифференцируемой в точке $x = 1/2$.

С другой стороны, метрическое пространство

$$X = \mathbb{C}^{(1)}([0,1]), \quad d(f,g) = \sup_{x \in [0,1]} [|f(x) - g(x)| + |f'(x) - g'(x)|]$$

уже обладает тем свойством, что всякая фундаментальная в нём последовательность сходится к некоторой функции из $\mathbb{C}^{(1)}[0,1]$.

О п р е д е л е н и е 28. *Метрическое пространство назывется полным, если каждая его фундаментальная последовательность сходится в нем.*

П Р И М Е Р 15. В качестве примера рассмотрим линейное метрическое пространство $\mathbb{C}[0,1]$ относительно метрики

$$d(f,g) = \sup_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)|.$$

Итак, пусть $\{f_n(x)\}$ — это фундаментальная последовательность относительно указанной метрики. Это значит, что для всякого $\varepsilon > 0$ найдётся такое натуральное $N \in \mathbb{N}$, что для всех $n, m \geqslant N$ имеет место неравенство

$$\sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Т.е. последовательность $\{f_n(x)\}$ равномерно сходится к непрерывной функции. Теперь осталось перейти к пределу при $m \to +\infty$ и получить полноту этого пространства.

§ 9. Изометрия метрических пространств

Рассмотрим линейное пространство $B(X)$ ограниченных функций относительно метрики

$$d_0(f,g) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|. \tag{9.1}$$

Оно является полным метрическим пространством $(B(X), d_0)$.

Определение 29. *Отображение*

$$\mathrm{J} : (X_1, d_1) \to (X_2, d_2)$$

двух метрических пространств называется изометрией, если

$$d_2(\mathrm{J}f, \mathrm{J}g) = d_1(f,g) \quad \text{для всех} \quad f, g \in X_1.$$

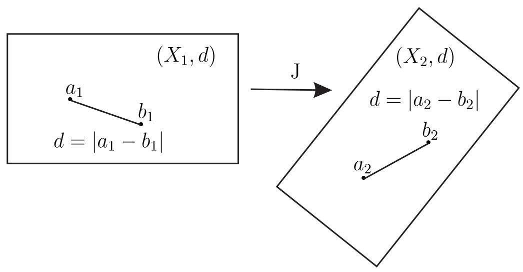

Рис. 7. Поворот прямоугольника на плоскости — изометрия.

Замечание 4. Заметим, что изометрия является взаимно однозначным отображением на свой образ. Действительно, поскольку мы рассматриваем только однозначные отображения, то осталось доказать инъективность, что следует из равенств

$$y = \mathrm{J}(x_1) = \mathrm{J}(x_2), \quad d_1(x_1, x_2) = d_2(\mathrm{J}(x_1), \mathrm{J}(x_2)) = d_2(y,y) = 0 \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Справедлива следующая лемма об изометрии метрических пространств:

Лемма 8. *Пусть (X_1, d_1) и (X_2, d_2) — это два полных метрических пространства и*

$$E_1 \stackrel{ds}{\subset} X_1, \quad E_2 \stackrel{ds}{\subset} X_2,$$

где между E_1 и E_2 имеется изометрия J, причём $\mathrm{J}E_1 = E_2$. Тогда изометрия J продолжается единственным образом до изометрии между (X_1, d_1) и (X_2, d_2).

