Лекция 2

АБСТРАКТНАЯ МЕРА ЛЕБЕГА

На прошлой лекции мы рассмотрели построение меры Лебега плоских множеств. Теперь наша задача — обобщить эту процедуру на случай произвольных множеств. При этом существо схемы построения абстрактной меры Лебега почти в точности повторяет схему, рассмотренную на прошлой лекции.

§ 1. Схема построения абстрактной меры Лебега

Исходя из результатов предыдущей лекции мы можем предъявить схему построения абстрактной меры Лебега.

Шаг 1. Прежде всего нам нужно указать семейство $\mathcal{A}$ элементарных множеств — подмножеств множества X, удовлетворяющих определённым требованиям замкнутости относительно основных операций над множествами: объединения множеств, пересечения множеств и дополнения множеств. Кроме того, это семейство множеств должно быть замкнуто относительно операции счётного объединения — это нужно в дальнейшем для введения внешней меры Лебега, поскольку в противном случае (конечного объединения) мы получили уже хорошо известную внешнюю меру Жордана. Наконец, для произвольного множества из этого семейства задается априори некоторая конечно–аддитивная и положительная функция множеств m.

Шаг 2. Для произвольного подмножества $A \subset X$ по уже известной нам формуле вводится внешняя мера Лебега μ^*. После этого вводится семейство $\mathcal{A}_\mu$ измеримых по Лебегу множеств как таких множеств, которые сколь угодно точно по внешней мере Лебега можно приблизить элементарными множествами из семейства $\mathcal{A}$. Внешняя мера Лебега μ^*, рассматриваемая на $\mathcal{A}_\mu$, и есть искомая мера Лебега.

Шаг 3. Далее нужно доказать, что семейство множеств $\mathcal{A}_\mu$ замкнуто относительно операций объединения, пересечения, дополнения и счётного объединения множеств. Кроме того, нужно доказать, что $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_\mu$, а мера μ^* является единственным продолжением, не только согласно схеме Лебега, исходной меры μ.

§ 2. Элементарные множества

Итак, прежде всего нам нужно ввести класс «элементарных» множеств. С этой целью введем понятия алгебры множеств и σ-алгебры множеств. Дадим определение.

Определение 1. *Семейство подмножеств $\mathcal{A}$ множества X называется алгеброй множеств, если выполнены следующие свойства:*

(i) $\varnothing,\ X \in \mathcal{A}$;

(ii) *из принадлежности $A, B \in \mathcal{A}$ вытекает, что $A \cap B$, $A \cup B$ и $A \setminus B$ принадлежат $\mathcal{A}$;*

В том случае, если выполнено дополнительное свойство

(iii) *для любой последовательности множеств $\{A_n\} \subset \mathcal{A}$ верно*

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathcal{A},$$

система множеств $\mathcal{A}$ называется σ-алгеброй.

Тривиальными примерами σ-алгебр является, например, семейство множеств $\mathcal{A}$, состоящее из $\varnothing$, X. Другим тривиальным примером является семейство $\mathcal{A}$, состоящее из всех подмножество множества X, которое обозначается как 2^X.

Определение 2. *Пара $(\mathcal{A}, X)$, где $\mathcal{A}$ есть σ-алгебра $\mathcal{A}$ подмножеств из множества X, называется измеримым пространством.*

Определение 3. *Числовая функция μ называется аддитивной, если для всякого конечного объединения попарно непересекающихся множеств $A_1, ..., A_n \in \mathcal{A}$ имеет место равенство*

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \bigcup_{k=1}^{n} \mu(A_k).$$

Определение 4. *Числовая функция μ называется счётно-аддитивной, если для любой последовательности попарно непересекающихся множеств $\{A_n\} \subset \mathcal{A}$ такой, что*

$$\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k \in \mathcal{A} \quad и \quad A \in \mathcal{A},$$

имеет место равенство

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k\right) = \bigcup_{k=1}^{+\infty} \mu(A_k).$$

Определение 5. *Счётно-аддитивная неотрицательная числовая функция μ, заданная на алгебре $\mathcal{A}$ подмножеств из множества X, называется мерой.*

Итак, пусть $\mathcal{A}$ — это алгебра подмножеств из X, на котором задана мера μ, т. е. счётно-аддитивная числовая функция. Это и есть то самое «элементарное» семейство множеств, на котором задана мера μ.

