

**Секция «Математические модели
современной физики»**

**Математические аспекты теории распространения волн
в волноводах с неоднородным диэлектрическим заполнением**

Ю.В. Шестопапов¹, Ю.Г. Смирнов²

¹*Университет г. Евле, Швеция*

shestop@hotmail.com

²*Пензенский государственный университет*

smirnovyug@mail.ru

Резюме. В работе рассматриваются актуальные проблемы математической теории распространения волн в волноводах с неоднородным диэлектрическим заполнением и включениями. Анализ проводится путем исследования краевых задач на собственные значения для уравнений Максвелла, которые сводятся к задачам на собственные значения для операторного пучка. Для широкого класса волноводов показывается, что спектр нормальных волн образует непустое множество изолированных точек, локализованных в полосе с конечным числом вещественных точек. Обосновывается важность полученных результатов для описания спектра волн в открытых направляющих структурах.

Введение. Анализ распространения волн в волноводах с неоднородным диэлектрическим заполнением и произвольными включениями (идеально проводящими и диэлектрическими) представляет собой важный класс векторных задач электродинамики. Основные результаты, известные [1, 2] с конца 1940-х годов для волноводов, заполненных однородной изотропной средой (существование нормальных волн, дискретность и локализация их спектра на комплексной плоскости, полнота и базисность в постановках как для продольных, так и поперечных составляющих поля) были обобщены для произвольных экранированных металло-диэлектрических волноводов. В работах [3, 4] было показано, что спектр нормальных волн а) не пуст, б) образует счетное множество изолированных точек на комплексной плоскости без конечных точек сгущения, в) локализован в полосе симметрично относительно вещественной и мнимой осей, г) содержит не более конечного числа вещественных точек, и д) спектральные точки вводят спектр «четверками».

Анализ собственных волн некоторых открытых структур на основании этих результатов может быть корректно проведен путем исследования волновода с малой продольной щелью вдоль наружной границы, при этом в постановки соответствующих спектральных задач добавляются условия на бесконечности, например в виде парциальных условий излучения [2], и эти задачи рассматриваются на подходящем многолистом комплексном многообразии W [5]. Тогда структура спектра сохраняется и происходит его регулярное возмущение (за исключением, возможно, конечного числа точек, при этом вещественные точки спектра могут стать комплексными с малой мнимой частью). Такое регулярное возмущение обосновывается в [6, 7] для плоских экранов с узкими щелями и цилиндрических щелевых линий, а для щелевых структур с круговой симметрией детально исследуется в [8-10]. Когда размер первоначально малого отверстия или щели увеличивается, спектральные точки могут «сместиться» в бесконечность или перейти на другие листы многообразия W через разрезы или точки ветвления. Таким образом, результаты о спектре нормальных волн, полученные для экранированных волноводов, находят эффективное применение для описания собственных колебаний и волн в открытых структурах.

Альтернативным подходом к исследованию спектральных задач в волноводах является метод функций Грина, с помощью которого в [1] построена теория распространения электромагнитных волн в полых экранированных волноводах. Методы, предложенные в [3, 4] являются непосредственным развитием классической теории [1].

Анализ на основе спектральной теории операторных пучков. Задача о нормальных волнах в экранированных металло-диэлектрических волноводах, заполненных неоднородной средой и имеющих границу с острыми ребрами, сводится к несамосопряженной краевой задаче на собственные значения для системы уравнений Гельмгольца, где спектральный параметр входит в условия передачи нелинейным образом; слабые решения ищутся с помощью вариационных соотношений в пространствах Соболева. Далее, задача сводится к изучению операторного пучка четвертого порядка $L(\gamma)$ (который не является ни пучком Келдыша, ни гиперболическим). Исследуются свойства операторного пучка и устанавливаются основные свойства спектра нормальных волн, перечисленные во введении. На основе исследования системы собственных и присоединенных векторов пучка $L(\gamma)$ устанавливается (с использованием методов теории возмущений, применяемых для пучка простой структуры и факторизации пучка), что при определенных условиях имеет место двукратная полнота системы с конечным дефектом или без дефекта. Исходная задача на собственные значения (о нормальных волнах для уравнений Максвелла в экранированном металл-диэлектрическом волноводе) сводится, в терминах продольных компонент поля Π, Ψ , к вариационной задаче [3]

$$\begin{aligned} & \gamma^4 \int_{\Omega} (\varepsilon \Pi \bar{u} + \Psi \bar{v}) dx + \gamma^2 \left(\int_{\Omega} (\varepsilon \nabla \Pi \nabla \bar{u} + \nabla \Psi \nabla \bar{v}) dx - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \int_{\Omega} (\varepsilon \Pi \bar{u} + \Psi \bar{v}) dx \right) + \\ & + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \gamma \int_{\Gamma} \frac{\partial \Pi}{\partial \tau} \bar{v} - \frac{\partial \Psi}{\partial \tau} \bar{u} dt + \\ & + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \left(\int_{\Omega} (\varepsilon \Pi \bar{u} + \Psi \bar{v}) dx - \int_{\Omega} \left(\nabla \Pi \nabla \bar{u} + \frac{1}{\varepsilon} \nabla \Psi \nabla \bar{v} \right) dx \right) = 0, \quad \forall u \in H_1^0(\Omega), v \in \tilde{H}^1, \end{aligned} \quad (1)$$

которую можно записать в виде однородного уравнения для операторного пучка

$$L(\gamma)f = 0, \quad L(\gamma): H \rightarrow H, \quad (2)$$

$$L(\gamma) := \gamma^4 K + \gamma^2 (A_1 - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)K) + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \gamma S + \varepsilon_1 \varepsilon_2 (K - A_2),$$

где все операторы ограничены. Здесь H_1^0 , \tilde{H}^1 , и H обозначают соответствующие пространства Соболева, определенные в [3, 4], ε_1 и ε_2 – различные вещественные константы; Γ и Ω обозначают, соответственно, области поперечного сечения волновода и его границу. Собственные значения и собственные векторы пучка совпадают с собственными значениями и собственными функциями исходной задачи для уравнений Максвелла при $\gamma^2 \neq \varepsilon_1$, $\gamma^2 \neq \varepsilon_2$. Операторы в (1) уравнении обладают [3] следующими свойствами A_1 и A_2 равномерно положительны: $I \leq A_1 \leq \varepsilon_{\max} I$, $\varepsilon_{\max}^{-1} I \leq A_2 \leq I$, где $\varepsilon_{\max} = \max(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ и I единичный оператор в H . Оператор S самосопряженный, $S = S^*$, и $-\frac{1}{2}I \leq S \leq \frac{1}{2}I$. Оператор K положительный, $K > 0$, и компактный; собственные значения допускают оценку $\lambda_n(K) = O(n^{-1})$, $n \rightarrow \infty$. Далее, $L(\gamma)$ самосопряжен и спектр $L(\gamma)$ лежит в полосе Π_l для некоторого $l > 0$:

$$\sigma(L) \subset \Pi_l = \{\gamma: |\operatorname{Re} \gamma| < l\};$$

и симметричен относительно вещественной и мнимой осей: $\sigma(L) = \overline{\sigma(L)} = -\sigma(L)$, а именно: если γ_0 собственное значение пучка $L(\gamma)$ соответствующего собственному вектору $(\Pi, \Psi)^T$, то $-\gamma_0$, $\bar{\gamma}_0$ и $-\bar{\gamma}_0$ также собственные значения $L(\gamma)$, соответствующие $(-\Pi, \Psi)^T$, $(\bar{\Pi}, \bar{\Psi})^T$ и $(-\bar{\Pi}, \bar{\Psi})^T$ одной и той же кратности. При $\delta = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)/2$ и

$$I_0 = \left\{ \gamma: \operatorname{Im} \gamma = 0, \quad \frac{(\delta^2 + 4\varepsilon_1)^{1/2} - |\delta|}{2} \leq |\gamma| \leq \frac{(\delta^2 + 4\varepsilon_1)^{1/2} + |\delta|}{2} \right\}.$$

(а) спектр пучка $\sigma(L)$ в области C/I_0 – это набор изолированных собственных значений конечной алгебраической кратности, точки $\gamma_j = \pm\sqrt{\varepsilon_i}$ ($i=1,2$) являются вырожденными значениями $L(\gamma)$: $\dim \ker L(\gamma_j) = \infty$; (б) спектр $L(\gamma)$ образует счетное множество изолированных собственных значений конечной алгебраической кратности с единственной точкой накопления в бесконечности.

С физической точки зрения вещественные и чисто мнимые точки спектра $\sigma(L)$ интересны тем, что они соответствуют распространяющимся и затухающим волнам. Следует отметить, что могут существовать и комплексные волны для $\gamma \in \sigma(L)$ и $\gamma'_0 \cdot \gamma''_0 \neq 0$ ($\gamma_0 = \gamma'_0 + i\gamma''_0$) и спектр волн является объединением «четворок». Отметим также, что если волновод имеет однородное заполнение ($\varepsilon_1 = \varepsilon_2$), то комплексных волн нет.

Уравнение (2) может быть использовано для аналитического исследования спектра. Преимущества исследования задач на основе анализа операторных уравнений в том, что используется развитая теория операторных пучков.

ЛИТЕРАТУРА

1. А.Н. Тихонов, А.А. Самарский // ЖТФ, XVII, 1947 г., с.1431-1440.
2. А. Г. Свешников // Докл. АН СССР, 1950, 73, с. 917-920.
3. Y. Shestopalov, Y. Smirnov // Applicable Analysis, 22 p., 2013, DOI: 10.1080/00036811.2013.778980.
4. Y. Shestopalov, Y. Smirnov // Applicable Analysis, 20 p., 2013, DOI: 10.1080/00036811.2013.850494.
5. Y. Shestopalov, E. Karchevskiy // Proc. PIERS, Stockholm, Sweden, August 12- 15, 2013, pp. 388-393.
6. Y. Shestopalov, E. Chernokozhin // J. Comm. Tech. Electron., 42, 1997, pp. 1211-1223.
7. Y. Shestopalov, E. Chernokozhin // IEEE Trans. on Antennas and Propagation, 49, 2001, pp. 793-800.
8. E. Chernokozhin // Uspekhi sovremennoi radioelektroniki (Achievements of Modern Radioelectronics), 2001, pp. 3-80.
9. A. Pinskiy and E. Chernokozhin // J. Comm. Tech. Electron., 49, 2004, pp. 725-730.
10. E. Chernokozhin // J. Comm. Tech. Electron., 49, 2004, pp. 1157-1175.

Критические показатели мгновенного разрушения versus локальной разрешимости нелинейных уравнений соболевского типа

М.О. Корпусов¹

¹кафедра математики физического факультета МГУ

В работе рассматриваются задачи Коши для следующих нелинейных уравнений соболевского типа:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\Delta u + |u|^q) + \Delta u = 0, \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad u'(x, 0) = u_1(x); \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta u + \Delta u + |u|^q = 0, \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad u'(x, 0) = u_1(x); \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta u + \Delta u + |u|^q = 0, \quad u(x, 0) = u_0(x); \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta u - \Delta^2 u + |u|^q = 0, \quad u(x, 0) = u_0(x) \quad (4)$$

при $q > 1$ и $x \in \mathbf{R}^N$, $t > 0$ и с соответствующими начальными условиями. При надлежащем определении слабых решений указанных задач мы покажем, что критическим показателем для данных задач является величина

$$q_{kr} = \begin{cases} N / (N - 2), & \text{если } N \geq 3; \\ +\infty, & \text{если } N = 1, 2, \end{cases}$$

совпадающая с критическим показателем (теорема типа Лиувилля) для эллиптического уравнения

$$\Delta u + |u|^q = 0 \quad \text{при } x \in \mathbf{R}^N, \quad q > 1.$$

Причем если $1 < q \leq q_{kr}$, то отсутствуют слабые решения задач (1)-(4) даже локально во времени, что устанавливается методом нелинейной емкости [1] со специальным выбором пробной функции, зависящей от времени. Более того, для задачи Коши (1) мы выявили зависимость критического показателя в зависимости от начальных функций.

В частности, имеют место следующие случаи:

1. Если $u_0(x) \in L^q(\mathbf{R}^N)$ и $u_1(x) \in L^q(\mathbf{R}^N)$ при условиях

$$\int_{\mathbf{R}^N} |u_0|^q dx > 0, \quad \int_{\mathbf{R}^N} |u_0|^{q-2} u_0 u_1 dx < 0, \quad 1 < q \leq q_{kr}$$

имеет место априорная оценка времени существования слабого решения задачи Коши (1)

$$T < T_0 \equiv \frac{2 \int_{\mathbf{R}^N} |u_0|^q dx}{-q \int_{\mathbf{R}^N} |u_0|^{q-2} u_0 u_1 dx}$$

и при $T \geq T_0$ локальные нетривиальные слабые решения задачи Коши не существуют.

2. Если $u_0(x) \in L^q(\mathbf{R}^N)$ и $u_1(x) \in L^q(\mathbf{R}^N)$

$$\int_{\mathbf{R}^N} |u_0|^q dx > 0, \quad \int_{\mathbf{R}^N} |u_0|^{q-2} u_0 u_1 dx \geq 0, \quad 1 < q \leq q_{kr},$$

то имеет место следующая априорная оценка

$$\int_{\mathbf{R}^N} \left[T |u_0|^q + \frac{T^2}{2} q |u_0|^{q-2} u_0 u_1 \right] dx > \int_0^T \int_{\mathbf{R}^N} |u|^q dx dt < 0 \quad \text{для всех } T > 0.$$

3. Если $u_0(x) = 0$ для почти всех $x \in \mathbf{R}^N$ и $u_1(x) \neq 0$ на множестве ненулевой меры Лебега при $1 < q \leq q_{kr}$ слабое решение не существует даже локально по времени.

Кроме того, при условии $q > q_{kr}$ исследован вопрос о локальной и глобальной во времени разрешимости задач Коши (1). Используя метод сжимающих отображений для задачи Коши (1) доказано, что для всякого $T > 0$ фиксированного при достаточно малых начальных функциях в смысле

$$|u_0(x)| \leq \frac{\varepsilon}{(1+|x|^2)^{\alpha/(2q)}}, \quad |u_1(x)| \leq \frac{\varepsilon}{(1+|x|^2)^{\alpha/(2q)}}, \quad 3 \leq N < \alpha \leq q,$$

$$u_0(x), u_1(x) \in \mathbf{W}^{2,\infty}([1+|x|^2]^{\alpha/(2q)}; \mathbf{R}^N) \cap C^{(2)}(\mathbf{R}^N)$$

имеет место однозначная локальная разрешимость в классическом смысле задачи Коши (1) в классе $C^{(2)}([0, T]; \mathbf{W}^{2,\infty}([1+|x|^2]^{\alpha/(2q)}; \mathbf{R}^N) \cap C^{(2)}(\mathbf{R}^N))$. Для любых начальных функций $u_0(x), u_1(x) \in \mathbf{W}^{2,\infty}([1+|x|^2]^{\alpha/(2q)}; \mathbf{R}^N) \cap C^{(2)}(\mathbf{R}^N)$ доказана однозначная локальная разрешимость задачи Коши (2) в классе

$$u(x, t) \in C^{(2)}([0, T_0]; \mathbf{W}^{2,\infty}([1+|x|^2]^{\alpha/(2q)}; \mathbf{R}^N) \cap C^{(2)}(\mathbf{R}^N))$$

и для любой начальной функции $u_0(x) \in \mathbf{W}^{2,\infty}([1+|x|^2]^{\alpha/(2q)}; \mathbf{R}^N) \cap C^{(2)}(\mathbf{R}^N)$ доказана однозначная локальная разрешимость в классе

$$u(x, t) \in C^{(1)}([0, T_0]; \mathbf{W}^{2,\infty}([1+|x|^2]^{\alpha/(2q)}; \mathbf{R}^N) \cap C^{(2)}(\mathbf{R}^N)),$$

причем либо $T_0 = +\infty$ либо $T_0 < +\infty$ и для обеих задач Коши (2) и (3) выполнено предельное свойство

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow T_0} \sup_{x \in \mathbf{R}^N} [1+|x|^2]^{\alpha/(2q)} |u(x, t)| = +\infty.$$

Аналогичный результат об однозначной локальной разрешимости в классическом смысле получен и для задачи Коши (4), но только при $N = 3$.

Наконец, используя классические свойства интегралов типа потенциала (потенциалов Рисса) доказаны результаты о локальной разрешимости задач Коши (1)-(4) в обобщенном смысле. При этом получен точный результат – локальная разрешимость в некотором обобщенном смысле имеет место при условии

$$q > N / (N - 2), \quad N \geq 3.$$

Более того, используя априорные оценки для задач Коши (2) и (3) получены оценки снизу на время существования решения T_0 . При условии малости начальной функции $u_0(x)$ для задачи Коши (3) доказана глобальная во времени разрешимость.

Для задачи Коши (4) имеется другой критический показатель

$$p_{kr} = \begin{cases} (N+2)/(N-2), & \text{если } N \geq 3; \\ +\infty, & \text{если } N = 1, 2, \end{cases}$$

такой, что при $q_{kr} < q \leq p_{kr}$ не существует глобального во времени слабого решения задачи Коши (4). Причем, как мы уже показали при $N \geq 3$ в указанном диапазоне локальное слабое решение существует. С другой стороны, при $q > p_{kr}$, $N \geq 3$ глобальное во времени слабое решение может существовать. Пока этот вопрос открыт.

В заключение, мы рассмотрели еще две задачи Коши для соболевских уравнений с градиентными нелинейностями

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta u + \Delta u + |\nabla u|^q = 0, \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad u'(x, 0) = u_1(x); \quad (5)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta u + \Delta u + |\nabla u|^q = 0, \quad u(x, 0) = u_0(x) \quad (6)$$

при $q > 1$ и $x \in \mathbf{R}^N$, $t > 0$. Для этих задач критическим показателем является величина

$$r_{kr} = \begin{cases} N / (N - 1), & \text{если } N \geq 2; \\ +\infty, & \text{если } N = 1. \end{cases}$$

Причем для $1 < q \leq r_{kr}$ не существуют локальные во времени слабые решения в классе

$$u(x, t) \in L^q(0, T; \mathbf{D}_{loc}^{1,q}(\mathbf{R}^N)) \text{ при любом } T > 0.$$

При этом при выполнении условия

$$q \in \left(\frac{N}{N-1}, 2 \right) \text{ при } N \geq 3$$

доказана локальная разрешимость в соответствующих классах

$$u(x, t) \in \mathbf{C}^{(k)}([0, T_0]; \mathbf{D}^{1,p_3}(\mathbf{R}^N)), \quad p_3 = N(q-1), \quad k = 1, 2.$$

Кроме того, при условии $q > 3$, $N \geq 2$ доказана локальная разрешимость задач Коши (5) и (6) в классическом смысле. Открытыми остались вопросы о локальной разрешимости в слабом смысле задач Коши (5) и (6) при $2 \leq q \leq 3$, $N \geq 3$ и $2 < q \leq 3$, $N = 2$.

Полученные результаты могут быть обобщены на случай более общих задач Коши для нелинейных уравнений соболевского типа с дивергентным эллиптическим оператором при старшей производной по времени.

ЛИТЕРАТУРА

1. Э. Митидиери, С. И. Похожаев, “Априорные оценки и отсутствие решений нелинейных уравнений и неравенств в частных производных”, Тр. МИАН, **234**, Наука, М., 2001, 3–383

Применение метода пробных функций для анализа глобальной во времени неразрешимости задач с градиентной нелинейностью: от уравнения Захарова-Кузнецова до модели Кадомцева-Петвиашвили

Е.В. Юшков, М.О. Корпусов, А.Г. Свешников
Физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова
yushkov.msu@mail.ru

Проблема глобальной во времени неразрешимости задач с градиентной нелинейностью uu_x возникла при первой же попытке анализа нелинейных волновых уравнений. Классическим примером является уравнение простой волны: $u_t + uu_x = 0$ с локальным начальным возмущением, для которого методом характеристик нетрудно получить опрокидывающееся за конечное время решение, с обращающейся в бесконечность производной [1]. Явление неограниченного роста решений или их производных носит в литературе название разрушение. Оно было обнаружено в различных нелинейных моделях математической физики: для уравнений параболического типа [2], эллиптического и гиперболического [3], для интегро-дифференциальных [4] и псевдо-параболических уравнений [5]. Существует широкий класс методов и подходов для получения оценок скорости и времени разрушения, для анализа характера разрушений и получения автомодельных разрушающихся решений [6,7]. Однако, в большинстве своем эти подходы сложны и ориентированы на конкретные нелинейные задачи, что затрудняет возможность их практического применения.

В настоящей работе мы демонстрируем простоту и удобство метода пробных функций для анализа глобальной неразрешимости широкого класса задач, содержащих нелинейность uu_x . Этот метод был предложен С.И. Похожаевым и Э. Митидиери в 2001 году и использовался для доказательства разрушения классических нелинейных эволюционных уравнений [3]. В 2011 году методом пробных функций удалось впервые доказать появление разрушения в задаче для уравнения Кортвега-де Фриза [8,9]. Наше исследование является, в некотором роде, продолжением этой работы. Мы показываем, что метод пробных функций применим к широко используемым в современной математической физике моделям "типа Кортвега-де Фриза":

к уравнению Захарова-Кузнецова [10]

$$u_t + uu_x + u_{xxx} + \Delta_y u_x = 0;$$

к уравнению Хохловой-Заболоцкого-Кузнецова [11]

$$(u_t - uu_x - u_{xx})_x = \Delta_y u;$$

к уравнению Линя-Рейснера-Цзяня [12]

$$(u_t + (K + u)u_x)_x = \Delta_y u;$$

к уравнению Островского [13]

$$(u_t + uu_x + u_{xxx})_x = u;$$

к уравнению Бенжамена-Бона-Махони-Бюргера [14]

$$(u_{xx} - u)_t + u_{xx} - uu_x = 0;$$

к уравнению Розенау-Бюргера [15]

$$(u_{xxxx} + u)_t + u_{xx} - uu_x = 0;$$

к уравнению Кадомцева Петвиашвили [16]

$$(u_t + uu_x - u_{xxx})_x = \pm \Delta_y u;$$

и многим другим уравнения, содержащим нелинейность uu_x . Применяемый подход работает для задач в ограниченных и в неограниченных областях, для одномерных и многомерных моделей, для начально-краевых задач с классическими и специальными граничными условиями. При этом для анализа можно использовать пробные функции общего вида и наиболее простую степенную функцию удобную для практической быстрой оценки.

Для перечисленных уравнений мы получаем достаточные условия на начальную функцию и на поведение граничных данных, при которых происходит разрушение за конечное время. В работе под разрушением мы понимаем рост интегральной характеристики. т.е. выполнение предельного равенства

$$\lim_{t \rightarrow T_\infty} \int_{\Omega} u(x, t) \varphi(x) dx = +\infty$$

Кроме того, мы получаем оценку на время разрушения снизу и оценку на скорость разрушения. Классическим примером получаемого результата, может служить следующая теорема.

Теорема. Пусть начальная функция $u_0(x)$ начально-краевой задачи

$$u_t - uu_x + u_{xxx} = -\Delta_y u_x, \quad t > 0, \quad x \in (0, L), \quad y \in R^{N-1},$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u|_{x=0} = u_x|_{x=0} = u_{xx}|_{x=0} = u_x|_{x=L} = 0,$$

для некоторой достаточно гладкой функции $\varphi(y)$ удовлетворяет неравенству

$$J_0 \equiv \int_{R^{N-1}} \int_0^L (L-x) \varphi(y) u_0(x) dx dy > \frac{a}{k},$$

тогда не существует глобального во времени классического решения задачи и имеет место следующая оценка:

$$\int_{R^{N-1}} \int_0^L (L-x) \varphi(y) u(x, t) dx dy > \frac{a}{k} \frac{1 + c_0 \exp(2akt)}{1 - c_0 \exp(2akt)}, \quad \text{где } c_0 = \frac{kJ_0 - a}{kJ_0 + a}$$

$$k^2 = \frac{1}{L^3} \left(\int_{R^{N-1}} \varphi(y) dy \right)^{-1}, \quad a^2 = \frac{L}{2} \int_{R^{N-1}} \frac{|\Delta_y \varphi|^2}{\varphi} dy$$

а следовательно имеет место предельное равенство:

$$\lim_{t \uparrow T_\infty} \int_{R^{N-1}} \int_0^L (L-x) \varphi(y) u(x, t) dx dy = +\infty, \quad T_\infty \leq -\frac{1}{2ak} \ln \left(\frac{kF_0 - a}{kF_0 + a} \right).$$

Одновременно с наличие глобальной во времени неразрешимости мы рассматриваем вопрос о локальной разрешимости. Главная сложность этого вопроса заключается в необходимости доказывать разрешимость не при достаточно малой начальной функции, а для такой, при которой происходит разрушение. Методом сжимающих отображений нами доказана одновременная с разрушением локальная разрешимость и единственность для моделей Бенжамена-Бона-Махони-Бюргерса, Розенау-Бюргерса, Кортвега-де Фриза-Бенжамена-Бона-Махони и др. [17,18].

ЛИТЕРАТУРА

1. Дж. Уизем "Линейные и нелинейные волны" М.: Мир, 1977.
2. Н. Fujita // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. -- 1966. -- Sect IA, V.13, pp. 109-124.
3. Э.Л. Митидиери, С.И. Похожаев // Труды МИАН, т. 234, 2001.
4. М.О. Корпусов "Разрушение в неклассических нелокальных уравнениях" М.: УРСС, 2011.
5. A.B. Al'shin, M.O. Korpusov, A.G. Sveshnikov "Blow up in nonlinear Sobolev type equations" Series: De Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications, 2011.
6. М.О. Корпусов, А.Г. Свешников, Е.В. Юшков "Методы теории разрушения решений нелинейных уравнений математической физики" М.: Физический

Факультет МГУ, 2014.

7. А.А. Самарский, В.А. Галактионов, С.П. Курдюмов, А.П. Михайлов "Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений" М.: Наука, 1987.
8. С.И. Похожаев // Уравнения в ЧП, СМФН (39), 2011, стр. 141-150.
9. S.I. Pokhozhaev // Diff. Eq., 47:4 2011, pp. 488-493.
10. V.E Zakharov, E.A. Kuznetsov // Sov. Phys. JETP, 39, 1974, 285-286.
11. R.H. Zeytunyan // UFN, V 165, N 12, pp. 1403-1456
12. C.C. Lin, E. Reissner, H.S. Tsien // J. Math. and Phys., 27:3, 1948, 220-231.
13. L.A. Ostrovsky // Okeanologia, 18, 1978, 181-191.
14. T.B. Benjamin, J.L. Bona, J.J. Mahony // Ph.Tr.Royal Soc.London, Ser. A, 272, 1972
15. Ph. Rosenau // Phys. Rev. A, 40(12):7193-7196, 1989.
16. M. Hadac // arXiv:math/0611197v1, 2006
17. М.О. Корпусов, А.Г. Свешников, Е.В. Юшков // Изв. РАН. Сер. матем., 78:3, 2014.
18. M. Korpusov, E. Yushkov // Electronic Journal of Differential Equations, N.69, 2014.

Метод Дискретных источников с учетом нелокального взаимодействия плазменных частиц

Ю.А. Еремин

*Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова,
Факультет Вычислительной математики и кибернетики*

eremin@cs.msu.ru

Впечатляющие достижения наноплазмоники выдвинули ее на передний край исследований, относящихся к современной нанооптике благодаря многочисленным практическим приложениям. Плазмонные резонансы в металлических частицах широко используются при разработке современных конструкций солнечных элементов, оптических антенн, локальных биосенсоров, трансдюсеров и жидкокристаллических дисплеев [1]. Вместе с тем, анализ усиления электромагнитного поля при плазмонном резонансе (ПР) близко расположенных частиц вызывает серьезные затруднения у исследователей. Это связано прежде всего с гигантским ростом интенсивности поля между частицами. Попытки исследования подобных эффектов в рамках метода интегральных уравнений не позволили сближать частицы на расстояние меньшее 5нм [2]. Недавно появилась гипотеза о "нелокальном взаимодействии" плазмонных частиц, которое состоит в том, что диэлектрическая проницаемость частиц, размеры которых существенно меньше длины свободного пробега электрона, как бы "размазывается" [3]. Это происходит в силу образования слоя электронной плазмы вблизи поверхности частиц, толщину которого нельзя игнорировать. Интересно отметить то обстоятельство, что анализ рассеивающих свойств "спекающихся" частиц, то есть частиц, которые соединены тонкой перемычкой, не представляет особой проблемы и может эффективно осуществляться в рамках численно-аналитических методов [4].

В настоящей работе проведен анализ различных численных схем, использующихся при исследовании рассеяния близко расположенных частиц. Отмечено, что основная сложность использования как поверхностных, так и объемных методов, состоит в классической схеме взаимодействия частиц: только через

рассеянные поля. Предложена новая схема, позволяющая учесть нелокальное взаимодействие частиц через посредство связи внутренних полей. Показано, что, используя нелокальное взаимодействие в рамках метода Дискретных источников (МДИ), можно успешно исследовать плазмонные эффекты для частиц, расположенных на расстоянии всего несколько ангстрем.

Рассмотрим дифракцию электромагнитной плоской волны двумя проницаемыми частицами $D_{1,2}$, расположенными в R^3 . Пусть частицы имеют гладкие поверхности $\partial D_{1,2} \in C^{(1,\alpha)}$ и одинаковые индексы рефракции. Тогда математическая постановка задачи рассеяния может быть записана в виде:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H}_{e,i} &= jk \varepsilon_{e,i} \mathbf{E}_{e,i}; & \operatorname{rot} \mathbf{E}_{e,i} &= -jk \mu_{e,i} \mathbf{H}_{e,i} & \text{в } D_{e,i}, i=1,2; & D_e &:= R^3 / \overline{D_1 \cup D_2}; \\ \mathbf{n}_i \times (\mathbf{E}_i(P) - \mathbf{E}_e(P)) &= \mathbf{n}_i \times \mathbf{E}^0(P), & i=1,2; \\ \mathbf{n}_i \times (\mathbf{H}_i(P) - \mathbf{H}_e(P)) &= \mathbf{n}_i \times \mathbf{H}^0(P), & P \in \partial D_i; \\ \lim_{r \rightarrow \infty} r \cdot \left(\sqrt{\varepsilon_e} \mathbf{E}_e \times \frac{\mathbf{r}}{r} - \sqrt{\mu_e} \mathbf{H}_e \right) &= 0, & r = |M| \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $\{\mathbf{E}^0, \mathbf{H}^0\}$ - поле плоской волны, $\{\mathbf{E}_e, \mathbf{H}_e\}$ - рассеянное поле, $\{\mathbf{E}_i, \mathbf{H}_i\}$, $i=1,2$ - полные поля внутри каждой частицы, \mathbf{n}_i - единичные нормали к поверхностям ∂D_i , $\operatorname{Im} \varepsilon_e, \mu_e = 0$ и $\operatorname{Im} \varepsilon_i, \mu_i \leq 0$.

Из условий сопряжения на поверхностях частиц явствует, что связь между полями внутри областей D_1 и D_2 осуществляется только через рассеянное поле в области D_e . Повидимому, этого взаимодействия оказывается недостаточным при наступлении ПР, когда интенсивность поля в промежутке между частицами возрастает на несколько порядков. Поскольку эта же схема применяется в случае использования большинства численно-аналитических методов, она не позволяет отследить существенное возрастание ближнего поля в зазоре между частицами. В то же время для случая спекающихся частиц, когда $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$, применение метода Т-матриц позволяет эффективно исследовать их рассеивающие свойства. Отметим, что в последнем случае даже при незначительной перемычке между частицами представление для полей существенно трансформируется и связь между полями внутри D_1 и D_2 осуществляется не только через рассеянное, но и единое представление для внутреннего поля $\{\mathbf{E}_i, \mathbf{H}_i\}$.

Зафиксируем это обстоятельство, и будем строить приближенное решение на основе МДИ [5]. Уникальной особенностью этого метода является то, что приближенное решение для полей внутри рассеивателя может быть построено, как на основе регулярных, так и сингулярных функций. При этом нет никаких ограничений на представление для решения внутри частиц, оно должно лишь удовлетворять системе уравнений Максвелла внутри областей $D_{1,2}$. Будем использовать для построения приближенного решения внутри частиц единое представление для внутренних полей с единым набором амплитуд ДИ, как это было бы в случае единой частицы. При этом существенно используется равенство индексов рефракции внутри частиц, что вполне естественно для случая исследования ПР.

Ограничим свое рассмотрение случаем двух осесимметричных соосных сфероидов, а в качестве внешнего возбуждения будем рассматривать Р-поляризованную плоскую волну, так как только в случае Р-поляризации возникает явления ПР [1]. Будем полагать, что плоская волна, распространяется под углом $\pi - \theta_0$ по отношению к оси Oz. В этом случае поле плоской волны принимает вид

$$\mathbf{E}^0 = (\mathbf{e}_x \cos \theta_0 + \mathbf{e}_z \sin \theta_0) \cdot \psi, \quad \mathbf{H}^0 = -\mathbf{e}_y \cos \theta_0 n_0 \cdot \psi, \quad \psi = \exp\{-jk_e (x \sin \theta_0 - z \cos \theta_0)\}. \quad (2)$$

где $k_e = k\sqrt{\varepsilon_e \mu_e}$ и $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ - Декартов базис. Разложим плоскую волну в ряд Фурье по азимутальному углу φ . В этом случае Фурье компоненты поля плоской волны (2) в цилиндрической системе координат принимают вид

$$\mathbf{E}_m^0 = \left\{ E_{m\rho}^{0,P}(\eta) \cos(m+1)\varphi; E_{m\rho}^{0,P}(\eta) \sin(m+1)\varphi; E_{mz}^{0,P}(\eta) \cos(m+1)\varphi \right\},$$

$$\mathbf{H}_m^0 = \left\{ H_{m\rho}^{0,P}(\eta) \sin(m+1)\varphi; H_{m\rho}^{0,P}(\eta) \cos(m+1)\varphi; H_{mz}^{0,P}(\eta) \sin(m+1)\varphi \right\}. \quad (3)$$

где $\eta = (\rho, z)$. Тогда соответствующее приближенное решение МДИ может быть записано как

$$\mathbf{E}_{e,i}^N = \sum_{m=0}^M \sum_{n=1}^{N_{e,i}^m} \left\{ p_{mn}^{e,i} \frac{j}{k\varepsilon_{e,i}\mu_{e,i}} \text{rotrot}\mathbf{A}_{mn}^{1,e,i} + q_{mn}^{e,i} \frac{j}{\varepsilon_{e,i}} \text{rot}\mathbf{A}_{mn}^{2,e,i} \right\} + \sum_{n=1}^{N_{e,i}^0} r_n^{e,i} \frac{j}{k\varepsilon_{e,i}\mu_{e,i}} \text{rotrot}\mathbf{A}_n^{3,e,i};$$

$$\mathbf{H}_{e,i}^N = \frac{j}{k\mu_e} \text{rot}\mathbf{E}_{e,i}^N. \quad (4)$$

а соответствующие векторные потенциалы имеют вид

$$\mathbf{A}_{mn}^{1,e,i} = \{ Y_m^{e,i}(\eta, w_n^{e,i}) \cos(m+1)\varphi; -Y_m^{e,i}(\eta, w_n^{e,i}) \sin(m+1)\varphi; 0 \},$$

$$\mathbf{A}_{mn}^{2,e,i} = \{ Y_m^{e,i}(\eta, w_n^{e,i}) \sin(m+1)\varphi; Y_m^{e,i}(\eta, w_n^{e,i}) \cos(m+1)\varphi; 0 \}, \quad (5)$$

$$\mathbf{A}_n^{3,e,i} = \{ 0; 0; Y_0^{e,i}(\eta, w_n^{e,i}) \}.$$

Здесь $Y_m^e(\eta, w_n^e) = h_m^{(2)} \left(k_e R_{\eta w_n^e} \right) \left(\rho / R_{\eta w_n^e} \right)^m$, $Y_m^i(\eta, w_n^i) = h_m^{(2)} \left(k_i R_{\eta w_n^i} \right) \left(\rho / R_{\eta w_n^i} \right)^m$, $R_{\eta w_n^{e,i}}^2 = \rho^2 + (z - w_n^{e,i})^2$, $\eta = (\rho, z)$, $h_m^{(2)}$ сферические функции Ханкеля, а $w_n^{e,i}$ - комплексные координаты ДИ, расположенные так, что $\text{Re}(w_n^e) \in D_i$ и $\text{Re}(w_n^i) \in D_e$ [5]. Отметим, что представление (4) удовлетворяет системе уравнений Максвелла и условиям излучения, а определение неизвестных амплитуд ДИ осуществляется из условий соряжения на поверхностях частиц (1).

