МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. М.В. ЛОМОНОСОВА

Физический факультет

**В.Т. Волков, Д.В. Минаев,
И.Е. Могилевский, В.Ю. Попов, Н.Е. Шапкина**

Теория функций комплексной переменной с примерами и задачами

Пособие по математике для студентов физических, физико-математических и инженерных специальностей

Москва 2023

В о л к о в В. Т., М и н а е в Д. В.,
М о г и л е в с к и й И. Е., П о п о в В. Ю.,
Ш а п к и н а Н. Е.,
Теория функций комплексной переменной с примерами и задачами. Пособие по математике для студентов физических, физико-математических и инженерных специальностей

Учебное пособие «Теория функций комплексной переменной с примерами и задачами» написано на основе многолетнего опыта чтения авторами лекций и проведения семинарских занятий по данному курсу на физическом факультете МГУ имени М.В. Ломоносова.

Пособие состоит из 19 разделов, соответствующих темам читаемого курса. По каждой теме приведено подробное изложение теоретического материала с доказательствами основных теорем, сопровождаемое примерами с решениями и упражнениями для самостоятельной работы. При этом нам представляется методически важным демонстрация подходов и основных математических идей на примере решения задач.

Подбор задач имеет целью помочь студентам в освоении теоретического материала, расширить понимание ими основных разделов читаемого курса и методов, используемых при доказательстве теорем. Для лучшего освоения материала каждый разобранный пример сопровождается аналогичной задачей, которая может быть использована как для самостоятельного решения, так и для разбора на занятии. В конце каждого раздела приводится список задач для самостоятельного решения, а также вопросов и теоретических задач, разъясняющих и углубляющих некоторые аспекты читаемого курса и включенных в экзаменационные билеты.

Предлагаемое учебное пособие соответствует читаемому в настоящее время на физическом факультете МГУ курсу лекций «Теория функций комплексной переменной». Для понимания материала не требуется специальной математической подготовки, кроме знания основ математического анализа. Пособие «Теория функций комплексной переменной» рассчитано на широкий круг студентов и преподавателей физических, физико-математических и инженерных специальностей. Оно имеет целью помочь студентам в их самостоятельной работе, а преподавателям – при чтении лекций, проведении практических занятий и подготовке экзаменационных материалов.

ОГЛАВЛЕНИЕ

§ 1. Комплексные числа и действия над ними

Определение 1.1 ***Комплексным числом*** *называется упорядоченная пара действительных чисел* $z = (a; b)$*. Первое число* $a = \operatorname{Re} z$ *называется действительной частью комплексного числа, второе число* $b = \operatorname{Im} z$ *называется мнимой частью комплексного числа.*

1.1. Основные операции над комплексными числами. Два комплексных числа $z_1 = (a_1; b_1)$ и $z_2 = (a_2; b_2)$ считаются равными, если равны их действительные и мнимые части: $z_1 = z_2 \Longleftrightarrow a_1 = a_2,\ b_1 = b_2$.

Суммой двух комплексных чисел $\boldsymbol{z_1 = (a_1; b_1)}$ **и** $\boldsymbol{z_2 = (a_2; b_2)}$ называется число $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2; b_1 + b_2)$.

Произведением двух комплексных чисел называется комплексное число

$$z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2; a_1 b_2 + b_1 a_2).$$

Действительные числа являются частью множества комплексных чисел и имеют вид $a = (a; 0)$.

Произведение действительного числа a и комплексного $(b; c)$ есть $a \cdot (b; c) = (ab; ac)$.

Пример 1.1. *Умножить число* $(0; 1)$ *само на себя.*
Решение.

$$(0; 1) \cdot (0; 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1; 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1) = (-1; 0) = -1.$$

Таким образом, квадрат комплексного числа $(0; 1)$ равен -1. Такое число, очевидно, не являющееся действительным, называется **мнимой единицей** и обозначается буквой i.

Задача 1.2. *Умножьте число* $(1; 0)$ *само на себя.*

Любое комплексное число $z = (a; b)$ в соответствии с приведенными определениями можно представить как

$$(a, b) = (a; 0) + (0; b) = a \cdot (1; 0) + b \cdot (0; 1) = a + ib.$$

Это **алгебраическая форма комплексного числа**.

Операция **вычитания** определяется, опираясь на уже введенные операции сложения и умножения на число:

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-1) \cdot z_2 = (a_1 - a_2; b_1 - b_2).$$

Легко видеть, что операции сложения (вычитания) и умножения комплексных чисел могут быть произведены в алгебраической форме по обычным правилам работы со скобками.

Сложение:

$$z_1 + z_2 = (a_1; b_1) + (a_2; b_2) \equiv (a_1 + a_2; b_1 + b_2) \quad \Longleftrightarrow$$
$$z_1 + z_2 = (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = a_1 + ib_1 + a_2 + ib_2 =$$
$$= (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2);$$

умножение:

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1; b_1) \cdot (a_2; b_2) \equiv (a_1a_2 - b_1b_2; a_1b_2 + b_1a_2) \quad \Longleftrightarrow$$
$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + ib_1) \cdot (a_2 + ib_2) = a_1a_2 + ia_1b_2 + ib_1a_2 + i^2 \cdot b_1b_2 =$$
$$= (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + b_1a_2) = (a_1a_2 - b_1b_2; a_1b_2 + b_1a_2).$$

Комплексно сопряженным числом к $z = a + ib$ называют комплексное число

$$\overline{z} = a - ib.$$

Пример 1.3. *Доказать, что* $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$.
Доказательство.

