

Лекция 4. Слабая, $*$ —слабая и сильная сходимости.

Корпусов Максим Олегович, Панин Александр Анатольевич

Курс лекций по нелинейному функциональному анализу

14 марта 2012 г.

Итак, напомним, что действие линейного функционала $f \in X^*$ на элементе некоторого линейного пространства $u \in X$ мы обозначаем как

$$\langle f, x \rangle : X^* \times X \rightarrow \mathbb{R}^1.$$

Пусть \mathbb{B} — это нормированное пространство с нормой $\|\cdot\|$, с сопряженным \mathbb{B}^* и скобками двойственности $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Дадим определение сильной сходимости.

Определение 1. *Сильной сходимостью последовательности $\{u_n\}$ в банаховом пространстве \mathbb{B} к некоторому элементу $u \in \mathbb{B}$ называется сходимость по норме следующей числовой последовательности:*

$$\|u_n - u\| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow +\infty \quad \text{для некоторого} \quad u \in \mathbb{B}. \quad (1)$$

Норма сопряженного пространства \mathbb{B}^* вводится как

$$\|f\|_* \equiv \sup_{\|u\|=1} |\langle f, u \rangle|. \quad (2)$$

Даже если исходное нормированное пространство X не является полным, его сопряженное пространство X^* полно относительно нормы (2). Это следствие теоремы Банаха–Штейнгауза.

Справедлива следующая полезная лемма:

Лемма

Пусть $u \in \mathbb{B}$ и $f \in \mathbb{B}^*$, тогда имеет место следующее неравенство

$$|\langle f, u \rangle| \leq \|f\|_* \|u\|. \quad (3)$$

Перейдем теперь к понятию слабой сходимости последовательностей банахова пространства \mathbb{B} . Дадим следующее определение.

Определение 2. Последовательность $\{u_n\} \subset \mathbb{B}$ называется слабо сходящейся к некоторому элементу $u \in \mathbb{B}$, если для любого элемента $f \in \mathbb{B}^*$ имеем

$$\langle f, u_n \rangle \rightarrow \langle f, u \rangle.$$

Слабую сходимость последовательности $\{u_n\} \subset \mathbb{B}$ к некоторому элементу $u \in \mathbb{B}$ будем обозначать следующим образом:

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{слабо в } \mathbb{B}.$$

Теперь мы можем ввести понятие $*$ -слабой сходимости в пространстве \mathbb{B}^* . Дадим следующее определение:

Определение 3. Последовательность элементов $\{f_n\} \subset \mathbb{B}^*$ $*$ -слабо сходится к некоторому элементу $f \in \mathbb{B}^*$, если для любого $u \in \mathbb{B}$ имеет место предельное равенство

$$|\langle f_n, u \rangle - \langle f, u \rangle| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow +\infty. \quad (4)$$

Обозначается $*$ -слабая сходимость следующим образом:

$$f_n \xrightarrow{*} f \quad * \text{-слабо в } \mathbb{B}^* \quad (5)$$

Дважды сопряженное пространство

Дадим определение.

Определение 4. Через \mathbb{B}^{**} обозначено пространство линейных и непрерывных функционалов над пространством \mathbb{B}^* , относительно нормы

$$\|v\|_{**} \equiv \sup_{\|f\|_*=1} |\langle v, f \rangle_*| \quad (6)$$

и в силу леммы 1 имеет место полезное неравенство

$$|\langle v, f \rangle_*| \leq \|v\|_{**} \|f\|_*, \quad (7)$$

где $\langle v, f \rangle_*$ — это скобки двойственности между \mathbb{B}^* и \mathbb{B}^{**} .

Дважды сопряженное пространство

Теперь понятна и связь скобок двойственности:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle \quad \text{и} \quad \langle \cdot, \cdot \rangle_*.$$

Действительно, имеем

$$\langle u, f \rangle_* = \langle f, u \rangle \quad \text{для всех} \quad u \in \mathbb{B} \subset \mathbb{B}^{**} \quad \text{и} \quad f \in \mathbb{B}^*.$$

Поэтому в одном частном, но важном случае, когда \mathbb{B} можно отождествить со всем пространством \mathbb{B}^{**} , получаем

$$\langle u, f \rangle_* = \langle f, u \rangle \quad \text{для всех} \quad u \in \mathbb{B} = \mathbb{B}^{**} \quad \text{и} \quad f \in \mathbb{B}^*. \quad (8)$$

Справедлива следующая теорема:

Теорема

Справедливы следующие два утверждения:

- (i) *Всякая слабо сходящаяся последовательность $\{u_n\}$ из банахова пространства \mathbb{B} ограничена, причем*

$$\text{если } u_n \rightharpoonup u_\infty \text{ при } n \rightarrow +\infty, \text{ то } \|u_\infty\| \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|u_n\|;$$

- (ii) *Всякая $*$ -слабо сходящаяся последовательность $\{f_n\}$ из банахова пространства \mathbb{B}^* ограничена, причем*

$$\text{если } f_n \xrightarrow{*} f_\infty \text{ при } n \rightarrow +\infty, \text{ то } \|f_\infty\|_* \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|f_n\|_*.$$

Определение 5. Банахово пространство \mathbb{B} , которое можно отождествить со своим дважды сопряженным пространством \mathbb{B}^{**} , называется рефлексивным.