При этом говорят, что задано пространство с мерой

$$(X, \mathcal{A}, \mu).$$

§ 3. Внешняя мера Лебега

Займёмся теперь продолжением меры μ с алгебры $\mathcal{A}$ на некоторую σ-алгебру $\mathcal{A}_\mu$, содержащую $\mathcal{A}$.

Определение 6. *Внешняя мера $\mu^*(A)$ для каждого подмножества $A \subset X$ определяется следующим образом*:

$$\mu^*(A) \stackrel{\text{def}}{=} \inf\left\{\sum_{n=1}^{+\infty}\mu(A_n)\,\middle|\, A \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n,\ A_n \in \mathcal{A}\right\}. \tag{3.1}$$

Замечание 1. Из данного определения сразу следует, что для любых множеств $A \subset B \subset X$ верно неравенство $\mu^*(A) \leqslant \mu^*(B)$. В самом деле, если $B \subset \cup_{n=1}^{+\infty} B_n$, то и $A \subset \cup_{n=1}^{+\infty} B_n$. («Монотонность внешней меры».)

Замечание 2. Поскольку $\varnothing \in \mathcal{A}$, то фактически можно брать конечное покрытие.

Наконец, мы можем дать определение измеримого по Лебегу множества.

Определение 7. *Скажем, что множество $A \subset X$ измеримо по Лебегу относительно меры μ, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдётся такое множество $A_\varepsilon \in \mathcal{A}$, что имеет место следующее неравенство*:

$$\mu^*(A \Delta A_\varepsilon) \leqslant \varepsilon.$$

Множество всех измеримых по Лебегу подмножеств множества X обозначается как $\mathcal{A}_\mu$.

§ 4. Основная теорема об измеримых по Лебегу множеств $\mathcal{A}_\mu$

Итак, мы предъявили способ продолжения меры μ с алгебры $\mathcal{A}$ на более широкое семейство множеств $\mathcal{A}_\mu$, где продолжением меры μ является числовая функция μ^* — внешняя мера. Но для дальнейшего нам необходимо ответить на ряд вопросов. Во-первых, что представляет из себя множество $\mathcal{A}_\mu$? Во-вторых, является ли внешняя мера μ^* мерой на семействе множеств $\mathcal{A}_\mu$? На все эти вопросы отвечает следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть μ — это конечная ($\mu(X) < +\infty$) и неотрицательная мера на алгебре $\mathcal{A}$ подмножеств из множества X. Тогда имеют место следующие утверждения*:

(i) $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_\mu$, *причём внешняя мера* μ^* *совпадает с мерой* μ *на алгебре* $\mathcal{A}$;

(ii) *семейство множеств* $\mathcal{A}_\mu$ *является* σ*-алгеброй, причём ограничение* μ^* *на* $\mathcal{A}_\mu$ *является мерой*;

(iii) *мера* μ^* *на* $\mathcal{A}_\mu$ *есть единственное неотрицательное продолжение меры* μ *с алгебры* $\mathcal{A}$ *на* σ*-алгебру* $\mathcal{A}_\mu$.

Доказательство.

Шаг 1. Доказательство (i). Ясно, что $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_\mu$, поскольку для каждого $A \in \mathcal{A}$ и всякого $\varepsilon > 0$ можно взять $A_\varepsilon = A$ и тогда

$$\mu(A \Delta A_\varepsilon) = 0 < \varepsilon.$$

Докажем теперь, что *внешняя мера* μ^* *совпадает с мерой* μ *на алгебре* $\mathcal{A}$.