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{a_1 + ib_1 + a_2 + ib_2} = \overline{(a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)} =$$
$$(a_1 + a_2) - i\ (b_1 + b_2) = a_1 - ib_1 + a_2 - ib_2 = \overline{z_1} + \overline{z_2}.$$

Задача 1.4. *Докажите, что* $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$.

Модулем комплексного числа $z = a + ib$ называют действительное число $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, т.е. $|z|^2 = a^2 + b^2$.

Пример 1.5. *Доказать, что* $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$
Доказательство.

$$z \cdot \overline{z} = (a + ib) \cdot (a - ib) = a^2 + i(-i)b^2 + iba - aib = a^2 + b^2.$$

Операцию **деления комплексных чисел** определим как обратную к операции умножения: число $z = (a; b)$ называется **частным** от деления $z_1 = (a_1; b_1)$ на $z_2 = (a_2; b_2)$, если $z \cdot z_2 = z_1$.

Частное двух чисел можно получить, используя умножение на комплексно сопряженное к знаменателю число, т.е.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z}_2}{|z_2|^2} = \frac{(a_1 + ib_1)(a_2 - ib_2)}{a_2^2 + b_2^2} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + i(b_1a_2 - a_1b_2)}{a_2^2 + b_2^2}.$$

Действительно,

$$\frac{z_1 \cdot \overline{z}_2}{|z_2|^2} \cdot z_2 = \frac{z_1 \cdot (\overline{z}_2 \cdot z_2)}{|z_2|^2} = z_1$$

так как $z_2 \cdot \overline{z}_2 = |z_2|^2$.

Задача 1.6. *Докажите, что* а) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$, б) $\overline{(\overline{z})} = z$.

Задача 1.7. *Найдите* а) $\overline{(z \cdot z)}$; б) $\overline{(z \cdot \overline{z})}$.
Ответ: а) $a^2 - b^2 - 2abi$; б) $a^2 + b^2$.
<u>Важно помнить:</u> $z \cdot \overline{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$,

$$\operatorname{Re} z = \frac{z + \overline{z}}{2}, \quad \operatorname{Im} z = \frac{z - \overline{z}}{2i}.$$

Пример 1.8. *Вычислить* $(2 - i)(1 + 3i)$, *представив результат в алгебраической форме.*
Решение.

$$(2 - i)(1 + 3i) = 2 \cdot 1 - i \cdot 1 + 2 \cdot 3 \cdot i - 3 \cdot i \cdot i = 5 + 5i.$$

Задача 1.9. *Найдите* $(2 + i)(1 - 3i)$.
Ответ: $5 - 5i$.

Пример 1.10. *Вычислить* $\frac{2 - i}{1 + 3i}$, *представив результат в алгебраической форме.*
Решение.

$$\frac{2 - i}{1 + 3i} = \frac{(2 - i)(1 - 3i)}{(1 + 3i)(1 - 3i)} = \frac{-1 - 7i}{1 + 9} = -0,1 - 0,7i.$$

Задача 1.11. *Представьте* $\frac{2 + i}{1 - 3i}$ *в виде комплексного числа в алгебраической форме.*
Ответ: $-0,1 + 0,7i$.

Задача 1.12. *Представьте* $\frac{1}{i}$ *в виде комплексного числа в алгебраической форме.*
Ответ: $-i$.
<u>Полезно помнить:</u> $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$.
В общем случае

$$i^n = \begin{cases} 1, & n = 4k, \\ i, & n = 4k + 1, \\ -1, & n = 4k + 2, \\ -i, & n = 4k + 3, \end{cases} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Пример 1.13. *Представить а)* $\left(\dfrac{i^5+2}{i^{13}+1}\right)^2$, *б)* $(2+i)^4$ *в виде комплексного числа в алгебраической форме.*
Решение.

$$\text{а) } \left(\frac{i^5+2}{i^{13}+1}\right)^2 = \left(\frac{i+2}{i+1}\right)^2 = \left(\frac{(i+2)(-i+1)}{(i+1)(-i+1)}\right)^2 = \left(\frac{3-i}{2}\right)^2 = \frac{4-3i}{2};$$

б) $(2+i)^4 = (3+4i)^2 = 24i-7$.

Задача 1.14. *Представьте а)* $\dfrac{1+i^8}{i-3i^7}$, *б)* $\left(i^{15}-1\right)\left(i^3+2\right)$ *в виде комплексного числа в алгебраической форме.*
Ответ: а) $-0,5i$; б) $-3-i$.

Задача 1.15. *Представьте* $\dfrac{(1+i)^{10}}{32}$ *в виде комплексного числа в алгебраической форме.*
Ответ: -1.

1.2. Геометрическая интерпретация комплексных чисел.

Будем рассматривать комплексное число $z=(x;y)$ как точку на плоскости с координатами $(x;y)$. Назовем эту плоскость **комплексной плоскостью**, $x=\operatorname{Re} z$, $y=\operatorname{Im} z$ (рис. 1).

