Идемпотентный (тропический) анализ и туннельные асимптотики

Арифметика Маслова: определим (max,+)-полукольцо чисел: $a \oplus a = \max(a, b)$, $a \otimes b = a + b$ и (min,+)-полукольцо чисел: $a \oplus a = \min(a, b)$, $a \otimes b = a + b$.
Пример $\mathbf{2 \oplus 2 = 2}$.
В этих структурах становятся **линейными** основные уравнения оптимального управления (уравнения Гамильтона-Якоби- Беллмана)

$$\frac{\partial S}{\partial t}(t, x) = \max_u \left(g(x, u) \frac{\partial S}{\partial x}(t, x) + J(x, u) \right) :$$

если $S_0(x) = a \otimes S_{01}(x) \oplus b \otimes S_{02}(x)$, то и для решений $S(t, x) = a \otimes S_1(t, x) \oplus b \otimes S_2(t, x)$.

Впечатляющие применения в оптиальном управлении:

(i) использование линейных методом в новых структурах для построения приближенных численных решений различных задач оптимизации,

(ii) использование (max,+)-аналогов спектрального анализа для изучения поведения оптимальных решений на больших временах: теория магистралей

(iii) магистрали в стохастических играх,

(iv) обобщенные решения дифференциальных уравнений Беллмана и Айзекса.

Туннельные (мультипликативные) асимптотики: для данных a, b и малых $h > 0$:

$$\exp\{-\frac{a}{h}\} + \exp\{-\frac{a}{h}\} \sim \exp\{-\frac{\min(a, b)}{h}\}.$$

Отсюда возникает деквантование Маслова

$$a \oplus b = \min(a, b) = -\lim_{h \to 0} \ln \left(\exp\{-\frac{a}{h}\} + \exp\{-\frac{b}{h}\} \right),$$

$$\text{или} \qquad a \oplus b = \max(a, b) = \lim_{h \to 0} \ln \left(\exp\{\frac{a}{h}\} + \exp\{\frac{b}{h}\} \right).$$

Оно приводит для малых положительных h к
(i)Туннельным асимптотикам и **туннельному** каноническому оператору Маслова, дающему приближенные решения уравнений теплопроводности и Шредингера

$$h \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \frac{1}{2} h^2 \Delta u(t, x) - V(x) u(t, x), \qquad -\frac{1}{2} h^2 \Delta \psi(x) + V(x) \psi(x) = E \psi$$

и к асимптотикам при $h \to +0$ и больших временах $t = h^{-\gamma}$, которые задаются инстантонными решениями квантовой механики (например, для потенциала V двойной ямы), а в бесконечномерном случае – инстантонами Евклидовой теории поля.
(ii) тропической геометрии, занимающейся классификацией алгебраических кривых в терминах их $h \to 0$ предельных оставов (теория амеб).

Подобные подходы работают для построения **асимптотики большого числа частиц** $N \to \infty$: системы взаимодействующих одинаковых частиц при вторичном (и Масловском ультра вторичном) квантовании приводят в пределе к обобщениям уравнений типа Хартри-Фока квантовой механики, а в туннельной версии к нелинейным Марковским цепочками типа уравнений Больцмана или Смолуховского.

В. П. Маслов, В. Н. Колокольцов, Идемпотентный анализ и его применение
в оптимальном управлении, М.: Наука , 1994