Замечание 5. Здесь и всюду далее мы пишем

$$E \stackrel{ds}{\subset} X$$

и говорим, что множество E плотно вложено в пространство X, если для любой точки $x \in X$ найдётся такая последовательность $\{x_n\} \subset E_1$, что
$$x_n \xrightarrow{d} x.$$

Доказательство. Итак, пусть $x \in X_1 \backslash E_1$. Тогда в силу плотности E_1 в X_1 существует такая последовательность $\{x_n\} \subset E_1$, что
$$x_n \xrightarrow{d_1} x.$$

Но тогда последовательность $\{\mathrm{J}x_n\}$ фундаментальна в (X_2, d_2), поскольку
$$d_2(\mathrm{J}(x_n), \mathrm{J}(x_m)) = d_1(x_n, x_m) \to +0 \quad \text{при} \quad n, m \to +\infty,$$

и в силу полноты метрического пространства (X_2, d_2) найдётся такое $y \in X_2$, что
$$\mathrm{J}(x_n) \xrightarrow{d_2} y.$$

Обозначим через
$$\widehat{\mathrm{J}}(x) = \begin{cases} y, & \text{если} \quad x \in X_1 \backslash E_1; \\ \mathrm{J}(x), & \text{если} \quad x \in E_1 \end{cases}$$

некоторое продолжение оператора изометрии J, определённого на множестве E_1, на множество X_1.

1. *Корректность.* Проверим корректность определения $\mathrm{J}(x)$. Пусть существует другая последовательность $\{v_n\} \subset E_1$, которая сходится к x. Но тогда последовательность $\{\mathrm{J}(v_n)\}$ тоже сходится к $\widehat{\mathrm{J}}(x)$, поскольку последовательность
$$\{z_n\} = x_1, v_1, x_2, v_2, \ldots, x_n, v_n, \ldots$$

сходится к x. Действительно, $z_{2n-1} = x_n$ и поэтому
$$d_2(\mathrm{J}(z_n), \widehat{\mathrm{J}}(x)) \leqslant d_2(\mathrm{J}(z_n), \mathrm{J}(z_{2n-1})) + d_2(\mathrm{J}(z_{2n-1}), \widehat{\mathrm{J}}(x)) \to +0$$

при $n \to +\infty$. Поэтому и подпоследовательность $\{\mathrm{J}(z_{2n}) = \mathrm{J}(v_n)\}$ тоже сходится к $\widehat{\mathrm{J}}(x)$.

2. *Изометрия.* Проверим, что так определённое продолжение изометрии J является изометрией на X_1.

□ Действительно, пусть $x, z \in X_1$, тогда найдутся такие последовательности $\{x_n\} \subset E_1$ и $\{z_n\} \subset E_1$, что
$$x_n \xrightarrow{d_1} x, \quad z_n \xrightarrow{d_1} z,$$

тогда
$$d_2(\widehat{\mathrm{J}}(x), \widehat{\mathrm{J}}(z)) = \lim_{n \to +\infty} d_2(\mathrm{J}(x_n), \mathrm{J}(z_n)) = \lim_{n \to +\infty} d_1(x_n, z_n) = d_1(x, z).$$

Действительно, это следствие следующих рассуждений:

$$d_2(\widehat{\mathrm{J}}(x), \widehat{\mathrm{J}}(z)) \leqslant d_2(\widehat{\mathrm{J}}(x), \mathrm{J}(x_n)) + d_2(\mathrm{J}(x_n), \mathrm{J}(z_n)) + d_2(\mathrm{J}(z_n), \widehat{\mathrm{J}}(z)).$$

Отсюда получаем, что

$$d_2(\widehat{\mathrm{J}}(x), \widehat{\mathrm{J}}(z)) \leqslant \lim_{n\to+\infty} d_2(\mathrm{J}(x_n), \mathrm{J}(z_n)).$$

Кроме того, имеет место следующая цепочка неравенств:

$$d_2(\mathrm{J}(x_n), \mathrm{J}(z_n)) \leqslant d_2(\mathrm{J}(x_n), \widehat{\mathrm{J}}(x)) + d_2(\widehat{\mathrm{J}}(x), \widehat{\mathrm{J}}(z)) + d_2(\widehat{\mathrm{J}}(z), \mathrm{J}(z_n)),$$

из которой сразу же получаем, что

$$\lim_{n\to+\infty} d_2(\mathrm{J}(x_n), \mathrm{J}(z_n)) \leqslant d_2(\widehat{\mathrm{J}}(x), \widehat{\mathrm{J}}(z)).$$