Определение 6. Банахово пространство \mathbb{B} называется сепарабельным если в этом пространстве существует счетное всюду в \mathbb{B} плотное множество \mathbb{M} , т. е. если любой элемент $u \in \mathbb{B}$ можно приблизить с любой наперед заданной точностью элементом из множества $\mathbb{M} \subset \mathbb{B}$.

Приведем следующую полезную лемму.

Лемма

Если сепарабельно банахово пространство \mathbb{B}^* , то сепарабельно и нормированное пространство \mathbb{B} .

Теорема

Пусть $\{u_n\}$ — ограниченная по норме последовательность элементов рефлексивного банахова пространства \mathbb{B} . Тогда из $\{u_n\}$ можно выделить слабо сходящуюся в \mathbb{B} подпоследовательность $\{u_{n_n}\}$:

$$u_{n_n} \rightharpoonup u \text{ слабо в } \mathbb{B} \text{ при } n \rightarrow +\infty.$$

Критерий $*$ –слабой сходимости

Теперь мы можем получить аналогичный результат в случае пространства \mathbb{B}^* .

Теорема

Пусть \mathbb{B} — есть сепарабельное банахово пространство и $\{f_n\}$ — ограниченная по норме последовательность элементов банахова пространства \mathbb{B}^ . Тогда из $\{f_n\}$ можно выделить $*$ –слабо сходящуюся в \mathbb{B}^* подпоследовательность $\{f_{n_n}\}$:*

$$f_{n_n} \xrightarrow{*} f \quad * \text{–слабо в } \mathbb{B}^* \quad \text{при } n \rightarrow +\infty.$$

Дадим определение. **Определение 7.** Пространство \mathbb{B} называется *равномерно выпуклым*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что из неравенств $\|u\| \leq 1$, $\|v\| \leq 1$ и $\|u - v\| \geq \varepsilon > 0$ следует

$$\|u + v\| \leq 2(1 - \delta(\varepsilon)). \quad (9)$$

Теперь важное утверждение.

Теорема

Всякое равномерно выпуклое банахово пространство \mathbb{B} рефлексивно.

Теорема

Если \mathbb{B} — это равномерно выпуклое банахово пространство, то из того условия, что

$$u_n \rightharpoonup u \text{ слабо в } \mathbb{B} \text{ при } n \rightarrow +\infty,$$

и

$$\|u_n\| \rightarrow \|u\|$$

вытекает, что

$$u_n \rightarrow u \text{ сильно в } \mathbb{B} \text{ при } n \rightarrow +\infty.$$

Доказательство этого критерия

Без ограничения общности можно считать, что $\|u\| = 1$ и $\|u_n\| \neq 0$. Введем следующее обозначение:

$$v_n = \frac{u_n}{\|u_n\|}.$$

Ясно, что $\|v_n\| = 1$ и $v_n \rightharpoonup u$ при $n \rightarrow +\infty$. Теперь возьмем $\varepsilon_n = \|v_n - u\|$, тогда по определению 7 найдется такая неубывающая функция $\delta(\varepsilon)$ и $\delta(0) = 0$, что

$$\|v_n + u\| \leq 2(1 - \delta(\|v_n - u\|)). \quad (10)$$

Поскольку в силу теоремы Мильмана банахово пространство \mathbb{B} рефлексивно, поэтому имеем

$$\begin{aligned} \|v_n + u\| &= \|v_n + u\|_{**} = \sup_{\|f\|_* = 1} |\langle v_n + u, f \rangle_*| = \\ &= \sup_{\|f\|_* = 1} |\langle f, v_n + u \rangle| \geq |\langle f, v_n + u \rangle| \quad (11) \end{aligned}$$

Доказательство этого критерия

Переходя к нижнему пределу в неравенстве (10) с учетом неравенства (11), получим следующее неравенство:

$$2 \liminf_{n \rightarrow +\infty} (1 - \delta(\|v_n - u\|)) \geq \liminf_{n \rightarrow +\infty} |\langle f, v_n + u \rangle| = 2 |\langle f, u \rangle|, \quad (12)$$

поскольку $v_n \rightharpoonup u$ слабо в \mathbb{B} . Левая часть неравенства (12) не зависит от $f \in \mathbb{B}^*$, поэтому можно перейти к supremum по всем $f \in \mathbb{B}^* : \|f\|_* = 1$ и получить неравенство

$$2 \liminf_{n \rightarrow +\infty} (1 - \delta(\|v_n - u\|)) \geq 2\|u\|_{**} = 2\|u\| = 2.$$

Которое возможно только в том случае, когда

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|v_n - u\| = 0.$$

Отсюда получаем, что

$$u_n = \|u_n\|v_n \rightarrow u \quad \text{сильно в } \mathbb{B} \quad \text{при } n \rightarrow +\infty,$$

поскольку $\|u_n\| \rightarrow \|u\| = 1$.

Пример — пространства Лебега. Определения.