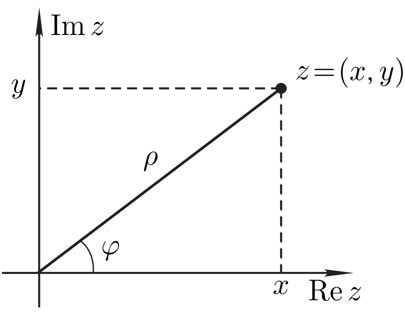


Рис. 1.

Таким образом, между комплексными числами и точками на комплексной плоскости устанавливается взаимно однозначное соответствие. Также можно ставить в соответствие комплексным числам не точки на комплексной плоскости, а векторы, идущие из начала координат в точку $z=(x;y)$.

Расстояние от начала координат до точки $z=(x,y)$, $\rho=\sqrt{x^2+y^2}=|z|$ есть **модуль комплексного числа**. Модуль равен длине вектора, исходящего из начала координат, с концом в точке $(x;y)$.

Угол, отсчитываемый от оси Ox против часовой стрелки, называется **аргументом комплексного числа ($\operatorname{Arg} z$)**. Отметим, что аргумент комплексного числа определяется с точностью до аддитивного слагаемого: $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$, $\varphi=\arg z\in[0;2\pi)$.

Некоторые простейшие множества точек на комплексной плоскости.

а) $|z - z_0| = a$ $(a > 0)$ — окружность с центром в точке z_0 радиуса a;

б) $|z - z_0| < a$ $(a > 0)$ — открытый круг с центром в точке z_0 радиуса a;

в) $|z - z_0| > a$ $(a > 0)$ — область вне круга с центром в точке z_0 радиуса a;

г) $a < |z - z_0| < b$ $(0 < a < b)$ — открытое кольцо с центром в точке z_0;

д) $\arg(z - z_0) = \varphi$ — луч, с началом в точке z_0, идущий под углом φ к положительному направлению действительной оси;

е) $\alpha < \arg(z - z_0) < \beta$ — внутренность сектора с вершиной в точке z_0 и углом $\beta - \alpha$;

ж) $\mathrm{Re}\ z = a$ — прямая, параллельная мнимой оси, проходящая через точку $(a; 0)$;

з) $\mathrm{Im}\ z = b$ — прямая, параллельная действительной оси, проходящая через точку $(0; b)$.

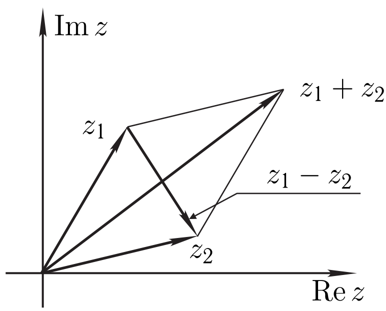


Рис. 2.

Сложение двух комплексных чисел можно рассматривать как **сложение двух векторов** на плоскости, аналогично с вычитанием (рис. 2). При этом справедливы **неравенства треугольника**

$$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|\,; \;\; |z_1 - z_2| \geqslant ||z_1| - |z_2||\,,$$

где $|z_1 - z_2|$ — расстояние между точками z_1 и z_2 на комплексной плоскости.

Пример 1.16. *Изобразить на комплексной плоскости*
а) $|z - i| < 2$; *б)* $|z + 1 + i| > \sqrt{2}$; *в)* $\dfrac{\pi}{2} \leqslant \arg(z + i) \leqslant \dfrac{3\pi}{4}$.
Ответ: рис. 3.

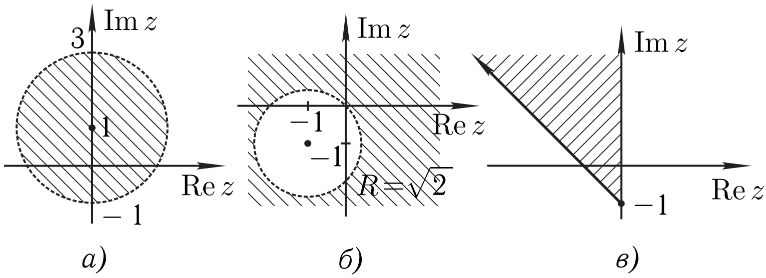


Рис. 3.

Задача 1.17. *Изобразите на комплексной плоскости*
а) $|z-i-1| \leqslant 2$; *б)* $\dfrac{\pi}{2} < \arg(z-1) < \dfrac{3\pi}{2}$.

1.3. Задачи для самостоятельного решения.