Значит,

$$d_2(\widehat{\mathrm{J}}(x), \widehat{\mathrm{J}}(z)) = \lim_{n\to+\infty} d_2(\mathrm{J}(x_n), \mathrm{J}(z_n)).$$

Аналогичным образом устанавливается, что

$$d_1(x, z) = \lim_{n\to+\infty} d_1(x_n, z_n).\boxtimes$$

3. *Отображение на* X_2. Наконец, докажем, что

$$\widehat{\mathrm{J}}(X_1) = X_2.$$

Действительно, для каждой точки $z \in X_2$ найдётся такая последовательность $\{z_n\} \subset E_2$, что

$$d_2(z_n, z) \to +0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Поскольку на E_1 отображение J обладает обратным, то это в свою очередь означает, что найдётся такая последовательность $\{x_n\} \subset E_1$, что $z_n = \mathrm{J}(x_n)$ и тем самым

$$d_2(\mathrm{J}(x_n), z) \to +0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Итак, последовательность $\{J(x_n)\}$ сходится, а следовательно, фундаментальна. Но тогда в силу изометрии J последовательность $\{x_n\}$ также фундаментальна. Значит, она сходится к $x \in X_1$ в силу полноты (X_1, d_1).

Заметим теперь, что

$$\widehat{\mathrm{J}}(x) = \widehat{\mathrm{J}}(\lim_{n\to+\infty} x_n) = \lim_{n\to+\infty} \widehat{\mathrm{J}}(x_n) = \lim_{n\to+\infty} z_n = z,$$

поскольку, очевидно, всякая изометрия является непрерывным отображением.

4. *Инъективность*. Пусть для некоторого $y \in X_2$ найдутся две точки такие, что $\widehat{\mathrm{J}}(x_1) = \widehat{\mathrm{J}}(x_2) = y$, тогда

$$d_1(x_1, x_2) = d_2(\widehat{\mathrm{J}}(x_1), \widehat{\mathrm{J}}(x_2)) = d_2(y, y) = 0 \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Лемма доказана.

Справедлива следующее утверждение:

Теорема 4. *Всякое метрическое пространство (X, d) изометрично некоторой части метрического пространства $(B(X), d_0)$.*

Доказательство.

Итак, пусть метрическое пространство (X, d) не пусто. Тогда найдётся точка $x_0 \in X$. Определим функцию на метрическом пространстве (X, d) следующим образом:

$$f_x(y) = d(y, x) - d(x_0, y), \tag{9.2}$$

где точки $x, x_0 \in X$ фиксированные, а точка $y \in X$ произвольная.

Отметим, что имеет место следующее неравенство:

$$|d(y, x) - d(x_0, y)| \leqslant d(x, x_0) \tag{9.3}$$

□ Действительно, имеют место следующие неравенства:

$$d(y, x) \leqslant d(y, x_0) + d(x_0, x), \quad d(y, x_0) \leqslant d(x_0, x) + d(x, y).$$

Из этих двух неравенств вытекает неравенство (9.3) ⊠

Значит,

$$|f_x(y)| \leqslant d(x, x_0),$$

т. е. функция $f_x(y)$ для каждого фиксированного $x \in X$ принадлежит метрическому пространству $B(X)$ как функция $y \in X$. Для фиксированных $x_1, x_2 \in X$ имеют место следующие цепочки выражений:

$$|f_{x_1}(y) - f_{x_2}(y)| = |d(y, x_1) - d(y, x_2)| \leqslant d(x_1, x_2).$$

Отсюда получаем, что

$$d_0(f_{x_1}, f_{x_2}) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{y \in X} |f_{x_1}(y) - f_{x_2}(y)| \leqslant d(x_1, x_2). \tag{9.4}$$

Докажем, что на самом деле в неравенстве (9.4) имеет место равенство. С этой целью достаточно указать такое $y \in X$, что имеет место равенство. Действительно, пусть $y = x_1$, тогда имеем

$$|f_{x_1}(x_1) - f_{x_2}(x_1)| = d(x_1, x_2).$$

Итак,

$$d_0(f_{x_1}, f_{x_2}) = d(x_1, x_2).$$

Таким образом, установлена изометрия между всем метрическим пространством (X, d) и частью метрического пространства $B(X)$.