Поскольку совокупность сфероидов представляет собой осесимметричную конфигурацию и внешнее возбуждение (4) и приближенное решение (5) представлены разложением по азимутальной переменной φ , то определение неизвестных амплитуд ДИ $\{p_{mn}^{e,i}, q_{mn}^{e,i}, r_n^{e,i}\}$ производится из граничного условия (1) последовательно для каждой гармоники Фурье m . Амплитуды ДИ определяются из требования минимизации невязки граничных условий (1) для гармоник Фурье в выбранной функциональной норме. Вычислительный алгоритм представляет собой обобщенный метод коллокаций с последующим псевдорешением соответствующих переопределенных систем линейных алгебраических уравнений для гармоник Фурье полей. Кроме того, вычисляя значение поверхностной невязки выполнения граничных условий (1) в промежуточных точках по отношению к точкам коллокаций мы получаем апостериорную оценку погрешности решения (4) в выбранной функциональной норме.

Будем рассматривать две схемы реализации МДИ классическую [6], когда представление (4) для внутреннего поля осуществляется двумя различными наборами амплитуд $\{p_{mn}^i, q_{mn}^i, r_n^i\}$, $i = 1, 2$ соответствующими двум различным наборам координат ДИ $\{w_n^i\}_{n=1}^{N_i}$, $i = 1, 2$ и новую схему, учитывающую нелокальное взаимодействие частиц. В последнем случае представление для внутреннего поля строится на основе единого набора амплитуд ДИ и единого множества расположения ДИ. В данном конкретном

случае ДИ для рассеянного поля расположены на оси внутри сфероидов, а для внутреннего поля в комплексной плоскости на мнимой оси ($\text{Re}(w_n^i)=0$), которая проектируется в начало координат ($z=0$). После того, как амплитуды ДИ определены θ, φ компоненты диаграммы рассеянного поля [5] принимают следующий вид

$$F_{\theta}^P(\theta, \varphi) = j \sum_{m=0}^M (j \sin \theta)^m \cos(m+1) \varphi \sum_{n=1}^{N_e^m} \{ p_{mn}^e \cos \theta + q_{nm}^e \} \exp \{ -jk_e w_n^e \cos \theta \} - j \sin \theta \sum_{n=1}^{N_e^0} r_n^e \exp \{ -jk_e w_n^e \cos \theta \},$$

$$F_{\varphi}^P(\theta, \varphi) = -j \sum_{m=0}^M (j \sin \theta)^m \sin(m+1) \varphi \sum_{n=1}^{N_e^m} \{ p_{mn}^e + q_{nm}^e \cos \theta \} \exp \{ -jk_e w_n^e \cos \theta \}. \quad (6)$$

Нас будет интересовать интенсивность полного поля в начале координат, между сфероидами в зависимости от различных параметров: длины волны λ и расстояния между сфероидами d

$$E^2 = |\mathbf{E}_e(0, 0, 0) + \mathbf{E}^0(0, 0, 0)|^2 / |\mathbf{E}^0(0, 0, 0)|^2 \quad (7)$$

Кроме того, мы будем рассматривать интенсивность рассеянного поля DSC, которая на единичной сфере определяется как

$$DSC^P(\theta_0, \theta, \varphi) = |F_{\theta}^P(\theta_0, \theta, \varphi)|^2 + |F_{\varphi}^P(\theta_0, \theta, \varphi)|^2$$

и сечение рассеяния (CP) – суммарная интенсивность рассеянного поля

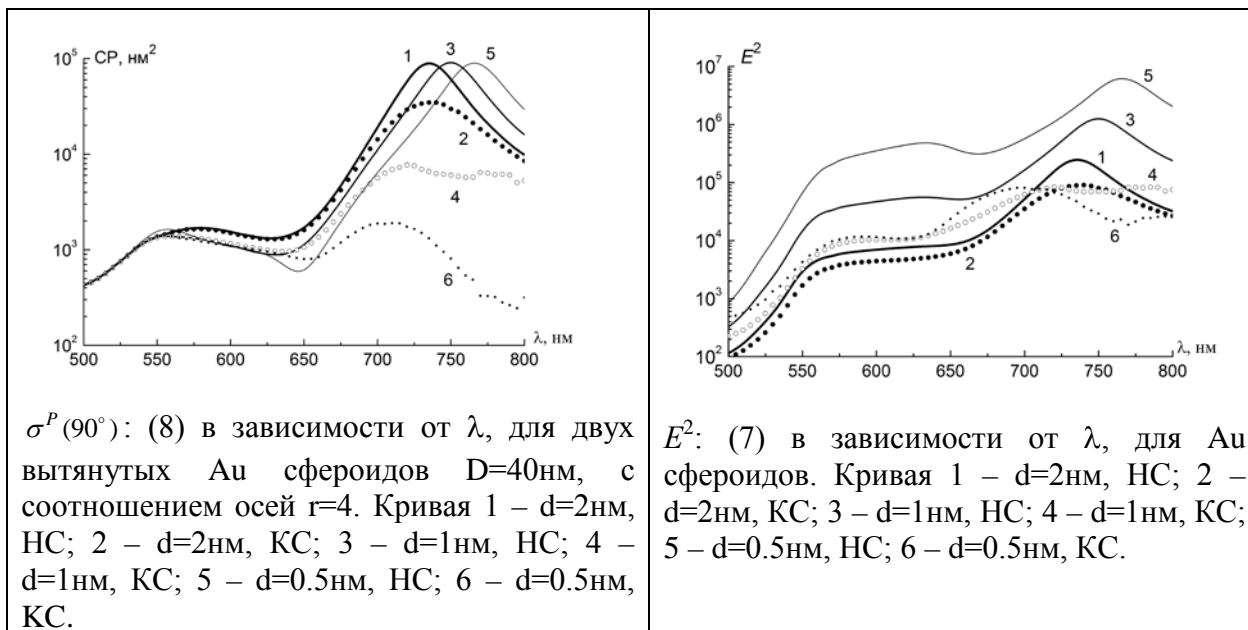
$$\sigma^P(\theta_0) = \int_{\Omega} DSC^P(\theta_0, \theta, \varphi) d\omega, \quad (8)$$

здесь Ω – единичная сфера. Размерность интенсивности и CP – нм^2 .

Будем рассматривать дифракцию P-поляризованной плоской волны, падающей под углом $\theta_0 = 90^\circ$ на два идентичных золотых (Au) вытянутых сфероида эквобъемный диаметр каждого сфероида $D=40\text{нм}$, а соотношение осей $r=4$. На рис.1 приведены результаты расчета CP (8) в зависимости от расстояния между сфероидами $d=2, 1, 0.5\text{нм}$ для классической схемы (КС) МДИ [6] и новой схемы (НС), учитывающей нелокальное взаимодействие частиц. Как видно из рисунка, для $d=2\text{нм}$ результаты для обеих схем весьма близки особенно вне области ПР и качественно они очень похожи во всей частотной области. Однако при уменьшении расстояния $d=1, 0.5\text{нм}$ результаты начинают резко различаться. При значении $d=1\text{нм}$ это различие составляет порядок, а при $d=0.5\text{нм}$ уже два порядка в области ПР. При этом неулучшаемая невязка для классической схемы при $d=0.5\text{нм}$ и $\lambda=765\text{нм}$ составляет 24.6%, а для новой схемы всего 1.2%, при одинаковом числе ДИ и точек коллокации.

Сходные результаты, которые приведены на рис.2, имеют место и для интенсивности полного поля (7) в зазоре между частицами. Все представленные расчеты проведены с учетом частотной дисперсии золота.

Итак, новая схема МДИ, учитывающая нелокальное взаимодействие плазмонных частиц, позволяет успешно проводить анализ рассеивающих свойств близко расположенных частиц в области плазмонного резонанса. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 12-01-00541).



ЛИТЕРАТУРА

1. D. Sarid, W. Challengier. "Modern Introduction to Surface Plasmons. Theory, Mathematical Modeling, and Applications". Cambridge Univ. Press. 2010.
2. A. M. Kern, O. J. F. Martin // Nano Lett. 2011. V.11. P. 482.
3. N.A. Mortensen, S. Raza, M. Wubs, et al. // Nature Communications. 2014. 4809. P.1.
4. J. Hellmers, T. Wriedt // J. Quant. Spectr. Radiative Transfer. 2013. V.123. P.53.
5. Н.В. Гришина, Ю.А. Еремин, А.Г. Свешников // Оптика и спектроскопия. 2012, Т.113, №4, С.484.
6. Yu.A. Eremin, N.V. Orlov, V.I. Rozenberg // J. Atmosph. Terr. Phys. 1995. V.57. N3. P.311.

Итерационные методы решения самосогласованных задач физики плазмы

В.Ю. Попов^{1,3}, Х.В. Малова^{2,3}

¹ Физический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова

² НИИЯФ МГУ имени М.В. Ломоносов

³ ИКИ РАН

masterlu@mail.ru

Многочисленные спутниковые измерения указывают на то, что в хвосте магнитосферы Земли могут формироваться самосогласованные тонкие токовые слои (толщиной порядка одного или нескольких ларморовских радиусов ионов), в которых нормальная компонента магнитного поля B_z , тангенциальная B_x и сдвиговая B_y зависят от координат (x, z) . Самосогласованные компоненты плотности тока j_x, j_y, j_z также зависят от переменных (x, z) , а силовые линии магнитного поля деформированы, и не лежат в одной плоскости. Для исследования таких самосогласованных равновесных токовых конфигураций была разработана кинетическая аналитическая модель.

$$f(v, I_z, I_x) = N \begin{cases} \exp \left\{ -\varepsilon^{-2/3} \left[\left(\sqrt{w_0^2 + \varphi - \tilde{I}_z} - \varepsilon^{-2/3} \right)^2 + \tilde{I}_z \right] \right\}, w_0^2 + \varphi - \tilde{I}_z \geq 0 \\ k \exp \left\{ -\varepsilon^{-2/3} \left[\varepsilon^{-4/3} + w_z^2 + b_z \tilde{I}_x + \varphi \right] \right\}, w_0^2 + \varphi - \tilde{I}_z < 0 \end{cases}$$

$$\tilde{I}_z(\vec{w}, x, \zeta) = \frac{2\varepsilon^{2/3}}{\pi} \int_{\zeta_0}^{\zeta_1} \sqrt{w^2 - \left(w_x - \varepsilon^{2/3} b_y (\zeta - \zeta') \right)^2 + \left(\varphi(x, \zeta) - \varphi(x, \zeta') \right) - \left(w_y - \left(A_y(x, \zeta) - A_y(x, \zeta') \right) \right)} d\zeta'$$

$$w^2 - \left(w_x - \varepsilon^{2/3} b_y (\zeta - \zeta_{0,1}) \right)^2 + \left(\varphi(x, \zeta) - \varphi(x, \zeta_{0,1}) \right) - \left(w_y - \left(A_y(x, \zeta) - A_y(x, \zeta_{0,1}) \right) \right) = 0 \Rightarrow \zeta_{0,1}$$

$$\tilde{I}_x = \frac{2\varepsilon^{2/3}}{\pi} \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{w_x^2 + w_y^2 - \left(w_y + A_y(x, \zeta) - A_y(x', \zeta) \right) + \left(\varphi(x, \zeta) - \varphi(x', \zeta) \right)} dx'$$

$$w_x^2 + w_y^2 - \left(w_y + A_y(x, \zeta) - A_y(x_{0,1}, \zeta) \right) + \left(\varphi(x, \zeta) - \varphi(x_{0,1}, \zeta) \right) = 0 \Rightarrow x_{0,1}$$

$$\tilde{I}_x = \frac{2\varepsilon^{2/3}}{\pi} \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{w_x^2 + w_y^2 - \left(w_y + A_y(x, \zeta) - A_y(x', \zeta) \right) + \left(\varphi(x, \zeta) - \varphi(x', \zeta) \right)} dx'$$

$$w_x^2 + w_y^2 - \left(w_y + A_y(x, \zeta) - A_y(x_{0,1}, \zeta) \right) + \left(\varphi(x, \zeta) - \varphi(x_{0,1}, \zeta) \right) = 0 \Rightarrow x_{0,1}$$

$$n_i(x, z) = n_e(x, z) = \int_{\mathbf{v}} f(W_0, I_x(x, z), I_z(x, z)) d^3v,$$

$$j_\alpha(x, z) = \int_{\mathbf{v}} v_\alpha f(W_0, I_x(x, z), I_z(x, z)) d^3v, \quad \alpha = x, y, z$$

$$\nabla_{||} \varphi(s) = \varepsilon^{2/3} \left[\frac{1}{\tau_{||}} \frac{\bar{\nabla}_{||} \{ n(1 - q^2 b) \}}{(1 - q^2) n_e} + \frac{1}{\tau_{\perp}} \bar{\nabla}_{\perp} b \right]$$

$$\vec{j}_e = -en_e c \frac{[\vec{E}, \vec{B}]}{B^2} + \frac{c}{B^2} [\vec{B}, \bar{\nabla}_{\perp} p_{\perp e}] + \frac{c}{B^4} (p_{||e} - p_{\perp e}) [\vec{B}, (\bar{\nabla} \vec{v}) \vec{B}]$$

$$p_{||e}(z) = n_e \frac{1 - q^2 b}{1 - q^2}, \quad p_{\perp e} = n_e b$$

$$\Delta A_\alpha = -\frac{4\pi}{c} [j_{i,\alpha}(W_0, I_x, I_z) + j_{e,\alpha}], \quad \alpha = x, y, z, \quad \vec{B} = \text{rot } \vec{A}$$

Для решения такой самосогласованной нелинейной задачи были разработаны и реализованы эффективные итерационные алгоритмы, позволяющие находить решения задачи, отвечающие равновесным конфигурациям тонких токовых слоев.

Результаты расчетов показывают, что для одних и тех же входных данных могут существовать две различные моды самосогласованного сдвигового магнитного поля (B_y), и соответственно, две конфигурации тонкого токового слоя. Для антисимметричной (относительно z -координаты) моды B_y магнитные силовые линии закручены внутри слоя, однако профили плотности плазмы, компоненты j_y плотности тока и компоненты B_x магнитного поля практически мало отличаются от случая с магнитным полем без сдвига ($B_y = 0$). Для симметричной B_y моды магнитные силовые линии лежат на изогнутой поверхности, при этом плотность плазмы в слое мало изменяется, а толщина токового слоя становится вдвое больше.

Проведено исследование структуры тонкого токового слоя (с толщиной порядка ионного ларморовского радиуса) в присутствии самосогласованной шировой компоненты магнитного поля и в предположении о наличии в системе постоянной нормальной компоненты поля. Получены самосогласованные профили для магнитного поля, плотности плазмы и плотностей продольного и поперечного токов. Показано, что:

1. Возможно существование двух классов равновесных решений, одно из которых определяется симметричной (по координате z) модой сдвиговой компоненты, второе – антисимметричной модой.

2. При антисимметричной сдвиговой компоненте магнитного поля профили тангенциальной компоненты магнитного поля и соответствующей ей плотности тока близки к случаю, когда сдвиг магнитного поля отсутствует в системе, а плотности плазмы и тока имеют ярко выраженный максимум в центре слоя.

3. При симметричной (колоколообразной) конфигурации сдвиговой компоненты поля ее амплитуда сопоставима с амплитудой тангенциальной компоненты. При этом амплитуда плотности тока падает в несколько раз по сравнению со случаем, а толщина токового слоя увеличивается вдвое.

4. Учет несамосогласованной (внешней постоянной) сдвиговой компоненты, наряду с самосогласованной, не приводит к существенным изменениям структуры токового слоя.

5. Результаты численного моделирования хорошо согласуются с результатами аналитической модели ТТС, в рамках которой показано, что структура токового слоя с самосогласованной магнитной компонентой существенным образом зависит от величины потоковой анизотропии плазмы. Толщина ТТС уменьшается при уменьшении отношения средней тепловой скорости частиц к потоковой.

Анализ зависимости структуры токового слоя от потоковой анизотропии демонстрирует существенное утоньшение слоя при уменьшении отношения тепловой и дрейфовой скоростей плазмы, что обусловлено динамикой квазиadiaбатических ионов. Обсуждаются вопросы применения данной модели к описанию токовых слоев на магнитопаузе и вблизи областей пересоединения.

Исследованы три конфигурации с магнитным широм: глобальный шир и две самосогласованные моды: симметричная и асимметричная. Показано, что в присутствии магнитного сдвига происходит нарушение симметрии процессов отражения/преломления потока ионов, приходящих из источников по разные стороны от токового слоя, причем коэффициенты отражения зависят от величины и знака магнитного поля B_y . Показано, что с ростом шировой компоненты магнитного поля происходят изменения структуры токового слоя, в частности, утолщение профиля плотности тока, его асимметрия относительно нейтральной плоскости, а также

смещение токового слоя как целого от центрального положения. Обсуждается применение модели для сравнения с экспериментальными данными.

Литература

1. Мингалев О.В., И.В. Мингалев, М.Н. Мельник, А.В. Артемьев, Х.В. Малова, В.Ю. Попов, Шен Чао, Л.М. Зелёный, Кинетические модели токовых слоев с широм магнитного поля. // Физика Плазмы, Т. 38, №4, С. 329-344, 2012;

2. Malova, H., V. Yu. Popov, O. V. Mingalev, I. V. Mingalev, M. N. Mel'nik, A. V. Artemyev, A. A. Petrukovich, D. C. Delcourt, C. Shen, and L. M. Zelenyi, Thin current sheets in the presence of a guiding magnetic field in the Earth's magnetosphere, J. Geophys. Res., VOL. 117, A04212, doi:10.1029/2011JA017359, 2012.

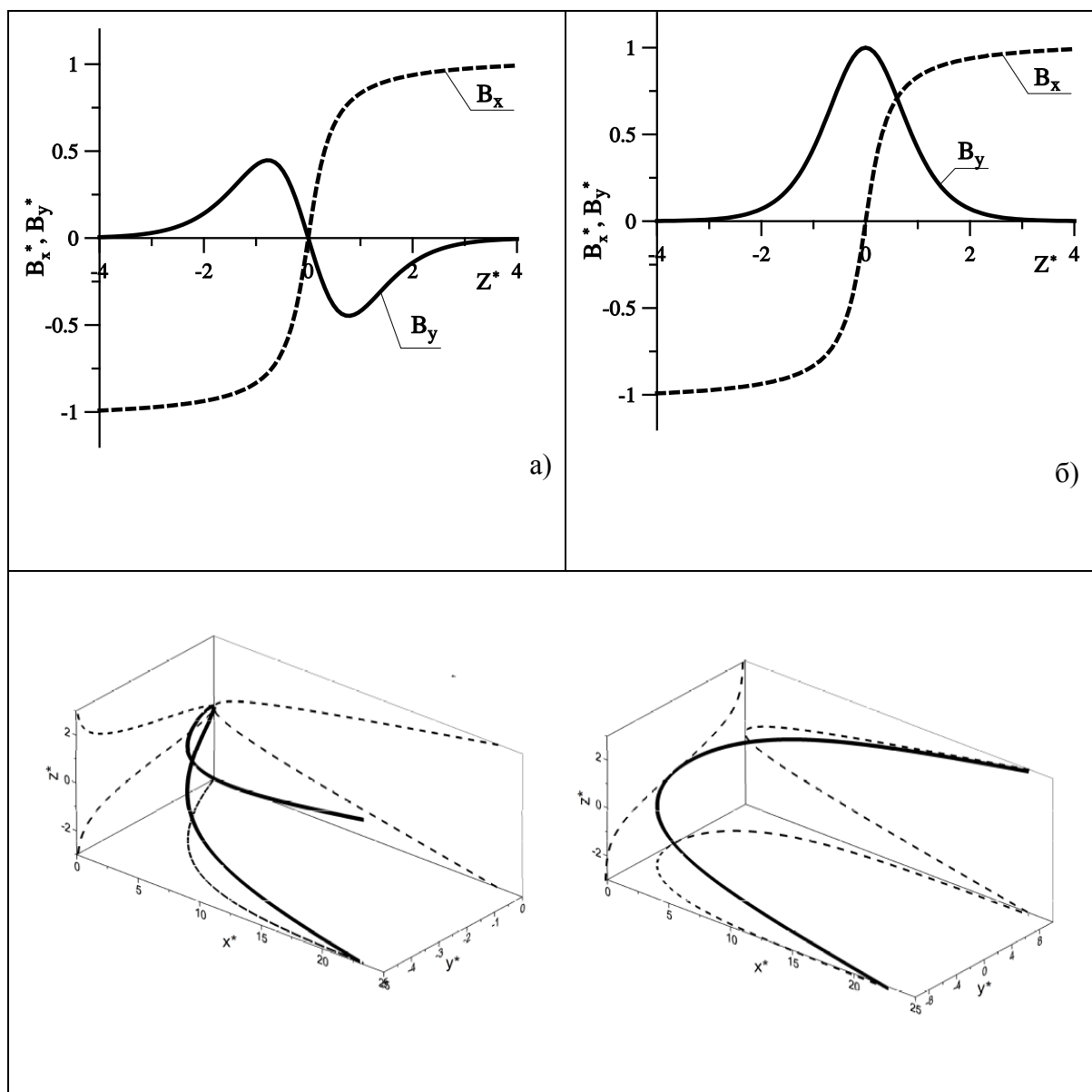


Рис. 1. Геометрия магнитных силовых линий в хвосте магнитосферы Земли. На рисунке (а) вверху изображены профили антисимметричной компоненты (сплошная линия; координаты $\{X^*, Y^*, Z^*\}$ нормированы на ионный ларморовский радиус на границе ТС) и тангенциальной компоненты (пунктирная линия). Нижний рисунок демонстрирует соответствующую форму магнитной силовой линии и ее проекций на координатные плоскости. На рисунке (б) показаны профили по Z симметричной «шировой» (сплошная линия) и тангенциальной (пунктирная линия) компонент магнитного поля и соответствующая им форма магнитной силовой линии.

Применение теории атомарных, WA-систем и R-функций в информационных технологиях

проф. В.Ф. Кравченко

Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН Москва

kvf-ok@mail.ru

Краткий обзорный доклад посвящен применению теории атомарных функций (АФ), WA-систем и R-функций в информационных технологиях. Этот математический аппарат нашел применение в широком классе задач современной радиофизики и техники.

Введение

В 1971 г. В.Л. и В.А. Рвачевыми впервые была предложена конструкция построения материнской функции $ur(x)$ [1,2]. В 1967г. В.Л. Рвачевым была поставлена следующая задача. Если $\varphi(x)$ – финитная дифференцируемая функция, имеющая один участок возрастания и один участок убывания («горб»), то ее производная состоит из «горба» и «ямы». На языке математики это означает: существует ли финитное решение следующего уравнения: $y'(x) = a[y(2x+1) - y(2x-1)]$, в котором для определенности считаем, что носитель $\varphi(x)$ – отрезок $[-1, 1]$. В [1,2] доказаны существование и единственность такого финитного решения с интервалом, равным 1. Развитие своей теории атомарных функций получила в работах [3-26].

В последнее время исследования в области АФ ведутся по следующим научным направлениям:

- *Обобщенные ряды Котельникова на основе АФ $h_a(x)$ и $fir_N(x)$.*
- *Обобщенная N-мерная теорема Уиттекера-Котельникова-Шеннона на основе АФ.*
- *Полиномы Левитана и Стренга-Фикса на основе АФ.*
- *WA–системы функций Кравченко-Рвачева и их применение для обнаружения кратковременных знакопеременных и сверхширокополосных (СШП) физических процессов.*
- *Спектральная обработка СШП сигналов на основе АФ.*
- *Аналитические вейвлеты Кравченко-Котельникова в цифровой обработке сигналов (ЦОС).*
- *Временные весовые функции (окна) Гуляева-Кравченко-Пустовойта в устройствах ЦОС на поверхностных акустических волнах.*
- *Весовые функции Кравченко-Котельникова в спектроскопии цифровых сигналов.*
- *Время-частотные распределение класса Коэна с АФ в нелинейной ЦОС.*
- *АФ и атомарно-фрактальные функции в теории антенн.*
- *Цифровая обработка сигналов в РЛС с синтезированной апертурой.*
- *Ортогональные базисы вейвлетов в цифровой обработке сигналов и изображений.*

- Атомарные функции в теории вероятности и случайных процессов.
- Применение теории R-функций и вейвлетов к решению краевых задач математической физики.
- Многомерная фильтрация.
- Непараметрическая оценка сигналов.
- Гироскопия.
- Радиоспектроскопия.
- Построение весовых функций Кравченко-Котельникова-Гаусса и Кравченко-Котельникова-Левитана-Гаусса.
- Новый класс вейвлетов на основе атомарной функции $h_a(x)$.
- Новый класс аналитических вейвлетов Кравченко-Рвачева в задачах СШП сигналов и процессов.
- Цифровая обработка и спектральное оценивание СШП сигналов с помощью АФ и вейвлетов.
- Весовые функции Кравченко и Кравченко-Рвачева в задачах построения радиолокационных изображений и синтезирования апертуры антенн.
- Атомарные функции в теории вероятности и стохастических процессах.
- Применение теории R-функций и WA-систем функций к решения краевых задач эллиптического типа.
- Радиоастрономия.

Теорема Котельникова и ее обобщение на основе атомарных функций. Известно [6-8], что сигнал $f(t)$, спектр которого $\hat{f}(\omega) = 0$ при $|\omega| > \Omega$, может быть восстановлен по множеству своих отсчетов $f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k\Delta) \operatorname{sinc}\left[\frac{\pi}{\Delta}(t - k\Delta)\right]$, где $0 < \Delta \leq \pi/\Omega$, а $\operatorname{sinc}(t) = \sin(t)/t$. Это разложение сигнала предложил и обосновал с точки зрения передачи информации В.А. Котельников [6]. На основе АФ [6-10] построены обобщенные ряды Котельникова. Сигнал $s(t)$ с ограниченной полосой $\hat{s}(\omega)$ представим в виде

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s(k\Delta) \prod_{j=1}^{\infty} \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{\Delta a^{j-1}}(t - k\Delta)\right).$$

Это выражение, удовлетворяя всем требованиям теоремы Котельникова, обладает лучшей сходимостью [7], особенно при восстановлении локальных во времени и разрывных сигналов. При вычислениях необходимо ограничиться конечным числом членов произведения в правой части (2). В этом случае имеет место точное разложение

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s(k\Delta) \prod_{j=1}^M \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{\Delta a^{j-1}}(t - k\Delta)\right),$$

$$a(1 + a^{-M}) > 2, \quad \Delta = \frac{\pi}{\Omega} \cdot \frac{a(1 + a^{-M}) - 2}{a - 1}.$$

Минимальные значения a могут быть найдены из решения трансцендентного уравнения $a(1 + a^{-M}) = 2$. При $M=1$ следует классический ряд Котельникова.

Функции Кравченко-Левитана. Согласно [7] разложение в ряд Котельникова не является единственно возможной формой представления функций (1). Существует

также представление полиномов Левитана [7], внешний вид которого напоминает разложение в ряд Котельникова

$$S_n(f; z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(z + k\Delta) \operatorname{sinc}^2 \left[\frac{\pi}{\Delta} (z + k\Delta) \right],$$

где $\Delta = \frac{1}{F} = \frac{2\pi}{\Omega}$. В качестве базисных функций фигурируют сдвиги-сжатия ядер Фейера. Обобщенные многочлены Левитана [7] для функций $f(z) \in \mathbf{W}_\sigma^{(r)}$ ($\sigma \geq 0, r = 0, 1, 2, \dots$) $f(x)/|x-i|^{2r+1} \in \mathbf{L}_2(\mathbf{R})$, строятся на основе ядер типа Фейера (Джексона) и имеют вид $S_n^{(r)}(f; z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(z + k\Delta) \operatorname{sinc}^{2r+2} \left[\frac{\pi}{\Delta} (z + k\Delta) \right]$.

Следовательно, весовая функция Кравченко-Левитана запишется так

$$w_{KL}(t) = \prod_{j=1}^M \left(\operatorname{sinc} \left(\frac{\pi}{\Delta 2^{j-1}} t \right) \right)^{2r+2}.$$

Аналитические WA-системы функций Кравченко. Согласно [17,18] выражение для определения аналитической вейвлет-функции Кравченко имеет следующий вид

$$\psi(x) = \frac{1}{b} w(qx) \left\{ \exp(i\eta x) - \frac{1}{q} A \left(\frac{\eta}{q} \right) \right\},$$

где $w(x)$ – атомарная функция, η – параметр

модулирования, b, q – параметры масштабирования, $A(\eta) = \widehat{w}(\eta)$. Для такого комплексного вейвлета строго выполняется условие нулевого среднего. Если взять $w(t) = h_a(t)$, то $A(\eta) = \prod_{k=1}^{\infty} \operatorname{sinc} \left(\frac{\eta}{a^k} \right)$. Тогда $\psi(x) = h_a(x) \left\{ \exp(i\eta x) - \prod_{k=1}^{\infty} \operatorname{sinc} \left(\frac{\eta}{a^k} \right) \right\}$.

При численных экспериментах ограничимся небольшим числом множителей бесконечного произведения. Это следует из быстрой сходимости функции $A_M^*(\eta) = \prod_{k=1}^M \operatorname{sinc} \left(\frac{\eta}{a^k} \right)$, $A(\eta) = \lim_{M \rightarrow \infty} A_M^*(\eta)$. Преимуществом комплексных WA-систем функций Кравченко по сравнению с вейвлетом Морле [18] является точное выполнение условия нулевого среднего для любого значения параметра модулирования, даже в том случае, если он меньше максимальной частоты материнской АФ.

Аналитические двумерные WA-системы функций Кравченко-Рвачева и их физические свойства. Используя теорию R -функций (функций В.Л. Рвачева) [3,4,7,12], можно описывать локусы сложной формы, а также обосновать соотношения, с помощью которых возможно построение аналитических двумерных вейвлетов (2DWA) Кравченко-Рвачева (КР) [18]. Построение 2DWA КР во временном пространстве состоит из нескольких этапов. На первом задается locus опорной области во временном или частотном пространстве. С помощью полной системы R -функций составляется её уравнение [18]. Затем определяется 2D весовая функция $s(x, y)$ и модулируется комплексной экспонентой $\varphi(x, y) = s(x, y) \exp(i(x\eta_1 + y\eta_2))$.

Параметры η_1, η_2 выбираются исходя из требуемых частотных свойств вейвлета.

Атомарные функции в теории вероятностей. АФ успешно применяются в задачах теории вероятности и статистической радиофизике [20]. Здесь введены плотности вероятности (ПВ) и функции распределения, строящиеся на основе семейств АФ $ur(x)$ и $h_a(x)$. Исследован и обоснован на основе АФ кумулянтный анализ построенных распределений (атомарных распределений Кравченко-Рвачева). Проведено сравнение основных характеристик построенных распределений с известными (Гаусса, Коши).

Атомарные функции в задачах теории синтеза антенн, дистанционного зондирования, интерферометрии и радиоастрономии. Монография [11] посвящена приложению АФ к основным задачам теории синтеза антенн. В последнее время он нашел применение в проблемах дистанционного зондирования [22], обработки и восстановлении изображений.

Применение теории R-функций и вейвлетов к решению краевых задач математической физики рассмотрено в [16,26].

Выводы. В докладе показано, что теория АФ, WA-систем и R-функций нашла широкое применение в различных областях современной радиофизики и техники.

ЛИТЕРАТУРА

1. В.Л. Рвачев, В.А. Рвачев // ДАН УССР. Сер. А. 1971. С. 705.
2. В.А. Рвачев // УМН. 1990. Т. 45. Вып. 1 (271). С. 77.
3. В.Л. Рвачев, В.А. Рвачев «Неклассические методы теории приближений в краевых задачах» Киев: Наукова думка. 1979.
4. В.Л. Рвачев «Теория R-функций и некоторые ее приложения» Киев: Наукова думка. 1982.
5. V.F. Kravchenko, V.L. Rvachev, and V.A. Rvachev // J. of Comm. Tech. and Elec. 1995. V. 40(12). P.118.
6. В.А. Котельников «Собрание трудов. Том 1. Радиофизика, информатика, телекоммуникации» М.:Физматлит. 2009.
7. В.Ф. Кравченко «Лекции по теории атомарных функций и некоторым их приложениям» М.: Радиотехника. 2003.
8. В.Ф. Кравченко, В.Л. Рвачев «Алгебра логики, атомарные функции и вейвлеты в физических приложениях» М.: Физматлит. 2006.
9. V.F. Kravchenko, V.L. Rvachev, and V.A. Rvachev // J. of Comm. Tech. and Elec. 1995. V. 40(12). P.118.
10. В.Ф. Кравченко, М.А. Басараб «Булева алгебра и методы аппроксимации в краевых задачах электродинамики» Под. ред. В.Ф. Кравченко. М.: Физматлит, 2004.
11. Е.Г. Зелкин, В.Ф. Кравченко, В.И. Гусевский «Конструктивные методы аппроксимации в теории антенн» М.: Сайнс-Пресс. 2005.
12. «Цифровая обработка сигналов и изображений в радиофизических приложениях» Под ред. В.Ф. Кравченко. М.: Физматлит. 2007.
13. В.К. Волосюк, В.Ф. Кравченко «Статистическая теория радиотехнических систем дистанционного зондирования и радиолокации» Под ред. В.Ф. Кравченко. М.: Физматлит. 2008.
14. V.F. Kravchenko, H.M. Perez-Meana, and V.I. Ponomaryov «Adaptive Digital Processing of Multidimensional Signals with Applications» Moscow, Fizmatlit. 2009.
15. О.В. Лазоренко, Л.Ф. Черногор «Сверхширокополосные сигналы и процессы»

- Харьков: ХНУ им. Каразина. 2009.
16. В.Ф. Кравченко, А.В. Юрин // ЭВ и ЭС. 2009. Т. 14. №3. С. 4.
 17. В.Ф. Кравченко, О.С. Лабунько, А.М. Лерер, Г.П. Синявский «Вычислительные методы в современной радиофизике» Под ред. В.Ф. Кравченко. М.: Физматлит, 2009.
 18. В.Ф. Кравченко, В.И. Пустовойт, Д.В. Чуриков // ДАН РАН. 2011. Т.436. №5. С.615.
 19. В.Ф. Кравченко, В.И. Пустовойт, Д.В. Чуриков // ДАН РАН. 2011. Т.439. №3. С.336.
 20. В.Ф. Кравченко, О.В. Кравченко, А.Р. Сафин // УСР. 2009. №5. С. 23.
 21. В.Ф. Кравченко, В.И. Пустовойт, Д.В. Чуриков // ДАН РАН. 2014. Т.456. №3. С.295.
 22. В.К. Волосюк, В.Ф. Кравченко, В.В. Павликов, В.И. Пустовойт // ДАН РАН. 2014. Т. 456. № 2. С. 162.
 23. А.А. Зеленский и др. // ДАН РАН. 2014. Т. 457. № 2. С. 162.
 24. В.К. Волосюк и др. // РиЭ. 2014. Т. 59. № 2. С. 109.
 25. В.Ф. Кравченко и др. // РиЭ. 2014. Т. 59. № 10. С. 949.
 26. V.F. Kravchenko, A.V. Yurin // Proc. Progress in Electromagnetics Research Symposium, August, Moscow, 18-21 Aug. 2009. Cambridge MA: The Electromagnetics Academy. 2009. P. 1388.