1. Представьте комплексное число в алгебраической форме:
   а) $\dfrac{1+i}{1-i}$; б) $\dfrac{1}{i}$; в) $\dfrac{\sqrt{2}}{1+i}$; г) $\dfrac{\sqrt{2}}{\overline{1-i}}$;
   д) $(3-2i)\,(4+i)$; е) $(3-2i)\,\overline{(4+i)}$;
   ж) $\dfrac{(3+2i)(4+i)}{2+2i}$; з) $\left(\dfrac{1+2i}{2-i}\right)^3$.
2. Пусть $z = a + bi$. Найдите а) $\dfrac{z}{\overline{z}}$; б) $z\,|z|$; в) $z+\overline{z}$;
   г) $(z+\overline{z})\,(z-\overline{z})$.
3. Найдите модуль и аргумент найденных комплексных чисел из пункта 1.
4. Изобразите на комплексной плоскости множества точек, задаваемые уравнениями и неравенствами:
   а) $|z| - 3\ \mathrm{Im}\ z = 6$; б) $3\,|z| - \mathrm{Re}\ z = 12$;
   в) $|z-i| < 3$; г) $|z+1+i| > \sqrt{2}$;
   д) $1 < |z-1+2i| < 3$; е) $\dfrac{\pi}{4} < \arg z < \dfrac{\pi}{3}$;
   ж) $\pi < \mathrm{Im}\ z < 2\pi$; з) $\dfrac{\pi}{2} \leqslant \arg(z+i) \leqslant \dfrac{3\pi}{4}$;
   и) $\mathrm{Im}\ z > 0$; к) $\mathrm{Im}\ iz > 2$; л) $\pi < \mathrm{Re}\ z < 2\pi$.

1.4. Тригонометрическая и показательная формы комплексного числа. Если ввести полярную систему координат $(\rho;\varphi)$, то $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$. При этом

$$\rho = \left(x^2+y^2\right)^{1/2} = |z| = \left((\mathrm{Re}\ z)^2 + (\mathrm{Im}\ z)^2\right)^{1/2},$$

а $\varphi = \arg z$ — аргумент комплексного числа (рис. 1).
<u>Важно помнить:</u> для комплексного числа 0=(0;0) модуль равен 0, а аргумент не определен.

Представление комплексного числа в виде

$$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

называется **тригонометрической формой записи комплексного числа**.

Определим e^{ix}, где x — любое действительное число, как

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x.$$

Это соотношение называют **формулой Эйлера.**

Тогда $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$, и мы получаем $z = \rho e^{i\varphi}$ — комплексное число **в показательной (экспоненциальной) форме**.

Теорема 1.1 *Пусть φ, $\psi \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$.*
Тогда
1) $e^{i\cdot 0} = 1$; *2)* $e^{i\varphi} \cdot e^{i\psi} = e^{i(\varphi+\psi)}$; *3)* $e^{i(\varphi+2\pi k)} = e^{i\varphi}$;
4) $e^{-i\varphi} = \dfrac{1}{e^{i\varphi}}$; *5)* $\left|e^{i\varphi}\right| = 1$.

Доказательство. 1) $e^{i\cdot 0} = \cos(0) + i\sin(0) = 1$. Остальные утверждения теоремы доказываются с помощью формулы Эйлера аналогично.

Пример 1.18. *Представить комплексное число в показательной форме:*
а) $z = 1$: $|1| = 1$, $\arg 1 = 0$; $1 = 1\cdot(\cos 0 + i\sin 0) = 1\cdot e^{i\cdot 0}$;
б) $z = i$: $|i| = 1$, $\arg i = \dfrac{\pi}{2}$; $i = 1\cdot\left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}\right) = 1\cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$;
в) $z = -e^{i\varphi}$: $-e^{i\varphi} = (-1)\cdot e^{i\varphi} = 1\cdot e^{i\pi}\cdot e^{i\varphi} = 1\cdot e^{i(\pi+\varphi)}$, следовательно, $\left|-e^{i\varphi}\right| = 1$, $\arg\left(-e^{i\varphi}\right) = \pi + \varphi$.

Задача 1.19. *Представьте комплексное число в показательной форме:*
а) $z = e^{i\varphi}$; *б)* $z = -1$; *в)* $z = -i$.
Ответ: а) $1\cdot e^{i\varphi}$; б) $1\cdot e^{i\pi}$; в) $1\cdot e^{\frac{3\pi i}{2}}$.

Полезно помнить: $e^{i\cdot 0} = 1$; $e^{i\cdot\frac{\pi}{2}} = i$; $e^{i\cdot\pi} = -1$; $e^{i\cdot\frac{3\pi}{2}} = e^{-i\cdot\frac{\pi}{2}} = -i$.

Пример 1.20. *Представить комплексное число в тригонометрической и показательной формах*
а) $-2 + 2i = 2\sqrt{2}\left(\dfrac{-1}{\sqrt{2}} + i\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3\pi}{4} + i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}\,e^{i\frac{3\pi}{4}}$;
б) $\sqrt{3} - i = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - i\dfrac{1}{2}\right) = 2\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right) = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

Задача 1.21. *Представьте комплексное число в показательной форме:*
а) -5; *б)* $z=-1-\sqrt{3}\,i$; *в)* $z=1+i$.
Ответ: а) $5e^{i\pi}$; б) $2e^{i\frac{4\pi}{3}}$; в) $\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$.

При **умножении двух комплексных чисел** их **модули перемножаются,** а **аргументы складываются**:
если $z_1=a_1+ib_1=\rho_1e^{i\alpha}$, $z_2=a_2+ib_2=\rho_2e^{i\beta}$,
то $z_1\cdot z_2=\rho_1\cdot\rho_2e^{i\alpha+i\beta}$, $|z_1\cdot z_2|=\rho_1\cdot\rho_2$, $\arg(z_1\cdot z_2)=\alpha+\beta$.