$\square$ Действительно, по построению меры μ^* имеет место неравенство

$$\mu^*(A) \leqslant \mu(A) \quad \text{для всех} \quad A \in \mathcal{A}.$$

Пусть $A \in \mathcal{A}$. Докажем, что имеет место неравенство

$$\mu(A) \leqslant \mu^*(A).$$

Действительно, пусть $\{A_n\} \subset \mathcal{A}$ — любая такая последовательность, что

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n,$$

но тогда

$$A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A \cap A_n.$$

Прежде всего, в силу неотрицательности и аддитивности меры μ имеет место неравенство

$$\mu(A \cap A_n) \leqslant \mu(A_n).$$

Оно следует из тождества $\mu(A_n) = \mu(A_n \setminus (A \cap A_n)) + \mu(A \cap A_n)$, где все входящие в него множества принадлежат $\mathcal{A}$.

Можно доказать, что из счётной аддитивности и положительности меры μ вытекает счётная субаддитивность. Действительно, если $A = \cup_{n=1}^{+\infty} B_n$, то множество A можно представить в виде объединения непересекающихся множеств C_n, где

$$C_1 = B_1, \quad C_n = B_n \setminus \cup_{l=2}^{n-1} B_l$$

при $n \geqslant 2$, а $\mu(C_n) \leqslant \mu(B_n)$.

Теперь можно воспользоваться определением счётной аддитивности, т. е. имеет место неравенство

$$\mu(A) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A \cap A_n) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n).$$

Тогда в силу определения внешней меры с учётом произвольности последовательности $\{A_n\}$ имеем неравенство

$$\mu(A) \leqslant \mu^*(A). \quad \boxtimes$$

Шаг 2. Семейство множеств $\mathcal{A}_\mu$ является алгеброй.

$\square$ Сначала докажем, что дополнение измеримого множества измеримо. Пусть $A \in \mathcal{A}_\mu$. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $A_\varepsilon \in \mathcal{A}$, что

$$\mu^*(A\Delta A_\varepsilon) \leqslant \varepsilon,$$

но тогда поскольку $X \setminus A_\varepsilon \in \mathcal{A}$ и имеет место равенство множеств

$$(X \setminus A_\varepsilon)\Delta(X \setminus A) = A_\varepsilon \Delta A,$$

то

$$\mu^*((X \setminus A_\varepsilon)\Delta(X \setminus A)) = \mu^*(A_\varepsilon \Delta A) \leqslant \varepsilon.$$

Значит, $X \setminus A \in \mathcal{A}_\mu$.

Теперь докажем, что объединение двух измеримых множеств измеримо. Действительно, пусть $A, B \in \mathcal{A}_\mu$. Значит, для всякого фиксированного $\varepsilon > 0$ найдутся такие множества $A_\varepsilon, B_\varepsilon \in \mathcal{A}$, что

$$\mu^*(A\Delta A_\varepsilon) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}, \quad \mu^*(B\Delta B_\varepsilon) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.1}$$

С другой стороны, имеет место вложение

$$(A \cup B)\Delta(A_\varepsilon \cup B_\varepsilon) \subset (A\Delta A_\varepsilon) \cup (B\Delta B_\varepsilon),$$

поэтому в силу монотонности внешней меры μ^* верны неравенства

$$\mu^*((A \cup B)\Delta(A_\varepsilon \cup B_\varepsilon)) \leqslant \mu^*(A\Delta A_\varepsilon) + \mu^*(B\Delta B_\varepsilon) \leqslant \varepsilon.$$

Значит, поскольку $A_\varepsilon \cup B_\varepsilon \in \mathcal{A}$, то $A \cup B \in \mathcal{A}_\mu$.

Докажем теперь, что $A \cap B \in \mathcal{A}_\mu$. Но это следствие равенства

$$A \cap B = X \setminus ((X \setminus A) \cup (X \setminus B)).$$

Таким образом, $\mathcal{A}_\mu$ — алгебра. $\boxtimes$

Для доказательства того, что семейство $\mathcal{A}_\mu$ — σ-алгебра, нужно доказать ряд вспомогательных утверждений.

Шаг 3. Доказательство счётной субаддитивности внешней меры Лебега μ^*.

Лемма 1. *При условиях*

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n,$$

в частности при

$$A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \mu^*(A_n) < +\infty,$$

верно неравенство

$$\mu^*(A) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \mu^*(A_n).$$

Доказательство.

Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда по определению внешней меры для каждого из множеств $A_n \subset X$ найдётся система множеств

$$\{B^\varepsilon_{nm}\} \subset \mathcal{A}$$

такая, что

$$A_n \subset \bigcup_{m=1}^{+\infty} B^\varepsilon_{nm}, \quad \sum_{m=1}^{+\infty} \mu\left(B^\varepsilon_{nm}\right) \leqslant \mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Тогда, поскольку $A \subset \cup_{n=1}^{+\infty} \cup_{m=1}^{+\infty} B^\varepsilon_{nm}$, в силу определения внешней меры $\mu^*(A)$ имеем

$$\mu^*(A) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=1}^{+\infty} \mu\left(B^\varepsilon_{nm}\right),$$

где в силу свойств сходящихся рядов с неотрицательными членами порядок суммирования не важен, т. е.

$$\mu^*(A) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=1}^{+\infty} \mu\left(B^\varepsilon_{nm}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu^*(A_n) + \varepsilon.$$

В силу произвольности ε имеем требуемое неравенство

$$\mu^*(A) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \mu^*(A_n),$$

т. е. мы доказали счётную субаддитивность внешней меры.

Лемма доказана.

Шаг 4. «Неравенство треугольника» для меры.

Утверждение 1. *Справедливо неравенство*

$$|\mu^*(A) - \mu^*(B)| \leqslant \mu^*(A\Delta B) \tag{4.2}$$

для всех $A, B \in X$, для которых $\mu^*(A), \mu^*(B) < +\infty$.

□ Действительно, справедливы следующие вложения:

$$A \subset B \cup (A\Delta B), \quad B \subset A \cup (A\Delta B),$$

поэтому в силу конечной субаддитивности внешней меры [1] имеет место неравенства

$$\mu^*(A) \leqslant \mu^*(B) + \mu^*(A\Delta B), \quad \mu^*(B) \leqslant \mu^*(A) + \mu^*(A\Delta B).$$

Стало быть, пришли к (4.2). ⊠

Шаг 5. Конечная аддитивность внешней меры на множестве $\mathcal{A}_\mu$.

Приступим теперь к доказательству конечной аддитивности внешней меры на $\mathcal{A}_\mu$. Действительно, пусть $A, B \in \mathcal{A}_\mu$ и $A \cap B = \varnothing$. Нам нужно доказать, что

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B).$$

С этой целью нам достаточно доказать, что имеет место неравенство

$$\mu^*(A \cup B) \geqslant \mu^*(A) + \mu^*(B),$$

поскольку обратное неравенство есть конечная субаддитивность.

Заметим, что имеет место следующее вложение:

$$A_\varepsilon \cup B_\varepsilon \subset (A \cup B) \cup ((A \cup B)\Delta(A_\varepsilon \cup B_\varepsilon)),$$

поэтому верно неравенство

$$\mu^*(A \cup B) \geqslant \mu^*(A_\varepsilon \cup B_\varepsilon) - \mu^*((A \cup B)\Delta(A_\varepsilon \cup B_\varepsilon)), \tag{4.3}$$

где $A_\varepsilon \in \mathcal{A}$ и $B_\varepsilon \in \mathcal{A}$ удовлетворяют условию

$$\mu^*(A\Delta A_\varepsilon) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}, \quad \mu^*(B\Delta B_\varepsilon) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

С другой стороны,

$$\mu^*((A \cup B)\Delta(A_\varepsilon \cup B_\varepsilon)) \leqslant \mu^*(A\Delta A_\varepsilon) + \mu^*(B\Delta B_\varepsilon) \leqslant \varepsilon. \tag{4.4}$$

Таким образом, из (4.3) и (4.4) вытекает оценка снизу

$$\mu^*(A \cup B) \geqslant \mu^*(A_\varepsilon \cup B_\varepsilon) - \varepsilon. \tag{4.5}$$

Теперь заметим, что на алгебре $\mathcal{A}$ меры μ и μ^* совпадают. Поэтому в силу конечной аддитивности меры μ на $\mathcal{A}$ верно равенство

$$\mu^*(A_\varepsilon \cup B_\varepsilon) = \mu(A_\varepsilon \cup B_\varepsilon) = \mu(A_\varepsilon) + \mu(B_\varepsilon) - \mu(A_\varepsilon \cap B_\varepsilon). \tag{4.6}$$