Проекционные методы расчета электромагнитных характеристик композитных материалов со сложной внутренней структурой

А.А. Быков

¹ МГУ им.М.В.Ломоносова, физической факультет, abkov@yandex.ru

Мы представляем комплекс методов, алгоритмов и компьютерных кодов для расчета электромагнитных полей в композитных материалах (КМ) со сложной внутренней структурой. В данной работе мы ограничиваемся изучением полей ТЕ поляризации, $(\vec{E}(\vec{r}, t), \vec{H}(\vec{r}, t)) = e^{-i\omega t} (\vec{E}(\vec{r}), \vec{H}(\vec{r}))$ Мы основываемся на следующих положениях.

1. Единичный объект сложной формы, выполненный из КМ, при внешнем возбуждении электромагнитной волной (ЭМВ) заданной частоты можно охарактеризовать тензорами диэлектрической и магнитной проницаемостей, которые определяются внутренней структурой материала. 2. На границе объектов из разных КМ электромагнитное поле удовлетворяет условиям сопряжения, вывод которых также входит в нашу задачу. То же самое верно для границы КМ и однородного открытого пространства (воздуха, вакуума). 3. Рассматриваемый образец КМ может включать элементарные объекты следующего вида: (а) Области однородного диэлектрика (магнетика) с заданными комплексными параметрами, (б) Тонкопленочные поверхности, выполненные из металла с заданной поверхностной проводимостью, вообще говоря тензорной, (в) Металлические нити с заданной проводимостью, (г) Малые по сравнению с длиной волны металлические включения с заданной комплексной проводимостью. Электрическое поле и плотность линейного (поверхностного) тока на полупроводящих нитях (пленках) удовлетворяют условию $\vec{j} = \sigma \vec{E}$.

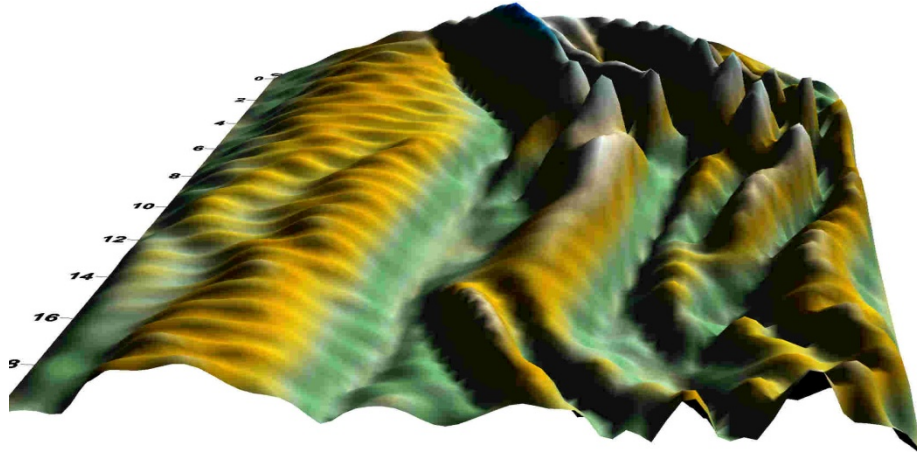


Рис. 1. Поле в материале с несколькими включениями в форме полупроводящих экранов.

4. Мы предполагаем известной совместную статистическую функцию распределения элементарных объектов по всем параметрам, описывающим их конфигурацию. Диэлектрическая и магнитная проницаемости единичного объекта сложной формы, выполненного из КМ с указанными характеристиками, вычисляется усреднением упомянутых параметров по статистическому ансамблю с указанной функцией распределения параметров элементарных объектов. 5. Электродинамическая задача о расчете ЭМП внутри параллелепипеда с заданными включениями указанных типов решается численно с помощью неполного метода Галеркина [1]. Рассмотрим двумерную модель распространения электромагнитных волн (ЭМВ) поляризации ТЕ, $\vec{E} = (0, 0, E_z(x, y))$, $\vec{H} = (H_x(x, y), H_y(x, y), 0)$, в неоднородной среде, в которой присутствуют также полупрозрачные экраны сложной формы. Функция $u(x, y) = E_z(x, y)$ находится из краевой задачи для уравнения Гельмгольца с переменными коэффициентами,

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} + k_0^2 \varepsilon(x, y)u = -f(x, y), \\ L_c u|_{\Gamma_c} = 0, \quad L_d u|_{\Gamma_d} = 0, \quad L_k u|_{\Gamma_k} = f_k(x, y)|_{\Gamma_k}, \end{cases} \quad (1)$$

$$\Gamma_c = \{-\infty < x < +\infty, y = 0\}, \quad \Gamma_d = \{-\infty < x < +\infty, y = b\}, \quad D = \{-\infty < x < +\infty, 0 < y < b\} - \Gamma,$$

$$\Gamma = \Gamma_1 + \dots + \Gamma_K, \quad \Gamma_K = \{x_{ka} < x < x_{kb}, y = \psi_k(x)\}, \quad L_c u|_{\Gamma_k} = \alpha_c u_y - \beta_c u, \quad \alpha_c > 0, \quad \beta_c > 0,$$

$$L_d u|_{\Gamma_k} = \alpha_d u_y + \beta_d u, \quad \alpha_d > 0, \quad \beta_d > 0.$$

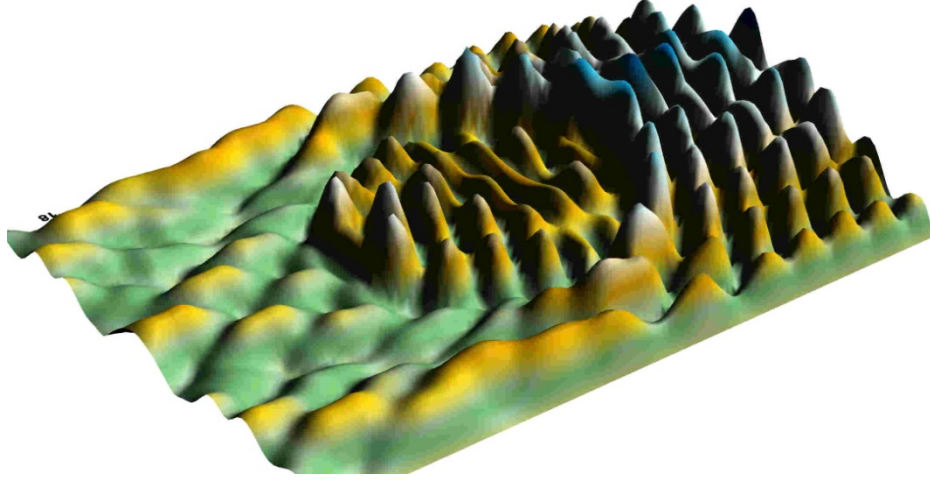


Рис. 2. Карта линий равного уровня $|u(x, y)|$ для задачи рассеяния на замкнутом кольцевом включении из полупроводящего материала.

Плотность стороннего тока $j_z(x, y)|_{\Gamma_k} = f_k(x, y)$ на поверхности Γ_k имеет только z компоненту, причем $j_z(x, y)|_{\Gamma_k} = \sigma_k(x, y)E_z(x, y)|_{\Gamma_k}$. Таким образом, условия на полупрозрачных поверхностях можно записать в виде

$$L_k u|_{\Gamma_k} = f_k(x, y)|_{\Gamma_k}, \quad \text{где} \quad L_k u|_{\Gamma_k} = \left(\left[\frac{\partial u}{\partial n} \right] + \sigma(x, y)u \right) \Big|_{\Gamma_k}, \quad \text{или даже в виде}$$

$\left[\frac{\partial u}{\partial n} \right]_{\Gamma_k} = -\sigma_k u + f_k(x, y)|_{\Gamma_k}$. Например, если $\Gamma_k = \{x = x_k, 0 < y < b\}$, то условия на этой поверхности примут вид $u_x(x_k + 0, y) - u_x(x_k - 0, y) = -\sigma_k u + f_k(y)$, $1 \leq k \leq K$.

Пусть внутри полосы $D = \{-\infty < x < +\infty, 0 < y < b\}$ выделены три области, $D_1 = \{-\infty < x < x_a, 0 < y < b\}$, $D_2 = \{x_a < x < x_b, 0 < y < b\}$, $D_3 = \{x_b < x < +\infty, 0 < y < b\}$, причем $\varepsilon(x, y) = \varepsilon_1(y)$ внутри D_1 и $\varepsilon(x, y) = \varepsilon_3(y)$ внутри D_3 . Условия сопряжения на границе D_1 и D_2 имеют вид $[u]_{x=x_a} = 0$, $[u_x]_{x=x_a} = 0$, на границе D_2 и D_3 имеют вид $[u]_{x=x_b} = 0$, $[u_x]_{x=x_b} = 0$, где $[u]_{x=x_0} = u(x_0 + 0, y) - u(x_0 - 0, y)$.

Пусть $\varphi_n(y)$ и μ_n есть полная ортогональная система собственных функций задачи

$$\begin{cases} Y_{yy} + \mu^2 Y = 0, & 0 < y < b, \\ L_c u|_{y=0} = 0, & L_d u|_{y=b} = 0, \end{cases} \quad \text{и соответствующие собственные значения. Пусть}$$

$$\gamma_n^{(1,3)} = \sqrt{k_0^2 \varepsilon_{1,3} - \mu_n^2}, \quad \text{Re } \gamma_n^{(1,3)} \geq 0, \quad \text{Im } \gamma_n^{(1,3)} \geq 0,$$

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \varphi_n(y) \left(A_n^{(1)} e^{i\gamma_n^{(1)}(x-x_a)} + B_n^{(1)} e^{-i\gamma_n^{(1)}(x-x_a)} \right), \quad x < x_a, \quad (2)$$

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \varphi_n(y) \left(A_n^{(3)} e^{i\gamma_n^{(3)}(x-x_b)} + B_n^{(3)} e^{-i\gamma_n^{(3)}(x-x_b)} \right), \quad x > x_b. \quad (3)$$

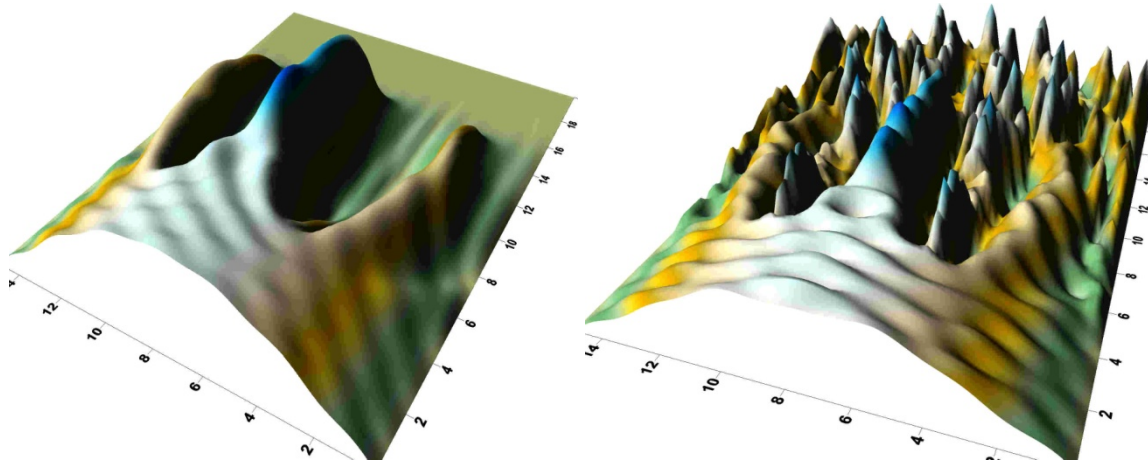


Рис. 3. Моделирование пирамидальных поглощающих элементов в прямоугольной области (а). Для сравнения (б) аналогичная модель без поглощения.

Условия излучения имеют вид $A_n^{(1)} = a_n^{(1)}$, $B_n^{(3)} = b_n^{(3)}$, $1 \leq n < \infty$, причем $a_n^{(1)}$ и $b_n^{(3)}$ заданные константы. Условия (2) и (3) равносильны

$$a_m^{(1)} = (2i\gamma_m^{(1)})^{-1} \int_0^b \varphi_m(y) (i\gamma_m^{(1)}u + u_x) \Big|_{x_a} dy, \quad 1 \leq m < \infty, \quad (4)$$

$$b_m^{(3)} = (2i\gamma_m^{(3)})^{-1} \int_0^b \varphi_m(y) (i\gamma_m^{(3)}u - u_x) \Big|_{x_b} dy, \quad 1 \leq m < \infty. \quad (5)$$

Амплитуды рассеянных волн вычисляются по формулам

$$B_m^{(1)} = (2i\gamma_m^{(1)})^{-1} \int_0^b \varphi_m(y) (i\gamma_m^{(1)}u - u_x) \Big|_{x_a} dy, \quad A_m^{(3)} = (2i\gamma_m^{(3)})^{-1} \int_0^b \varphi_m(y) (i\gamma_m^{(3)}u + u_x) \Big|_{x_b} dy.$$

В соответствии с методикой неполного метода Галеркина [1], наложим семейство условий ортогональности невязки,

$$\int_0^b \varphi_m^*(y) (u_{xx}^{(N)} + u_{yy}^{(N)} + k_0^2 u^{(N)}) dy = - \int_0^b \varphi_m^*(y) f(x, y) dy, \quad (6)$$

$x_a < x < x_b$, $1 \leq m \leq M$. Используя ортогональность базисных функций, получим

$$(i\gamma_m^{(1)}X_m + dX_m/dx) \Big|_{x=x_a} = 2i\gamma_m^{(1)}a_m^{(1)}, \quad (i\gamma_m^{(3)}X_m - dX_m/dx) \Big|_{x=x_b} = 2i\gamma_m^{(3)}a_m^{(3)}, \quad 1 \leq m \leq M.$$

Приближение к точному решению найдем в виде $u^{(N)}(x, y) = \sum_{n=1}^N \varphi_n(y) X_n^{(N)}(x)$. Тогда (6) дает

$$X_m'' - \mu_m^2 X_m + k_0^2 \sum_{n=1}^N \int_0^b \varphi_m^*(x, y) \varphi_n dy X_n = - \int_0^b \varphi_m^*(y) f(x, y) dy,$$

Краевая задача для системы линейных ОДУ примет вид (везде $X = X^{(N)}$):

$$\begin{cases} X_m'' - \mu_m^2 X_m + k_0^2 \sum_{n=1}^N \langle m | \varepsilon | n \rangle X_n = -\langle m | f \rangle, 1 \leq m \leq N, \\ P_a X' - Q_a X(a) = a^{(1)}, P_b X' + Q_b X(b) = b^{(3)}. \end{cases} \quad (7)$$

Вид матриц $P_{a,b}$ и $Q_{a,b}$ вытекает из условий (4) и (5). В этом тексте мы рассмотрим только простейший случай, $\Gamma_k = \{x = x_k, 0 < y < b\}$. Для точного решения $[u]_{x=x_k} = 0$, $[\partial u / \partial n]_{\Gamma_k} = (-\sigma_k u + f_k)_{\Gamma_k}$. Для приближенного решения эти условия примут вид $[X_m]_{x=x_k} = 0$, $[X_m']_{x=x_k} = \sum_{n=1}^N \langle m | \sigma_k | n \rangle X_n(x_k) + \langle m | f_k \rangle$, $1 \leq k \leq K$. (8)

Таким образом, (7) есть многоточечная краевая задача с семейством условий сопряжения в заданных точках, определяющих скачки производных. Методика обоснования НМГ была разработана А.Г.Свешниковым в [1]. Мы распространяем эту методику на случай наличия полупрозрачных экранов и полупроводящих нитей. Поле $u(x, y)$ удовлетворяет энергетическому тождеству

$$\begin{aligned} & \int_{D_2} k_0^2 \varepsilon |u|^2 dx dy - \int_{D_2} (u_x^2 + u_y^2) dx dy + \sum_{k=1}^K \int_{\Gamma_k} (-\sigma_k |u|^2 + u^* f_k) dl \\ & = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(i \gamma_n^{(1)} \left(|A_n^{(1)}|^2 - |B_n^{(1)}|^2 \right) - 2 \gamma_n^{(1)} \operatorname{Im} \left(A_n^{(1)} B_n^{(1)*} \right) \right) \\ & - \sum_{n=1}^{+\infty} \left(i \gamma_n^{(3)} \left(|A_n^{(3)}|^2 - |B_n^{(3)}|^2 \right) - 2 \gamma_n^{(3)} \operatorname{Im} \left(A_n^{(3)} B_n^{(3)*} \right) \right). \end{aligned} \quad (9)$$

Заметим, что $u^{(N)}(x, y)$ удовлетворяет тому же самому энергетическому тождеству. Используя вещественную часть энергетического тождества для точного и приближенного решений, докажем, что верна

Теорема 1. Однородная краевая задача (7) имеет только тривиальное решение, неоднородная краевая задача (7) имеет единственное решение $u^{(N)} \in W_2^1(D_2)$ для всех N , причем $\exists C_1 : \forall N \|u^{(N)}\|_{W_2^1} \leq C_1$, $\exists C_2 : \forall N \|u^{(N)}\|_{L_2} \leq C_2$, $\exists C_3 : \forall N \sum_n \operatorname{Re} \gamma_n^{(1)} |B_n^{(1)}|^2 + \sum_n \operatorname{Re} \gamma_n^{(3)} |A_n^{(3)}|^2 \leq C_3$.

Используя мнимую часть и следуя методике [1], мы докажем, что для случая наличия полупрозрачных экранов верна

Теорема 2. Пусть $W^{(N)} = u^{(N)} - u$. Тогда $|W^{(N)}|_{W_2^1(D_2)} \rightarrow 0$, $|W^{(N)}|_{L_2(\Gamma_a)} \rightarrow 0$, $|W^{(N)}|_{L_2(\Gamma_b)} \rightarrow 0$ при $N \rightarrow +\infty$. Обосновывается также сходимость коэффициентов рассеяния к точным в норме C .

Задача (11) решается численно методом направленной ортогонализации [2]. Мы доказываем, что этот метод устойчив по отношению к погрешностям округления ЭВМ и даем верхнюю границу погрешностей.

ЛИТЕРАТУРА

1. А.Г. Свешников. :ЖВМиМФ. 1963. V. 3. No 1. P. 219.
2. А.А.Быков. : ЖВМиМФ. 1981. V. 19. No 5. P. 1154.

Комплексные волны и резонансное возбуждение волноводов с анизотропным заполнением

А.Л. Делицын¹

¹ МГУ им. М.В. Ломоносова, физический ф-т

delitsyn@mail.ru

Задача о распространении и дифракции электромагнитных волн в волноводах была впервые сведена к внутренней краевой задаче в классических работах А.Г. Свешникова [1-3]. В качестве краевых условий были введены нелокальные краевые условия, подобные условиям третьего рода, названные в данных работах парциальными условиями излучения. Эти краевые условия связывают значения производных поля с ним самим посредством некоторого интегро-дифференциального оператора, который может быть записан аналогично интегральному оператору с неограниченным ядром.

Сведение исходной задачи дифракции в неограниченной области к внутренней краевой задаче оказалось исключительно плодотворным, как с точки зрения исследования математической проблемы разрешимости подобной задачи, так и при построении эффективных численных алгоритмов ее решения. В результате, для полых волноводов со сколь угодно сложной геометрией и локальным заполнением, задача была исчерпывающе решена в [1-3].

В настоящем сообщении рассматриваются вопрос о применении парциальных условий излучения А.Г. Свешникова к волноводам с нелокальным анизотропным заполнением. Формулировка парциальных условий излучения тесно связана с спектральными свойствами регулярных волноводов, входящих в рассматриваемую систему. Для полых волноводов соответствующая спектральная задача сводится к спектральным задачам для оператора Лапласа с краевыми условиями Дирихле и Неймана, т.е. фактически задача является самосопряженной. Это приводит к монотонности дисперсионной кривой, т.е. зависимости спектрального параметра от частоты. Точки пересечения дисперсионной кривой с вещественной осью образуют счетное множество частот отсечки с единственной точкой сгущения на бесконечности. При подобных частотах отсутствует стабилизация решения исходной нестационарной задачи возбуждения волновода, и введение парциальных условий излучения невозможно. На этих частотах возбуждение волновода носит резонансный характер, при этом поле нарастает не линейно, как в ограниченных резонаторах, а как корень от времени.

В волноводах с анизотропным даже постоянным в поперечном направлении заполнением спектральная задача имеет более сложный, несамосопряженный характер. При этом, возможно возникновение новых эффектов. Во-первых, могут возникать комплексные волны, для которых квадрат спектрального параметра является комплексной величиной. Во-вторых, возникают обратные волны, для которых направление фазовой и групповой скорости противоположно [4-6]. Понятие частоты отсечки становится более широким. Помимо точек пересечения дисперсионной кривой

с осью абсцисс частота отсечки может соответствовать переходу комплексной волны в пару распространяющихся волн.

Удается строго доказать, что при подобном переходе всегда возникает как прямая, так и обратная волна. Обратная волна при задании парциальных условий излучения приводит к противоположному знаку в краевом условии, связывающим производную поля и само поле. Переход обратной волны в прямую, как правило, связан с пересечением дисперсионной кривой с вещественной осью.

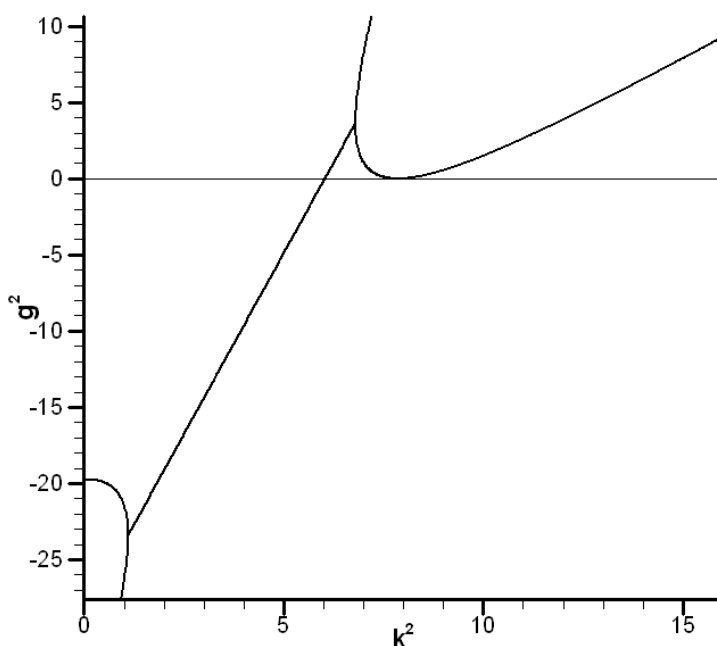


Рис.1. Касание дисперсионной кривой и вещественной оси.

Обратная волна переходит в затухающую, а затухающая в прямую при подобных пересечениях. Оказался возможным такой подбор коэффициентов матрицы анизотропии, что пересечение дисперсионной кривой переходит в ее касание с вещественной осью. Соответствующие две частоты отсечки переходят в одну, а резонанс, соответствующий подобной частоте имеет другой характер. Для подобной частоты поле растет со временем линейно, так же как в резонаторе, что связано с изменением характера особенности дисперсионной кривой.

Работа выполнена при поддержке РФФИ. Проект № 12-01-00479

ЛИТЕРАТУРА

1. А.Г. Свешников // ДАН СССР. 1950. Т. 73. № 5. С. 917.
2. А.Г. Свешников // ДАН СССР. 1951. Т. 80. № 3. С. 345.
3. А.Г. Свешников // ЖВМ и МФ. 1963. Т. 3. № 2. С. 314.

4. А.Н. Боголюбов, А.Л. Делицын, А.Г. Свешников // Докл. РАН. 1999. Т. 369. No С. 458.
5. А.Н. Боголюбов, А.Л. Делицын, А.Г. Свешников // ЖВМ и МФ. 1998. Т. 38. No 11. С. 1891.
6. А.Л. Делицын. // Известия РАН, сер. Мат. 2007. Т. 71 No 3. С. 61.

Сглаженные уравнения гидродинамики в приближении мелкой воды и численное моделирование течений со свободной поверхностью

Т.Г. Елизарова

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН

telizar@mail.ru

В [1,2] был предложен новый численный метод для расчета течений жидкости в приближении модели мелкой воды (МВ), основанный на использовании сглаженных уравнений гидродинамики. При этом исходные уравнения осредняются по малому временному промежутку, что приводит к появлению в них регуляризирующих добавок в виде вторых пространственных производных с малым коэффициентом. Разностные схемы близкой структуры, основанные на использовании квазигазодинамических и квазигидродинамических уравнений, успешно применялись ранее для численного моделирования широкого круга течений газа и жидкости [3-5].

В качестве примера сглаженный уравнений МВ приведем их вид для плоского одномерного течения несжимаемой жидкости:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial j_m}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial hu}{\partial t} + \frac{\partial j_m u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{gh^2}{2} \right) = \left(h - \tau \frac{\partial hu}{\partial x} \right) \cdot \left(f - g \frac{\partial b}{\partial x} \right) + \frac{\partial \Pi}{\partial x},$$

Здесь $j_m = h(u - w)$,

$$w = \frac{\tau}{h} \left(\frac{\partial hu^2}{\partial x} + gh \frac{\partial h}{\partial x} + gh \frac{\partial b}{\partial x} - hf \right),$$

$$\Pi = uh\tau \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} + g \frac{\partial b}{\partial x} - f \right) + \tau gh \left(u \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial u}{\partial x} \right),$$

В данной записи $h(x, t)$ и $u(x, t)$ обозначают глубину жидкости и ее скорость, $b(x)$ – высота профиля дна, f - внешняя сила (сила ветра, сила Кориолиса, сила трения о дно), g - ускорение свободного падения. Символом τ обозначен параметр регуляризации, который имеет размерность времени. В случае $\tau \rightarrow 0$ уравнения с добавочными членами превращаются в классические уравнения МВ. При численных расчетах на сетках с характерным шагом Δx параметр регуляризации вычисляется как $\tau = \alpha \Delta x / \sqrt{gh}$ с коэффициентом $0 < \alpha < 1$.

Для построения конечно-разностного алгоритма сглаженные уравнения МВ аппроксимируются с помощью интегро-интерполяционного метода с использованием центрально-разностных аппроксимаций для всех пространственных производных, включая конвективные слагаемые. Построенный алгоритм обладает свойством хорошей сбалансированности (“well balanced”), то есть сохраняет с высокой точностью

равновесные решения задачи. Алгоритм адаптирован для моделирования задач с подвижной границей затопленной зоны -- так называемых задач с "сухим дном". При этом используется подход, связанный с ведением параметра отсечения ε для глубины жидкости h . В численном алгоритме ставится условие: если $h < \varepsilon$, тогда $u = 0$ и $\tau = 0$; иначе проводится стандартный расчет.

Точность и эффективность алгоритма проверялась на известных одномерных и двумерных задачах, которые включают в себя, в частности, задачи о распаде разрывов над плоской поверхностью и над неровностями дна разнообразной структуры, включая уступы и ступеньки. В этих задачах показана монотонная сходимость разностного решения к эталонным данным. Рассматривались одномерные и двумерные задачи о натекании жидкости на наклонную поверхность, течения в канале сложной формы и течения типа цунами.

Использование сглаженных уравнений МВ впервые позволило провести прямое численное моделирование формирования уединенной волны в кольцевом аэрогидроканале [6]. Данная задача исследовалась на экспериментальной установке в работах Н.К.Шелковникова, Физический факультет МГУ.

Проведены расчеты течений жидкости в грузовой емкости газоведа при его соударении с ледовым препятствием. Для небольших уровней заполнения бака эти расчеты находятся в хорошем согласии с данными, полученными с помощью полных уравнений Навье-Стокса, что требует существенно больших вычислительных затрат по сравнению с моделью МВ. Результирующие данные о нагрузках на стенки бака позволяют оценить предельные значения скоростей судна в различных условиях его плавания [7,8].

В приближении МВ впервые удалось провести прямое численное моделирование возбуждения волн Фарадея в вертикально колеблющемся сосуде.

Алгоритм реализации на неструктурированных сетках [9] и в полярной системе координат [10]. Алгоритм, основанный на сглаженных уравнениях МВ, прост для программирования, эффективен и удобен для распараллеливания, что делает его перспективным для численного моделирования широкого круга практически интересных задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. Т.Г. Елизарова, М.В. Афанасьева Вестник Московского университета, серия 3. Физика. Астрономия, 2010, No 1. С.15.
2. T.G. Elizarova, O.V. Bulatov //Computers & Fluids. 2011. N 46. P. 206.
3. Б.Н. Четверушкин "Кинетические схемы и квазигазодинамическая система уравнений" М.: Макс Пресс, 2004.
4. Т.Г. Елизарова "Квазигазодинамические уравнения и методы расчета вязких течений" М.: Научный мир, 2007.
5. Ю.В. Шеретов "Динамика сплошных сред при пространственно-временном осреднении" Москва-Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2009.
6. Т.Г. Елизарова, М.А. Истомина, Н.К. Шелковников // Математическое моделирование. 2012. т. 24, No 4. С.107.

7. Т.Г. Елизарова, Д.С. Сабурин // Математическое моделирование. 2013. т. 25, No 3, С.75.

8. Т.Г. Елизарова, Д.С. Сабурин // Журнал «Научная визуализация». 2013. т. 5, No 4, С. 118.

9.Т.Г. Елизарова, О.В. Булатов // Препринт ИПМ им. М.В.Келдыша РАН. 2014. No 21. 27 С.

10.Т.Г. Елизарова, М.А. Истомина // Препринт ИПМ им. М.В.Келдыша РАН. 2014. No 65. 24 С.

Топологические инварианты в солнечном динамо

Д.Д. Соколов¹, Е.А. Илларионов²
Физический факультет МГУ

²*Механико-математический факультет МГУ*
sokoloff.dd@gmail.com

Эволюция магнитных полей в космических средах во многом определяется топологическим строением магнитных линий и линий вихря среды. Дело в том, что в пределе исчезающих потерь эти линии не могут пересекаться, так что топологическое строение магнитного поля и поля вихря не меняется в ходе эволюции магнитного поля. При учете омических потерь магнитные линии могут изменять топологическое строение, однако это – очень медленный процесс, вкладом которого в эволюцию магнитного поля во многих случаях можно пренебречь. Простейший инвариант, описывающий топологическое строение магнитных линий был введен еще Гауссом для системы конечного числа циклов, а затем распространен на случай соленоидального векторного поля в работах В.И.Арнольда. Физическая величина, связанная с инвариантом Гаусса, называется спиральностью. Она определяет хорошо известный альфа-эффект, который играет ключевую роль в современной теории динамо.

Разумеется, спиральность далеко не полностью характеризует топологическое строение магнитных линий. В топологии хорошо известны различные инварианты, разнообразным образом обобщающие инвариант Гаусса. На протяжении двух десятилетий обсуждается вопрос о возможной роли этих инвариантов.

Мы подходим к вопросу о роли высших инвариантов с другой точки зрения и выясняем, какие из них действительно можно восстановить по данным астрономических наблюдений. Оказывается, что несколько первых т.н. полиномиальных инвариантов спиральности действительно можно восстановить приблизительно с той же точностью, что и инвариант Гаусса, по данным наблюдений магнитных полей в активных областях Солнца.

Исследование стартовых параметров многоволнового черенковского генератора

В.М. Пикунов

Физический факультет Московского Государственного Университета

им. М.В. Ломоносова

vmrikumov@mail.ru

Вакуумные микроволновые устройства с продольным взаимодействием электронного потока с высокочастотными электромагнитными полями находят широкое применение в гражданской, научно-технической и военной областях, в качестве источников и усилителей микроволн.

Продолжающееся до наших дней совершенствование традиционных и создание новых типов устройств, с продольным взаимодействием, обусловлено потребностью в микроволновых электронных устройствах с улучшенными характеристиками по выходной мощности, коэффициенту полезного действия (КПД), увеличению ширины полосы рабочих частот, стабильности работы, времени жизни устройств и др.

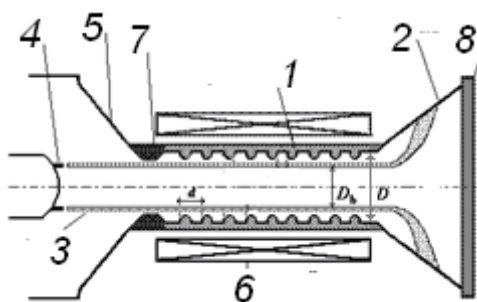


Рис.1. Односекционная модель МВЧГ, используемая при численном моделировании: 1- сверхразмерная $D/\lambda = 4$ замедляющая структура МВЧГ, на основе диафрагм – полупоток на пьедестале; 2 – рупорная антенна (коллектор), 3 – кольцевой сильноточный электронный пучок с током 10 кА и энергией электронов 500 кэВ; 4 – катод, 5 – анод, 6 – катушки магнитной фокусирующей системы, 7 – коллиматор, 8 – выходное окно.

Одним из возможных путей увеличения выходной мощности является использование сильноточных релятивистских электронных пучков и развитых электродинамических структур. В институте сильноточной электроники ИСЭ СО РАН г. Томск, совместно с физическим факультетом МГУ им. М.В.Ломоносова были созданы многоволновые черенковские генераторы (МВЧГ) [1] на основе сверхразмерных диафрагмированных волноводов рис.1.