При **делении двух комплексных чисел** их **модули делятся** (модуль знаменателя не равен нулю), а **аргументы вычитаются**:
$z_1=a_1+ib_1=\rho_1e^{i\alpha}$, $z_2=a_2+ib_2=\rho_2e^{i\beta}$, то $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{\rho_1}{\rho_2}e^{i\alpha-i\beta}$,
$\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{\rho_1}{\rho_2}$, $\arg\dfrac{z_1}{z_2}=\alpha-\beta$.

<u>Полезно помнить</u>: алгебраической формой записи комплексных чисел удобно пользоваться при операциях сложения и вычитания, а показательной — при умножении, делении, возведении в целую степень, извлечении целого корня (возведение в рациональную степень).

1.5. Возведение в целую степень.

С помощью **формулы Муавра**

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=\left(e^{i\varphi}\right)^n=\cos(n\varphi)+i\sin(n\varphi)$$

мы получаем

$$z^n=(\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi))^n=\rho^n\left(e^{i\varphi}\right)^n= \\ =\rho^n\left(\cos(n\varphi)+i\sin(n\varphi)\right)=\rho^ne^{in\varphi}.$$

Пример 1.22. *Представить число* $(1+i)^3$ *в алгебраической форме.*
Решение.

$$(1+i)^3=\left(\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^3=2^{\frac{3}{2}}e^{3i\frac{\pi}{4}}=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)=-2+2i.$$

Задача 1.23. *Представьте число* $\left(-1-\sqrt{3}\,i\right)^{13}$ *в показательной форме.*
Ответ: $2^{13}\cdot e^{i\frac{4\pi}{3}}$

Пример 1.24. *Представить число* $\left(\dfrac{1-i\sqrt{3}}{1+i}\right)^{40}$ *в алгебраической форме.*

Решение.

$$\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{1+i}\right)^{40}=\left(\frac{2\cdot e^{-i\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{2}\cdot e^{i\frac{\pi}{4}}}\right)^{40}=\frac{2^{40}\cdot e^{-i\frac{40\pi}{3}}}{2^{20}\cdot e^{i\frac{40\pi}{4}}}=\frac{2^{40}\cdot e^{-i\frac{4\pi}{3}}}{2^{20}}=2^{20}\cdot e^{-i\frac{4\pi}{3}}=$$
$$=2^{20}\left(\cos\left(-\frac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{4\pi}{3}\right)\right)=2^{20}\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Задача 1.25. *Представьте число* $\left(\dfrac{1-i}{1+i\sqrt{3}}\right)^{20}$ *в алгебраической форме.*

Ответ: $2^{-11}\left(1-i\sqrt{3}\right)$.

Извлечение корня n-ной степени.

Определение 1.2 *Корнем n-ой степени из комплексного числа z называется такое число w, что $w^n=z$.*

При извлечении корня удобно представить число в виде $z=|z|e^{i\operatorname{Arg}z}=|z|e^{i(\arg z+2\pi k)}$, $k\in\mathbb{Z}$, тогда будут найдены **все** значения корня:

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{|z|e^{i(\arg z+2\pi k)}}=\sqrt[n]{|z|}\,e^{\frac{i(\arg z+2\pi k)}{n}}=$$
$$=\sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\arg z+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\arg z+2\pi k}{n}\right),$$

где $k=0,1,\ldots,n-1$.

Таким образом корень n-той степени из комплексного числа имеет n различных значений (легко проверить, что значение корня при $k=n$ совпадет с значением при $k=0$, значение корня при $k=n+1$ совпадет с значением при $k=1$ и т.д.). Модули этих комплексных чисел одинаковы и равны $\sqrt[n]{|z|}$, а аргументы различаются на число, кратное $\dfrac{2\pi}{n}$. Точки на комплексной плоскости, соответствующие различным значениям корня n-ой степени, расположены в вершинах правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса $\sqrt[n]{|z|}$ с центром в точке $z=0$.

Пример 1.26. *Представить комплексное число* $\sqrt[3]{-27}$ *в алгебраической и тригонометрической формах.*

Решение.

$$\sqrt[3]{-27}=\sqrt[3]{27e^{i\pi+2\pi ki}}=3e^{\frac{i\pi+2\pi ki}{3}}=3\left(\cos\frac{\pi+2\pi k}{3}+i\sin\frac{\pi+2\pi k}{3}\right).$$

При $k=0$

$$z_1 = 3\left(\cos\frac{\pi+2\pi\cdot 0}{3} + i\sin\frac{\pi+2\pi\cdot 0}{3}\right) = 3\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right);$$

при $k=1$

$$z_2 = 3\left(\cos\frac{\pi+2\pi\cdot 1}{3} + i\sin\frac{\pi+2\pi\cdot 1}{3}\right) = 3\left(-1 + i\cdot 0\right);$$

при $k=2$

$$z_3 = 3\left(\cos\frac{\pi+2\pi\cdot 2}{3} + i\sin\frac{\pi+2\pi\cdot 2}{3}\right) = 3\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Задача 1.27. *Представьте* $\sqrt[4]{1}$ *в алгебраической форме.*
Ответ: $z_1 = 1$; $z_2 = i$; $z_3 = -1$; $z_4 = -i$.