Заметим, что в силу $A \cap B = \varnothing$ имеет место вложение

$$A_\varepsilon \cap B_\varepsilon \subset (A\Delta A_\varepsilon) \cup (B\Delta B_\varepsilon).$$

И поэтому верна следующая оценка сверху:

$$\mu^*(A_\varepsilon \cap B_\varepsilon) \leqslant \mu^*(A\Delta A_\varepsilon) + \mu^*(B\Delta B_\varepsilon) \leqslant \varepsilon.$$

---

[1] Конечная субаддитивность, очевидно, является частным случаем только что доказанной счётной субаддитивности.

Значит, из (4.6) приходим к оценке снизу

$$\mu(A_\varepsilon \cup B_\varepsilon) \geqslant \mu(A_\varepsilon) + \mu(B_\varepsilon) - \varepsilon. \tag{4.7}$$

Но тогда из (4.5) приходим к такой оценке снизу:

$$\mu^*(A \cup B) \geqslant \mu^*(A_\varepsilon) + \mu^*(B_\varepsilon) - 2\varepsilon. \tag{4.8}$$

С другой стороны, в силу неравенства (4.2) имеют место неравенства

$$\mu^*(A_\varepsilon) \geqslant \mu^*(A) - \mu^*(A \Delta A_\varepsilon), \quad \mu^*(B_\varepsilon) \geqslant \mu^*(B) - \mu^*(B \Delta B_\varepsilon).$$

Стало быть, отсюда приходим к неравенствам

$$\mu^*(A_\varepsilon) \geqslant \mu^*(A) - \frac{\varepsilon}{2}, \quad \mu^*(B_\varepsilon) \geqslant \mu^*(B) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отсюда и из (4.8) получаем неравенство

$$\mu^*(A \cup B) \geqslant \mu^*(A) + \mu^*(B) - 3\varepsilon.$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ из последнего имеем

$$\mu^*(A \cup B) \geqslant \mu^*(A) + \mu^*(B) \tag{4.9}$$

для всех $A, B \in \mathcal{A}_\mu$ при условии $A \cap B = \varnothing$.

Шаг 6. $\mathcal{A}_\mu$ — это σ–алгебра.

Теперь наша задача доказать, что счётное объединение измеримых множеств измеримо. С этой целью нам достаточно рассмотреть случай попарно непересекающихся множеств. Действительно, пусть $A_n \in \mathcal{A}_\mu$, тогда вместо счётного объединения

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$$

можно взять

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n, \quad B_n = A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k.$$

Ясно, что $\{B_n\} \subset \mathcal{A}_\mu$ (т. к. $\mathcal{A}_\mu$ — алгебра) и B_n попарно не пересекаются, причём имеет место равенство

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n.$$

Итак, ниже считаем, что A_n попарно не пересекаются. В силу конечной аддитивности функции μ^* на $\mathcal{A}_\mu$ и её монотонности по включению мы приходим к следующим неравенствам:

$$\sum_{k=1}^{n} \mu^*(A_k) = \mu^* \left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k \right) \leqslant \mu^* \left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k \right) \leqslant \mu^*(X) \leqslant \mu(X) < +\infty$$

в силу конечности меры μ.

Таким образом, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_k)$ сходится. Следовательно, для каждого фиксированного $\varepsilon > 0$ можно выбрать $n \in \mathbb{N}$ таким образом, чтобы имело место неравенство

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \mu^*(A_k) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.10}$$

В силу измеримости конечных объединений измеримых множеств для данного $\varepsilon > 0$ найдётся такое множество $B \in \mathcal{A}$, что

$$\mu^* \left(B \Delta \bigcup_{k=1}^{n} A_k \right) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.11}$$

Следовательно, в силу вложения

$$B \Delta \bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k \subset \left(B \Delta \bigcup_{k=1}^{n} A_k \right) \bigcup \left(\bigcup_{k=n+1}^{+\infty} A_k \right),$$

конечной аддитивности внешней меры и её счётной субаддитивности приходим к неравенству

$$\mu^* \left(B \Delta \bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k \right) \leqslant \mu^* \left(B \Delta \bigcup_{k=1}^{n} A_k \right) + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \mu^*(A_k) \leqslant \varepsilon.$$

Отсюда вытекает измеримость счётного объединения измеримых множеств. Значит, $\mathcal{A}_\mu$ — это σ-алгебра.