Запишем самосогласованную систему линейных уравнений [2] для определения стартовых параметров МВЧГ на фиксированной частоте ω :

$[\nabla \times \tilde{\mathbf{H}}] - i\omega \varepsilon_0 \tilde{\mathbf{E}} = \tilde{\mathbf{J}},$ (1)	$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial z} + i \frac{\omega}{v_{0z}} \tilde{\rho} = \frac{\tilde{v}_\rho}{v_{0z}},$ (5)
$[\nabla \times \tilde{\mathbf{E}}] + i\omega \mu_0 \tilde{\mathbf{H}} = 0,$ (2)	$\frac{\partial (r_L \tilde{\theta})}{\partial z} + i \frac{\omega}{v_{0z}} (r_L \tilde{\theta}) = \frac{\tilde{v}_\theta}{v_{0z}},$ (6)
$\frac{\partial \tilde{v}_\rho}{\partial z} + i \frac{\omega}{v_{0z}} \tilde{v}_\rho - \frac{\omega_c}{v_{0z}} \tilde{v}_\theta = -\frac{e_0}{v_{0z} m_0 \gamma_0} \tilde{E}_\rho,$ (3)	$\frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial z} + i \frac{\omega}{v_{0z}} \tilde{v}_z = -\frac{e_0}{v_{0z} m_0 \gamma_0^3} \tilde{E}_z,$ (7)
$\frac{\partial \tilde{v}_\theta}{\partial z} + i \frac{\omega}{v_{0z}} \tilde{v}_\theta + \frac{\omega_c}{v_{0z}} \tilde{v}_\rho = -\frac{e_0}{v_{0z} m_0 \gamma_0} \tilde{E}_\theta,$ (4)	$\frac{\partial \tilde{J}_z}{\partial z} + i \frac{\omega}{v_{0z}} (\tilde{J}_z - n_0 \tilde{v}_z) = 0.$ (8)

Здесь $\tilde{\mathbf{J}} = \{n_0 \tilde{v}_\rho, n_0 \tilde{v}_\theta, n_0 \tilde{v}_z + \tilde{n} v_{0z}\}$ - плотность переменной составляющей конвекционного тока электронного пучка на частоте ω ; v_{0z}, n_0 - постоянные, \tilde{v}, \tilde{n} - переменные составляющие скорости и плотности электронного пучка соответственно.

Первые два уравнения (1), (2) - это уравнения Максвелла; гидродинамические уравнения (3), (4) описывают циклотронные, (5), (6) синхронные волны электронного потока; уравнение (7) учитывает продольное движение электронов; уравнение (8) - линейризованное уравнение сохранения заряда.

Будем искать решение задачи в виде неполных рядов Галеркина [2,3].

Образующая $r_w(z)$ аксиально-симметричной ЗС является кусочно-дифференцируемой функцией, $z \in [z_{in}, z_{out}]$, без угловых точек.

В качестве проекционных функций (на участках непрерывности) используются нормированные векторные базисные функции G_{mp}^{ij} , являющиеся собственными решениям краевых задач Дирихле $j = 1$ и Неймана $j = 2$ оператора Лапласа для круглой мембраны радиуса $r_w(z)$, $i = 1, 2$; $\nu = \overline{1, N_\nu^j}$ - число вариаций по углу $\varphi \in [0, 2\pi]$, $m = \overline{1, N_\nu^j}$ - число вариаций по радиусу $r \in (0, r_w)$, $p = 1, 2$ - электрический $p = 1$ и магнитный $p = 2$ типы поляризации.

Координатные функции, кроме указанных выше основных функций G_{mp}^{ij} , содержат дополнительные базисные функции G_{vp}^{hi} , которые обладают следующими свойствами [2]:

- Они ортогональны в пространстве $L_2(r \in [0, r_w], \varphi \in (0, 2\pi))$ основным функциям.

- Их норма стремится к нулю, при увеличении размера основного базиса Галеркина.

- Коэффициенты разложений по этим функциям определяются из граничных условий на поверхности ЗС.

В точках разрыва образующей $r_w(z)$ используется условие непрерывности потока вектора Пойтинга.

С учетом сделанных предположений представим электромагнитные поля в виде следующих неполных рядов Галеркина:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{E}} &= \mathbf{z}_0 \tilde{E}_z + \sum_{vnp} (W_{vnp}^{21} \mathbf{G}_{vnp}^{21} + W_{vnp}^{32} \mathbf{G}_{vnp}^{32}), \\ \tilde{\mathbf{H}} &= \mathbf{z}_0 \tilde{H}_z + \sum_{vnp} (W_{vnp}^{31} \mathbf{G}_{vnp}^{31} + W_{vnp}^{22} \mathbf{G}_{vnp}^{22}) + \sum_{vp} (W_{vp}^{h1} \mathbf{G}_{vp}^{h1} + W_{vp}^{h2} \mathbf{G}_{vp}^{h2}).\end{aligned}\quad (9)$$

Исходная система дифференциальных уравнений (1-8) в частных производных, с учетом граничных условий во входном и выходном сечениях, сводится к краевой задаче для жесткой линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений (СОДУ), приведенной к виду:

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{W}}{dz} = \mathbf{F} \mathbf{W}, z \in [0, L], z \neq z_{irr}, \\ \mathbf{W}(z_{irr} + 0) = \mathbf{T}^\pm \mathbf{W}(z_{irr} - 0), z = z_{irr}, \\ \mathbf{B}_{in} \mathbf{W} = \mathbf{b}_{in}, z = z_{in}, \\ \mathbf{B}_{out} \mathbf{W} = \mathbf{b}_{out}, z = z_{out}, \end{cases}\quad (10)$$

где: $\mathbf{W}^T = (\mathbf{W}^{21T}, \mathbf{W}^{32T}, \mathbf{W}^{22T}, \mathbf{W}^{31T}, \mathbf{v}_z^T, \mathbf{J}_z^T, \mathbf{v}_\rho^T, \mathbf{v}_\theta^T, \mathbf{p}^T, \mathbf{\theta}^T)$ – вектор амплитуд электронно-электромагнитных волн, длина которого $N_F = N_{EH} + N_{VJ}$ определяется N_{EH} – числом базисных функций электрического и магнитного типа для описания электромагнитных полей и числом компонент N_{VJ} в описании электронного потока неполного метода

Галеркина; $\mathbf{F} = \mathbf{A} + \frac{1}{r_w'} \frac{dr_w}{dz} \mathbf{R} + \left(\frac{dr_w}{dz}\right)^2 \mathbf{R}_1$ – квадратная $N_F \times N_F$ матрица взаимодействия

электронного пучка с электромагнитными полями ЗС, \mathbf{A} – квадратная $N_F \times N_F$ матрица гладкого волновода радиуса r_{w0} ; \mathbf{R}, \mathbf{R}_1 – квадратные $N_F \times N_F$ матрицы волноводных неоднородностей, $\mathbf{b}_{in}, \mathbf{b}_{out}$ – векторы граничных условий на входе ($z = z_{in}$) и выходе ($z = z_{out}$) ЗС, длины N_{in} и N_{out} соответственно; $N_F = N_{in} + N_{out}$; $\mathbf{B}_{in}, \mathbf{B}_{out}$ – прямоугольные матрицы граничных условий, размерностью $N_{in} \times N_F$ и $N_{out} \times N_F$ соответственно; \mathbf{T}^\pm – квадратные $N_F \times N_F$ матрицы трансформации на сочленении двух волноводов. Для нахождения постоянных распространения собственных электронно-электромагнитных волн в периодической ЗС, нагруженной сильноточным релятивистским электронным пучком, используется метод дисперсионного уравнения [2].

При исследовании устройств конечной длины используется метод направленной ортогонализации [4] с полуобращением матричного оператора [2,4].

В качестве критерия начала генерации использовалось величина коэффициента усиления рассматриваемой моды в устройстве, превышающая 40 децибел.

Стартовые частоты генерации, найденные моделированием односекционного МВЧГ с точностью 1-2% совпадают с измерениями частот генерации [5], выполненными в ИСЭ СО РАН. Погрешность измерения частоты с помощью полосового фильтра составляла 2%.

Сравнение стартовых радиусов электронного пучка полученных численно и с помощью измерений [5] лежали в диапазоне 50 – 56 мм и совпадают с точностью до 1 мм.

Измерения проводились для МВЧГ с КПД < 5% и для этого случая выполнены условия линейного приближения, используемые в численной модели устройства.

ЛИТЕРАТУРА

1. С.П. Бугаев и др. Релятивистские многоволновые СВЧ-генераторы. Новосибирск, Наука, СО.1991. 296 с.
2. В.М. Пикунов, И.А.Чернявский. Известия РАН, сер. физическая, 2000, Т. 64, № 12, с. 2482-2490
3. А.Г. Свешников. // ДАН СССР. 1977. Т. 236. № 5. с. 1076–1079.
4. А.А. Быков // ДАН СССР, 1980, т.251, № 5 , с. 1040-1044.
5. М.Р. Deichuly et al. // New York, AIP Conference Proceedings. Vol. 650, 2002, pp. 475-478.

Двойной цикл солнечной активности в двухслойной среде

Н.А. Юхина, Е.П. Попова
¹ МГУ имени М.В. Ломоносова

na.jukhina@physics.msu.ru

Распространение волн магнитной активности Солнца (динамо-волн) связано с процессом динамо [Parker, 1955]. Согласно такой схеме, магнитное поле звезды представимо в виде двух компонент: полоидальной и тороидальной. Тороидальное магнитное поле получается из полоидального под действием дифференциального вращения. Обратный процесс превращения тороидального магнитного поля в полоидальное происходит под действием альфа-эффекта, связанного с нарушением зеркальной симметрии конвекции во вращающемся теле. Простейшая модель описывает волну полоидального и тороидального поля с определенной частотой, которая может зависеть от различных физических характеристик среды, например, от меридиональной циркуляции [Choudhuri et al., 1995; Попова и др., 2008].

В последние десятилетия наблюдателями были обнаружены квазидвухлетние циклы на фоне 22-летних [см., например, Benevolenskaya, 1995]. Для моделирования такого двойного цикла солнечной активности в [Popova and Potemina, 2013] была предложена двухслойная модель динамо, в которой предполагалось, что источники динамо (альфа-эффект и дифференциальное вращение) могут находиться на разной глубине конвективной зоны и действовать с разной интенсивностью. В верхнем слое конвективной зоны движение динамо-волны противоположно меридиональным потокам. Это приводит к торможению распространения тороидального поля и генерации медленных осцилляций. В более глубоких слоях предполагалось, что направления распространения динамо-волны и меридиональных потоков совпадают, в результате чего возникают быстрые осцилляции магнитного поля, соответствующие квазидвухлетним циклам солнечной активности. В [Popova and Potemina, 2013] было показано, что в такой модели режим генерации двух волн, частоты которых отличаются в 11 раз (что соответствует двойному солнечному циклу), не может быть достигнут только с помощью одной меридиональной циркуляции, имеющей разное направление распространения в слоях. Амплитуды альфа-эффекта и дифференциального вращения должны тоже быть разными на разных глубинах.

Целью настоящей работы является исследование влияния толщины слоев на режимы генерации магнитного поля.

Уравнения динамо Паркера [Parker, 1993], описывающие генерацию и поведение магнитного поля Солнца в двухслойной среде, получаются из системы уравнений электродинамики средних полей [Краузе и Рэдлер, 1984] в предположении, что динамо-волна распространяется в тонкой сферической оболочке. В данном приближении мы предполагаем, что генерация магнитного поля происходит независимо в каждом слое. В [Попова и Юхина, 2013] показано, как учитывать меридиональные потоки и толщину слоя в модели динамо. В результате уравнения приобретают вид:

$$\frac{\partial A_i}{\partial t} = R_{\alpha i} \alpha_i B_i + \beta_i \frac{\partial^2 A_i}{\partial \theta^2} - V_i \frac{\partial A_i}{\partial \theta} - \eta_i^2 \beta_i A_i, \quad (1)$$

$$\frac{\partial B_i}{\partial t} = R_{\omega i} \sin \theta \frac{\partial A_i}{\partial \theta} + \beta_i \frac{\partial^2 B_i}{\partial \theta^2} - \frac{\partial(V_i B_i)}{\partial \theta} - \eta_i^2 \beta_i B_i. \quad (2)$$

Здесь B_i - тороидальное магнитное поле, A_i пропорционально тороидальной компоненте векторного потенциала, которая определяет полоидальное магнитное поле ($B_p = -\frac{\partial A}{\partial \theta}$), θ - широта, которая отсчитывается от экватора, t - время, измеряющееся в диффузионных единицах. R_{ai} и $R_{\omega i}$ характеризуют интенсивность α -эффекта и дифференциального вращения соответственно, V_i - меридиональная циркуляция (размерность: один градус за одну диффузионную единицу времени), η_i характеризует толщину слоя, β_i - коэффициент турбулентной диффузии. Индекс i обозначает номер слоя (1 или 2). Предполагается, что происходит алгебраическое подавление спиральности, т. е. $\alpha = \cos \theta / (1 + \xi^2 B^2) \approx \cos \theta (1 - \xi^2 B^2)$. ξ^{-1} величина магнитного поля, при котором происходит существенное подавление α -эффекта. Величину магнитного поля будем измерять в единицах ξ^{-1} , т.е. полагать $\xi^{-1} = 1$. В качестве граничных условий используем условия $A(0) = B(0) = A(\pi) = B(\pi) = 0$. Следуя [Попова и Юхина, 2013], мы рассматриваем меридиональную циркуляцию $V_i = v_i \sin 2\theta$. Чтобы описать растекание к полюсам вещества в верхнем слое и его возвращение в нижнем, мы будем задавать противоположные знаки меридиональной циркуляции в разных слоях. Мы рассматриваем случай, когда динамо-волны генерируются независимо от двух источников, один из которых расположен в глубине конвективной зоны, а другой у поверхности.

Для исследования системы (1-2) мы будем использовать маломодовое приближение, аналогично [Porova and Potemina, 2013] и получим динамическую систему:

$$\begin{aligned} \dot{a}_{i1} = & -a_{i1}(0.5v_i + \beta_i) + 1.5v_i a_{i2} + 0.5R_{ai} b_{i1} - 0.375R_{ai} b_{i1}^3 - 0.75R_{ai} b_{i1} b_{i2}^2 + \\ & + 0.375R_{ai} b_{i1}^2 b_{i3} - 0.375R_{ai} b_{i2}^2 b_{i3} - 0.75R_{ai} b_{i1} b_{i3}^2 - \eta_i^2 \beta_i a_{i1}, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \dot{a}_{i2} = & -0.5v_i a_{i1} - 9\beta_i a_{i2} + 2.5v_i a_{i3} + 0.5R_{ai} b_{i1} + 0.5R_{ai} b_{i2} - 0.375R_{ai} b_{i1}^3 - 0.75R_{ai} b_{i1}^2 b_{i2} - \\ & - 0.375R_{ai} b_{i1} b_{i2}^2 - 0.375R_{ai} b_{i2}^3 + 0.375R_{ai} b_{i1}^2 b_{i3} - 0.75R_{ai} b_{i1} b_{i2} b_{i3} - 0.375R_{ai} b_{i2}^2 b_{i3} - \\ & - 0.75R_{ai} b_{i1} b_{i3}^2 - 0.75R_{ai} b_{i2} b_{i3}^2 - \eta_i^2 \beta_i a_{i2}, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \dot{a}_{i3} = & -1.5v_i a_{i2} - 25\beta_i a_{i3} + 0.125R_{ai} b_{i1}^3 + 0.5R_{ai} b_{i2} + 0.5R_{ai} b_{i3} - 0.75R_{ai} b_{i1}^2 b_{i2} - \\ & - 0.375R_{ai} b_{i1} b_{i2}^2 - 0.375R_{ai} b_{i2}^3 + 0.75R_{ai} b_{i1}^2 b_{i3} - 0.75R_{ai} b_{i1} b_{i2} b_{i3} - 0.75R_{ai} b_{i2}^2 b_{i3} - \\ & - 0.75R_{ai} b_{i2} b_{i3}^2 - 0.375R_{ai} b_{i3}^3 - \eta_i^2 \beta_i a_{i3}, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\dot{b}_{i1} = 0.5(R_{\omega i} a_{i1} - 3R_{\omega i} a_{i2} - 8\beta_i b_{i1} + 2v_i b_{i2}) - \eta_i^2 \beta_i b_{i1}, \quad (6)$$

$$\dot{b}_{i2} = 0.5(R_{\omega i} a_{i2} - 5R_{\omega i} a_{i3} - 32\beta_i b_{i2} + 4v_i (b_{i3} - b_{i1})) - \eta_i^2 \beta_i b_{i2}, \quad (7)$$

$$\dot{b}_{i3} = 0.5(5R_{\omega i} a_{i3} - 72\beta_i b_{i3} - 6v_i b_{i2}) - \eta_i^2 \beta_i b_{i3}. \quad (8)$$

Здесь индекс i обозначает номер слоя (1 или 2). Для определенности будем считать, что $i = 1$ соответствует внешнему слою, а $i = 2$ - внутреннему.

Численный анализ динамической системы (3-8) показал, что двойной цикл с соотношением периодов примерно 1 к 11 реализуется при меридиональной циркуляции, равной по модулю в обоих слоях и имеющей противоположное направление в них, на диапазоне динамо-чисел от -10000 до -6500. В остальных случаях для реализации двойного цикла с соотношением периодов 1 к 11 требуется разные величины модулей меридиональной циркуляции. Если во внешнем слое динамо-число отрицательное, а в глубине положительное (α -эффект может менять знак в глубине конвективной зоны), то возможно существование двух динамо-волн, распространяющихся в противоположных направлениях.

Учет толщины слоев показал, что волны, период которых составляет порядка 22 лет, генерируются во внешнем слое. Во внутреннем слое возможны только быстрые волны. Если динамо-число во внутреннем слое имеет положительный знак, то быстрые волны распространяются к полюсам.

Согласно полученным результатам, если в звезде меридиональные потоки перестроились таким образом, что один из слоев стал слишком тонким, то динамо-число по модулю может становится меньше порогового, и в нем гасится генерация магнитного поля. Таким образом, изменение меридиональных течений с глубиной приводит к подавлению генерации магнитного поля в определенных зонах звезды.

Работа поддержана грантами Российского фонда фундаментальных исследований 12-02-00170, 12-02-00884.

Литература

1. Краузе Ф., Рэдлер К.-Х., Магнитная гидродинамика средних полей и теория динамо // М.: Мир. 1984.
2. Попова Е.П., Решетняк М.Ю., Соколов Д.Д., Меридиональная циркуляция и распространение динамо-волн // *Астрономический журнал*, Т. 85. №1. С. 183-190. 2008.
3. Попова Е.П., Юхина Н.А., Квазидвухлетний цикл солнечной активности и теория динамо // *Письма в Астрономический журнал*, Т. 39. №10. С. 810-816. 2013.
4. Popova H., Potemina K.A., Modeling of the Solar Activity Double Cycle Using Dynamical Systems// *Geomagnetism and Aeronomy*. V. 53. № 8. P. 941-944. 2013.
5. Benevolenskaya E., Double magnetic cycle of the solar activity // *Solar Phys*. V. 161. № 1. P. 1-8. 1995.
6. Choudhuri A. R., Schussler M., and Dikpati M., The solar dynamo with meridional circulation // *Astrophys. J.* V. 303. P. 29-32. 1995.
7. Parker E.N., Hydromagnetic dynamo models // *Astrophys. J.*, V. 122. P. 293–314. 1955.
8. Parker E.N. A solar dynamo surface wave at the interface between convection and nonuniform rotation // *Astrophys. J.* V. 408. № 2. P. 707–719. 1993.

Методы с расщеплением по потенциалу и дискретными ПГУ для численного решения нестационарного уравнения Шрёдингера в неограниченном параллелепипеде

А.А. Злотник

НИУ Высшая школа экономики, г. Москва

azlotnik2007@mail.ru

Уравнение Шрёдингера играет важную роль в квантовой механике и электронике, ядерной, атомной, волновой физике и др. Часто его необходимо решать в неограниченных областях. Для этой цели разработан ряд методов, обычно использующих приближенные прозрачные граничные условия (ПГУ) на искусственных границах, в том числе дискретные ПГУ. Для последних полностью отсутствуют отражения от искусственных границ на практике и разработана строгая математическая теория. В настоящей работе для возможности эффективной реализации двухслойных схем с дискретными ПГУ в многомерном случае предлагается применить расщепление по потенциалу типа Стренга. Это делается единообразно как для схемы 2-го порядка аппроксимации, так и особенно полезных на практике схем повышенного порядка аппроксимации. Даются теоремы о виде дискретных ПГУ для схем с расщеплением и о единственности и равномерной по времени L^2 -устойчивости их решений.

Рассмотрим многомерное нестационарное уравнение Шрёдингера

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m_0} \Delta \psi + V\psi \quad \text{при } x = (x_1, \dots, x_n) \in \Pi_\infty, \quad t > 0, \quad (1)$$

где i – мнимая единица, $\hbar > 0$ и $m_0 > 0$ – постоянные, Δ – n -мерный оператор Лапласа, $n \geq 2$, $\Pi_\infty := (0, \infty) \times (0, X_2) \times \dots \times (0, X_n)$ – полубесконечный параллелепипед. Также $\psi = \psi(x, t)$ – искомая комплекснозначная волновая функция, а $V(x)$ – заданный вещественный потенциал. Пусть $c_\hbar := \hbar^2 / 2m_0$.

Поставим следующие граничные, на бесконечности и начальное условия

$$\psi(\cdot, t)|_{\partial \Pi_\infty} = 0, \quad \|\psi(\cdot, t)\|_{L^2(\Pi)} < \infty \quad \text{при } t > 0, \quad \psi|_{t=0} = \psi^0(x) \quad \text{на } \Pi_\infty, \quad (3)$$

где $\partial \Pi_\infty$ – граница Π_∞ . Предположим также, что $V(x) = V_\infty$, $\psi^0(x) = 0$ при $x \in \Pi_\infty$ и $x_1 \geq X_0$ при некотором (достаточно большом) $X_0 > 0$.

Введем равномерную сетку $\bar{\omega}_{h,\infty}$ на $\bar{\Pi}_\infty$ с узлами $x_j = (j_1 h_1, \dots, j_n h_n)$, где $j_1 \geq 0$, $0 \leq j_2 \leq J_2, \dots, 0 \leq j_n \leq J_n$, и шагами $h_1 = X_1 / J_1, \dots, h_n = X_n / J_n$, где $X_1 > X_0$ и $h_1 \leq X_1 - X_0$. Пусть $\omega_{h,\infty} = \bar{\omega}_{h,\infty} \cap \Pi_\infty$ и $\Gamma_{h,\infty} := \bar{\omega}_{h,\infty} \setminus \omega_{h,\infty}$ – ее внутренняя часть и граница. Здесь и ниже $h = (h_1, \dots, h_n)$, $|h|$ – длина h и $\mathbf{j} = (j_1, \dots, j_n)$. Введем операторы разностных отношений назад $\bar{\partial}_k$ и вперед ∂_k и усреднение по Нумерову $s_{Nk} W_j := (W_{j-1} + 10W_j + W_{j+1}) / 12$ по x_k . Введем равномерную сетку $\bar{\omega}^\tau$ по времени с узлами $t_m = m\tau$, $m \geq 0$ и шагом $\tau > 0$. Пусть $\omega^\tau := \bar{\omega}^\tau \setminus \{0\}$. Введем операторы разностного отношения назад $\bar{\partial}_t$ по t .

Введем n -мерный оператор усреднения по Нумерову $s_N = I + (h_1^2/12)\partial_1\bar{\partial}_1 + \dots + (h_n^2/12)\partial_n\bar{\partial}_n$, расщепленный оператор $\bar{s}_N = s_{N1} \dots s_{Nn}$ и их $n-1$ -мерные варианты $s_{N\hat{k}}$ и $\bar{s}_{N\hat{k}}$ (без $(h_k^2/12)\partial_k\bar{\partial}_k$ и s_{Nk}), а также дискретизации оператора Лапласа – простейшую $\Delta_h = \partial_1\bar{\partial}_1 + \dots + \partial_n\bar{\partial}_n$, типа Нумерова $\Delta_{hN} = s_{N1}\partial_1\bar{\partial}_1 + \dots + s_{Nn}\partial_n\bar{\partial}_n$ и ее модификацию с расщеплением $\bar{\Delta}_{hN} = \bar{s}_{N1}\partial_1\bar{\partial}_1 + \dots + \bar{s}_{Nn}\partial_n\bar{\partial}_n$.

Рассмотрим три трехшаговых симметричных по времени дискретизации уравнения Шрёдингера (1) с расщеплением по потенциалу типа Стренга

$$i\hbar \frac{\check{\Psi}^m - \Psi^{m-1}}{\tau_m/2} = \Delta V \frac{\check{\Psi}^m + \Psi^{m-1}}{2} \text{ на } \omega_{h,\infty}, \quad (3)$$

$$i\hbar s \frac{\check{\Psi}^m - \check{\Psi}^m}{\tau_m} = -c_h \Delta^{(h)} \frac{\check{\Psi}^m + \check{\Psi}^m}{2} + s(\check{V} \frac{\check{\Psi}^m + \check{\Psi}^m}{2}) + F^m \text{ на } \omega_{h,\infty}, \quad (4)$$

$$i\hbar \frac{\Psi^m - \check{\Psi}^m}{\tau_m/2} = \Delta V \frac{\Psi^m + \check{\Psi}^m}{2} \text{ на } \omega_{h,\infty}, \quad (5)$$

с краевыми и начальными условиями

$$\check{\Psi}^m|_{\Gamma_{h,\infty}} = 0, \quad \check{\Psi}^m|_{\Gamma_{h,\infty}} = 0, \quad \Psi^m|_{\Gamma_{h,\infty}} = 0, \quad \Psi^0 = \Psi_h^0 \text{ на } \bar{\omega}_{h,\infty}, \quad (6)$$

при всех $m \geq 1$, где $s = I$ (единичный оператор), s_N , \bar{s}_N и $\Delta^{(h)} = \Delta_h$, Δ_{hN} , $\bar{\Delta}_{hN}$ для дискретизаций A (типа Кранка-Никольсон), B (типа Нумерова-Кранка-Никольсон), C (с расщеплением пространственных операторов) соответственно.

Кроме того, $\Delta V := V - \check{V}$ и вспомогательный одномерный потенциал $\check{V} = \check{V}(x_1)$ таков, что $\check{V}(x_1) = V_\infty$ при $x_1 \geq X_0$ (в частности, $\check{V}(x_1) \equiv V_\infty$). Пусть $\Psi_h^0|_{\Gamma_{h,\infty}} = 0$. Слагаемое F^m добавлено в (4) для более полного изучения устойчивости. Функции $\check{\Psi}$ и $\check{\Psi}$ – вспомогательные неизвестные, а Ψ – основная.

Дискретизация A имеет погрешность аппроксимации 2-го порядка $O(\tau_{\max}^2 + |h|^2)$, а B и C – повышенный порядок $O(\tau_{\max}^2 + |h|^4)$. Однако операторы дискретизации B при $n \geq 3$ не обладают надлежащими спектральными свойствами и поэтому ниже она рассматривается только при $n = 2$, а в дополнение к ней и построена дискретизация C .

Ясно, что уравнения (3) и (5) сводятся к явным формулам

$$\check{\Psi}^m = \mathcal{E}^m \Psi^{m-1}, \quad \Psi^m = \mathcal{E}^m \check{\Psi}^m \text{ с } \mathcal{E}^m := (1 - i \frac{\tau_m \Delta V}{4\hbar}) / (1 + i \frac{\tau_m \Delta V}{4\hbar}). \quad (7)$$

Пусть H_h – гильбертово пространство функций $W: \bar{\omega}_{h,\infty} \rightarrow \mathbb{C}$ таких, что $W|_{\Gamma_{h,\infty}} = 0$, $\square W \square_{H_h}^2 := \sum_{j_1=1}^{\infty} \sum_{j_2=1}^{j_1-1} \dots \sum_{j_n=1}^{j_{n-1}-1} |W_{j_n}|^2 h_1 \dots h_n < \infty$.

Теорема 1. Пусть $F^m, \Psi_h^0 \in H_h$ при всех $m \geq 1$. Тогда существует единственное решение схемы с расщеплением (3)-(6) такое, что $\Psi^m \in H_h$ при всех $m \geq 0$, и для него верна выражающая устойчивость оценка

$$\max_{0 \leq m \leq M} \square \Psi^m \square_{H_h} \leq \square \Psi_h^0 \square_{H_h} + \frac{2c_0}{\hbar} \sum_{m=1}^M \|F^m\|_{H_h} \tau_m \text{ при всех } M \geq 1,$$

где $c_0 = 1,6, (3/2)^n$ для дискретизаций A, B, C соответственно.

При $F = 0$ верен закон сохранения $\square\Psi^m \square_{H_h}^2 \neq \square\Psi_h^0 \square_{H_h}^2$ при всех $m \geq 1$.

Схема (3)-(6) непосредственно не реализуема на практике из-за бесконечности числа неизвестных на каждом слое по времени. Выполним ее сужение на конечную сетку по пространству $\bar{\omega}_h := \{x_j \in \bar{\omega}_{h,\infty}; 0 \leq j_1 \leq J_1\}$. Пусть ω_h и $\partial\omega_h = \bar{\omega}_h \setminus \omega_h$ – внутренняя часть и граница $\bar{\omega}_h$, а $\Gamma_{1h} := \{x_j; j_1 = J_1, 1 \leq j_2 \leq J_2 - 1, \dots, 1 \leq j_n \leq J_n - 1\}$ и $\Gamma_h = \partial\omega_h \setminus \Gamma_{1h}$ – части границы. Пусть также $\tilde{\omega}_h := \omega_h \cup \Gamma_{1h}$, $\omega_{h1} := \{j_1 h_1; 1 \leq j_1 \leq J_1 - 1\}$ и $\omega_{h\hat{1}} := \{(j_2 h_2, \dots, j_n h_n); 1 \leq j_2 \leq J_2 - 1, \dots, j_n \leq J_n - 1\}$.

По определению *дискретное ПГУ* – это такое (нелокальное) граничное условие на Γ_{1h} , которое позволяет выполнить указанное сужение. Чтобы его явно записать, введем

операторы $s_{N1}^- W_j = \frac{1}{12} W_{j-1} + \frac{5}{12} W_j$ (действует по x_1), $s_N^- = s_{N1}^- + \frac{h_2^2}{24} \partial_2 \bar{\partial}_2$, $\bar{s}_{N,\hat{1}k} := \prod_{2 \leq \ell \leq n, \ell \neq k} s_{N\ell}$.

Положим $\Delta_1^{(h)} = \partial_2 \bar{\partial}_2 + \dots + \partial_n \bar{\partial}_n$, $\bar{s}_{N\hat{1}2} \partial_2 \bar{\partial}_2 + \dots + \bar{s}_{N\hat{1}n} \partial_n \bar{\partial}_n$ для дискретизаций A и C соответственно. Введем следующие аппроксимации $c_h \partial / \partial x_1$ на искусственной границе

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{1h}(\tilde{\Psi}, \check{\Psi}) &:= c_h \bar{\partial}_1 \frac{\tilde{\Psi} + \check{\Psi}}{2} - \frac{h_1}{2} \left[i\hbar \frac{\tilde{\Psi} - \check{\Psi}}{\tau} + (c_h \Delta_1^{(h)} - V_\infty I) \frac{\tilde{\Psi} + \check{\Psi}}{2} \right], \\ c_h s_{N2}^- \bar{\partial}_1 \frac{\tilde{\Psi} + \check{\Psi}}{2} - h_1 & \left[i\hbar s_N^- \frac{\tilde{\Psi} - \check{\Psi}}{\tau} + (c_h s_{N1}^- \partial_2 \bar{\partial}_2 - V_\infty s_N^-) \frac{\tilde{\Psi} + \check{\Psi}}{2} \right], \\ c_h \bar{s}_{N\hat{1}} \bar{\partial}_1 \frac{\tilde{\Psi} + \check{\Psi}}{2} - h_1 s_{N\hat{1}}^- & \left[i\hbar \bar{s}_{N\hat{1}} \frac{\tilde{\Psi} - \check{\Psi}}{\tau} + (c_h \Delta_1^{(h)} - V_\infty \bar{s}_{N\hat{1}}) \frac{\tilde{\Psi} + \check{\Psi}}{2} \right] \end{aligned}$$

для дискретизаций A , B , C соответственно.

Введем прямое \mathcal{F}_k и обратное \mathcal{F}_k^{-1} дискретные преобразования Фурье по синусам по x_k , $2 \leq k \leq n$. Пусть $(R * Q)^m := \sum_{p=0}^m R^p Q^{m-p}$ ($m \geq 0$) – дискретная свертка функций $R, Q: \bar{\omega}^\tau \rightarrow \mathbb{C}$.

Теорема 2. Пусть $F^m = 0$ и $\Psi_h^0 = 0$ на $\omega_{h,\infty} \setminus \omega_h$ при всех $m \geq 1$ и $\Psi_h^0|_{j_1=J_1-1} = 0$. Решение схемы (3)-(6) такое, что $\Psi^m \in H_h$ при всех $m \geq 0$, удовлетворяет схеме с расщеплением на конечной сетке, в которой уравнения (3), (5) выполняются на $\omega_h \cup \Gamma_{1h}$, а (6) – на ω_h , с граничными условиями

$$\tilde{\Psi}^m|_{\Gamma_h} = 0, \check{\Psi}^m|_{\Gamma_h} = 0, \Psi^m|_{\Gamma_h} = 0, \mathcal{D}_{1h}(\tilde{\Psi}^m, \check{\Psi}^m) = c_h S_{\text{ref}}^m \tilde{\Psi}_{J_1}^m \text{ на } \Gamma_{1h}, \quad (8)$$

при всех $m \geq 1$ и начальным условием $\Psi^0 = \Psi_h^0$ на $\bar{\omega}_h$; здесь $\tilde{\Psi}_{J_1}^m = \{\tilde{\Psi}^0|_{j_1=J_1}, \dots, \check{\Psi}^m|_{j_1=J_1}\}$ – вектор-функция.

Оператор в правой части дискретного ПГУ (8) имеет вид

$$S_{\text{ref}}^m \Phi^m := \mathcal{F}_2^{-1} \dots \mathcal{F}_n^{-1} \left[\sigma_q R_q * \Phi^q \right]^m \quad (9)$$

для любых $\Phi: \omega_{\hat{h}_1} \times \bar{\omega}^\tau \rightarrow \mathbb{C}$ таких, что $\Phi^0 = 0$, с $\Phi^m := \{\Phi^0, \dots, \Phi^m\}$ и $\Phi^q := (\mathcal{F}_n \dots (\mathcal{F}_2 \Phi)^{(q_2)} \dots)^{(q_n)}$, $\mathbf{q} = (q_2, \dots, q_n)$. Явный вид σ_q и трехчленные рекуррентные формулы для вычисления R_q даны в [1-4].

Пусть для дискретизаций B и C выполнено условие $|\tilde{V}(a) - \tilde{V}(b)| \leq L|b-a|^\alpha$ при всех $0 \leq a < b \leq X_1$, с некоторым $\alpha \in [0, 1]$.

Теорема 3. Пусть $\Psi_h^0|_{j_1=J_1-1, J_1} = 0$. Решение схемы с расщеплением на конечной сетке единственно, если $L\tau h_1^\alpha < 8\hbar$ либо $L\tau h_1^\alpha < 16\hbar$ для дискретизаций B и C соответственно. Для него верна выражающая устойчивость в L^2 оценка

$$\max_{0 \leq m \leq M} \|\Psi^m\|_{\omega_h} \leq \|\Psi^0\|_{\omega_h} + \frac{2c_0}{\hbar} \sum_{m=1}^M \|F^m\|_{\omega_h} \tau \text{ при всех } M \geq 1,$$

где обе нормы являются L^2 -нормами на соответствующих сетках.