Пример 1.28. *Решить уравнение* $z^4 + 4 = 0$, *представить решение в тригонометрической форме.*
Решение.

$$z^4 + 4 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad z^4 = -4 \quad \Longleftrightarrow \quad z = \sqrt[4]{-4};$$

$$z = \sqrt[4]{4(\cos\pi + i\sin\pi)} = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}\right)\right),$$

$k = 0; 1; 2; 3.$

Задача 1.29. *Решите уравнение* $z^3 + i = 0$, *представьте решение в показательной форме.*

Ответ: $e^{\frac{\frac{3\pi}{2}i + 2\pi k i}{3}}$, $\quad k = 0; 1; 2.$

1.6. Задачи для самостоятельного решения .

1. Запишите комплексное число в алгебраической, тригонометрической и показательной формах:

   а) $\dfrac{1+i}{1-i}$; б) $\dfrac{1}{i}$; в) $\dfrac{\sqrt{2}}{1+i}$; г) $\dfrac{\sqrt{2}}{1-i}$; д) $(1+i)^{20}$;

   е) $\left(\sqrt{3}+i\right)^6$; ж) $(1-i)^{20}$; з) $(1+i)^{10}$.

2. Найдите модуль и аргумент комплексного числа:

   д) i^3; е) i^4; ж) $(1-i)^{10}$; з) $(1+i)^{20}$.

3. Вычислите (результат представьте в алгебраической и показательной формах:
   а) $z - \dfrac{1}{\overline{z}}$, если $z = i - 1$; б) $z - \dfrac{1}{\overline{z}}$, если $z = i + 1$;
   в) $\dfrac{z}{\overline{z}}$, если $z = 3i + 1$; г) $\left|(1+3i)\,\overline{(3+i)}\right|$;
   д) $\left|\dfrac{3+i}{1-3i}\right|$; е) $\left|\left(\dfrac{2+4i}{3+i}\right)^3\right|$; ж) $\left|(1+i)^6\right|$;
   з) $\operatorname{Im}\left(\dfrac{3-i}{2+i}\right)^{13}$; и) $\operatorname{Re}\left(\dfrac{2-i}{3+i}\right)^{11}$.
4. Найдите значение выражения $z = z_1 z_2$, если x — действительное число:
   а) $z_1 = x + 3i$, $z_2 = 1 + 2i$ и $\operatorname{Re} z = -4$;
   б) $z_1 = x + 5i$, $z_2 = 2 - i$ и $\operatorname{Re} z = 9$;
   в) $z_1 = x + 3i$, $z_2 = 1 + 2i$ и $\operatorname{Im} z = 7$;
   г) $z_1 = 1 + ix$, $z_2 = 2x + i$ и $\operatorname{Im} z = 1$;
   д) $z_1 = 2 - i$, $z_2 = 5 + ix$ и $\operatorname{Re} z = 5$.
5. Изобразите на комплексной плоскости множества точек, задаваемые уравнениями и неравенствами:
   а) $|z-i| + |z+i| = 4$; б) $|z-i| - |z+i| = 2$;
   в) $|z-1+i| = |z+3|$; г) $\overline{z} = z^2$; д) $\pi < \operatorname{Re} z < 2\pi$;
   е) $\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z < 1$; ж) $|z| > \operatorname{Re} z + 1$;
   з) $|z-2| + |z+2| > 3$; и) $|z-i| + |z+i| < 5$;
   к) $|z+i| > |z-1|$.
6. Найдите все решения уравнения. Результат представьте в показательной, алгебраической и тригонометрической формах.
   а) $z^3 - 8 = 0$; б) $z^4 - 1 = 0$; в) $z^4 + 1 = 0$;
   г) $z^2 + z + 1 = 0$; д) $z^2 - 4z + 13 = 0$; е) $|z| = z^2$.

1.7. Последовательности комплексных чисел.

Определение 1.3 ***Последовательностью комплексных чисел*** *$\{z_n\}$ называют упорядоченное счетное множество комплексных чисел.*

Члены последовательности (ее элементы) располагаются в порядке возрастания их номеров.

Определение 1.4 *Говорят, что последовательность $\{z_n\}$ сходится к комплексному числу z , если для $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N(\varepsilon)$ такое, что для $\forall n \geqslant N$ выполняется соотношение $|z_n - z| < \varepsilon$. Это число называется* ***пределом последовательности*** *$\{z_n\}$, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$.*

Пример 1.30. *а) Доказать, что* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{i}{n} = 0$.

Решение. По определению предел равен нулю, если $\forall\varepsilon > 0\ \exists N : \forall n > N$ выполняется неравентво $\left|\dfrac{i}{n}\right| < \varepsilon$. Найдем N.

$$\left|\frac{i}{n}\right| = \frac{|i|}{n} = \frac{1}{n} < \varepsilon \quad\Longrightarrow\quad n > \frac{1}{\varepsilon} \quad\Longrightarrow\quad N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1.$$

б) Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty} \arg\dfrac{(-1)^n}{n}$, *если он существует.*

Решение. $\lim\limits_{n\to\infty} \arg\dfrac{(-1)^n}{n}$, не существует, так как $\arg\dfrac{(-1)^n}{n} = 0$ при четных n, и $\arg\dfrac{(-1)^n}{n} = \pi$ при нечетных n.

Задача 1.31. *Найдите* *а)* $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{in}$; *б)* $\lim\limits_{n\to\infty}(i)^n$.