Теорема доказана.

§ 10. Пополнение метрических пространств

Как мы уже говорили, не всякое метрическое пространство полно относительно заданной метрики. Однако для всякого метрического пространства существует операция пополнения, после которой пополненное метрическое пространство уже полно относительно заданной метрики.

П Р И М Е Р 16. Пусть $X = \mathbb{C}^{(1)}([0,1])$ и

$$d(f,g) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|,$$

тогда пополнением этого пространства относительно метрики $d(f,g)$ будет пространство $\mathbb{C}[0,1]$. С другой стороны, рассмотрим метрическое пространство $X = \mathbb{C}^{(1)}[0,1]$ с другой метрикой

$$d_p(f,g) = \left(\int\limits_0^1 |f(x) - g(x)|^p \, dx\right)^{1/p}.$$

Тогда при пополнении мы получим пространство Лебега $L^p(0,1)$.

О п р е д е л е н и е 30. *Пополнением метрического пространства* (X,d) *называется такое полное метрическое пространство* $(\widetilde{X},\widetilde{d})$, *что* (X,d) *изометрично некоторому всюду плотному подмножеству в* $(\widetilde{X},\widetilde{d})$.

З а м е ч а н и е 6. Здесь нужно понять, что можно было бы «попросту» сказать, что операция пополнения — это операция добавления всех предельных точек фундаментальных последовательностей $\{x_n\} \subset \subset (X,d)$ в более «широкое» множество $(\widetilde{X},d)$ и писали бы

$$(X,d) \overset{ds}{\subset} (\widetilde{X},d).$$

Однако, хоть эта операция «понятная», но может быть не реализована, поскольку для этого нужно точно знать объемлющее полное относительно той же метрики пространство $(\widetilde{X},d)$. И тогда замыкание множества X в этом метрическом пространстве и дает пополнение.

При доказательстве ниже следующей теоремы мы предлагаем другой подход к пополнению, при котором исходное пространство (X,d) лишь изометрично некоторой плотной части в пополненном пространстве $(\widetilde{X},\widetilde{d})$ и пишем

$$(\mathrm{J}X,\widetilde{d}) \overset{ds}{\subset} (\widetilde{X},\widetilde{d}). \tag{10.1}$$

Т е о р е м а 5. *Всякое метрическое пространство имеет единственное с точностью до изометрии пополнение.*

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Шаг 1. По доказанной ранее теореме об изометрии метрическое пространство (X,d) изометрично некоторому подмножеству полного метрического пространства $B(X)$. Пусть J — это изометрия, о которой идет речь. Тогда рассмотрим

$$\mathrm{J}X \subset B(X).$$

Замыкание множества $\mathrm{J}(X)$ в полном метрическом пространстве $B(X)$, очевидно, является полным метрическим пространством. Обозначим это замыкание через $\widetilde{B}(X)$. Тогда $\widetilde{B}(X)$ и можно взять за $\widetilde{X}$. В самом деле, $\widetilde{B}(X)$ — полное метрическое пространство и по построению выполнено (10.1).