Шаг 7. Счётная аддитивность внешней меры Лебега.

Надо, однако, доказать, что действительно

$$\mu^*(A) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu^*(A_n), \quad \text{где} \quad A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n, \tag{4.12}$$

при оговорённых выше условиях. Но это действительно так, потому что, во-первых,

$$\mu^* \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \right) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \mu^*(A_n) \tag{4.13}$$

в силу счётной субаддитивности внешней меры, а во-вторых, в силу её «монотонности» и конечной аддитивности

$$\mu^*(A) \geqslant \mu^* \left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n \right) = \sum_{n=1}^{N} \mu^*(A_n),$$

т. е. можно утверждать, что

$$\sum_{n=1}^{N} \mu^*(A_n) \leqslant \mu^*(A) = \mu^* \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \right).$$

Устремляя N к бесконечности и учитывая (4.13), имеем равенство (4.12).

Шаг 8. Доказательство утверждения (iii):

Теперь докажем, что μ^* является единственным продолжением меры μ с алгебры $\mathcal{A}$ на σ-алгебру $\mathcal{A}_\mu$.

Замечание 3. Здесь нужно отметить следующее: какую схему продолжения меры μ с семейства множеств $\mathcal{A}$ на множество $\mathcal{A}_\mu$ мы бы ни взяли, мы всё равно получим внешнюю меру Лебега μ^*. В этом заключается единственность продолжения.

Пусть нет. Тогда на $\mathcal{A}_m u$ существует другая мера ν, совпадающая на $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_\mu$ с исходной мерой μ. Пусть $A \in \mathcal{A}_\mu$ и $\varepsilon > 0$ являются фиксированными. Тогда найдётся такое множество $B \in \mathcal{A}$, что имеет место неравенство
$$\mu^*(A \Delta B) \leqslant \varepsilon.$$

В свою очередь это означает, что существует такая последовательность множеств $\{C_n\} \subset \mathcal{A}$, что
$$A \Delta B \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} C_n, \quad \mu(C_n) = \nu(C_n) = \mu^*(C_n),$$

причём
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mu(C_n) \leqslant \varepsilon.$$

Имеют место следующие неравенства:
$$|\nu(A) - \nu(B)| \leqslant \nu(A \Delta B) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \nu(C_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(C_n) \leqslant \varepsilon,$$

поскольку на алгебре $\mathcal{A}$ меры μ, μ^* и ν совпадают. Справедливы следующие неравенства:
$$|\mu^*(A) - \nu(A)| \leqslant |\mu^*(A) - \mu^*(B)| + |\mu^*(B) - \nu(A)| =$$
$$= |\mu^*(A) - \mu^*(B)| + |\nu(B) - \nu(A)| \leqslant \mu^*(A \Delta B) + \varepsilon \leqslant 2\varepsilon.$$

Стало быть, меры μ^* и ν совпадают на σ-алгебре $\mathcal{A}_\mu$.

Теорема доказана.

Замечание 4. Отметим, что в силу единственности продолжения меры по Лебегу вытекает, что если за исходное пространство элементарных множеств с мерой взять уже построенную тройку $(X, \mathcal{A}_\mu, \mu^*)$, то после продолжения по Лебегу уже этого пространства мы получим в точности ту же самую тройку $(X, \mathcal{A}_\mu, \mu^*)$.

В дальнейших лекциях мы будем рассматривать уже полученную тройку $(X, \mathcal{A}_\mu, \mu^*)$. Однако во всех построениях можно было бы взять и исходную тройку $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Необходимость в рассмотрении расширения по Лебегу заключается в том, чтобы в заданном множестве X

выделить наибольшее, но оптимальное, число множеств, входящих в семейство $\mathcal{A}_\mu$ с тем, чтобы для них была определена счётно-аддитивная мера μ^*, порождающая *интеграл Лебега* (к изучению которого мы и приступаем в следующей лекции) с достаточно хорошими свойствами.