Применение оператора $\mathcal{F}_2 \dots \mathcal{F}_n$ к уравнению (4) на ω_h (для краткости при $F = 0$) и дискретному ПГУ (9) приводит к набору независимых одномерных разностных задач Шрёдингера по x_1 для каждой функции $\tilde{\Psi}^{mq}$

$$i\hbar s_{\theta_q,1} \frac{\tilde{\Psi}^{mq} - \check{\Psi}^{mq}}{\tau} = -c_h \partial_1 \bar{\partial}_1 \frac{\tilde{\Psi}^{mq} + \check{\Psi}^{mq}}{2} + s_{\theta_q,1} (\tilde{V}_q \frac{\tilde{\Psi}^{mq} + \check{\Psi}^{mq}}{2}) \text{ на } \omega_{h,1}, \tilde{\Psi}^{mq}|_{j_1=0} = 0,$$

$$\left[c_{h,q} \bar{\partial}_1 \frac{\tilde{\Psi}^{mq} + \check{\Psi}^{mq}}{2} - h_1 s_{\theta_q,1}^- \left(i\hbar \frac{\tilde{\Psi}^{mq} - \check{\Psi}^{mq}}{\tau} - V_{\infty,q} \frac{\tilde{\Psi}^{mq} + \check{\Psi}^{mq}}{2} \right) \right] \Big|_{j_1=J_1} = c_{h,q} (R_q * \tilde{\Psi}_{J_1}^q)^m,$$

где $\tilde{V}_q := \tilde{V} + c_h \Delta V_{\infty,q}$, а операторы $s_{\theta_q,1} W_j = \theta_q W_{j-1} + (1 - 2\theta_q) W_j + \theta_q W_{j+1}$ и $s_{\theta_q,1}^- W_j = \theta_q W_{j-1} + (0.5 - \theta_q) W_j$ действуют по x_1 . При этом $\theta_q = 0, 1/12$ для дискретизаций A, C соответственно (θ_q в случае B см. в [2,3]); формулы для $\Delta V_{\infty,q}$ даны в [1-4]. Это позволяет при известном Ψ^{m-1} построить эффективный прямой алгоритм вычисления Ψ^m . Он использует прогонки по x_1 , быстрые дискретные преобразования Фурье по x_2, \dots, x_n и формулы (7).

Результаты для каждой из дискретизаций A, B, C подробно даны в [1,3,4], см. также [2], причем они легко переносятся на случай задачи типа (1), (2) в бесконечном параллелепипеде (при этом значения $V_{\pm\infty}$ могут различаться). Там же представлены оценки погрешности и результаты расчетов с прямоугольными и гладкими потенциалами (барьерами и ямами).

Работа выполнена при финансовой поддержке программы «Научный фонд НИУ ВШЭ», проект 14-01-0014.

ЛИТЕРАТУРА

1. B. Ducomet, A. Zlotnik, I. Zlotnik // ESAIM: Math. Model. Numer. Anal. 2014. V. 48. № 6. P. 1681-1699.
2. A. Zlotnik et al. // Numer. Math. Adv. Appl. – ENUMATH 2013, A. Abdulle et al., eds. Lecture Notes Comput. Sci. Eng. Berlin, Springer. 2014. V. 103. P. 163-171.
3. A. Zlotnik, A. Romanova // Appl. Numer. Math. 2015, принято к печати.

4. B. Ducomet, A. Zlotnik, A. Romanova // Appl. Math. Comput. 2015, принято к печати.

Регуляризация и Математические Принципы Настройки измерительно-вычислительных систем

Е.Н. Терентьев¹, Н.Е. Терентьев²

¹Физический факультет МГУ

²The University of Queensland, Australia

en.teren@physics.msu.ru, en.teren@mail.ru

Математические Принципы Настройки отображают нерегулярные множества Аппаратных Функций в регулярные множества обратимых АФ. Обратные АФ позволяют получать негладкие решения с максимальной точностью и предельно высоким разрешением. Для метода регуляризации характерна необратимость и низкая точность результата.

Аппаратные Функции появляются в результате расчетов или измерений. Это означает, что мы имеем АФ с определенной точностью, допуском или имеем множество АФ в определенной окрестности. Но известно, что множество АФ обладает свойством нерегулярности в том смысле, что в малой окрестности АФ могут присутствовать как обратимые, так и необратимые АФ. Будем говорить, что множество АФ является регулярным множеством, если это множество состоит только из АФ, которые обратимы. В работе развиваются МПН, отображающие нерегулярные множества АФ в регулярные множества обратимых и обратных АФ по двумерной сетке МПН параметров $N \times \text{DIAP}$: где N – множество длин областей определения и DIAP – ограничение в частотной области.

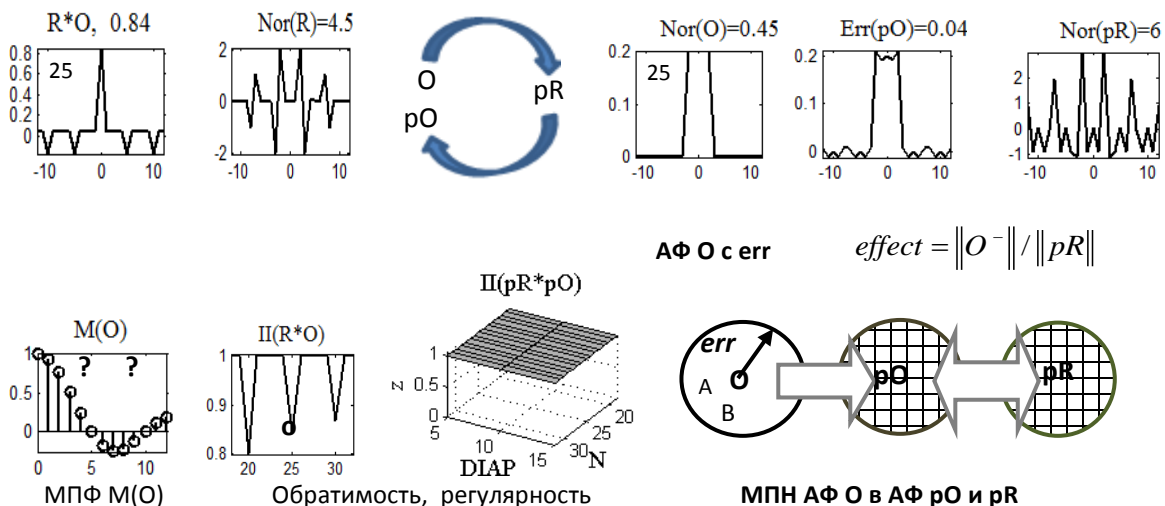
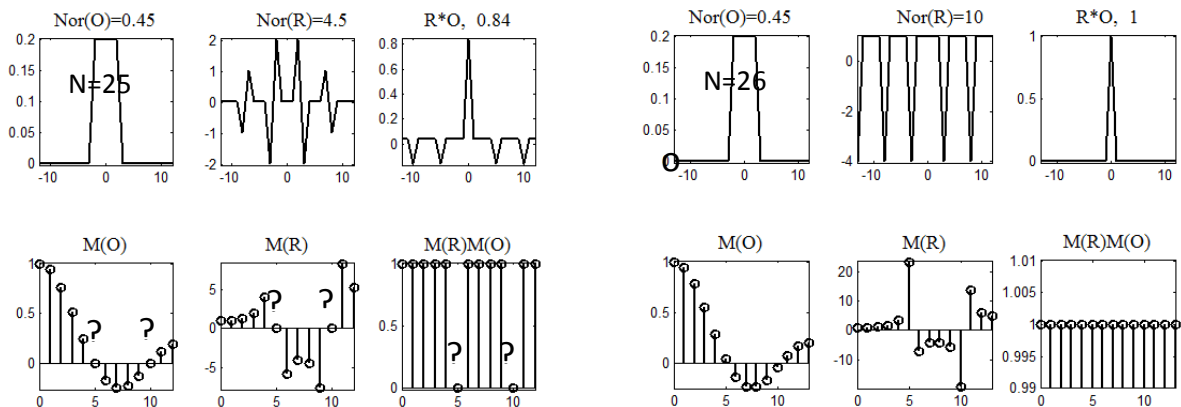


Рис.1. Пример нерегулярного множества АФ O с ошибкой err , регулярных множеств обратимых АФ pO и обратных АФ pR . Одной точке в множестве АФ соответствует АФ функция, как на примерах сверху.

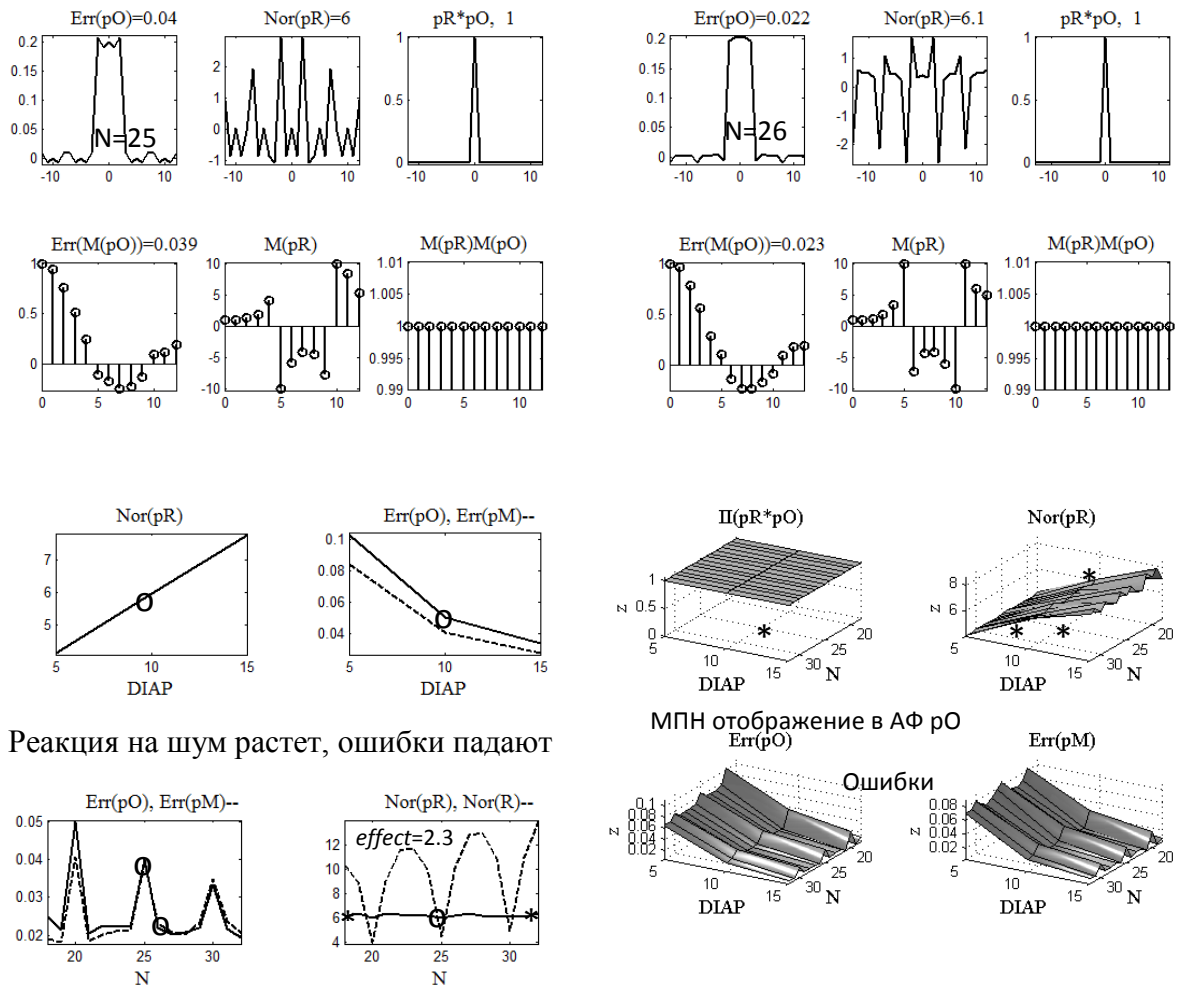
АФ O с областью определения заданной длиной $N=25$ точек является необратимой. Два значения Модуляционной Передаточной Функции (МПФ)[2] попали в окрестность нуля $abs()=e-13$, поэтому разрешенная АФ $R*O(0)$ в нуле имеет значение меньше единица.

Добавление одной точки в область определения АФ O приводит к тому, что эти два значения МПФ выпадают из нуля и АФ обращается. Значения в нуле функции $R*O(0)$ в зависимости от заданных длин N областей определения дают нам функцию, которую будем использовать в качестве индикатора обратимости. Если эта функция равна единице, то обратимость есть, меньше единице – нет. По индикатору обратимости 1D $\Pi(R*O)$ в областях определений с длинами $N=18:32$ видно, что необратимость имеет место три раза. Преобразование МПН в регулярное множество обратимых АФ pO реализуется с точностью $Err(pO)$. Префикс p у функции O означает, что функция pO получилась в результате МПН или препарирования. Множества АФ pO и pR – регулярные, смотри 2D индикатор регулярности $\Pi(pR*pO)=1$ на Рис. 1, 2.

Результаты, полученные обращением с $N=25$ и $N=26$ точек



Результаты, полученные с МПН - ограничение в частотной области - $DIAP=10$



Реакция на шум растет, ошибки падают

Рис. 2. МПН отображения в регулярное pO с определенной реакцией на шум $Nor(pR)$ и соответствующими ошибками $Err(pO)$, $Err(pM)$.

Имеет место эффект уменьшения реакции на шум $effect = \|O^-\| / \|pR\| \geq 1$. Функции pO и pR выбираются из решения основной МПН задачи:

$$\min_{N \times DIAP} \{ \|pR\| : \|pO - O\| \leq \lim err \}, \quad \lim err \leq err. \quad \dots(1)$$

Задача (1) реализует максимальную точность результата [4] на сетке $N \times DIAP$ в пределах $\lim err$ с противоречивыми требованиями: реакция на шум $Nor(pR)$ растет, а ошибка $Err(pO)$ с увеличением $DIAP$ падает, Рис. 2.

МПН и регуляризация

Регуляризованная функция aR строится в частотной области [1-3]. В наших обозначения это $M(aR)$, префикс a у aR взят от параметра $alpha$. Возможно впервые, мы

из $M(aR)$ строим $M(aO)=1/M(aR)$, пространственные aR , aO и убеждаемся, что в наших необратимом и обратимом случаях с $N=25, 26$ свертка $aR*aO$ есть символ Кронекера и в частотной области $M(aR)M(aO)=1$. Решение вариационной задачи с функционалом Тихонова отражено конструкции МПФ $M(aR)$ [1].

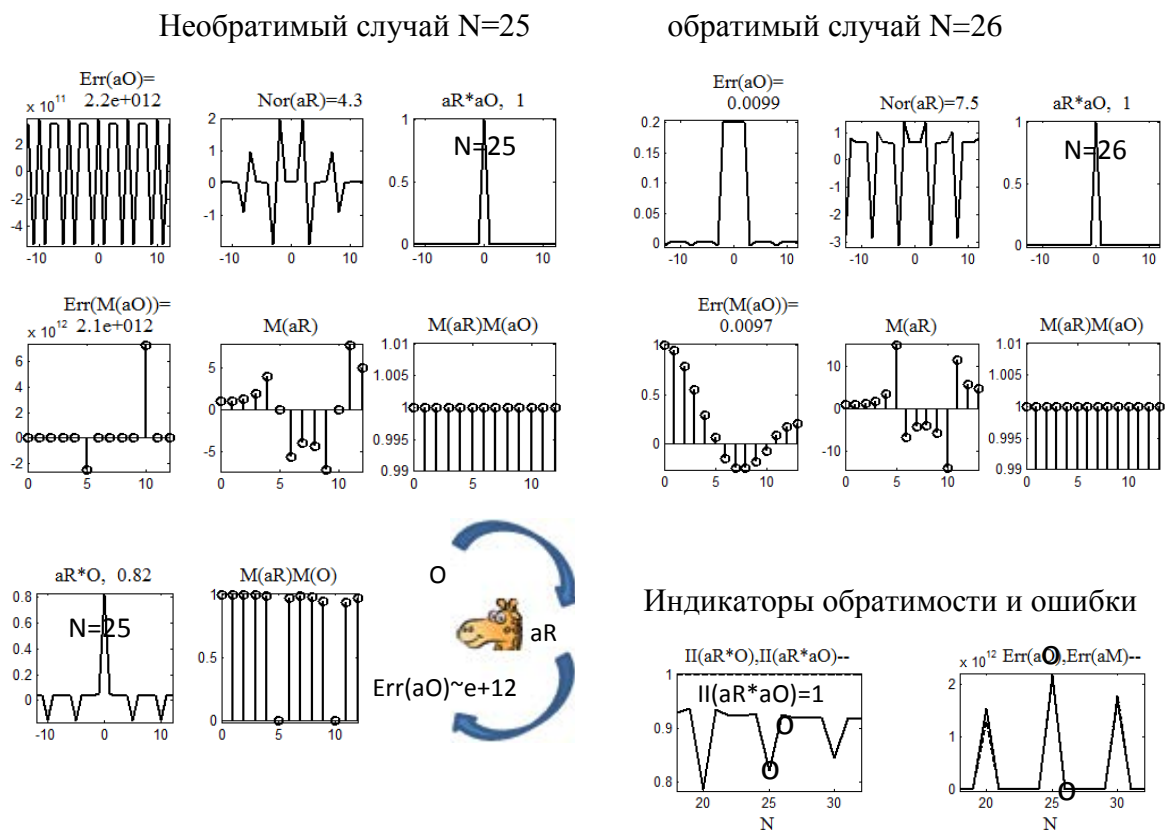


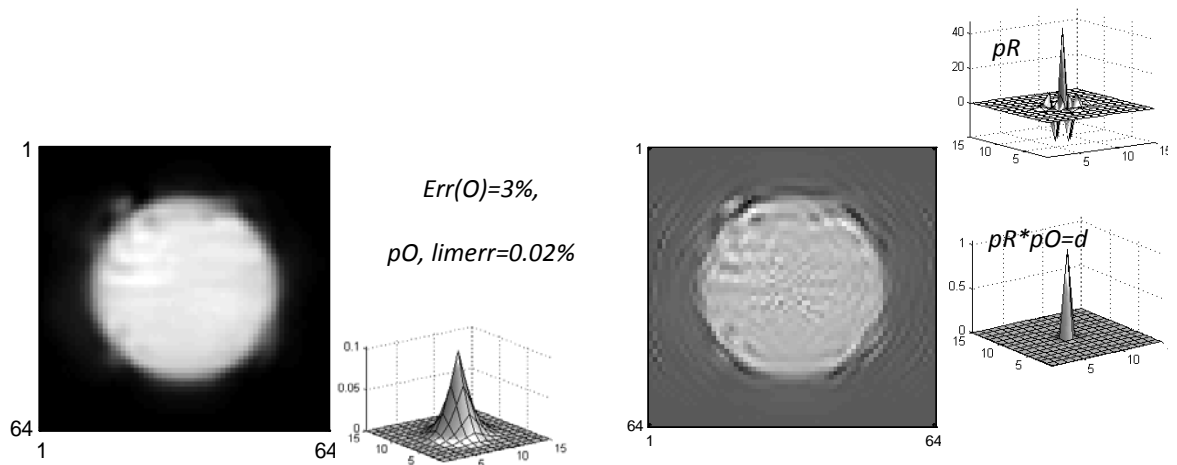
Рис. 3. Результаты, полученные регуляризацией с параметром $\alpha=1.e-3$

Регуляризация и МПН пересекаются. В обратимом случае с $N=26$ информация о гладкости пересчитывается, как и в МПН в деформации в aO и $M(aO)$ с ошибкой менее 1% см. Рис. 2, 3. Но требование гладкости приводит к тому, что теряется обратимость относительно исходной АФ O при $N=18:32$. А знаком Жирафа помечаем три случая с огромной ошибкой порядка $Err(aO)\sim e+12$. В этих случаях $\Pi(aR*aO)=1$, т.е. aR являются обратными к aO , которые в свою очередь далеки от O . В МПН O и pO близки (1).

МПН предельно высокого разрешения в миллиметровом диапазоне

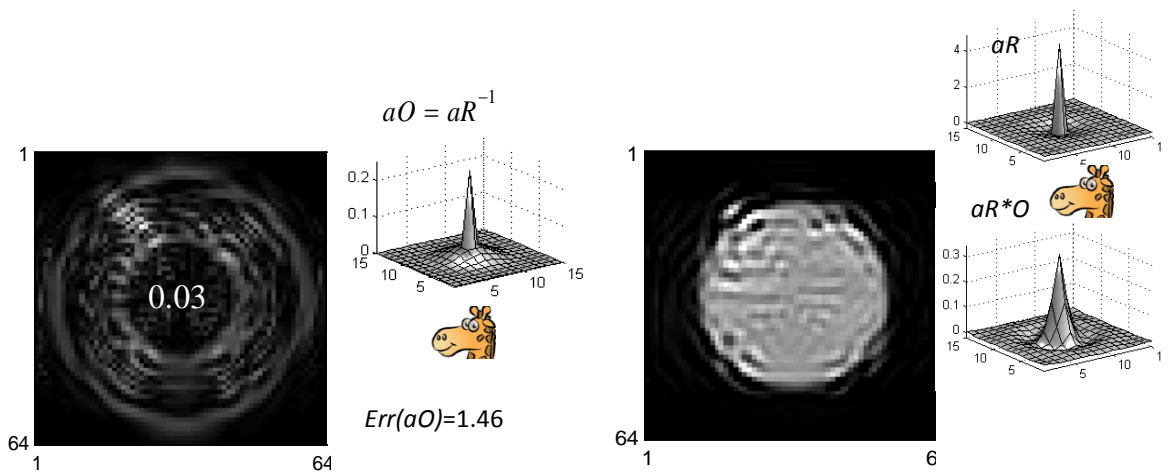
Дано радиоизображение Солнца в 3мм диапазоне длин волн. АФ O (или диаграмма направленности антенны) известна с ошибкой $Err(O)=3\%$. Мы настроили АФ pO , pR в меньших пределах $limerr=0.02\%$ для реализации предельно высокого разрешения с максимальной точностью (1).

Регуляризованному изображению Солнца соответствует АФ $aR * O$ с остаточной ошибкой 0.03, $Err(aO)=1.46$ см. знаки Жирафа Рис. 4.



Радиоизображение Солнца, АФ O и pO

Результат, полученный с МПН



Ошибки метода регуляризации

Результаты регуляризации

Рис. 4. Сравнение МПН и регуляризации

Обсуждение

В ответ на вопрос по сути проблемы “Как понимать решения обратных задач?” мы предлагаем обратные задачи рассматривать на регулярном множестве моделей АФ pO , pR . В МПН нет “априорной гладкости решений” поэтому нет остаточной ошибки.

Метод МПН найдет практические применения и в значительно более сложных случаях, например, с настраиваемыми многолучевыми радарами [5-6].

ЛИТЕРАТУРА

1. А.Н. Тихонов, М.В. Уфимцев “Статистическая обработка результатов эксперимента” изд. Московского университета, 1988.
2. E.N. Terentiev, N.E. Terentiev // Proc. SPIE, Vol. 6246(2006)
3. E.N. Terentiev, F.V. Shugaev et all.// Proc. SPIE Vol.6215, 86-97(2006).
4. Ю.П. Пытьев “Методы математического моделирования измерительно-вычислительных систем”, ФИЗМАТЛИТ, 2012 г.
5. Е.Н. Терентьев, Н.Е. Терентьев // 7-я межд. конф. АКУСТООПТИЧЕСКИЕ И РАДИОЛОКАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ ИЗМЕРЕНИЙ И ОБРАБОТКИ ИНФОРМАЦИИ, 15-17 сен. 2014, Суздаль, Россия, Программа, сс 49-53
6. Е.Н. Терентьев, Н.Е. Терентьев // там же, сс 53-57

Гибридная схема метода дискретных источников для анализа граничных задач нанооптики

И.В. Лопушенко

*Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова,
физический факультет, кафедра математики*

lopushenko.ivan@physics.msu.ru

Во многих практических задачах возникает необходимость рассматривать и изучать частицы, находящиеся на подложке или внедрённые в неё. К таким исследованиям относятся создание оптических антенн, биосенсоров, фотоэлементов для солнечных батарей, исследования в области плазмоники. Для корректного анализа граничных задач в этих областях требуются такие вычислительные методы, которые смогли бы позволить эффективно моделировать рассеяние света наночастицами различных форм и размеров [1]. Так, например, с помощью подобного численного моделирования можно исследовать подложки из различных материалов на наличие дефектов и определять типы этих дефектов. С другой стороны, с помощью этих же методов можно моделировать свойства различных наноструктур на подложке и анализировать рассеяние ими света для корректной интерпретации экспериментальных данных в плазмонике. В настоящей работе представлена математическая модель на основе гибридной схемы метода дискретных источников (МДИ), разработанная для анализа рассеяния световых волн проницаемыми наночастицами небольшой толщины на подложке.

В нашем случае задача дифракции плоской линейно поляризованной волны на локальном объекте в слоистой среде формулируется следующим образом. Пусть задана среда с двумя однородными изотропными слоями $D_{0,1}$, плоскостью границы раздела Σ , и однородной проницаемой частицей D_i с гладкой границей $\partial D_i \subset C^2$ вблизи Σ в верхнем полупространстве D_0 . Будем полагать, что характерный размер частицы a много меньше длины падающей волны $k \cdot a < 1$, где $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число, λ – длина волны. Вводя цилиндрическую систему координат (ρ, ϕ, z) , в которой ось z направлена перпендикулярно границе раздела полупространств $\{\Sigma : z = 0\}$ в D_0 и полагая все необходимые параметры системы, включая показатели преломления сред и

частицы, заданными, запишем математическую постановку задачи рассеяния плоской волны $\{\mathbf{E}^0, \mathbf{H}^0\}$, падающей под углом $\pi - \theta_0$ относительно оси z на частицу D_i :

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H}_\zeta &= jk\varepsilon_\zeta \mathbf{E}_\zeta; & \operatorname{rot} \mathbf{E}_\zeta &= -jk\mu_\zeta \mathbf{H}_\zeta \quad (\text{в } D_\zeta, \zeta = 0,1,i), \\ \mathbf{n}_p \times (\mathbf{E}_i(p) - \mathbf{E}_0(p)) &= 0, & \mathbf{e}_z \times (\mathbf{E}_0(p) - \mathbf{E}_1(p)) &= 0, \\ \mathbf{n}_p \times (\mathbf{H}_i(p) - \mathbf{H}_0(p)) &= 0, & \mathbf{e}_z \times (\mathbf{H}_0(p) - \mathbf{H}_1(p)) &= 0, \end{aligned} \quad p \in \partial D_i; \quad p \in \Sigma; \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} r \cdot \left(\sqrt{\varepsilon_0} \mathbf{E}_0^s \times \frac{\mathbf{r}}{r} - \sqrt{\mu_0} \mathbf{H}_0^s \right) &= 0, \quad r = |M| \rightarrow \infty, \quad z > 0; \\ (|\mathbf{E}_1^s|, |\mathbf{H}_1^s|) &= o(\exp\{-|\operatorname{Im} k_1| r\}), \quad z < 0. \end{aligned}$$

Здесь $\{\mathbf{E}_\zeta, \mathbf{H}_\zeta\}$ – полное поле в соответствующей области D_ζ , $\{\mathbf{E}_\zeta^s, \mathbf{H}_\zeta^s\}$ – рассеянное поле, \mathbf{n}_p – единичная нормаль к поверхности ∂D_i , $k_\zeta = k \cdot \sqrt{\varepsilon_\zeta \mu_\zeta}$, M – некоторая точка соответствующего полупространства D_ζ , $\zeta = 0,1,i$. Временная зависимость выбирается в виде $\exp(j\omega t)$, а параметры сред удовлетворяют соотношениям $\operatorname{Im} \varepsilon_0, \mu_0 = 0$, $\operatorname{Im} \varepsilon_1, \mu_1 < 0$.

Плоская Р-поляризованная волна представляется в следующем виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_\zeta^{P(\pm)} &= (\mp \mathbf{e}_x \cos \theta_\zeta \cos \phi_0 \mp \mathbf{e}_y \cos \theta_\zeta \sin \phi_0 + \mathbf{e}_z \sin \theta_\zeta) \cdot \gamma_\zeta^{(\pm)} \\ \mathbf{H}_\zeta^{P(\pm)} &= \mathbf{e}_x \sin \phi_0 \cdot n_\zeta \cdot \gamma_\zeta^{(\pm)} - \mathbf{e}_y \cos \phi_0 \cdot n_\zeta \cdot \gamma_\zeta^{(\pm)} \\ \gamma_\zeta^{(\pm)} &= \exp\{-jk_\zeta(x \sin \theta_\zeta \cos \phi_0 + y \sin \theta_\zeta \sin \phi_0 \pm z \cos \theta_\zeta)\} \end{aligned} \quad (2)$$

где $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ – базис декартовой системы координат, соответствующей введённой ранее цилиндрической системе (ρ, ϕ, z) , θ_1 – угол, под которым преломлённая волна входит в подложку по закону Снелиуса, ϕ_0 – угол поворота плоскости падения плоской волны, $n_\zeta = \sqrt{\varepsilon_\zeta \mu_\zeta}$ – показатель преломления в соответствующем полупространстве D_ζ , $\zeta = 0,1$. Используя выражения для коэффициентов Френеля

$$R_p = \frac{n_1 \cos \theta_0 - n_0 \cos \theta_1}{n_1 \cos \theta_0 + n_0 \cos \theta_1}; \quad T_p = \frac{2n_0 \cos \theta_0}{n_1 \cos \theta_0 + n_0 \cos \theta_1},$$

можно записать поле внешнего возбуждения во всём пространстве, которое будет удовлетворять условиям сопряжения на границе раздела сред Σ :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_0^{0(P)} &= \mathbf{E}_0^{P(-)} + R_p \cdot \mathbf{E}_0^{P(+)}; \quad \mathbf{H}_0^{0(P)} = \mathbf{H}_0^{P(-)} + R_p \cdot \mathbf{H}_0^{P(+)}; \quad z \geq 0 \\ \mathbf{E}_1^{0(P)} &= T_p \cdot \mathbf{E}_1^{P(-)}; \quad \mathbf{H}_1^{0(P)} = T_p \cdot \mathbf{H}_1^{P(-)}; \quad z < 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Таким образом, рассеянное поле $\{\mathbf{E}_\zeta^s, \mathbf{H}_\zeta^s\}$, $\zeta = 0,1$ соответствует полному полю за вычетом поля внешнего возбуждения (3).

Суть предлагаемой гибридной схемы МДИ заключается в представлении приближённого решения для рассеянного поля вне объекта в виде конечной линейной комбинации полей дипольных дискретных источников (ДИ), распределённых вдоль линии внутри объекта. В случае аксиальной симметрии частицы эти источники располагаются на её оси симметрии. Поля ДИ строятся на основе тензора Грина полупространства [2], который имеет следующий вид:

$$\tilde{\mathbf{G}}^{e,h}(M, M_0) = \begin{bmatrix} G^{e,h} & 0 & 0 \\ 0 & G^{e,h} & 0 \\ \partial g^{e,h}/\partial x_M & \partial g^{e,h}/\partial y_M & G^{h,e} \end{bmatrix}, \quad (4)$$

$$G^{e,h}(M, M_0) = \int_0^\infty J_0(\lambda r) v_{11}^{e,h}(\lambda, z, z_0) \lambda d\lambda; \quad g^{e,h}(M, M_0) = \int_0^\infty J_0(\lambda r) v_{31}^{e,h}(\lambda, z, z_0) \lambda d\lambda$$

Здесь $v_{11}^{e,h}, v_{31}^{e,h}$ – спектральные функции электрического и магнитного типов, которые обеспечивают выполнение условий сопряжения на границе раздела сред Σ :

$$v_{11}^{e,h}(\lambda, z, z_0) = \begin{cases} \frac{\exp\{-\eta_0|z-z_0|\} + A_{11}^{e,h}(\lambda, z_0)\exp\{-\eta_0 z\}}{\eta_0}, & z_0 > 0, z \geq 0, \\ B_{11}^{e,h}(\lambda, z_0)\exp\{\eta_1 z\}, & z_0 > 0, z \leq 0, \end{cases}$$

$$v_{31}^{e,h}(\lambda, z, z_0) = \begin{cases} A_{31}^{e,h}(\lambda, z_0)\exp\{-\eta_0 z\}, & z_0 > 0, z \geq 0, \\ B_{31}^{e,h}(\lambda, z_0)\exp\{\eta_1 z\}, & z_0 > 0, z \leq 0, \end{cases}$$

Выше введены следующие обозначения: $r^2 = \rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\phi - \phi_0)$, (ρ_0, ϕ_0, z_0) – цилиндрические координаты точки источника M_0 , $R_{MM_0}^2 = r^2 + (z - z_0)^2$, $J_0(\cdot)$ – цилиндрическая функция Бесселя. Спектральные коэффициенты A_{nm}, B_{nm} определены в [3] и имеют вид:

$$A_{11}^{e,h}(\lambda, z_0) = \frac{\chi_0^{e,h} - \chi_1^{e,h}}{\chi_0^{e,h} + \chi_1^{e,h}} \cdot \kappa; \quad B_{11}^{e,h}(\lambda, z_0) = \frac{2\chi_0^{e,h}}{\chi_0^{e,h} + \chi_1^{e,h}} \cdot \kappa$$

$$A_{31}^{e,h}(\lambda, z_0) = \frac{2\delta}{(\chi_0^e + \chi_1^e)(\chi_0^h + \chi_1^h)} \cdot \kappa; \quad B_{31}^{e,h}(\lambda, z_0) = \left(\frac{\mu_1}{\mu_0}, \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}\right) \frac{2\delta}{(\chi_0^e + \chi_1^e)(\chi_0^h + \chi_1^h)} \cdot \kappa$$

$$\chi_\zeta^e = \frac{\eta_\zeta}{\mu_\zeta}, \quad \chi_\zeta^h = \frac{\eta_\zeta}{\varepsilon_\zeta}; \quad \delta = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} - \frac{1}{\varepsilon_1 \mu_1}; \quad \eta_\zeta = \sqrt{\lambda^2 - k_\zeta^2}; \quad \kappa = \frac{\exp\{-\eta_0 z_0\}}{\eta_0}$$

Тензор Грина полупространства полностью определяет взаимодействие э/м волны с подложкой. Определённая с его помощью суперпозиция полей ДИ будет иметь вид:

$$\mathbf{E}_N(M) = \sum_{n=1}^N \sum_{\alpha=1}^3 \left\{ p_{\alpha,n} \frac{j}{k\varepsilon_0\mu_0} \nabla \times \nabla \times \left(\sum_{i=1}^3 \tilde{\mathbf{G}}_{\alpha i}^e \mathbf{e}_i \right) + q_{\alpha,n} \frac{1}{\varepsilon_0} \nabla \times \left(\sum_{i=1}^3 \tilde{\mathbf{G}}_{\alpha i}^h \mathbf{e}_i \right) \right\}; \quad (5)$$

$$\mathbf{H}_N(M) = \frac{j}{k\mu_0} \nabla \times \mathbf{E}_N(M); \quad \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_z$$

Здесь компоненты тензора Грина берутся в точках $M(\rho, \phi, z)$, $M_n^0(\rho_n^0, \phi_n^0, z_n^0)$, где координаты M_n^0 соответствуют координатам ДИ, которые используются для представления рассеянного поля в $D_{0,1}$. N – число точек, в которых находятся ДИ, p, q – амплитуды ДИ. Представление для полного поля внутри частицы через поля ДИ записывается аналогично с помощью сферических функций Бесселя вместо компонент тензора Грина. Выбранные таким образом поля (5) аналитически удовлетворяют системе уравнений Максвелла во всём пространстве, условиям на бесконечности и условиям сопряжения на границе раздела сред Σ . Тогда, поскольку поле внешнего возбуждения (2) так же удовлетворяет условиям сопряжения на границе раздела сред,

полное поле во всём пространстве тоже будет обеспечивать выполнение этих условий. Следовательно, для решения поставленной задачи (1) необходимо аппроксимировать условия сопряжения полей на поверхности частицы \mathcal{D}_i :

$$\mathbf{n}_p \times (\mathbf{E}_i - \mathbf{E}_{0,1}^s) = \mathbf{n}_p \times \mathbf{E}_{0,1}^0; \quad \mathbf{n}_p \times (\mathbf{H}_i - \mathbf{H}_{0,1}^s) = \mathbf{n}_p \times \mathbf{H}_{0,1}^0 \quad (6)$$

Для этого используется вычислительный алгоритм, известный как обобщённый метод коллокаций. Известные представления для полного поля внутри частицы $\mathbf{E}_i, \mathbf{H}_i$ и рассеянного поля вне частицы $\mathbf{E}_{0,1}^s, \mathbf{H}_{0,1}^s$, записываются в каждой точке коллокации на поверхности частицы и приравниваются к соответствующему значению поля внешнего возбуждения в этой точке. Таким образом, граничные условия (6) аппроксимируются переопределённой системой линейных уравнений. Неизвестными в полученной системе являются амплитуды ДИ. Решая данную систему методами минимизации невязки в норме l_2 на поверхности частицы, и вычисляя значение поверхностной невязки выполнения граничных условий (6) на другом наборе точек коллокаций, мы получаем искомые значения амплитуд ДИ, а так же апостериорную оценку погрешности результата.