Ответ: а) 0; б) не существует.

Каждый член последовательности $\{z_n\}$ имеет вид $z_n = a_n + ib_n$, то есть одновременно заданы две действительные последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$, причем $z_n = a_n + ib_n$.

Теорема 1.2 *Последовательность $\{z_n\}$ сходится к $z = a + ib$ тогда и только тогда, когда $\{a_n\}$ сходится к a, а $\{b_n\}$ сходится к b.*

Доказательство.

Необходимость. Последовательность $\{z_n\}$ сходится, то есть $\forall\varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon)$: $\forall n > N$ выполняется неравенство $|z_n - z| < \varepsilon$. Тогда для $\forall n \geqslant N$ верно $|a_n - a| \leqslant |z_n - z| < \varepsilon$, $|b_n - b| \leqslant |z_n - z| < \varepsilon$, следовательно, $a_n \to a$, $b_n \to b$.

Достаточность. Пусть последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ сходятся, то есть $\forall\varepsilon > 0\quad \exists N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)$: $|a_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ для $\forall n \geqslant N_1$ и $|b_n - b| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ для $\forall n \geqslant N_2$, следовательно, $\exists N = \max(N_1, N_2)$: $|z_n - z| < |a_n - a| + |b_n - b| < \varepsilon$ для $\forall n \geqslant N$.

Определение 1.5 *Последовательность $\{z_n\}$ называется* ***ограниченной****, если существует такое число A, что для любого номера n выполняется неравенство $|z_n| < A$.*

Теорема 1.3 *Сходящаяся последовательность ограничена.*

Доказательство. Последовательность сходится, то есть $\forall\varepsilon > 0\ \ \exists N(\varepsilon)$: для $\forall n \geqslant N$ $|z_n - z| < \varepsilon$, следовательно, все члены последовательности, начиная с некоторого номера N, находятся внутри круга радиуса ε с центром в точке z. Тогда все члены последовательности находятся внутри круга с центром в точке 0, включающего круг радиуса ε и все члены последовательности $x_1, \ldots x_N$. В силу конечности ε и N такой круг, очевидно, существует.

Теорема 1.4 *Из всякой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.*
Доказательство. Поскольку последовательность $\{z_n\}$ ограничена, то соответствующие ей действительные последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ также ограничены. Следовательно, $|a_n| \leqslant \leqslant \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = |a_n + ib_n| = |z_n| < A$ для любого n, аналогично для $\{b_n\}$.

Так как $|a_n| < A$, то по теореме Больцано–Вейерштрасса для последовательностей действительных чисел существует $\{a_{nk}\} \to a$: $|a| \leqslant A$. Последовательности $\{a_{nk}\}$ соответствует $\{b_{nk}\}$, причем так как $|b_{nk}| \leqslant A$, существует $\{b_{nkl}\} \to b$, причем $\{a_{nkl}\} \to a$ откуда по теореме 1.2 $\{z_{nkl}\} \to z = a + ib : |z| \leqslant A$.

Теорема 1.5 *(критерий Коши) Необходимым и достаточным условием сходимости $\{z_n\} \to z$ является требование, чтобы для $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N(\varepsilon)$ такое, что для $\forall n \geqslant N$ и $\forall m > 0$, m, $n \in \mathbb{Z}$ $|z_{n+m} - z_n| < \varepsilon$.*
Доказательство. Основано на теореме 1.2 и критерии Коши для последовательности действительных чисел.
Необходимость. Последовательность $\{z_n\}$ $(z_n = a_n + ib_n)$ сходится, поэтому по теореме 1.2 сходятся и последовательности действительных чисел $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$. Следовательно, для $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N_1(\varepsilon)$: для $\forall n \geqslant N_1(\varepsilon)$ и $\forall m > 0$ $|a_{n+m} - a_n| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ и $\exists N_2(\varepsilon)$: для $\forall n \geqslant N_2(\varepsilon)$ и $\forall m > 0$ $|b_{n+m} - b_n| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Тогда $|z_{n+m} - z_n| = = |(a_{n+m} - a_n) + i(b_{n+m} - b_n)| \leqslant |a_{n+m} - a_n| + |b_{n+m} - b_n| < \varepsilon$ для $\forall n > N(\varepsilon)$, где $N = \max(N_1, N_2)$:.
Достаточность. Из того, что $|z_{n+m} - z_n| < \varepsilon$ для $\forall n \geqslant N$ и $\forall m > 0$ следует, что $|a_{n+m} - a_n| \leqslant |z_{n+m} - z_n| < \varepsilon$, $|b_{n+m} - b_n| \leqslant \leqslant |z_{n+m} - z_n| < \varepsilon$, из чего вытекает сходимость числовых последовательностей $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$, а, значит, и последовательности $\{z_n\}$.

Теорема 1.6 *Если последовательности комплексных чисел $\{z_n\} \to z$, $\{w_n\} \to w$ $(z, w \in C)$, то $\{z_n \pm w_n\} \to z \pm w$, $\{z_n \cdot w_n\} \to z \cdot w$, $\left\{\dfrac{z_n}{w_n}\right\} \to \dfrac{z}{w}$, если $w \neq 0$.* Доказательство теоремы опирается на аналогичные теоремы для последовательностей действительных чисел.