Теперь мы проиллюстрируем полученные в этой лекции общие результаты на примере пространств Лебега. Прежде всего дадим определения сильной, слабой и $*$ -слабой сходимостей для пространств $L^p(\Omega)$, где Ω область эвклидова пространства \mathbb{R}^N , а $p \in [1, +\infty]$. Итак, дадим определения.

Определение 8. Последовательность $\{u_n\} \subset L^p(\Omega)$ называется *сильно сходящейся* к элементу $u \in L^p(\Omega)$ при $p \in [1, +\infty]$, если имеет место следующее предельное равенство:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|u_n - u\|_p = \left(\int_{\Omega} |u_n - u|^p dx \right)^{1/p} = 0.$$

Определение 9. Последовательность $\{u_n\} \subset L^p(\Omega)$ называется слабо сходящейся к элементу $u \in L^p(\Omega)$ при $p \in [1, +\infty)$, если имеет место следующее предельное равенство:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle f, u_n \rangle_p = \langle f, u \rangle_p \quad \text{для всех } f \in (L^p(\Omega))^*,$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — это скобки двойственности между банаховыми пространствами $L^p(\Omega)$ и $(L^p(\Omega))^*$ при $p \in [1, +\infty)$.

Определение 10. Последовательность $\{f_n\} \subset L^\infty(\Omega)$ называется **-слабо сходящейся* к функции $f \in L^\infty(\Omega)$, если для всех $u \in L^1(\Omega)$ имеет место следующее предельное равенство:

$$\lim_n \langle f_n, u \rangle_\infty = \langle f, u \rangle_\infty \quad \text{для всех } u \in L^1(\Omega),$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle_\infty$ — это скобки двойственности между банаховыми пространствами $L^\infty(\Omega)$ и $L^1(\Omega)$.

Пример — пространства Лебега. Сопряженные пространства.

Заметим, что в определении 10 фигурирует пространство $(L^p(\Omega))^*$ при $p \in [1, +\infty)$. Оказывается справедлива следующая теорема о явном выражении этого банахова пространства.

Теорема

Банахово пространство $(L^p(\Omega))^$ при $p \in (1, +\infty)$ совпадает с банаховым пространством $L^q(\Omega)$ при $q = p/(p - 1)$, а в случае $p = 1$ банахово пространство $(L^1(\Omega))^*$ совпадает с пространством $L^\infty(\Omega)$.*

Теорема

Справедливы следующие два утверждения:

- (i) Всякая слабо сходящаяся последовательность $\{u_n\}$ из банахова пространства $L^p(\Omega)$ при $p \in [1, +\infty)$ ограничена, причем

$$\text{если } u_n \rightharpoonup u_\infty \text{ при } n \rightarrow +\infty, \text{ то } \|u_\infty\| \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|u_n\|;$$

- (ii) Всякая $*$ -слабо сходящаяся последовательность $\{f_n\}$ из банахова пространства $L^\infty(\Omega)$ ограничена, причем

$$\text{если } f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f_\infty \text{ при } n \rightarrow +\infty, \text{ то } \|f_\infty\|_* \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|f_n\|_*.$$

Пример — пространства Лебега. Критерий слабой сходимости.

Теорема

Пусть $\{u_n\}$ — ограниченная по норме последовательность элементов рефлексивного банахова пространства $L^p(\Omega)$ при $p \in (1, +\infty)$. Тогда из $\{u_n\}$ можно выделить слабо сходящуюся в $L^p(\Omega)$ подпоследовательность $\{u_{n_n}\}$:

$$u_{n_n} \rightharpoonup u \quad \text{слабо в } L^p(\Omega) \quad \text{при } n \rightarrow +\infty.$$

Пример — пространства Лебега. Критерий $*$ —слабой сходимости.

Теорема

Пусть $\{f_n\}$ — ограниченная по норме последовательность элементов банахова пространства $L^\infty(\Omega)$. Тогда из $\{f_n\}$ можно выделить $*$ —слабо сходящуюся в $L^\infty(\Omega)$ подпоследовательность $\{f_{n_n}\}$:

$$f_{n_n} \xrightarrow{*} f \quad * \text{—слабо в } L^\infty(\Omega) \quad \text{при } n \rightarrow +\infty.$$

Пример — пространства Лебега. Равномерная выпуклость.

Теперь рассмотрим вопрос о равномерной выпуклости пространств Лебега $L^p(\Omega)$ при $p \in (1, +\infty)$. Действительно, имеет место утверждение:

Теорема

Банаховы пространства $L^p(\Omega)$ равномерно выпуклы при $p \in (1, +\infty)$.

Пример — пространства Лебега. Критерий сильной сходимости.

Таким образом, в силу общего результата приходим к следующему утверждению:

Теорема

Из того условия, что при $p \in (1, +\infty)$

$$u_n \rightharpoonup u \text{ слабо в } L^p(\Omega) \text{ при } n \rightarrow +\infty,$$

и

$$\|u_n\|_p \rightarrow \|u\|_p$$

вытекает, что

$$u_n \rightarrow u \text{ сильно в } L^p(\Omega) \text{ при } n \rightarrow +\infty.$$