Распределение интенсивности рассеянного поля в зависимости от угла падения плоской волны характеризуется диаграммой рассеяния $\mathbf{F}(\theta, \phi)$, которая в верхнем полупространстве определяется из соотношения:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) / |\mathbf{E}^0(\mathbf{r})| = \frac{\exp\{-jk_0 R\}}{R} \mathbf{F}(\theta, \phi) + O(1/R^2), \quad R \rightarrow \infty, z > 0. \quad (7)$$

Точные выражения для диаграммы рассеяния в рамках МДИ могут быть получены из вида полей ДИ (5) с использованием асимптотических представлений для интегралов Зоммерфельда [4]. Преимуществом такого подхода является представление для компонент $\mathbf{F}(\theta, \phi)$, определённое только через элементарные функции и амплитуды ДИ. Таким образом, среди особенностей предлагаемой гибридной схемы МДИ можно выделить низкие требования к вычислительным операциям, возможность получения апостериорной оценки погрешности и независимость представления рассеянного поля от типа поляризации плоской волны.

Ниже приведены некоторые результаты, полученные при тестировании предложенного метода в среде MATLAB, а так же сравнение с аналогичными результатами, полученными по общей схеме МДИ. Во всех случаях дифференциальное сечение рассеяния (DSC), характеризующее интенсивность рассеяния и равное $DSC(\theta_0, \theta, \phi) = |F_\theta(\theta_0, \theta, \phi)|^2 + |F_\phi(\theta_0, \theta, \phi)|^2$, вычисляется в плоскости падения плоской волны.

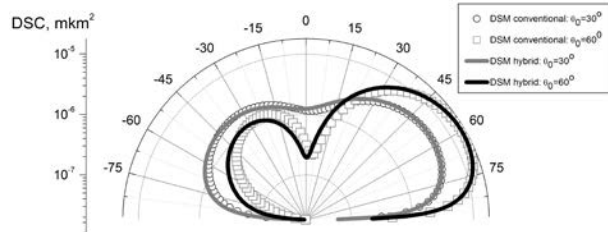


Рис. 1. Сравнение диаграмм рассеяния плоской волны $\lambda=532\text{нм}$ на сфероиде $n_i=1.52$: полуоси $a=20\text{нм}$, $b=200\text{нм}$, подложка $n_1=4.15 - 0.047i$ (Si) при рассеянии под различными $\theta_0, \phi_0=0$

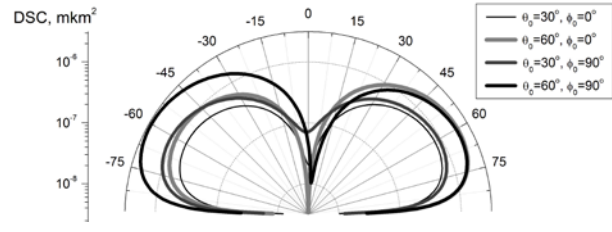


Рис. 2. Диаграммы рассеяния плоской волны $\lambda=532\text{нм}$ на сфероиде $n_i=1.52$: полуоси $a=20\text{нм}$, $b=120\text{нм}$, подложка $n_1=4.15 - 0.047i$ (Si) в различных плоскостях падения

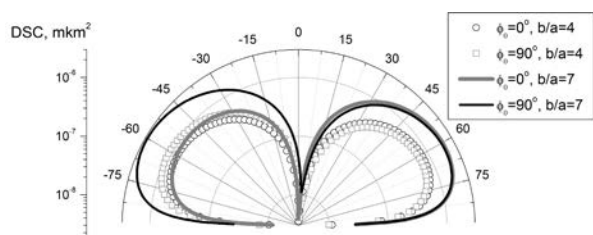


Рис. 3. Диаграммы рассеяния плоской волны $\lambda=532\text{нм}$ на двух сфероидах $n_i=1.52$, $a=20\text{нм}$, $b_1=80\text{нм}$, $b_2=140\text{нм}$, $\theta_0=60^\circ$, $n_1=4.15 - 0.047i$ (Si)

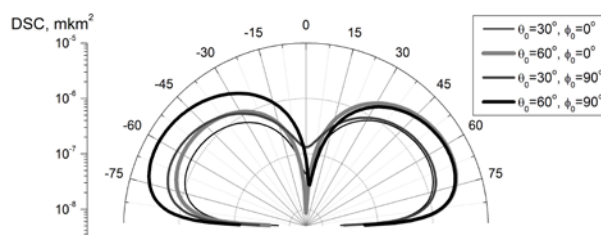


Рис. 4. Диаграммы рассеяния плоской волны $\lambda=532\text{нм}$ на сфероиде $n_i=1.76$: полуоси $a=20\text{нм}$, $b=120\text{нм}$, подложка $n_1=4.15 - 0.047i$ (Si)

ЛИТЕРАТУРА

1. J. Smajic et al. // J. Comput. Theor. Nanosci. 2009. V. 6. No 3. P. 763.
2. Ю.А. Ерёмин, А.Г. Свешников //Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2007. Т. 47. № 2. Стр. 269.
3. В.И. Дмитриев “Поля в слоистых средах” М.: Изд-во МГУ, 1963.
4. Yu.A. Eremin, J.C. Stover, N.V. Orlov // Opt. Eng. 1999. V. 38. No 8. P. 1296.

Математические задачи теории волноведущих систем со сложной границей и заполнением

А.Н. Боголюбов, И.Е. Могилевский

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, физический ф-т
mogilev@phys.msu.ru bogan7@yandex.ru

Важное практическое значение имеет задача о расчете электромагнитного поля в волноведущих системах при наличии ребер на их границах и сложного заполнения. Известно, что наличие входящих ребер на границе волновода и поверхностей разрыва диэлектрической проницаемости внутри волновода приводит к появлению особенностей у электромагнитного поля в окрестности ребра границы или поверхности разрыва [1-3]. В частности, в работе В.А. Ильина [4] показано, что при наличии ребер у волновода в решении для магнитного вектора Герца появляется добавочный член, учитывающий влияние угловой линии. Это существенно усложняет применение численных методов для расчета подобных систем [5]. Одним из способов преодоления этих проблем является выделение особенности решения в явном виде, то есть построение асимптотики электромагнитного поля в окрестности ребра в волноводе [6,7], а также асимптотического представления электромагнитного поля в окрестности ребра поверхности разрыва диэлектрической проницаемости. При этом существенно используются результаты по асимптотике решения эллиптических краевых задач, представленные в работе В.А.Кондратьева [8,9], а также С.А.Назарова и Б.А.Пламеневского [10].

Здесь и далее под словами «асимптотика» или «асимптотическое представление» подразумевается асимптотика «по гладкости», то есть представление решения в виде суммы функции, представляющей собой вид особенности в окрестности угловой точки границы или линии разрыва, и гладкой функции, для которой получены оценки нормы в соответствующем пространстве.

Рассматривается металлический радиоволновод с диэлектрическим заполнением, неоднородным в поперечном сечении. Рассматривается зависимость от времени вида $e^{-i\omega t}$. Волновод представляет собой цилиндр $Q = \{(x, y) \in \Omega, z \in (-\infty, \infty)\}$, боковая поверхность которого является идеально проводящей. Магнитная проницаемость среды, заполняющей волновод, равна $\mu(x, y) \equiv 1$, а диэлектрическая проницаемость $\varepsilon(x, y)$ — кусочно непрерывная скалярная вещественная функция.

При указанных условиях для компонент электромагнитного поля $\mathbf{A} = \{H_x, H_y, E_z\}$ в работе [11] получена следующая математическая постановка задачи в поперечном сечении волновода (для собственных векторов)

$$\begin{aligned} -\text{grad div} H_{\perp} - k^2 \varepsilon H_{\perp} - ik \varepsilon \text{rot} E_z &= -\gamma^2 H_{\perp}, \\ -ik \text{rot} \varepsilon H_{\perp} - \text{div} \varepsilon \text{grad} E_z &= -\gamma^2 \varepsilon E_z, \end{aligned} \quad (1)$$

где $k = \frac{\omega}{c}$ — волновой вектор, γ — спектральный параметр, предполагается, что все функции имеют зависимость от z вида $e^{i\gamma z}$. Граничные условия и условия сопряжения имеют вид

$$\begin{aligned} (\mathbf{H} \cdot \mathbf{n})|_{\partial\Omega} &= 0, & E_z|_{\partial\Omega} &= 0, \\ [(\mathbf{H} \cdot \mathbf{n})]_C &= 0, & [E_z]_C &= 0, (\mathbf{H} \times \mathbf{n})|_C &= 0, \\ [\text{div} H_{\perp}]_C &= 0, & [\varepsilon (\text{grad} E_z + ik (\mathbf{H} \times \mathbf{i}_z)) \cdot \mathbf{n}]_C &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь использованы следующие обозначения: $H_{\perp} = \{H_x, H_y\} = \{H_r, H_{\varphi}\}$, C — линия разрыва диэлектрической проницаемости, \mathbf{n} — вектор нормали к границе области или линии разрыва, γ — постоянная распространения,

$$\begin{aligned} \text{div} H_{\perp} &= \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y}, \text{rot} H_{\perp} = \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}, \\ \text{grad} E_z &= \mathbf{i}_x \frac{\partial E_z}{\partial x} + \mathbf{i}_y \frac{\partial E_z}{\partial y}, \text{rot} E_z = \mathbf{i}_x \frac{\partial E_z}{\partial y} - \mathbf{i}_y \frac{\partial E_z}{\partial x}. \end{aligned} \quad (3)$$

В работе [11] рассмотрен вопрос о поиске слабых решений задачи (1)-(2) в гильбертовом пространстве

$$W = H_0(\text{div}) \oplus \dot{H}^1,$$

где $\|\mathbf{A}\|_W^2 = \|H_{\perp}\|_{H_0(\text{div})}^2 + \|E_z\|_{\dot{H}^1}^2$,

$$H_0(\text{div}) = \left\{ H_{\perp} \mid H_{\perp} \in (L_2(\Omega))^2, \text{div} H_{\perp} \in L_2(\Omega), (H_{\perp} \cdot \mathbf{n})|_{\partial\Omega} = 0 \right\},$$

$$\dot{H}^1(\Omega) = \left\{ \xi \mid \xi \in H^1(\Omega), \xi|_{\partial\Omega} = 0 \right\}, \|H_{\perp}\|_{H_0(\text{div})}^2 = \|H_{\perp}\|_{(L_2(\Omega))^2}^2 + \|\text{div} H_{\perp}\|_{L_2(\Omega)}^2.$$

Для слабой постановки задачи (1)-(2) показано, что данная задача порождает ограниченный оператор $T:(L_2(\Omega))^3 \rightarrow W$ компактный в подпространстве V пространства W , выделяемом дополнительным условием

$$\operatorname{rot} H_{\perp} = -ik\varepsilon E_z, \quad (4)$$

которое понимается в смысле обобщенных функций. Таким образом, спектр задачи (1)-(2), рассматриваемой в указанном пространстве, состоит из счетного множества возрастающих по модулю собственных значений.

Для исследования поведения решения задачи в окрестности ребра границы, следуя работам [8,9], вводится пространство $V_{\gamma}^l(\Omega)$ с нормой

$$\|u\|_{V_{\gamma}^l(\Omega)} = \sum_{j+k \leq l} \int_{\Omega} r^{2(\gamma-l+j)} \left| \frac{\partial^{j+k} u}{\partial r^j \partial \varphi^k} \right|^2 r dr d\varphi,$$

где использована полярная система координат с центром в угловой точке, $l \geq 0$ — целое, γ — любое действительное число. Получено следующее асимптотическое представление решения вблизи ребра границы

$$H_r(r, \varphi) = \chi \sum_{0 < \frac{\pi}{\omega_0} < 2} C_n^{(r)} r^{\frac{\pi}{\omega_0} - 1} \cos \frac{\pi n}{\omega_0} \varphi + \mathfrak{R}_r(r, \varphi),$$

$$H_{\varphi}(r, \varphi) = \chi \sum_{0 < \frac{\pi}{\omega_0} < 2} C_n^{(\varphi)} r^{\frac{\pi}{\omega_0} - 1} \sin \frac{\pi n}{\omega_0} \varphi + \mathfrak{R}_{\varphi}(r, \varphi),$$

$$E_z(r, \varphi) = \chi \sum_{0 < \frac{\pi}{\omega_0} < 2} C_n^{(z)} r^{\frac{\pi}{\omega_0}} \sin \frac{\pi n}{\omega_0} \varphi + \mathfrak{R}_z(r, \varphi),$$

где $\chi(r)$ — срезающая функция, $\vec{\mathfrak{R}} \in (V_0^2(\Omega))^3$.

Для исследования особенности решения в окрестности ребра поверхности разрыва диэлектрической проницаемости вводится пространство U_{γ}^l с нормой

$$\|u\|_{U_{\gamma}^l}^2 = \sum_{j+k \leq l} \left[\int_0^{\omega_0} d\varphi \int_0^{\infty} r^{2(\gamma-l+j)} \left| \frac{\partial^{j+k} u}{\partial r^j \partial \varphi^k} \right|^2 r dr + \int_{\omega_0}^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} r^{2(\gamma-l+j)} \left| \frac{\partial^{j+k} u}{\partial r^j \partial \varphi^k} \right|^2 r dr \right],$$

где $l \geq 0$ — целое, γ — любое действительное число.

Дополнительно предполагается, что диэлектрическая проницаемость кусочно постоянная функция в окрестности ребра поверхности разрыва. Получено следующее представление продольной компоненты электрического поля:

$$E_z(r, \varphi) = \chi \sum_{0 < \nu_k^{(1)} < 1} r^{\nu_k^{(1)}} \left\{ C_k^{(1)} \cos[(\pi - \varphi)\nu_k^{(1)}] + D_k^{(1)} \cos[(\pi - |\omega_0 - \varphi|)\nu_k^{(1)}] \right\} + \\ + \chi \sum_{0 < \nu_k^{(2)} < 1} r^{\nu_k^{(2)}} \left\{ C_k^{(2)} \cos[(\pi - \varphi)\nu_k^{(2)}] + D_k^{(2)} \cos[(\pi - |\omega_0 - \varphi|)\nu_k^{(2)}] \right\} + \mathfrak{R}(r, \varphi),$$

где $\nu_k^{(1)}$ и $\nu_k^{(2)}$ — корни первого и второго уравнений

$$\sin \pi \nu_k - \alpha \sin(\pi \nu_k - \nu_k \omega_0) = 0,$$

$$\sin \pi \nu_k + \alpha \sin(\pi \nu_k - \nu_k \omega_0) = 0,$$

соответственно; $\alpha = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}$, $C_k^{(j)}$, $D_k^{(j)}$ — постоянные, $\mathfrak{R} \in (U_0^2(\Omega))^3$.

Показано, что главную особенность в окрестности ребра разрыва диэлектрической проницаемости имеет именно электрическое поле, продольная компонента поля ограничена в окрестности угловой точки, а ее производная имеет степенную особенность.

Для дискретизации задачи применяется метод конечных элементов. Строится конечномерное приближение W'_h пространства W с использованием сингулярных пробных функций, учитывающих особенность решения вблизи ребра. Доказана сходимость приближенного решения к точному со скоростью порядка h в пространстве W и со скоростью порядка h^2 в пространстве $(L_2(\Omega))^3$. Получена также оценка скорости сходимости собственных значений

$$\left| \lambda - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \lambda_{ih} \right| < Ch^2.$$

На основе построенного асимптотического представления для случая скалярной задачи предложен и реализован алгоритм численного расчета волноведущей системы с входящим ребром. Знание особенности решения в окрестности ребра границы позволяет существенно повысить скорость сходимости.

Работа выполнена при поддержке РФФИ. Проект № 12-01-00479

ЛИТЕРАТУРА

1. А.С. Ильинский, В.В. Кравцов, А.Г. Свешников «Математические модели электродинамики» М.: Высшая школа, 1991.
2. А.Г. Свешников, И.Е. Могилевский «Избранные математические задачи теории дифракции» М.: Физический факультет МГУ, 2012.
3. М.Ш. Бирман, М.З. Соломяк // Успехи мат. наук, 1987, Т.42, вып.6, С.61-76.
4. В.А. Ильин // ДАН СССР, 1954, Т.97, № 2, С.213-216.
5. А.Н. Боголюбов, А.Л. Делицын, И.Е. Могилевский // Вестн. МГУ. Сер. 3. Физ., астрон. 1998. № 5. С.14.

6. А.Н. Боголюбов, А.Л. Делицын, И.Е. Могилевский, А.Г. Свешников // Журнал радиоэлектроники (электронный журнал). <http://jre.cplire.ru>. 2001. 8.

7. А.Н. Боголюбов, А.Л. Делицын, И.Е. Могилевский, А.Г. Свешников // Радиотехника и электроника. 2003. Т.48. 7. С.1-8.

8. В.А. Кондратьев // Труды Московского Математического Общества. Т.16. 1967. С.227-313.

9. В.А. Кондратьев // Дифференц. уравнения. 1977. Т.13. 11. С.2026-2032.

10. С.А. Назаров, Б.А. Пламеневский «Эллиптические задачи в областях с кусочно-гладкой границей» М.: Наука, 1991.

11. А.Л. Делицын // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. 1999. Т.39. 2. С.315-322.

Применение R-функций в задаче моделирования конвекции в мантии Земли

А. Н. Боголюбов, М. И. Светкин

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, физический факультет

bogan7@yandex.ru, mihail-svetkin@mail.ru

Метод R-функций был разработан в 1960-х гг. советским математиком В. Л. Рвачевым для решения обратной задачи аналитической геометрии, заключающейся в том, чтобы по заданной форме области построить уравнение в элементарных функциях, описывающее эту область. Им и его учениками был создан конструктивный аппарат, позволяющий точно описывать достаточно широкий класс различных геометрических объектов. Метод R-функций нашел широкое применение для решения краевых задач, в которых содержится два принципиально разных типа информации: аналитическая (само уравнение и вид граничных условий) и геометрическая (форма области, в которой рассматривается задача). В большинстве прикладных задач форма области слишком сложна, и решение часто невозможно найти аналитически. При использовании численных методов область, в которой решается задача, часто приходится аппроксимировать некоторым многоугольником или многогранником, что приводит к появлению дополнительных погрешностей вычислений. Метод R-функций позволяет избежать этих погрешностей, так как форма области в нем учитывается точно и преобразуется к аналитическому виду, удобному для расчетов. С помощью этого метода можно строить функции, удовлетворяющие заданным граничным условиям, что необходимо для использования методов Галеркина, Ритца и некоторых других.

В данной работе методы R-функций используются для решения задачи конвекции в мантии Земли при наличии плавающего континента. В качестве модели мантии рассматривается двумерная прямоугольная область. Континент представляется в виде другого прямоугольника, частично пересекающегося с мантией (см. рис. 1). На нижней стороне области мантии задается поток тепла. Так как теплопроводность континента выбирается более низкой, мантия под ним начинает прогреваться и возникает восходящий поток. Рассматриваются случаи неподвижного и подвижного континентов. Во втором случае под действием движения мантии за счет вязкого трения континент начинает двигаться, что приводит к изменению структуры конвекционных потоков.

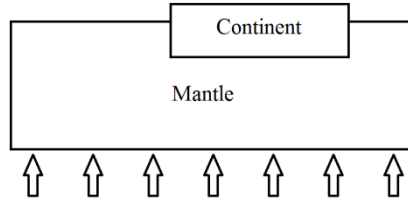


Рис. 1. Модель мантии с плавающим континентом

Мантия моделируется в виде несжимаемой жидкости $\rho = const$. В этом случае состояние системы описывается функциями давления p , температуры T и скорости потоков \vec{V} в мантии, а также температурой T_c , скоростью u_0 и положением x_0 континента. Основная система уравнений для данной задачи имеет вид:

$$\rho \frac{dV_i}{dt} = -\frac{\partial p_i}{\partial x^i} + \frac{\partial S_{ij}}{\partial x^j} + \rho g \delta_{i3} \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^i} (\rho V^i) = 0 \quad (2)$$

$$S_{ij} = \mu \left(\frac{\partial V_i}{\partial x^j} + \frac{\partial V_j}{\partial x^i} \right), \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (3)$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial}{\partial x^i} \left(k \frac{\partial T}{\partial x^i} \right) \quad (4)$$

$$\frac{\partial T_c}{\partial t} + u_0 \frac{\partial T_c}{\partial x} = k_c \Delta T_c \quad (5)$$

$$M \frac{du_0}{dt} = \int_C (-p \delta_{xj} + S_{xj}) n_j df \quad (6)$$

$$\frac{dx_0}{dt} = u_0 \quad (7)$$

где M – масса континента, S_{ij} – тензор вязких напряжений, δ_{ij} – символ Кронекера, \vec{n} – внешняя нормаль к континенту, g – ускорение свободного падения.

Для упрощения системы проведено обезразмеривание величин, после чего были введены векторный потенциал ψ и вектор завихренности w :

$$w = \frac{\partial V_x}{\partial z'} - \frac{\partial V_z}{\partial x'} \quad (8)$$

$$V_x = -\frac{\partial \psi}{\partial z} \quad V_z = \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (9)$$

Исключая давление p из системы, получаем окончательную постановку задачи:

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial z} = \Delta T \quad (10)$$

$$\Delta \psi = -w \quad (11)$$

$$\Delta w = Ra \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \quad (12)$$

$$\frac{\partial T_c}{\partial t} + u_0 \frac{\partial T_c}{\partial x} = k_c \Delta T_c \quad (13)$$

$$M \frac{du_0}{dt} = \int_{1-d}^1 (p|_{x=x_1} - p|_{x=x_0}) dz - \int_{x_0}^{x_0+l} \mu \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} \Big|_{z=1-d} \right) dx \quad (14)$$

$$\frac{dx_0}{dt} = u_0 \quad (15)$$

где Ra – число Релея, l и d – длина и высота континента, соответственно. Данная система должна быть дополнена граничными и начальными условиями. Для потоков скорости ставились условия непротекания сквозь границы области и непроскальзывания относительно континента. Условия постоянной температуры $T=1$ и $T=0$ ставятся на нижней и верхней границе мантии вне континента соответственно, на торцах ставится условие термоизоляции. На границе мантии и континента выбирается условие непрерывности температуры и тепловых потоков. На границе континента вне мантии ставится условие постоянной температуры $T = 0$. В начальный момент времени континент неподвижен и в мантии отсутствуют потоки, а ее температура линейно растет с глубиной от 0 до 1.

Для численного решения задачи была введена равномерная сетка по времени, на каждом слое неизвестные функции разыскивались в виде пучков с неизвестными компонентами:

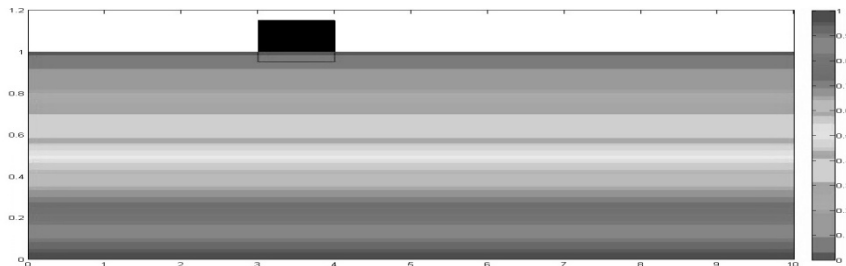
$$T(x, z) = T^1(x, z, x_0) + T^0(x, z, x_0)\Phi_1(x, z) \quad (16)$$

$$\psi(x, z) = \psi^0(x, z, x_0)\Phi_2(x, z) \quad (17)$$

$$w(x, z) = w^0(x, z, x_0)\Phi_3(x, z) \quad (18)$$

$T^1(x, z, x_0)$, $T^0(x, z, x_0)$, $\psi^0(x, z, x_0)$, $w^0(x, z, x_0)$ – функции, построенные с помощью метода R-функций таким образом, чтобы они удовлетворяли заданным граничным условиям (T^1, ψ^0, w^0) и однородным граничным условиям (T^0) данной задачи. Неизвестные компоненты пучков $\Phi_i(x, z)$ ищутся в виде разложения по некоторому базису, граничные условия для них можно сделать более простыми.

Результаты численного эксперимента показаны на рис. 2.



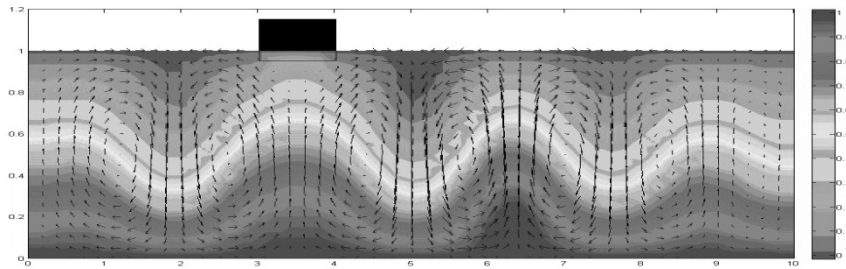


Рис. 2. Состояния системы при $t=0$ и $t=75\tau$.

Таким образом, применение аппарата R-функций для решения рассматриваемой краевой задачи позволяет построить весьма эффективный алгоритм.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Ф. Кравченко, В. Л. Рвачев, «Алгебра логики, атомарные функции и вейвлеты в физических приложениях», Москва, изд. «Физматлит», 2006 г.
2. В. Л. Рвачев, «Теория R-функций и некоторые ее приложения», Киев, изд. «Думка», 1982 г.
3. В. П. Трубицын, В. В. Рыков «Самосогласованная 2-D модель мантийной конвекции с плавающим континентом», Российский журнал наук о Земле, том 1, №1, июль 1998.

Моделирование аксиально-симметричного многоззорного резонатора

Н.А. Боголюбов, А.И. Ерохин, А.В. Шкитин

МГУ им. М.В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики
alshkit@yandex.ru

Введение

В данной работе рассматривается аксиально-симметричный трехззорный резонатор. Резонаторы подобного типа находят широкое применение при конструировании усилительных клистронов с распределённым взаимодействием в миллиметровом и субмиллиметровом диапазоне длин волн[1].

В общем случае аксиальное сечение рассматриваемого резонатора может иметь достаточно сложную форму, поэтому в данной работе для его описания применяется метод R-функций, разработанный Рвачевым В.Л. [2,3]. Данный метод позволяет построить такую числовую функцию, которая равна нулю на границе плоской области достаточно сложной формы[4].

Постановка задачи

Рассмотрим трехззорный цилиндрический резонатор с идеально проводящей поверхностью, поперечное сечение которого изображено на рис.1:

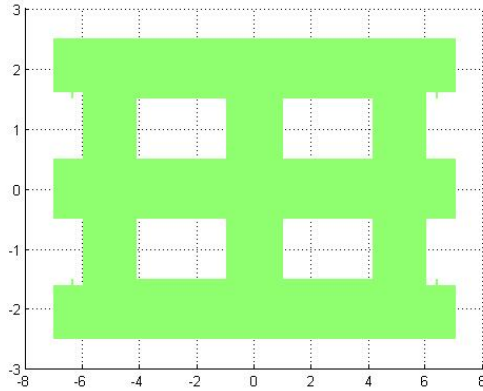


Рис.1 Поперечное сечение трехзорового резонатора

Электромагнитные колебания в рассматриваемом резонаторе описываются системой уравнений Максвелла:

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{H} = -ik\mathbf{E} \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} = ik\mathbf{H} \\ \operatorname{div} \mathbf{H} = 0 \\ \operatorname{div} \mathbf{E} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

где \mathbf{k} – волновой вектор, \mathbf{E} и \mathbf{H} – вектора электрической и магнитной напряженности поля.

На границе резонатора для касательной компоненты поля \mathbf{E} выполняется граничное условие Дирихле:

$$E_{\tau} = 0,$$

где E_{τ} – касательная компонента поля к поверхности резонатора, включая вырезы. Представим поля \mathbf{E} и \mathbf{H} с помощью поляризационного потенциала Π :

$$\mathbf{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \Pi + k^2 \Pi \quad (2)$$

$$\mathbf{H} = -ik \operatorname{rot} \Pi \quad (3)$$

где все компоненты потенциала, кроме направленной вдоль оси z , равны 0[5]. Подставим (2)-(3) в (1). Проведя элементарные преобразования, получим уравнение Гельмгольца с граничными условиями Дирихле:

$$\Delta \Pi + k^2 \Pi = 0 \quad (4)$$

$$\Pi|_{\partial D} = 0 \quad (5)$$

Представим z -компоненту Π в следующем виде:

$$\Pi = u(r, z)\psi(\phi) \quad (6)$$

Подставим (6) в (4) и (5) и разделим переменные:

$$\frac{r}{u} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{r^2}{u} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + k^2 r^2 = -\frac{1}{\psi} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} = \lambda \quad (7)$$

Для функции $u(r, z)$ получим уравнение:

$$\begin{cases} r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) + r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + r^2 k^2 u = \lambda u \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \quad (10)$$

где λ ищется из уравнения для функции $\psi(\phi)$.

Проведем преобразование, аналогичное [6]. Получим:

$$\int_{\Omega} r(\nabla u, \nabla v) d\sigma - \lambda \int_{\Omega} \frac{uv}{r} d\sigma - k^2 \int_{\Omega} ruv d\sigma \quad (11)$$

Численная реализация

Решение задачи представим в виде:

$$u = U\omega, \quad (12)$$

где ω – R-функция Рвачева, (см. рис. 2):

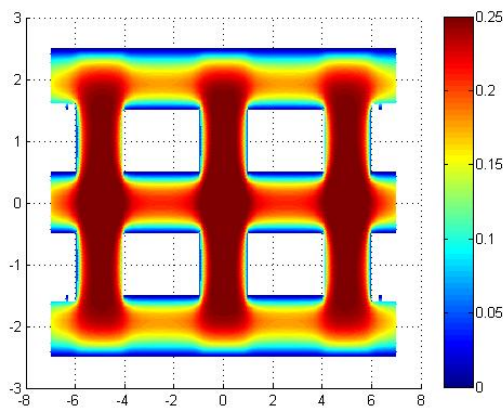


Рис.2. $\omega(r, z)$ – R-функция, описывающая структуру резонатора

Для поиска функции U будем использовать метод Галеркина. В качестве базисных функций выберем полную систему f_i сдвигов и сжатий атомарной функции $\text{fup}_2(r, z)$, которая с хорошей точностью позволяет приблизить искомую функцию[7]:

$$u = \omega \sum_{i=1}^N c_i f_i \quad (13)$$

и подставим в (11). После ряда преобразований получим матричную задачу вида:

$$Ac + \lambda Bc = k^2 Fc \quad (14)$$

c – столбец неизвестных коэффициентов, который и требуется найти, а матрицы A, B, F – симметричны.

Результаты

Ограничимся рассмотрением колебаний, не зависящих от индекса m , то есть $m = 0$.

На основе рассмотренной математической модели был реализован алгоритм расчета собственных колебаний и собственных частот трехзорного аксиально-симметричного резонатора с сечением, изображенным на рис. 1.

Параметры резонатора были выбраны следующие:

Длина $L=15$ мм, диаметр $H=5$ мм.

Размер металлической вставки:

Длина $a=2$ мм, ширина $b=1$ мм.

Расстояние по горизонтали между металлическими вставками $l = 2$ мм, расстояние по вертикали между металлическими вставками $s = 1$ мм.

В качестве результатов работы программы были получены первые гармоники и соответствующие им распределения полей в указанном трехззорном резонаторе.

Предполагая, что скорость света $c = 1$, получим первую собственную частоту $\omega_1 = 6.60$. Соответствующая собственная мода представлена на рис. 4:

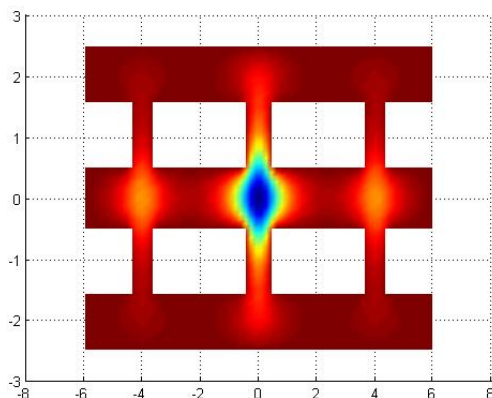


Рис.3. Первая собственная мода трехззорного резонатора

Заключение

Был реализован математический пакет по расчету собственных колебаний и сз трехззорного резонатора. Благодаря реализации метода R-функций данную программу можно легко модернизировать для расчета сечений более сложных форм, в том числе для расчета многоззорных резонаторов. В результате быстрой сходимости алгоритма данная модель может быть рекомендована для расчета конструкций подобного типа.

