

3. Задача с данными на характеристиках (задача Гурса)

Простейшая задача Гурса:

$$u_{xy} = f(x, y), \quad x > 0, \quad y > 0, \quad (1)$$

$$u(x, 0) = \varphi_1(x), \quad u(0, y) = \varphi_2(y) \quad (2)$$

$$\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = u(0, 0). \quad (3)$$

Пусть решение задачи (1)-(3) существует. Получим его явное представление через входные данные.

Проинтегрируем (1) по прямоугольнику

$$\mathfrak{R} = \{0 < \xi < x, 0 < \eta < y\}:$$

$$\int_{\mathfrak{R}} u_{xy} ds = \int_0^y \int_0^x u_{\xi\eta} d\xi d\eta = u(x, y) - u(x, 0) - u(0, y) + u(0, 0) =$$

$$= u(x, y) - \varphi_1(x) - \varphi_2(y) + \varphi_1(0),$$

$$u(x, y) = \varphi_1(x) + \varphi_2(y) - \varphi_1(0) + \int_0^y \int_0^x f(\xi, \eta) d\xi d\eta. \quad (4)$$

Из формулы (4) следует единственность решения задачи (1)-(3). В предположении дифференцируемости функций $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(y)$ и непрерывности функции $f(x, y)$ из формулы (4) следует существование решения.

Рассмотрим общую задачу Гурса:

$$u_{xy} + a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + c(x, y)u = f(x, y), \quad x > 0, y > 0, \quad (5)$$

$$u(x, 0) = \varphi_1(x), \quad u(0, y) = \varphi_2(y) \quad (6)$$

$$\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = u(0, 0), \quad (7)$$

где $a(x, y)$, $b(x, y)$, $c(x, y)$ – гладкие функции.

Обозначим $F(x, y, u, u_x, u_y) = f - au_x - bu_y - cu.$

Тогда

$$u(x, y) = \varphi_1(x) + \varphi_2(y) - \varphi_1(0) + \int_{\mathfrak{R}} F d\xi d\eta = \int_0^y \int_0^x F d\xi d\eta + \Phi(x, y), \quad (8)$$

где $\Phi(x, y) = \varphi_1(x) + \varphi_2(y) - \varphi_1(0).$

Введем интегро-дифференциальный оператор A: $A[u] = \int_0^y \int_0^x F d\xi d\eta.$

Уравнение (8) запишем в виде интегро-дифференциального уравнения

Вольтерра: $u = A[u] + \Phi, \quad (9)$

которое решаем методом последовательных приближений:

$$u_n = A[u_{n-1}] + \Phi, \quad n = 1, 2, \dots; \quad u_0 - \text{задано.} \quad (10)$$

Положим $u_0(x, y) = 0.$ Тогда $u_1 = \int_0^y \int_0^x f(\xi, \eta) d\xi d\eta + \Phi(x, y),$

$$u_n = u_1 - \int_0^y \int_0^x \left\{ a \frac{\partial u_{n-1}}{\partial \xi} + b \frac{\partial u_{n-1}}{\partial \eta} + cu_{n-1} \right\} d\xi d\eta. \quad (11)$$

Из (11) следует:

$$\frac{\partial u_n}{\partial x} = \frac{\partial u_1}{\partial x} - \int_0^y \left\{ a(x, \eta) \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x} + b(x, \eta) \frac{\partial u_{n-1}}{\partial \eta} + c(x, \eta) u_{n-1} \right\} d\eta \quad (12)$$

$$\frac{\partial u_n}{\partial y} = \frac{\partial u_1}{\partial y} - \int_0^x \left\{ a(\xi, y) \frac{\partial u_{n-1}}{\partial \xi} + b(\xi, y) \frac{\partial u_{n-1}}{\partial y} + c(\xi, y) u_{n-1} \right\} d\xi$$

Докажем равномерную сходимость последовательностей

$$\left\{ u_n(x, y) \right\}, \quad \left\{ \frac{\partial u_n}{\partial x}(x, y) \right\}, \quad \left\{ \frac{\partial u_n}{\partial y}(x, y) \right\}$$

Пусть $z_n = u_{n+1} - u_n$. Из (11) и (12) следует:

$$z_n(x, y) = - \int_0^y \int_0^x \left\{ a(\xi, \eta) \frac{\partial z_{n-1}}{\partial \xi} + b(\xi, \eta) \frac{\partial z_{n-1}}{\partial \eta} + c(\xi, \eta) z_{n-1} \right\} d\xi d\eta, \quad (13)$$
$$\frac{\partial z_n}{\partial x}(x, y) = - \int_0^y \left\{ a(x, \eta) \frac{\partial z_{n-1}}{\partial x} + b(x, \eta) \frac{\partial z_{n-1}}{\partial \eta} + c(x, \eta) z_{n-1} \right\} d\eta,$$

$$\frac{\partial z_n}{\partial y}(x, y) = - \int_0^x \left\{ a(\xi, y) \frac{\partial z_{n-1}}{\partial \xi} + b(\xi, y) \frac{\partial z_{n-1}}{\partial y} + c(\xi, y) z_{n-1} \right\} d\xi. \quad (13)$$