Шаг 2. Докажем, что пополнение единственно с точностью до изометрии. Пусть имеется метрическое пространство $(\widetilde{\widetilde{X}}, d_2)$ и изометрия

$$\mathrm{J}_2 : (X, d) \to (\widetilde{\widetilde{X}}, d_2)$$

такая, что

$$(\mathrm{J}_2 X, d_2) \overset{ds}{\subset} (\widetilde{\widetilde{X}}, d_2).$$

Тогда, поскольку любая изометрия обратима и обратное отображение тоже является изометрией, существует отображение

$$\mathrm{J}_2(\mathrm{J})^{-1} : \mathrm{J}X \to \mathrm{J}_2 X,$$

являющееся изометрией $\mathrm{J}X$ на $\mathrm{J}_2 X$. Поскольку

$$(\mathrm{J}X, d_0) \overset{ds}{\subset} (\widetilde{B}(X), d_0), \quad (\mathrm{J}_2 X, d_2) \overset{ds}{\subset} (\widetilde{\widetilde{X}}, d_2), \tag{10.2}$$

то в силу леммы 8 эта изометрия продолжается до изометрии между $(\widetilde{B}(X), d_0)$ и $(\widetilde{\widetilde{X}}, d_2)$, что и доказывает единственность пополнения с точностью до изометрии.

Теорема доказана.

§ 11. Теорема Банаха–Штейнгауза

Теорема 6. *Пусть (X, d) — это полное метрическое пространство и $\{B_n\}_{n=1}^{+\infty}$ — семейство замкнутых шаров, причём при всех $n \in \mathbb{N}$ $B_{n+1} \subset B_n$ и радиусы шаров r_n стремятся к 0, тогда*

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n = \{a\},$$

где a — некоторая точка из X.

Доказательство. Действительно, возьмём последовательность $\{a_n\}$ такую, что $a_n \in B_n$. Поскольку шары вложены и их радиусы стремятся к нулю, то эта последовательность $\{a_n\}$ фундаментальна.

$\square$ Это следует из того, что для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое натуральное $N \in \mathbb{N}$, что при $n, m > N$

$$a_n, a_m \in B_{\min\{n,m\}},$$

а радиус шара $B_{\min\{n,m\}}$ стремится к нулю при $N \to +\infty$. $\boxtimes$

Следовательно, в силу полноты (X, d) последовательность $\{a_n\}$ сходится к точке a, которая в силу замкнутости шаров B_n, принадлежит их пересечению.

Докажем, что пересечение этих шаров состоит в точности из одной точки. Для этого заметим, что расстояние между двумя точками x, y, лежащими в одном замкнутом шаре радиуса r, не превосходит $2r$.

$\square$ Действительно, если o — центр шара, имеем

$$d(x,y) \leqslant d(x,o) + d(o,y) \leqslant 2r. \boxtimes$$

Следовательно, если пересечение всех шаров содержит точки a, b, то

$$d(a,b) \leqslant 2r_n \to 0,$$

откуда $d(a,b) = 0$ и $a = b$.

Теорема доказана.

Справедлива важная теорема Бэра о категориях.

Теорема 7. *Пусть (X,d) — это полное метрическое пространство, которое представимо в виде*

$$X = \bigcup_{n=1}^{+\infty} X_n, \quad X_n = \overline{X}_n, \tag{11.1}$$

тогда хотя бы одно множество X_{n_0} содержит открытый шар положительного радиуса.

Доказательство.

Доказательство проведём по индукции.

Шаг 1. Если $X = X_1$, то доказывать нечего, поскольку тогда X_1 содержит все открытые шары.

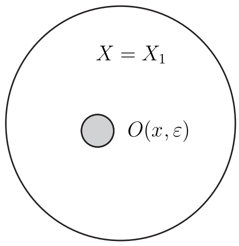

Рис. 8. Случай $X = X_1$.