Литература

1. Фисенко Р.Н, 13th Crimean Conference «Microwave & Telecommunication Technology», 2003.
2. Рвачев В. Л., «Теория R-функций и некоторые ее приложения», Киев, изд. «Думка», 1982 г.
3. Кравченко В. Ф., Рвачев В. Л., «Алгебра логики, атомарные функции и вейвлеты в физических приложениях», Москва, изд. «Физматлит», 2006 г.
4. Кравченко В. Ф., Басараб М.А., «Булева алгебра и методы аппроксимации в краевых задачах электродинамики», изд. «Физматлит», 2004 г.
5. Тихонов А.Н., Самарский Н. А., «Уравнения математической физики», М.: Изд-во МГУ, 1999 г.
6. А.Н. Боголюбов, Вестник Московского Университета, Серия 3. Физика. Астрономия. 2009 г., №2, стр. 21-23
7. Кравченко В.Ф. «Лекции по теории атомарных функций и некоторым их приложениям». Монография. – М.: Радиотехника, 2003

Синтез метаплёнки, состоящей из сферических частиц

Ж.О. Домбровская, Ю.Е. Терехов

Физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова

Введение. Метаплёнки – двумерные периодические композитные структуры, состоящие из частиц, характерные размеры которых a и расстояния между которыми l много меньше, чем длина падающей электромагнитной волны λ . Электродинамические характеристики таких структур можно изменять, варьируя период расположения и/или геометрию частиц.

Данная работа посвящена разработке алгоритма, позволяющего синтезировать метаплёнки из сферических частиц с заданными спектральными свойствами. В рассматриваемой структуре размеры частиц имеют статистический разброс. Это позволяет приблизить данную модель к физически реальной ситуации, но приводит к появлению дополнительной степени свободы, что усложняет решение задачи синтеза.

Физическая постановка задачи. Пусть на метаплёнку, составленную из сферических сегнетоэлектрических резонаторов миллиметровых размеров, нормально падает плоская однородная ТЕ-поляризованная волна. В качестве материала для частиц берется необожженная керамика SrTiO_3 , у которой в микроволновом диапазоне комплексная диэлектрическая проницаемость составляет $\varepsilon = 300(1 + 0,001i)$. Чтобы получить резонанс основной моды (для одинаковых частиц), на диаметре резонатора должна укладываться ровно одна длина волны [1]. Для того, чтобы резонанс оказался близким к частоте падающего излучения ($f_0 = 10$ ГГц), размер частицы равен

$$a = c / (2f_0 \sqrt{\varepsilon}),$$

где c – скорость света в вакууме.

Прямая задача определения характеристик метаплёнки разбивается на два этапа [2]. 1) Производится определение коэффициентов поляризуемости одиночных субволновых частиц. 2) Осуществляется переход к поверхностной плотности поляризуемости. Зная ее, можно записать эффективные граничные условия для метаплёнки. Это дает линейные уравнения для коэффициентов прохождения T и отражения R . Решения этих уравнений можно представить в виде простых аналитических формул [3]:

$$T = \frac{1 + em}{1 - em + (e - m)}; \quad R = \frac{-e - m}{1 - em + (e - m)}.$$

Здесь величины e и m пропорциональны электрической и магнитной поверхностной поляризуемости соответственно.

Если размеры частиц имеют разброс со стандартным отклонением σ , то спектр становится существенно сглаженным. Тогда производится усреднение по ансамблю; например, в случае нормального распределения $w_N(a)$

$$T_\sigma = \int_0^\infty w_N(a) T da; \quad R_\sigma = \int_0^\infty w_N(a) R da.$$

Задача синтеза ставится следующим образом: найти такую конфигурацию структуры метаплёнки, при которой минимальна величина прохождения по мощности на некотором диапазоне частот:

$$\min \left\{ \int_{f_0 - \Delta f}^{f_0 + \Delta f} |T_\sigma(a_\sigma, l)|^2 df \right\}. \quad (1)$$

На оптимизационные параметры a и l накладываются ограничения:

$$a - \sigma \leq a_\sigma \leq a + \sigma; \quad 2a < l \leq const. \quad (2)$$

Это значит, что функционал минимизируется в ограниченной области. Для таких задач применяется метод скользящего допуска, который позволяет обойтись без вычисления производных целевой функции [4].

Заключение. Построен алгоритм, позволяющий решить задачу синтеза метаплёнок из сферических резонаторов. Он может быть легко распространён на случай более сложной геометрии частиц, в частности, бианизотропных.

Литература

1. *Yee H.Y.* An investigation of microwave dielectric resonator // Microwave Labs. Stanford University, Stanford, Calif. Rept., 1963, July, 1-65.
2. *Holloway C.L., Mohamed M.A., Kuester E.F. and Dienstfrey A.* Reflection and transmission properties of a metafilm: with an application to a controllable surface composed of resonant particles // IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility, 2005, 47, 853-865.
3. *Белокопытов Г.В., Боголюбов А.Н., Домбровская Ж.О., Терехов Ю.Е.* Расчет электродинамических характеристик метаплёнки: экспериментально-аналитический подход // VII Международная конференция «Акустооптические и радиолокационные методы измерений и обработки информации». Суздаль 15-17 сентября 2014 года. Доклады. С. 15-17.
4. *Химмельблау Д.* Прикладное нелинейное программирование. М.: Наука, 1975.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЛНОВЕДУЩИХ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ МЕТАМАТЕРИАЛОВ

Мухартова Ю.В., Боголюбов Н.А.

Московский Государственный университет имени М.В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики

В настоящее время активно создаются искусственные материалы, или метаматериалы, сильно взаимодействующие с электромагнитным полем. К ним относятся материалы с отрицательной диэлектрической и магнитной проницаемостью, фотонные кристаллы, киральные и би-изотропные среды и многие другие. Би-изотропные среды – это наиболее общий случай линейной изотропной среды. Основное их отличие от обычных диэлектриков и магнетиков состоит в наличии магнито-электрической связи, за счет которой приложенное к ним электрическое или магнитное поле создает одновременно и поляризацию, и намагниченность. На основе метаматериалов возможно создание антиотражающих покрытий, волноводов, антенн, деполяризаторов и т.д. В связи с этим весьма актуальной является разработка эффективных алгоритмов расчета электромагнитного поля в таких средах. Эти алгоритмы могут быть в дальнейшем использованы для многократного решения прямой задачи при решении задач синтеза материала с заданными свойствами. Одним из широко используемых методов является метод конечных элементов. Однако в случае электродинамических задач в полной векторной постановке метод конечных элементов может давать фиктивные решения. Существуют два основных способа борьбы с ними: апостериорный, когда истинное решение отделяют от фиктивных после процесса вычислений, и априорный, когда используют такие постановки задач, при

которых фиктивные решения не возникают. При втором подходе часто используется метод смешанных конечных элементов, который эффективно подавляет нефизические решения, но обладает меньшей точностью, чем метод лагранжевых элементов. В настоящей работе для спектральной задачи в волноводе с идеально проводящими стенками и би-изотропным заполнением предложен численный алгоритм поиска постоянных распространения, основанный на специальной обобщенной постановке векторной задачи, позволяющей использовать лагранжевы конечные элементы и исключаяющей появление нефизических решений. Для факторизации матриц, возникающих при решении спектральной задачи теории волноведущих систем, используется алгоритм, основанный на вычислительной процедуре, предложенной в работе Дж. Р. Банча и Л. Кауфман.

Рассмотрим волновод с осью Oz и поперечным сечением $S = \{(x, y): x \in [0, a], y \in [0, b]\}$. Пусть волновод имеет идеально проводящую боковую поверхность и однородное би-изотропное заполнение, характеризующееся материальными уравнениями

$$\begin{cases} \mathbf{D} = a_{11}\mathbf{E} + a_{12}\mathbf{H} \\ \mathbf{B} = a_{21}\mathbf{E} + a_{22}\mathbf{H} \end{cases}$$

в частотной области, где a_{11} , a_{12} , a_{21} , a_{22} – константы. Будем рассматривать невырожденный случай, когда $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$. Исследуем спектральную задачу в волноводе для поля, имеющего гармоническую зависимость от времени вида $e^{-i\omega t}$. Исключая из системы уравнений Максвелла вектор \mathbf{H} и учитывая невырожденность среды, получим:

$$\begin{cases} \text{rot rot } \mathbf{E} = ik(a_{21} - a_{12})\text{rot } \mathbf{E} + k^2(a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21})\mathbf{E}, \\ \text{div } \mathbf{E} = 0, \\ [\mathbf{n}, \mathbf{E}]_{\partial S} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где $k = \omega/c$. Будем искать решение в виде бегущей волны: $\mathbf{E}(x, y, z) = \mathbf{E}(x, y)e^{i\gamma z}$. Пусть $\mathbf{E}^*(x, y) = \{E_1^*(x, y), E_2^*(x, y), E_3^*(x, y)\}$ – произвольная достаточно гладкая вектор-функция, удовлетворяющая условиям $[\mathbf{n}, \mathbf{E}^*] = 0$ на поверхности волновода. Умножая скалярно первое векторное уравнение системы (1) на функцию $\mathbf{E}^*(x, y)$, а второе уравнение – на выражение $\frac{\partial E_1^*}{\partial x} + \frac{\partial E_2^*}{\partial y} - i\gamma E_3^*$, интегрируя по области S и суммируя результаты, получим:

$$\begin{aligned} & \iint_S \{(\nabla E_1, \nabla E_1^*) + (\nabla E_2, \nabla E_2^*) + (\nabla E_3, \nabla E_3^*)\} ds + \gamma^2 \iint_S (\mathbf{E}, \mathbf{E}^*) ds = \\ & = ik(a_{21} - a_{12}) \iint_S \left(\frac{\partial E_3}{\partial y} E_1^* - \frac{\partial E_3}{\partial x} E_2^* + \frac{\partial E_2}{\partial x} E_3^* - \frac{\partial E_1}{\partial y} E_3^* \right) ds + \gamma k(a_{21} - a_{12}) \iint_S (E_2 E_1^* - E_1 E_2^*) ds + \\ & + k^2(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \iint_S (\mathbf{E}, \mathbf{E}^*) ds. \end{aligned} \quad (2)$$

Проанализируем полученное уравнение в случае $a_{12} = a_{21} = 0$. Уравнение (2) примет вид:

$$\iint_S \left\{ (\nabla E_1, \nabla E_1^*) + (\nabla E_2, \nabla E_2^*) + (\nabla E_3, \nabla E_3^*) \right\} ds + \gamma^2 \iint_S (\mathbf{E}, \mathbf{E}^*) ds = k^2 (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \iint_S (\mathbf{E}, \mathbf{E}^*) ds. \quad (3)$$

Уравнение (3) является суммой обобщенных постановок спектральных задач для компонент поля \mathbf{E} в волноводе с заполнением $\varepsilon = a_{11}$, $\mu = a_{22}$, которые должны быть связаны соотношением $\frac{\partial E_1}{\partial x} + \frac{\partial E_2}{\partial y} + i\gamma E_3 = 0$. В (3) эта связь не учитывается, поэтому добавим к нему уравнение

$$\iint_S \left(\frac{\partial E_1}{\partial x} + \frac{\partial E_2}{\partial y} + i\gamma E_3 \right) \left(\frac{\partial E_1^*}{\partial x} + \frac{\partial E_2^*}{\partial y} - i\gamma E_3^* \right) ds = 0.$$

Получающееся в результате уравнение можно принять за обобщенную постановку спектральной задачи в волноводе с однородным изотропным заполнением $\varepsilon = a_{11}$, $\mu = a_{22}$. При этом все интегралы будут иметь смысл, если понизить гладкость функций и рассматривать $E_j(x, y) \in W_2^1(S)$, $E_j^*(x, y) \in W_2^1(S)$, $j = 1, 2, 3$.

Поступая аналогично с уравнением (2) для волновода с би-изотропным заполнением, приходим к следующей обобщенной постановке задачи: *необходимо найти постоянные распространения γ и соответствующие им вектор-функции $\mathbf{E}(x, y) = \{E_1(x, y), E_2(x, y), E_3(x, y)\}$, компоненты которых принадлежат Соболевскому пространству $W_2^1(S)$, их сужения на границу ∂S удовлетворяют условиям*

$$E_1|_{y=0} = E_1|_{y=b} = E_2|_{x=0} = E_2|_{x=a} = E_3|_{x=0} = E_3|_{x=a} = E_3|_{y=0} = E_3|_{y=b} = 0, \quad (4)$$

а сами функции $E_j(x, y)$ удовлетворяют уравнению

$$\begin{aligned} & \iint_S \left\{ 2 \frac{\partial E_1}{\partial x} \frac{\partial E_1^*}{\partial x} + \frac{\partial E_1}{\partial y} \frac{\partial E_1^*}{\partial y} + \frac{\partial E_2}{\partial x} \frac{\partial E_2^*}{\partial x} + 2 \frac{\partial E_2}{\partial y} \frac{\partial E_2^*}{\partial y} + \frac{\partial E_3}{\partial x} \frac{\partial E_3^*}{\partial x} + \frac{\partial E_3}{\partial y} \frac{\partial E_3^*}{\partial y} \right\} ds + \\ & + \iint_S \left\{ \frac{\partial E_1}{\partial x} \frac{\partial E_2^*}{\partial y} + \frac{\partial E_2}{\partial y} \frac{\partial E_1^*}{\partial x} \right\} ds + i\gamma \iint_S \left\{ -\frac{\partial E_1}{\partial x} E_3^* - \frac{\partial E_2}{\partial y} E_3^* + E_3 \frac{\partial E_1^*}{\partial x} + E_3 \frac{\partial E_2^*}{\partial y} \right\} ds - \\ & - ik(a_{21} - a_{12}) \iint_S \left\{ \frac{\partial E_3}{\partial y} E_1^* - \frac{\partial E_3}{\partial x} E_2^* + \frac{\partial E_2}{\partial x} E_3^* - \frac{\partial E_1}{\partial y} E_3^* \right\} ds - \kappa(a_{21} - a_{12}) \iint_S \{E_2 E_1^* - E_1 E_2^*\} ds + (5) \\ & + \gamma^2 \iint_S \{E_1 E_1^* + E_2 E_2^* + 2E_3 E_3^*\} ds - k^2 (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \iint_S (\mathbf{E}, \mathbf{E}^*) ds = 0 \end{aligned}$$

для любой вектор-функции $\mathbf{E}^(x, y)$, компоненты которой принадлежат пространству $W_2^1(S)$, а их сужения на границу области S удовлетворяют условиям (4).*

Для численного решения задачи будем использовать метод конечных элементов. Пусть $N_{ij}(x, y)$ – лагранжевые базисные функции. Приближенные решения запишем в виде разложений:

$$E_k(x, y) = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J E^{ij} N_{ij}(x, y), \quad k = 1, 2, 3. \quad (6)$$

Учитывая граничные условия, получаем: $E_1^{i1} = E_1^{iJ} = 0, i = \overline{1, I}; E_2^{1j} = E_2^{Ij} = 0, j = \overline{1, J}; E_3^{i1} = E_3^{iJ} = E_3^{1j} = E_3^{Ij} = 0, i = \overline{1, I}, j = \overline{1, J}$.

Подставим компоненты вектора \mathbf{E} в виде разложений (6) в уравнение (5), используя в качестве пробного вектора \mathbf{E}^* последовательно векторы:

- 1) $\mathbf{E}^* = \{N_{ij}(x, y), 0, 0\}, \quad i = \overline{1, I}, \quad j = \overline{2, (J-1)}$;
- 2) $\mathbf{E}^* = \{0, N_{ij}(x, y), 0\}, \quad i = \overline{2, (I-1)}, \quad j = \overline{1, J}$;
- 3) $\mathbf{E}^* = \{0, 0, N_{ij}(x, y)\}, \quad i = \overline{2, (I-1)}, \quad j = \overline{2, (J-1)}$.

В результате приходим к нелинейной задаче на собственные значения:

$$\gamma^2 AX + \gamma^2 BX + CX = 0, \quad (7)$$

где

$$X = \left\{ \underbrace{\{E_1^{i,2}\} \{E_1^{i,3}\} \dots \{E_1^{i,J-1}\}}_{i=\overline{1, I}} \underbrace{\{E_2^{i,1}\} \{E_2^{i,2}\} \dots \{E_2^{i,J}\}}_{i=\overline{2, (I-1)}} \underbrace{\{E_3^{i,2}\} \{E_3^{i,3}\} \dots \{E_3^{i,J-1}\}}_{i=\overline{2, (I-2)}} \right\}^T.$$

Задача на собственные значения сводится к линейной, если ввести дополнительный неизвестный вектор $Y = \gamma X$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -C & -B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Предложенный алгоритм был протестирован в случае волновода с однородным изотропным заполнением. При этом полученные результаты с хорошей точностью согласовались с теоретическими результатами, а фиктивные моды не возникали. Описанная методика решения легко обобщается на случай волновода со слоистым неоднородным заполнением. *Работа выполнена при поддержке РФФИ. Проект № 12-01-00479*

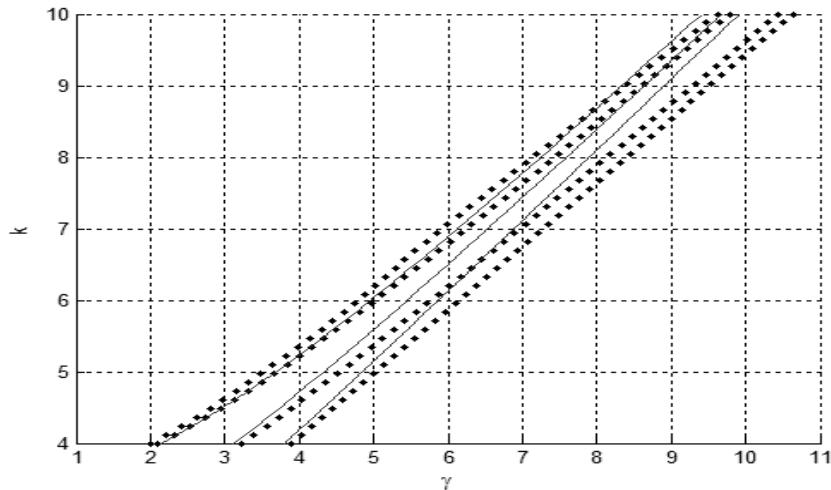


Рис.1. Дисперсионные кривые при $a_{12} = a_{21}^* = 0.1 \cdot i$ для мод, соответствующих γ_{11} , γ_{02} и γ_{01} . Сплошными линиями обозначены дисперсионные кривые для $a_{12} = a_{21} = 0$.

Литература

- 1) Н.А.Боголюбов, Ю.В.Мухартова «Спектральная задача в волноводе с однородным би-изотропным заполнением» // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2014. Т. 54, № 6, с. 969-976.
- 2) Н.А.Боголюбов, Ю.В.Мухартова «Расчет спектральных характеристик волновода с однородным би-изотропным заполнением методом конечных элементов» // Математическое моделирование. 2014.
- 3) Ю.В.Мухартовой и Н.А.Боголюбова «Расчет волноводов методом конечных элементов с использованием процедуры Банча-Кауфман» // Вестник Московского университета. Сер. 3. Физика. Астрономия.2014.

Математическое моделирование процесса формирования конвективных ячеек в мантии Земли

Ю.В.Мухартова, О.Е. Беленькая

Московский Государственный университет имени М.В. Ломоносова, физический факультет, Москва, Россия
belenkaya.olga@physics.msu.ru

Математическое моделирование конвективного движения вещества в мантии Земли является одной из важных геофизических задач. Известно, что неподвижный континент сначала подавляет мантийную конвекцию под собой и расширяет конвективную ячейку, а затем, через определенное время после прогрева субконтинентальной мантии, под континентом возникает горячий восходящий мантийный поток. В мантии происходят и более быстрые процессы, связанные с перестройкой структуры мантийной конвекции. Эта перестройка может быть обусловлена, например, перестройкой конвекции в жидком ядре или проскальзыванием мантии относительно ядра Земли.

В данной работе рассмотрено два механизма перестройки структуры конвективных ячеек в мантии Земли. В первом случае на основе двумерной модели исследуется формирование ячеек под действием движущегося на нижней поверхности мантии источника тепла, порождающего восходящий поток мантийного вещества. Во втором случае рассмотрено влияние континента на структуру конвективных ячеек.

В используемой модели движение вещества мантии описывается с помощью системы уравнений гидродинамики, упрощенной с учетом соотношения $k\rho/\mu \approx 10^{-23}$, где k – коэффициент теплопроводности, ρ – плотность, а μ – коэффициент вязкости, и приведенной к безразмерному виду. Для решения системы уравнений осуществляется переход к переменным «завихренность» – «векторный потенциал», позволяющим исключить из системы давление. Вектор «завихренности» определяется как $\vec{\omega} = \text{rot } \vec{V}$, где \vec{V} – вектор скорости течения. В приближении несжимаемой жидкости $\text{div } \vec{V} = 0$, поэтому можно ввести векторный потенциал скоростей $\vec{\psi}$, так что $\vec{V} = \text{rot } \vec{\psi}$. В двумерном случае $\omega = \frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x}$, $V_x = -\frac{\partial \psi}{\partial z}$, $V_z = \frac{\partial \psi}{\partial x}$. Функции ψ , ω и температура T должны удовлетворять системе уравнений [1]:

$$\Delta \psi = -\omega,$$

(1)

$$\Delta \omega = R_a \frac{\partial T}{\partial x}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial z} = \Delta T, \quad (3)$$

где R_a – число Рэлея. Считая боковые границы расчетной области непроницаемыми, получим: $\psi|_{x=0, x=L} = \omega|_{x=0, x=L} = 0$, $\frac{\partial T}{\partial x}|_{x=0, x=L} = 0$. Из условий непротекания и проскальзывания следует, что $\psi|_{z=0, z=H} = \omega|_{z=0, z=H} = 0$. Температуру на верхней границе мантии будем считать равной нулю.

Предположим, что на границе ядро-мантия имеется подвижный источник тепла, создающий тепловой поток $q(x, t)$. Тогда условие при $z=0$ можно поставить следующим образом: $-\frac{\partial T}{\partial z}|_{z=0} = \lambda(1-T)|_{z=0} + q(x, t)$, где λ – коэффициент теплообмена.

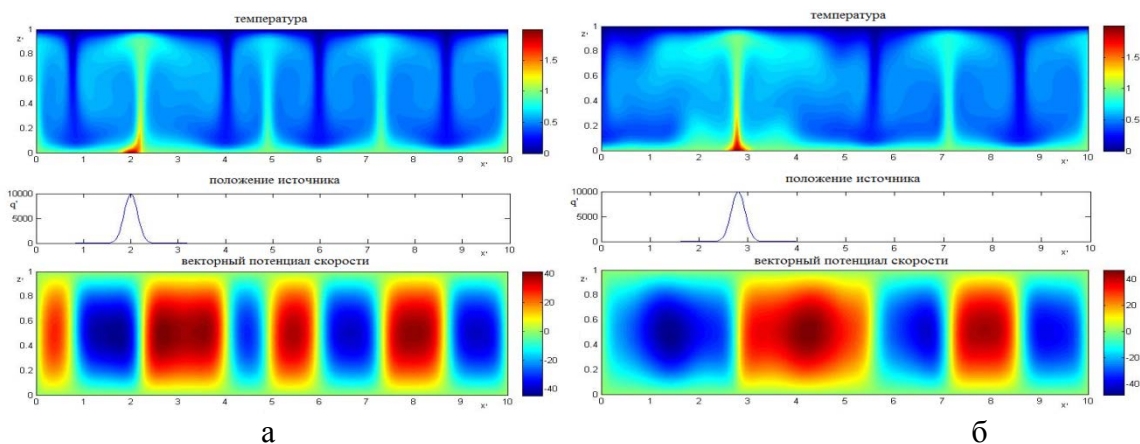
Если λ достаточно велико, то при отсутствии источника это граничное условие близко к условию Дирихле $T|_{z=0} = 1$, используемому в классической постановке задачи.

Был проведен ряд численных экспериментов, демонстрирующих влияние скорости источника на процесс формирования конвективных ячеек. Например, при $R_a = 30000$, $q_{\max} \approx 0.4 \text{ Вт/м}^2$ и скорости источника $c = 0.22 \cdot 10^{-8} \text{ м/с}$ было показано, что в самом начале движения источника происходит разогрев мантийного вещества с возникновением турбулентностей в конвективных ячейках, прилегающих к восходящему потоку, связанному с источником, из-за чего начинается расширение этих ячеек. В результате расширяющиеся ячейки поглощают ближайшие к ним восходящие потоки, и в конвективной структуре остается пять ячеек вместо восьми (рис.1).

Рассмотрим задачу о формировании конвективных ячеек в области под плавающим континентом. Будем моделировать континент в виде легкой твердой прямоугольной плиты длиной l и толщиной d . Если считать, что вязкая мантия прилипает к континенту, движущемуся со скоростью U_0 вдоль оси Ox , то граничные условия на его поверхности можно сформулировать следующим образом:

$$V_x|_{x=X_1, x=X_2, z=H-d} = U_0 \Rightarrow -\frac{\partial \psi}{\partial z}|_{z=H-d} = U_0, \quad \psi|_{x=X_1, x=X_2} = (H-z)U_0,$$

где $X_1(t)$ – левая граница континента, $X_2(t) = X_1(t) + l$ – его правая граница: $\frac{dX_1}{dt} = U_0$



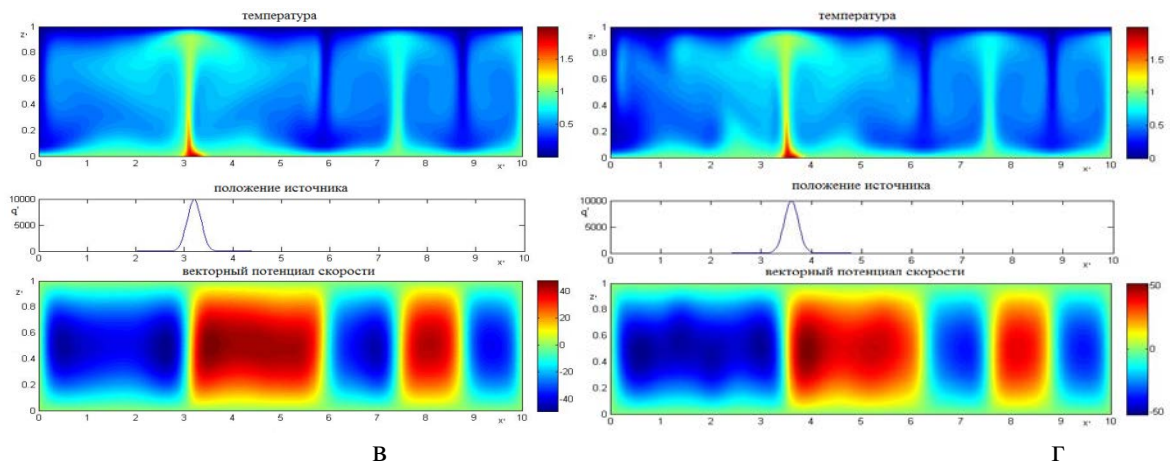


Рис.1. Перестройка конвективных ячеек под действием движущегося источника.

Если обозначить температуру внутри континента как T_c , а его коэффициент теплопроводности как k_c , то на границе мантия-континент должны выполняться условия сопряжения:

$$T = T_c, \quad k \frac{\partial T}{\partial n} = k_c \frac{\partial T_c}{\partial n}.$$

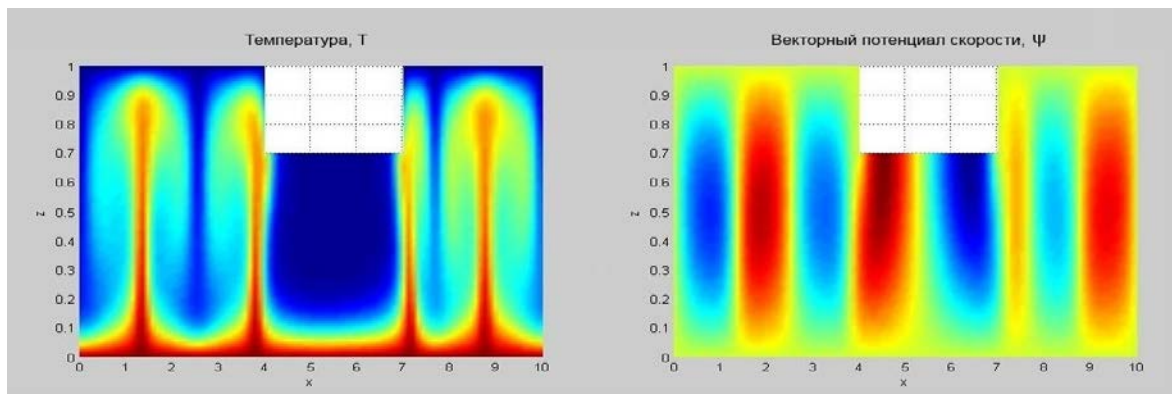


Рис. 2. Структура конвективных ячеек при наличии неподвижного континента.

Результаты расчетов структуры конвективных ячеек при наличии неподвижного континента для $R_a = 10000$ представлены на рис. 2.

Рассмотрим теперь уравнение движения континента. С учетом условия $Mk/\mu \approx 10^{-23}$ и уравнения неразрывности его можно записать в виде:

$$0 = \int_{H-d}^H \{ \tilde{p}(X_1(t), z) - \tilde{p}(X_2(t), z) \} dz + 2 \{ V_z(X_2(t), H-d) - V_z(X_1(t), H-d) \} - \int_{X_1(t)}^{X_2(t)} \left\{ \frac{\partial}{\partial z} V_x(x, z) \Big|_{z=H-d} + \frac{\partial}{\partial x} V_z(x, H-d) \right\} dx, \quad (4)$$

где \tilde{p} – избыточное (по отношению к гидростатическому) давление.

Заменяем в уравнении (4) производную $\frac{\partial V_x}{\partial z} \Big|_{z=H-d}$ ее конечно-разностным аналогом со вторым порядком аппроксимации:

$$\frac{\partial V_x}{\partial z} \Big|_{z=H-d} \rightarrow \frac{3V_x(x, H-d) - 4V_x(x, H-d - \Delta_z) + V_x(x, H-d - 2\Delta_z)}{2\Delta_z}.$$

Переходя от непрерывной переменной t к дискретной переменной t_j и пользуясь граничным условием $V_x(x, H-d) = U_0$ при $x \in [X_1, X_2]$, получим следующее выражение, позволяющее найти скорость движения континента на новом шаге по времени при известной скорости на предыдущем шаге:

$$U_0(t_{j+1}) = \frac{2\Delta_z}{3} \int_{H-d}^H \{ \tilde{p}(X_1(t_j), z) - \tilde{p}(X_2(t_j), z) \} dz + \frac{4\Delta_z}{3} \{ V_z(X_2(t_j), H-d) - V_z(X_1(t_j), H-d) \} + \frac{1}{3} \int_{X_1(t_j)}^{X_2(t_j)} \{ 4V_x(x, H-d - \Delta_z) - V_x(x, H-d - 2\Delta_z) \} dx - \frac{2\Delta_z}{3} \int_{X_1(t_j)}^{X_2(t_j)} \frac{\partial}{\partial x} V_z(x, H-d) dx,$$

где

$$X_1(t_j) = X_1(t_{j-1}) + U_0(t_j) \Delta t, \quad X_2(t_j) = X_1(t_j) + l.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. А.Н. Боголюбов, А.Н. Грушинский, Ю.В. Мухартова, О. Е. Беленькая Математическая модель движения конвективных ячеек в мантии под действием источника на границе мантия-ядро // Вестник Московского ун-та. Сер. 3. Физика. Астрономия. 2014. №6. С 61-69.

ПРИЛОЖЕНИЕ МЕТОДА ВОЛНОВОГО ОБТЕКАНИЯ К ЗАДАЧАМ МАСКИРОВКИ

Могилевский И.Е., Ровенко В.В.

Маскировка методом волнового обтекания. Достоинства, недостатки и способы практической реализации. Применение метаматериалов в построении оболочки.

В настоящее время всё большую актуальность приобретают задачи радиолокационной маскировки. Одним из наиболее перспективных среди методов их решения является метод волнового обтекания. Основная суть метода: маскирующее покрытие должно так искривлять фронт падающего электромагнитного излучения, чтобы электромагнитные волны огибали объект, а на выходе принимали бы прежнее направление. Практическую реализацию предполагается осуществлять за счет неоднородности вещества маскирующего покрытия специального вида. Лучше всего такое маскирующее покрытие осуществляется с помощью метаматериалов, в силу своих свойств предоставляющих беспрецедентные возможности управления потоками электромагнитного излучения, как в нано-, так и в макромасштабах.

Метаматериалы – рационально сконструированные искусственные неоднородные материальные оптические среды, позволяющие проектировать их физические свойства в соответствии с потребностями решаемой практической задачи, как правило, превосходя свойства естественных материалов [1-2].

Расчёт параметров маскирующего покрытия.

При расчете параметров маскирующего покрытия используется тот факт, что уравнения Максвелла инвариантны относительно преобразований координат при условии, что основные оптические параметры материалов, а именно тензоры диэлектрической проницаемости $\varepsilon(\vec{r})$ и магнитной проницаемости $\mu(\vec{r})$ также соответствующим образом преобразуются [1]. На основе этого внутри маскирующей оболочки мысленно создается пространство с искривлённой метрикой, для чего находится необходимое преобразование координат. Поскольку вид уравнений Максвелла в исходной и преобразованной криволинейной системах координат одинаков, то и решения данных уравнений будут иметь одинаковый вид по отношению к своим системам координат. Тогда среда маскирующей оболочки будет искривлять прямолинейно распространяющуюся волну так же, как найденное преобразование координат искривляет прямую линию.

Если соответствующее координатное преобразование не затрагивает временной области, то фазы каждой электромагнитной волны в исходной и преобразованной системах равны между собой в каждый момент времени. При этих условиях полученные параметры маскирующего покрытия будут соответствовать всем условиям невидимости.

Также нужно учесть еще одно условие: оптическая длина пути каждого луча в оболочке должна быть такой же, как и при распространении в свободном пространстве.

В противном случае лучи, прошедшие сквозь оболочку, будут интерферировать с лучами, не взаимодействовавшими с оболочкой, вследствие этого картина поля исказится и наблюдатель заметит неоднородность пространства [1-2].

Математическое исследование маскирующих оболочек. Маскировка идеально проводящего шара.

Математическое исследование маскирующих оболочек заключается в решении задачи дифракции падающего излучения на объекте, окружённом оболочкой с заданными параметрами. Рассмотрим вопрос более подробно, взяв в качестве падающего излучения плоскую волну, а в качестве объекта идеально проводящий шар, окруженный оболочкой в виде шарового слоя.

Математическая постановка задачи:

Полное электромагнитное поле представляется в виде суммы падающего и дифрагированного полей:

$$\begin{aligned}\bar{E}_f &= \bar{E}_0 + \bar{E} \\ \bar{H}_f &= \bar{H}_0 + \bar{H}\end{aligned}$$

Здесь

$\{\bar{E}_0; \bar{H}_0\} = \{-e^{ikz}\bar{j}; e^{ikz}\bar{i}\}$ – известная нам распространяющаяся вдоль оси z плоская волна (падающее поле).

$\{\bar{E}; \bar{H}\}$ – неизвестное дифрагированное поле. В случае идеальной маскировки оно должно равняться нулю.

Теперь перед нами стоит задача нахождения полей $\{\bar{E}; \bar{H}\}$.

С помощью парциальных условий излучения [3-4] задача в бесконечной области сводится к задаче в конечной области (окруженной поверхностью Σ_{R_0}).