Предположим, что в квадрате $G = \{0 < x, y < L\}$

$$|a(x, y)| \leq M, \quad |b(x, y)| \leq M, \quad |c(x, y)| \leq M, \quad |z_0| \leq H, \quad \left| \frac{\partial z_0}{\partial x} \right| \leq H, \quad \left| \frac{\partial z_0}{\partial y} \right| \leq H, \quad (14)$$

где $M > 0, H > 0$ – положительные константы.

Из (13), и (14) следуют мажорантные оценки:

$$|z_1| \leq 3HMxy \leq 3HM \frac{(x+y)^2}{2!}, \quad \left| \frac{\partial z_1}{\partial x} \right| \leq 3HM y \leq 3HM(x+y), \quad \left| \frac{\partial z_1}{\partial y} \right| \leq 3HM x \leq 3HM(x+y).$$

По индукции для любого $n \geq 1$ получаем:

$$|z_n| \leq 3HM^n K^{n-1} \frac{(x+y)^{n+1}}{(n+1)!}, \quad \left| \frac{\partial z_n}{\partial x} \right| \leq 3HM^n K^{n-1} \frac{(x+y)^n}{n!}, \quad \left| \frac{\partial z_n}{\partial y} \right| \leq 3HM^n K^{n-1} \frac{(x+y)^n}{n!},$$

где $K=L+2$. Так как $(x, y) \in \bar{G}$, то

$$\left| z_n \right| \leq \frac{3H}{K^2 M} \frac{(2KLM)^{n+1}}{(n+1)!}, \quad \left| \frac{\partial z_n}{\partial x} \right| \leq \frac{3H}{K} \frac{(2KLM)^n}{n!}, \quad \left| \frac{\partial z_n}{\partial y} \right| \leq \frac{3H}{K} \frac{(2KLM)^n}{n!}. \quad (15)$$

В правой части (15) с точностью до множителей пропорциональности стоят общие члены разложения $\exp(2KLM)$. Следовательно, **последовательности функций**

$$u_n = u_1 + z_1 + \dots + z_{n-1}, \quad \frac{\partial u_n}{\partial x} = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial z_1}{\partial x} + \dots + \frac{\partial z_{n-1}}{\partial x}, \quad \frac{\partial u_n}{\partial y} = \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial z_1}{\partial y} + \dots + \frac{\partial z_{n-1}}{\partial y}$$

равномерно сходятся к предельным функциям $u(x,y)$, $V(x,y)$, $W(x,y)$:

$$u(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x, y), \quad V(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial u_n}{\partial x}, \quad W(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial u_n}{\partial y}.$$

перейдем в формулах (11), (12) к пределу при $n \rightarrow \infty$:

$$u = u_1(x, y) - \int_0^y \int_0^x \{a(\xi, \eta)V + b(\xi, \eta)W + c(\xi, \eta)u\} d\xi d\eta,$$

$$V = \frac{\partial u_1}{\partial x} - \int_0^y \{a(x, \eta)V + b(x, \eta)W + c(x, \eta)u\} d\eta, \tag{16}$$

$$W = \frac{\partial u_1}{\partial y} - \int_0^x \{a(\xi, y)V + b(\xi, y)W + c(\xi, y)u\} d\xi.$$

Отсюда следует, что $V=ux$, $W=uy$ и $u(x,y)$ удовлетворяют уравнению (8). Непосредственным дифференцированием устанавливается, что $u(x,y)$ удовлетворяет (5). Удовлетворение условиям (6) следует из (16), (7) и вида функций $u_1(x,y)$ и $\Phi(x,y)$.

Доказательство единственности решения задачи (5)-(7) (от противного).

Пусть $u_1(x, y) \neq u_2(x, y)$ - два решения. Рассмотрим $U(x, y) = u_1(x, y) - u_2(x, y)$

$$U(x, y) = - \int_0^x \int_0^y \{ aU_\xi + bU_\eta + cU \} d\xi d\eta.$$

Из (14) следует

$$|U| \leq H_1, \quad |U_x| \leq H_1, \quad |U_y| \leq H_1.$$

При $(x, y) \in G$ для любого n (17)

$$|U| \leq \frac{3H_1}{K^2M} \frac{(2KLM)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Из (17) следует, что

$$U(x, y) \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad u_1(x, y) \equiv u_2(x, y) -$$

противоречие.