Шаг 2. Пусть $X \neq X_1$, тогда $X \backslash X_1$ открыто и поэтому найдётся непустой открытый шар $O(x_1, \varepsilon_1) \subset X \backslash X_1$. Очевидно,

$$O(x_1, \varepsilon_1) \cap X_1 = \varnothing.$$

Теперь либо $O(x_1, \varepsilon_1) \subset X_2$ и тогда утверждение доказано, либо

$$O(x_1, \varepsilon_1) \cap (X \backslash X_2) \neq \varnothing$$

и, поскольку $X \backslash X_2$ открыто, тогда найдётся открытый шар

$$O(x_2, \varepsilon_2) \subset O(x_1, \varepsilon_1) \cap X \backslash X_2, \quad \varepsilon_2 < \frac{\varepsilon_1}{4}.$$

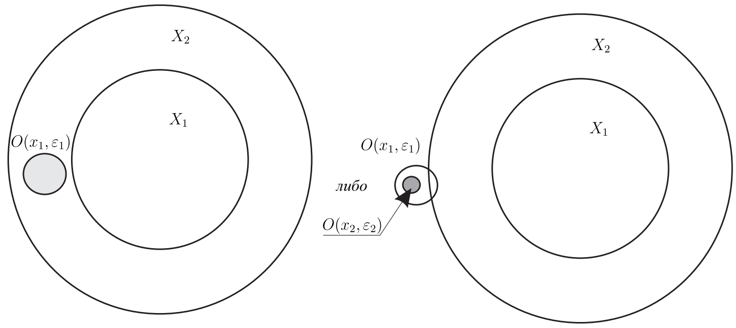

Рис. 9. Случай $X \neq X_1$.

Понятно, что

$$O(x_2, \varepsilon_2) \cap (X_1 \cup X_2) = \varnothing.$$

Шаг 3. Таким образом, мы либо найдём на n-ом шаге непустой открытый шар $O(x_{n-1}, \varepsilon_{n-1}) \subset X_n$ (и тогда теорема будет доказана), либо получим цепочку вложенных открытых шаров

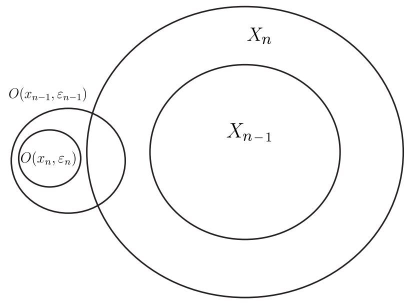

Рис. 10. Шаг n.

$$O(x_n, \varepsilon_n) \subset O(x_{n-1}, \varepsilon_{n-1}) \subset \ldots \subset O(x_2, \varepsilon_2) \subset O(x_1, \varepsilon_1), \quad \varepsilon_n < \frac{\varepsilon_{n-1}}{4},$$

$$O(x_n, \varepsilon_n) \cap (X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_n) = \varnothing. \tag{11.2}$$

Докажем, что последнее невозможно. В самом деле, в этом случае имеем

$$d(x_n, x_{n+m}) \leqslant d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \ldots + d(x_{n+m-1}, x_{n+m}) \leqslant \\ \leqslant \frac{\varepsilon_n}{4}\left(1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \ldots\right) \leqslant \frac{\varepsilon_n}{3}. \tag{11.3}$$

Следовательно, последовательность $\{x_n\}$ является фундаментальной и сходящейся к некоторому элементу $x_0 \in X$ в силу полноты (X, d).

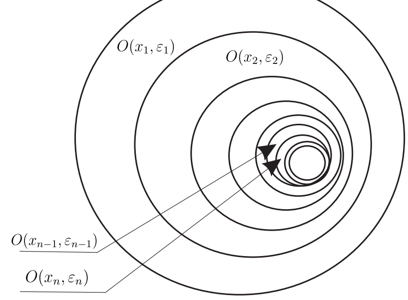

Рис. 11. Система вложенных шаров.

Теперь перейдём к пределу при $m \to +\infty$ в неравенстве (11.3) и получим, что в силу (11.2)

$$d(x_n, x_0) \leqslant \frac{\varepsilon_n}{3} \Rightarrow x_0 \in O(x_n, \varepsilon_n) \Rightarrow x_0 \notin \bigcup_{k=1}^{n} X_n.$$

Поскольку это верно для всех $n \in \mathbb{N}$, с учётом (11.1) получаем, что $x_0 \notin X$. Противоречие.