Дифрагированное поле ищется в виде суммы полей электрического и магнитного типа.

С учётом вышесказанного, необходимо решить следующую задачу рассеяния плоской волны (здесь и далее примеры приводятся для поля магнитного типа, для поля электрического типа имеют место аналогичные соотношения):

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rot } \bar{E}_f = ik\hat{\mu}\bar{H}_f \quad M \in D_s \\ \text{rot } \bar{H}_f = -ik\hat{\varepsilon}\bar{E}_f \\ \left[(\bar{E}_f)_{\tau} \right]_s = 0 \\ \left[(\bar{H}_f)_{\tau} \right]_s = 0 \\ \left[(\hat{\varepsilon}\bar{E}_f)_{n} \right]_s = 0 \\ \left[(\hat{\mu}\bar{H}_f)_{n} \right]_s = 0 \\ \beta_m(R_0)(\bar{E}\bar{e}_m)|_{r=R_0} = \gamma_m(R_0)(\bar{H}\bar{h}_m)|_{r=R_0} \\ \beta_m(R_0) = \oint_{\Sigma_{R_0=1}} \text{rot rot}(r\psi_m\bar{i}_r)\bar{h}_m^* d\Omega \\ \gamma_m(R_0) = \oint_{\Sigma_{R_0=1}} ik \text{rot}(r\psi_m\bar{i}_r)\bar{e}_m^* d\Omega \end{array} \right. \quad (1)$$

Здесь:

D_s – область вне оболочки, на сфере Σ_{R_0} ставятся парциальные условия излучения.

$$\psi_n = \xi_n^{(\omega)}(kr)Y_n(\theta, \varphi)$$

$$\xi_n^{(\omega)}(kr) = \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} H_{n+\frac{1}{2}}^{(\omega)}(kr) \quad \text{– сферические функции Ханкеля.}$$

$Y_n(\theta, \varphi)$ – сферические функции.

\bar{e}_m, \bar{h}_m – базисные вектора для касательных составляющих поля магнитного типа:

$$\bar{e}_n(\theta, \varphi) = [\nabla_{\theta\varphi} Y_n, \bar{i}_r] = \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial Y_n}{\partial\varphi} \bar{i}_{\theta} - \frac{\partial Y_n}{\partial\theta} \bar{i}_{\varphi} \quad (2)$$

$$\bar{h}_n(\theta, \varphi) = \nabla_{\theta\varphi} Y_n = \frac{\partial Y_n}{\partial\theta} \bar{i}_{\theta} + \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial Y_n}{\partial\varphi} \bar{i}_{\varphi} \quad (3)$$

В области, ограниченной Σ_{R_0} , для построения приближенного решения применяется неполный метод Галеркина [3-4]. Касательные компоненты искомого поля ищутся через разложения по специальным базисам (своим для полей разных типов, например, (2) и (3) – базис для поля магнитного типа) для конечного числа базисных функций N . Для поля магнитного типа:

$$\begin{aligned} H_{\theta} &= \sum_{n=1}^N b_n(r) Y_{n\theta} & H_{\varphi} &= \sum_{n=1}^N b_n(r) Y_{n\varphi} \\ E_{\theta} &= \sum_{n=1}^N c_n(r) Y_{n\theta} & E_{\varphi} &= - \sum_{n=1}^N c_n(r) Y_{n\theta} \end{aligned}$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$Y_{n\theta} = \frac{\partial Y_n}{\partial\theta}$$

$$Y_{n\varphi} = \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial Y_n}{\partial\varphi}$$

Радиальные компоненты полей могут быть определены через касательные с помощью радиальных уравнений Максвелла [4]:

$$(ik\hat{\varepsilon}(M)\bar{E}^j)_r = -(\text{rot } \bar{H}^j)_r$$

$$(ik\hat{\mu}(M)\bar{H}^j)_r = (\text{rot } \bar{E}^j)_r$$

j – индекс, показывающий принадлежность к полю электрического или магнитного типа.

Отсюда (для поля магнитного типа):

$$E_r = -\frac{1}{\varepsilon_{rr}} \sum_{n=1}^N c_n(r) (\varepsilon_{r\theta} Y_{n\varphi} - \varepsilon_{r\varphi} Y_{n\theta})$$

$$H_r = \frac{1}{ik\mu_{rr}r} \sum_{n=1}^N n(n+1)c_n(r)Y_n - \frac{1}{\mu_{rr}} \sum_{n=1}^N b_n(r) (\mu_{r\theta} Y_{n\theta} + \mu_{r\varphi} Y_{n\varphi})$$

В случае, когда метрический тензор имеет диагональный вид (орты перпендикулярны):

$$E_r = 0$$

$$H_r = \frac{1}{ik\mu_{rr}r} \sum_{n=1}^N n(n+1)c_n(r)Y_n$$

Уравнения для коэффициентов касательных составляющих можно получить, спроектировав уравнения Максвелла на базисные вектора [4] (*проекционные соотношения*):

$$\oint_{\Sigma_r} (\text{rot } \bar{H}^j + ik\hat{\varepsilon}(M)\bar{E}^j) \bar{e}_m^j \cdot d\Omega = 0$$

$$\oint_{\Sigma_r} (\text{rot } \bar{E}^j - ik\hat{\mu}(M)\bar{H}^j) \bar{h}_m^j \cdot d\Omega = 0$$

Здесь $m = \overline{1, N}$, $r = 1$, $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$, с учётом диагональности метрического тензора.

Преобразуя проекционные соотношения, для касательных составляющих получим уравнение вида (здесь пример для поля магнитного типа):

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rb_m(r)) + \sum_{n=1}^N (A_{mn} + B_{mn})c_n(r) = 0$$

$$A_{mn} = -\frac{1}{ikr^2} n(n+1) \oint_{\Sigma_r} \left(\frac{1}{(\sin\theta)^2} \frac{\partial}{\partial\varphi} \left(\frac{Y_n}{\mu_{rr}} \right) \frac{\partial Y_m^*}{\partial\varphi} + \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\frac{Y_n}{\mu_{rr}} \right) \frac{\partial Y_m^*}{\partial\theta} \right) d\Omega$$

$$B_{mn} = -ik \oint_{\Sigma_r}^1 \left(\varepsilon_{\theta\theta} \frac{1}{(\sin\theta)^2} \frac{\partial Y_n}{\partial\varphi} \frac{\partial Y_m^*}{\partial\varphi} + \varepsilon_{\varphi\varphi} \frac{\partial Y_n}{\partial\theta} \frac{\partial Y_m^*}{\partial\theta} \right) d\Omega$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rc_m(r)) + \sum_{n=1}^N \hat{A}_{mn} b_n(r) = 0$$

$$\hat{A}_{mn} = -ik \oint_{\Sigma_r}^1 \left(\mu_{\theta\theta} \frac{\partial Y_n}{\partial\theta} \frac{\partial Y_m^*}{\partial\theta} + \mu_{\varphi\varphi} \frac{1}{(\sin\theta)^2} \frac{\partial Y_n}{\partial\varphi} \frac{\partial Y_m^*}{\partial\varphi} \right) d\Omega$$

Решение полученной системы обыкновенных дифференциальных уравнений осуществляется численно с помощью одностадийной схемы Розенброка с комплексным коэффициентом.

В качестве примера рассмотрим немного модифицированную маскирующую оболочку из статьи [1].

$$\varepsilon_{rr} = \mu_{rr} = \begin{cases} 1 & R_1 + R_2 \leq r \\ \frac{r - R_1}{R_2} & R_2 \leq r \leq R_1 + R_2 \\ \frac{R_2}{R_2 - R_1} \left(\frac{r - R_1}{r} \right)^2 & R_1 \leq r \leq R_2 \end{cases}$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \mu_{\theta\theta} = \varepsilon_{\varphi\varphi} = \mu_{\varphi\varphi} = \begin{cases} 1 & R_1 + R_2 \leq r \\ \frac{R_2}{r - R_1} & R_2 \leq r \leq R_1 + R_2 \\ \frac{R_2}{R_2 - R_1} & R_1 \leq r \leq R_2 \end{cases}$$

Таким образом, для коэффициентов разложения получается следующая краевая задача (для поля магнитного типа):

$$A_m = -\frac{1}{ikr^2} \frac{n(n+1)}{\mu_{rr}(r)}$$

$$B_m = -ik\varepsilon_{\theta\theta}(r)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rc_m(r)) + \hat{A}_m b_m(r) = 0$$

$$\hat{A}_m = -ik\mu_{\theta\theta}(r)$$

$$c_m(r=R) = -\oint_{\Sigma_{R=1}}^1 e^{ikz} \left(\cos\theta \sin\varphi \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial Y_m^*}{\partial\varphi} - \cos\varphi \frac{\partial Y_m^*}{\partial\theta} \right) d\Omega$$

$$ik\xi_m^{(\omega)}(kr)b_m(r) \Big|_{r=R_0} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\xi_m^{(\omega)}(kr))c_m(r) \Big|_{r=R_0}$$

Для поля электрического типа имеют место аналогичные соотношения.

Разработанный алгоритм позволяет осуществлять математическое моделирование широкого круга маскирующих оболочек, в том числе на основе метаматериалов. Данный алгоритм тестировался на рассмотренном примере из работы [1]. Проведенные

численные эксперименты показали, что дифрагированное поле вне оболочки, как и ожидалось, пренебрежимо мало.

Работа выполнена при поддержке РФФИ. Проект № 12-01-00479

Литература

- [1] Дубинов А. Е., Мытарева Л. А. *УФН* **180** 475 (2010)
- [2] Дубинов А. Е., Мытарева Л. А. *УФН* **182** 337 (2012)
- [3] Свешников А. Г., Ильинский А. С. Прямой метод для задач дифракции на локальном неоднородном теле. *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 1971,11, №4, 960-968
- [4] Свешников А. Г., Могилевский И. Е. *Избранные математические задачи теории дифракции.* Москва 2012.

Математическое моделирование дифракции на невыпуклом теле вращения

Хлебников Ф.Б., Шапкина Н.Е.

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики

Рассматривается задача дифракции на импедансном теле вращения сложной формы, сечение которой представляет собой контур, изображенный на рисунке:



Отрезок АВ этого контура является симметричной дугой параболы, CD – дугой окружности, а соединяющие их AC и BD – гладкие переходные функции.

Задачу дифракции на теле такой формы можно свести к скалярной задаче при помощи функций Борнмиса при определенном выборе системы координат. Несмотря на

то, что контур не является выпуклым, перейдя к сферической системе координат с центром в фокусе параболической дуги, можно представить его в виде

$$S = \{S'(\varphi, \vartheta) \times [R_1, R_2]\},$$

где $S(\varphi, \vartheta)$ – некоторая функция, не зависящая от радиуса, R_1, R_2 – радиусы наиболее близкой к началу координат точки, и наиболее удаленной от нее, что и является необходимым условием для возможности сведения векторной задачи дифракции к скалярной задаче для функции Боргниса.

В плоскости вращения обозначим контур как S , область, внешнюю к нему – как D_e , а внутреннюю – как D_i , и рассмотрим внешнюю скалярную задачу дифракции с граничными условиями третьего рода:

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = 0, & M \in D_e \\ \left. \frac{\partial u}{\partial n} + h(P)u \right|_S = f(P) \\ \frac{\partial u}{\partial r} - iku = o\left(\frac{1}{r}\right), & r \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь $h(P)$ – импеданс тела, представляющий собой комплексную функцию мнимая часть которой строго отрицательна и отделена от нуля.

Будем искать решение задачи в виде потенциала простого слоя:

$$u(M) = \int_S g(M, P) \mu(P) d\sigma_p,$$

где $g(M, P)$ – фундаментальное решение уравнения Гельмгольца. Используя свойства потенциала, получим интегральное уравнение Фредгольма второго рода:

$$\frac{1}{2} \mu(M) + \int_S \hat{h}[g(M, P)] \mu(P) d\sigma_p = f(M). \quad (2)$$

Здесь \hat{h} – оператор граничного условия, вычисляющийся по формуле

$$\hat{h} = \left(\frac{\partial}{\partial n} + h \right).$$

Решение интегрального уравнения (2) можно получить с помощью метода коллокаций. Представив фундаментальное решение $g(M, P)$ в виде

$$g(M, P) = \frac{i\pi}{2} H_0^{(2)}(kr_{M,P}),$$

где за $r_{M,P}$ обозначено расстояние между соответствующими точками. Получим уравнение:

$$\frac{1}{2}\mu(M) + \int_S \hat{h} \left[H_0^{(2)}(kr_{M,P}) \right] \mu(P) d\sigma_P = f(M).$$

Приближая искомую функцию $\mu(P)$ и правую часть $f(M)$ кусочно постоянными функциями, запишем систему алгебраических уравнений:

$$\frac{1}{2}\mu_m + \sum_{n=1}^N \mu_n \int_S \hat{h} \left[H_0^{(2)}(kr_{mn}) \right] d\sigma = f_m,$$

коэффициенты матрицы этой системы вычисляются простым интегрированием функции Ханкеля и ее производной.

Результаты, полученные с помощью численного моделирования, хорошо согласуются с проведенными ранее расчетами для предельного случая идеально проводящего тела.

Работа выполнена при поддержке РФФИ. Проект № 12-01-00479

Литература

1. Вайнштейн Л.А. Электромагнитные волны. – М.: Радио и связь, 1988.
2. Васильев Е.Н. Возбуждение тел вращения. – М.: Радио и связь, 1987.
3. А.Г.Свешников, И.Е.Могилевский. Математические задачи теории дифракции. – М.: Физический факультет МГУ, 2010.
4. Ф.Б.Хлебников. Математическое моделирование электромагнитного поля в ближней зоне зеркального коллиматора, 5-я международная конференция Акустооптические и радиолокационные методы измерений и обработки информации, Суздаль, 18-19 сентября 2012.

Математическое моделирование диамагнетизма электронно-циклотронных волн в плазме

Л.В. Бородачѳ

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

borodach2000@mail.ru

Как известно, циклотронные волны, в силу возможного развития разного рода неустойчивостей и резонансного взаимодействия с заряженными частицами, играют значительную роль в поведении магнитосферной и лабораторной плазмы.

Вместе с тем, полная картина циклотронных колебаний неравновесной плазмы, весьма интересная как в фундаментальном, так и прикладном аспектах, по-видимому, еще далека от своего завершения. При этом ее новые детали зачастую обнаруживаются "на кончике пера" и достаточно долго носят исключительно концептуальный характер. В этой связи показателен служащий предметом настоящих численных исследований тонкий нелинейный эффект, названный в работе [1] высокочастотным диамагнетизмом плазмы. Его физическое содержание усматривается из определенного сходства с хорошо известным феноменом ленгмюровского коллапса [2], ибо потенциальные циклотронные колебания описываются уравнениями, во многом сходными с уравнениями плазменных электронных колебаний, поскольку частота последних зависит от плотности частиц подобно тому, как частота первых – от интенсивности магнитного поля. Отсюда, по аналогии с образованием каверн плотности плазмы основным нелинейным проявлением высокочастотных циклотронных колебаний является локальное вытеснение внешнего магнитного поля. Образование магнитной ямы происходит под действием поперечного тока, возникающего в результате высокочастотного давления на плазму в области самофокусировки циклотронного волнового пакета.

Теоретическому обсуждению указанного эффекта был посвящен ряд примечательных публикаций. Так в [1, 3] получен общий вид уравнений потенциальных электронно-циклотронных волн конечной амплитуды (мод Бернштейна), учитывающих диамагнитный эффект, а в [4] приведены выражение для нелинейной поправки магнитного поля и решение дисперсионного уравнения в присутствии внешней накачки. Вместе с тем предложенная концепция ВЧ диамагнетизма требовала подтверждения методами, отличными от аналитических, что и явилось основной задачей компьютерных экспериментов, проводившихся в рамках дискретной дарвинской модели [5]. В виде конкретных их целей отметим:

- наглядную демонстрацию эффекта высокочастотного диамагнетизма плазмы в практически важном случае колебаний на второй гармонике электронной циклотронной частоты, изучение его динамики и пространственной структуры;
- качественное подтверждение основных положений теории, включающее численную проверку ряда аналитических зависимостей и значений базовых параметров неустойчивости в случаях стоячей и бегущей волн накачки;
- уточнение количественных характеристик явления, способствовавших оптимальной постановке натуральных экспериментов по высокочастотному диамагнетизму.

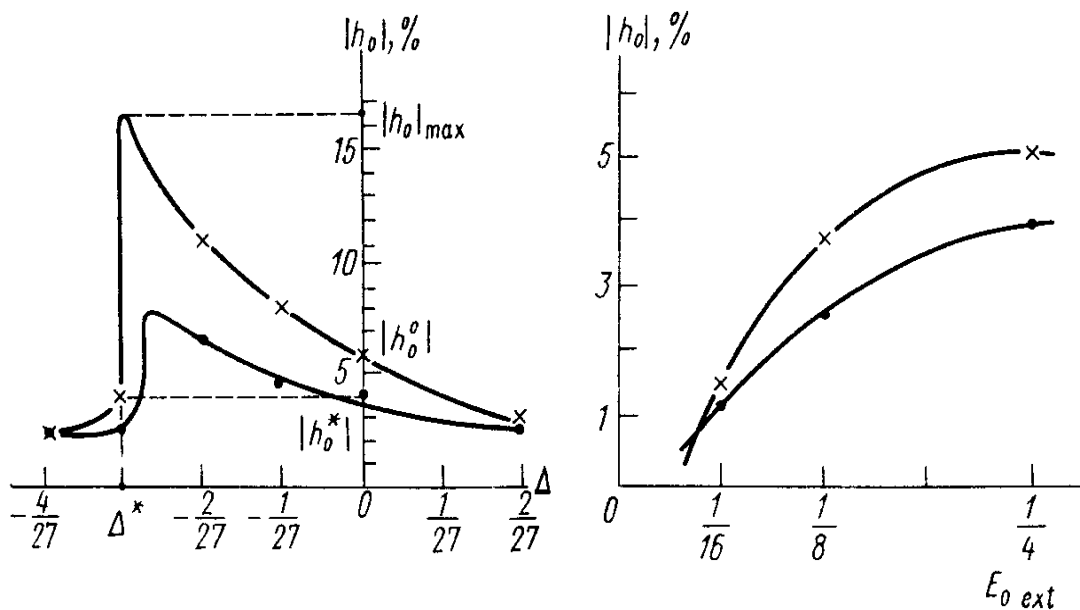


Рис. 1. Зависимость относительной глубины магнитной ямы $|h_0|$ от Δ (эффективной расстройки частоты внешней возмущающей волны $\omega_0 \approx 2\omega_{e0}$) при $E_0^{ext} / B_0 = 0.25$ и от E_0^{ext} при $\Delta = 0$ (x – теория, • – эксперимент).

Диамагнитный эффект исследуется в присутствии слабой волны накачки ($E_0 \ll B_0$), перпендикулярной внешнему магнитному полю $B_0 / \sqrt{4\pi n_0 m_e c^2} = 1$. Частота приложенного электрического поля ω_0 близка к удвоенной электронно-циклотронной. Колебания рассматриваются в полуторамерной ($x \in [0, L], v_x, v_y$) ионно-электронной ($T_i = T_e$) плазменной системе длиной $L = 10r_D$ и периодическими краевыми условиями.

В ходе первой серии вычислительных экспериментов (со стоячей внешней волной) показано образование стационарных структур отвечающих проявлению высокочастотного диамагнитного эффекта, что напрямую доказывает его существование.

Также выявлен механизм нелинейного вытеснения магнитного поля в областях самофокусировки колебаний; получены опытные зависимости величины диамагнитной поправки от частоты и амплитуды волны накачки (рис. 1). Их сравнение с теоретическим прогнозом показывает их хорошее соответствие.

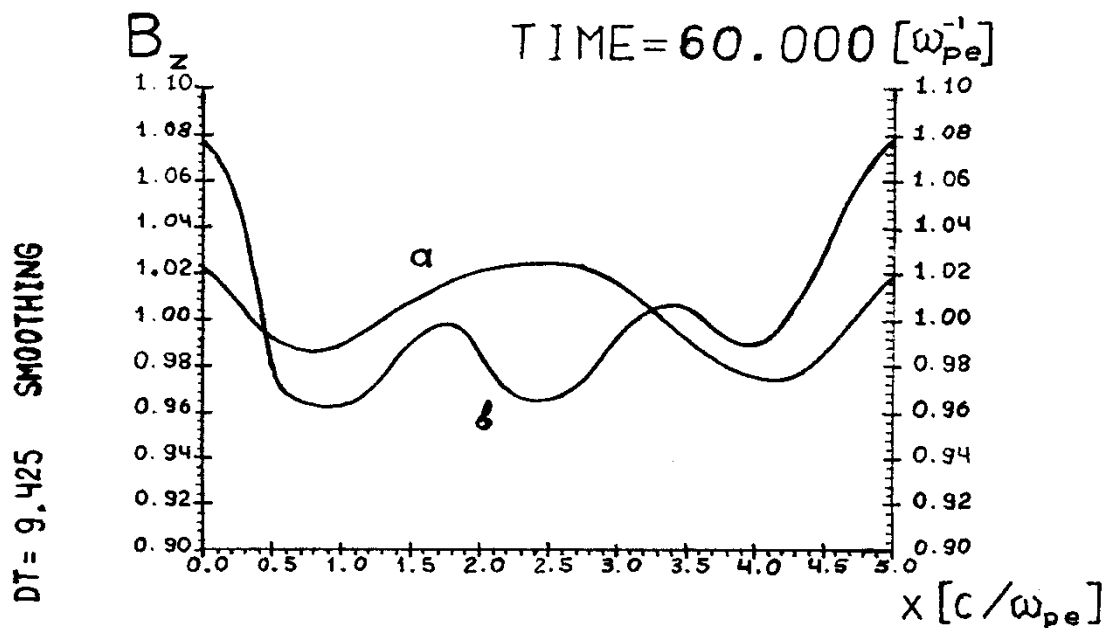


Рис. 2. Усредненный профиль магнитного поля $B_z(x)$, $0 \leq x \leq L$ ($w \leq 1$; $E_0^{\text{ext}} / B_0 = 0.1$ (а), $E_0^{\text{ext}} / B_0 = 0.175$ (б), $k_0 L = 2\pi$; бегущая волна накачки).

Предметом второй серии расчетов (с бегущей внешней волной) являлась связанная с ВЧ диамагнетизмом модуляционная неустойчивость электронно-циклотронных волн.

Здесь получена детальная картина неустойчивости, исследована ее структура и динамика развития, оценена величина инкремента. Показана справедливость вытекающей из дисперсионного уравнения связи между пространственной локализацией самофокусирующихся циклотронных волновых пакетов и интенсивностью внешней волновой накачки (рис. 2).

Таким образом, впервые методом численного эксперимента, не зависящим от ограничений теории, была подтверждена концепция ВЧ диамагнитного эффекта циклотронных колебаний, исследованы его основные свойства и характеристики сопутствующей модуляционной неустойчивости.

Отметим, что в ходе расчетов определена область параметров, позволившая затем обнаружить эффект и в натурном опыте [6]. Последнее обстоятельство весьма показательно в контексте общей идеологии математического моделирования [7].

ЛИТЕРАТУРА

1. В.И. Петвиашвили // Письма в ЖЭТФ. 1976. Т. 23. №12. С. 682.
2. В.Е. Захаров // ЖЭТФ. 1972. Т. 62. №5. С. 1745.

3. А.К. Некрасов, В.И. Петвиашвили // ЖЭТФ. 1979. Т. 77. №2. С. 605.
4. Л.В. Бородачев, А.К. Некрасов // Вестник МГУ. Сер. 3. 1984. Т. 25. №5. С. 91.
5. Л.В. Бородачев, И.В. Мингалев, О.В. Мингалев “Энциклопедия низкотемпературной плазмы (серия Б)” М.: Янус-К, 2008. С. 136.
6. Ю.Г. Залеский и др. // Письма в ЖЭТФ. 1982. Т. 35. №7. С. 281.
7. А.А. Самарский // Вестник АН СССР. 1979. №5. С. 38.

Моделирование регуляции электронного транспорта в хлоропластах

А.В. Вершубский, В.И. Приклонский, А.Н. Тихонов
*Физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова,
119992, Москва, ГСП-2, Россия*
priklonsky@phys.msu.ru

Представлена обобщенная математическая модель, описывающая ключевые стадии переноса электронов вдоль фотосинтетической цепи электронного транспорта хлоропластов, а также сопряженные с ними процессы трансмембранного переноса протонов. Проведено численное моделирование электронного и протонного транспорта в хлоропластах с учетом регуляции электронного транспорта на акцепторном и донорном участках ФС1. Изучено влияние рН-зависимой активации ферментов цикла Кальвина и диссипации энергии в ФС2 (нефотохимическое тушение) на кинетику фотоиндуцированных редокс-превращений P_{700} , пластохинона, НАДФН, а также изменений внутритилакоидного рН и концентрации АТФ. Показано, что рН-зависимые процессы регуляции электронного транспорта влияют на распределение потоков электронов на акцепторной стороне ФС1 и общую скорость электронного транспорта между ФС2 и ФС1. При активации ферментов цикла Кальвина существенно ослабляется отток электронов на кислород и усиливается потока электронов к НАДФ⁺.

Среди большого разнообразия регуляторных процессов, позволяющих оптимизировать функционирование фотосинтетического аппарата в фотосинтетических системах оксигенного типа (цианобактерии, водоросли, хлоропласты высших растений), следует выделить процессы регуляции электронного транспорта и метаболических процессов, связанные с фотоиндуцированными изменениями рН во внутритилакоидном пространстве (люмене) и в строме хлоропластов.

Численное моделирование электронного и протонного транспорта в хлоропластах с учетом рН-зависимой регуляции электронного транспорта на акцепторном и донорном участках ФС1 обобщает модели, описанные в [1-5]. Был введен двухэлектронный переносчик НАДФН, который может существовать в трёх формах: NADP^+ , NADP^\square и NADPH , а также одноэлектронный переносчик ферредоксин (Fd). От Fd может происходить отток электронов на кислород (реакция Мелера). Дополнительно рассматривается регуляция электронного транспорта, обусловленная влиянием внутритилакоидного рН; на диссипацию энергии в ФС2, которая приводит к нефотохимическому тушению флуоресценции. Результаты «численных экспериментов», выполненных в рамках данной модели, позволили оценить

возможный вклад рН-зависимых факторов в проявление индукционных явлений в кинетике световых стадий фотосинтеза.

Для количественного анализа кинетики электронного транспорта в разных метаболических состояниях мы провели моделирование световых стадий фотосинтеза. Были выполнены «численные эксперименты», описывающие фотоиндуцированные превращения P_{700} , ферредоксина, НАДФ, изменения внутритилакоидного рН и синтез АТФ при функционировании различных цепей фотосинтетического транспорта электронов. Схема рассматриваемых процессов показана на рис. 1.

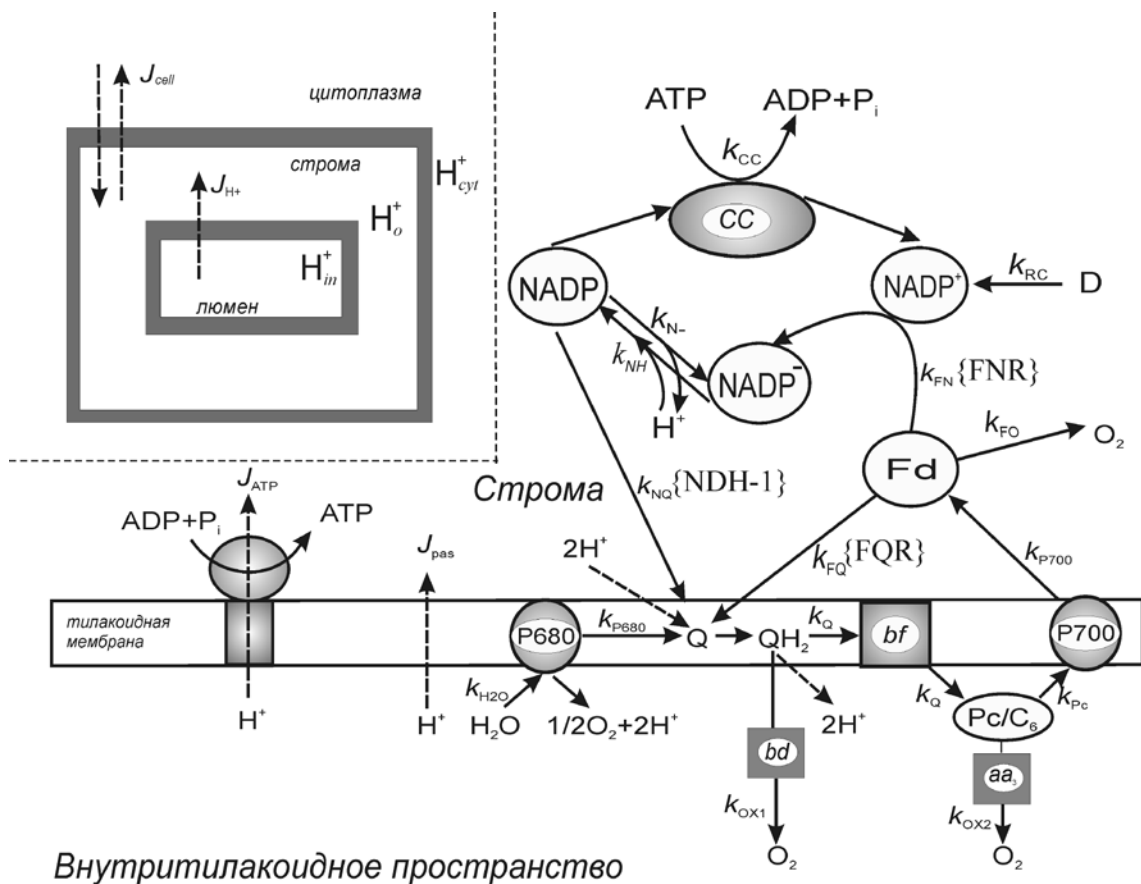


Рис. 1. Процессы электронного и протонного транспорта, рассматриваемые в модели (a). NDH – NAD(P)H-дегидрогеназа; FQR – ферредоксин-хинон редуктаза; FNR – ферредоксин-NADP-редуктаза; *bd*, *aa₃* – терминальные оксидазы типа *bd* и *aa₃*. Показана схема потоков протонов, описываемых в модели.

Обобщенная математическая модель описывает ключевые стадии переноса электронов вдоль фотосинтетической цепи электронного транспорта, а также сопряженные с ними процессы трансмембранного переноса протонов. В общем случае, если рассматриваются фотосинтетические процессы в клетках цианобактерий, необходимо также учитывать работу дыхательной цепи электронного транспорта, имеющей общие участки с фотосинтетической цепью переноса электронов.

В модели учитывается, что на акцепторной стороне ФС1 может происходить разделение потока электронов на три части. Первый поток – нециклический транспорт

электронов ($\text{ФС2} \rightarrow \text{ФС1} \rightarrow \text{НАДФ}^+ \rightarrow \text{Цикл Кальвина}$) обеспечивает образование НАДФН. Ферредоксин, принимающий электрон от ФС1, окисляется, передавая электрон на НАДФ⁺ (через ферредоксин-НАДФ-редуктазу). Второй поток – циклический транспорт электронов вокруг ФС1, при котором электроны от ФС1 возвращаются в цепь электронного переноса между ФС2 и ФС1; этот поток не связан с восстановлением НАДФ⁺. Третий путь оттока электронов от ФС1 – перенос электрона от ФС1 на молекулу O₂ (реакция Мелера). Наличие альтернативных (циклических) путей электронного транспорта дает возможность для поддержания оптимальных скоростей электронного переноса и синтеза АТФ. Альтернативные пути переноса электронов позволяют осуществлять дополнительный синтез молекул АТФ, тем самым, изменяя соотношение АТФ и НАДФН.

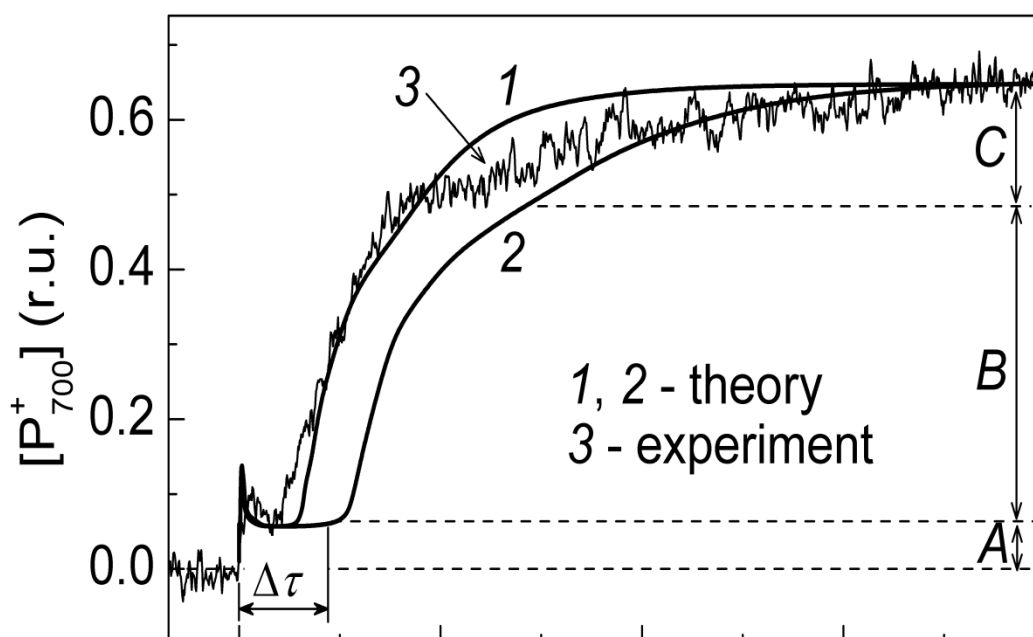


Рис. 2. Сравнение кинетики фотоиндуцированных изменений относительных концентраций электронных переносчиков P_{700}^+

Результаты математического моделирования, выполненного в настоящей работе, позволили проанализировать влияние различных факторов на регуляцию электронного транспорта на акцепторном и донорном участке ФС1, а также выделить их вклад в появление сложной кинетики электронного транспорта в хлоропластах. Описана кинетика окислительно-восстановительных превращений P_{700} при разных условиях активации цикла Кальвина с учетом эффектов нефотохимического тушения. Полученные кинетические кривые в целом достаточно хорошо описывают основные закономерности сложной кинетики фотоокисления P_{700} в листьях высших растений.

ЛИТЕРАТУРА

1. А.В. Вершубский, В.И. Приклонский, А.Н. Тихонов // Биофизика. 2004. Т. 49. № 1. С. 57.
2. А.В. Вершубский, В.И. Приклонский, А.Н. Тихонов // Биохимия. 2004. Т. 69. № 9. С. 1251.

3. *А.В. Вершубский, В.И. Приклонский, А.Н. Тихонов* // Журн. физ. химии. 2006. Т. 80. № 3. С. 552.
4. *А.В. Вершубский, В.И. Приклонский, А.Н. Тихонов* // Российский хим. журн. 2007. Т. 51. № 1. С. 59.
5. *Кувыкин И.В и др.* // Биофизика. 2009. Т. 54. № 4. С. 647.