Теорема доказана.

Следующая теорема, которая называется *принцип равномерной ограниченности* или *теорема Банаха–Штейнгауза*, имеет важное значение при рассмотрении сопряженных пространств.

Прежде всего дадим определение равностепенной непрерывности последовательности функций $\{f_n(x)\}$.

Определение 31. *Последовательность функций* $\{f_n(x)\}$ *называется равностепенно непрерывной на метрическом пространстве* (X, d), *если для любой последовательности* $\{x_m\} \subset (X, d)$ *такой, что*

$$x_m \xrightarrow{d} x \in X,$$

верно

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} |f_n(x) - f_n(x_m)| \to +0.$$

Замечание 7. Отличие равностепенной непрерывности последовательности $\{f_n(x)\}$ от непрерывности каждой функции $f_n(x)$ заключается в том, что в последнем случае

$$x_m \xrightarrow{d} x \in X \Rightarrow |f_n(x) - f_n(x_m)| \to +0 \quad \text{при фиксированном } n \in \mathbb{N}.$$

Дадим определение равностепенной ограниченности последовательности функций $\{f_n(x)\}$.

Определение 32. *Последовательность функций* $\{f_n(x)\}$ *называется равностепенно по* $n \in \mathbb{N}$ *ограниченной на метрическом* *пространстве* (X, d), *если выполнено неравенство*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |f_n(x)| \leqslant K < +\infty, \quad x \in X, \quad K = K(x).$$

Теорема 8. *Пусть* (X, d) — *это полное метрическое пространство и выполнены следующие условия*:

1) *функции*

$$f_n(x) : (X, d) \to \mathbb{R}^1$$

непрерывны на (X, d) *при каждом фиксированном* $n \in \mathbb{N}$;

2) *последовательность* $\{f_n(x)\}$ *равностепенно по* $n \in \mathbb{N}$ *ограничена.*

Тогда найдётся такой замкнутый шар $K \subset X$ *положительного радиуса, что*

$$\sup_{x\in K} \sup_{n\in\mathbb{N}} |f_n(x)| < +\infty.$$

Доказательство.

Введём множества

$$X_N \stackrel{\text{def}}{=} \left\{x \in X : \sup_{n\in\mathbb{N}} |f_n(x)| \leqslant N\right\}.$$

Шаг 1. Множества X_N замкнуты. В самом деле, множества

$$B_N^{(n)} \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in X : |f_n(x)| \leqslant N\}$$

замкнуты как прообразы замкнутых множеств $(-\infty, N]$ при непрерывных отображениях f_n (см. следствие из теоремы 1), но тогда

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_N^{(n)} = X_N$$

замкнуты по лемме о топологии как пересечения замкнутых множеств.

Шаг 2. Поскольку $\{f_n(x)\}$ равностепенно по $n \in \mathbb{N}$ ограничена, то

$$X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_N.$$

□ Действительно, для каждого $x \in X$ имеет место неравенство

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |f_n(x)| \leqslant K(x) < +\infty \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \ \exists\, N \in \mathbb{N} \quad K(x) \leqslant N \Rightarrow \sup_{n\in\mathbb{N}} |f_n(x)| \leqslant K(x) \leqslant N \Rightarrow x \in X_N. \quad \boxtimes$$

Шаг 3. Следовательно, в силу теоремы Бэра о категориях найдётся такое $N_0 \in N$, что X_{N_0} содержит внутренние точки, а следовательно, некоторый замкнутый шар K. И, следовательно,

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |f_n(x)| \leqslant N_0 < +\infty \quad \text{для всех} \quad x \in K \Rightarrow \sup_{x\in K} \sup_{n\in\mathbb{N}} |f_n(x)| \leqslant N_0 < +\infty.$$

Теорема доказана.