Пример 1.32. *Доказать, что последовательность*

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{z_n}{n}\right)^n = 1, \quad \text{где} \quad z_n \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Доказательство.

$$\left|\left(1+\frac{z_n}{n}\right)^n-1\right|=\left|\sum_{k=1}^{n}C_n^k\frac{z_n^k}{n^k}\right|\leqslant\sum_{k=1}^{n}C_n^k\frac{|z_n|^k}{n^k}=\left(1+\frac{|z_n|}{n}\right)^n-1=$$
$$=e^{n\ln\left(1+\frac{|z_n|}{n}\right)}-1=e^{|z_n|+o(1)}-1\to 0\quad\text{при}\quad n\to\infty.$$

Задача 1.33. *Докажите, что* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{z}{n}\right)^n=e^z$.

Неограниченно возрастающие последовательности.

Определение 1.6 *Если для* $\forall A>0\ \exists N(A)$: $|z_n|>A$ *для* $\forall n>N(A)$, *то последовательность* $\{z_n\}$ *называется* ***неограниченно возрастающей***.

Пример: а) $\{z_n\}=z^n$ при $|z|>1$; б) $\{z_n\}=n\cdot i^n$ — неограниченно возрастающие последовательности.

Такие последовательности не являются сходящимися в обычном смысле, но оказывается удобным считать, что существует точка $z=\infty$, и что всякая неограниченно возрастающая последовательность сходится к **бесконечно удаленной точке** $z=\infty$ комплексной плоскости.

Определение 1.7 *Комплексная плоскость C, дополненная бесконечно удаленной точкой, называется* ***расширенной комплексной плоскостью***.

Определение 1.8 ***Окрестностью бесконечно удаленной точки*** *называется область* $\{z:|z|>R\}$ *— множество точек вне круга достаточно большого радиуса R с центром в начале координат.*

Если $\{z_n\}$ неограниченно возрастающая, то $\xi_n=\dfrac{1}{z_n}\to 0$. Отсюда нетрудно получить правила арифметических действий с бесконечно удаленной точкой $z=\infty$: $\dfrac{1}{\infty}=0$; $\dfrac{1}{0}=\infty$; $z\cdot\infty=\infty$ $(z\neq 0)$; $z+\infty=\infty$; $\dfrac{z}{\infty}=0$, $z\neq\infty$. Операции $\dfrac{0}{0}$ и $\dfrac{\infty}{\infty}$ являются неопределенными.

1.8. Задачи для самостоятельного решения.

1. Докажите, что если существует $\lim\limits_{n\to\infty}|z_n|\neq 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\arg z_n$, то существует и $\lim\limits_{n\to\infty}z_n\neq 0$.
2. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\left(\sqrt[n]{z}-1\right)\right)=\ln r+i\varphi+2\pi ki$, $k=0,1,2,\ldots$, $z=re^{i\varphi}$.

3. Докажите, что последовательность $\{\arg z_n\}$ может расходиться, если последовательность $\{z_n\}$ сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} z_n \neq 0$.

§ 2. Функции комплексной переменной

Пусть на комплексной плоскости задано множество точек g, и каждому числу $z \in g$ по определенному закону ставится в соответствие одно комплексное число w: $z \to w$. Тогда говорят, что в области g задана **однозначная функция комплексной переменной** $w = f(z)$. При этом g называют **областью определения** функции $f(z)$, а множество точек $w = f(z)$ — **множеством значений** функции, которое обозначим D. Функция $f(z)$ осуществляет отображение $g \to D$.

В теории функций комплексной переменной также рассматриваются неоднозначные (**многозначные функции)**, когда комплексному числу z ставится в соответствие несколько различных комплексных чисел.

Структура множеств g и D может быть весьма разнообразной. Мы будем рассматривать случаи, когда g и D — области на комплексной плоскости.

Примеры однозначных функций:

$$\text{а) } w = az + b; \quad \text{б) } w = z^n, \quad \text{в) } w = \frac{1}{z}.$$

Пример многозначной функции: $w = \sqrt[n]{z}$.

Определение 2.1 ***Областью*** *g комплексной плоскости Z называется множество точек этой плоскости, удовлетворяющее условиям:*

1. *все точки $z \in g$ являются внутренними точками g;*
2. *любые точки z_1, $z_2 \in g$ можно соединить ломаной с конечным числом звеньев, состоящих только из точек $z \in g$.*

В определении области условие 1 означает, что g — открытое множество, а условие 2, что g — связное множество.

Итак, область — открытое связное множество.

Пример: а) $|z| < 1$ — область; б) $|z| \leqslant 1$ — не область; в) $\{z : |z| < 1\} \cup \{z : |z - 5i| < 1\}$ — не область.

Определение 2.2 *Точка z_0 называется* ***внутренней точкой*** *множества g, если существует ε-окрестность точки $z_0 : |z - z_0| < \varepsilon$, все точки которой принадлежат g.*

Пример: а) $z = 0$ — внутренняя точка множества $|z| < 1$;
б) $z = i$ — не является внутренней точкой множества $|z| \leqslant 1$.

Определение 2.3 *Точка z_0 называется **граничной точкой** области g, если в любой ее ε-окрестности имеются как точки, принадлежащие g, так и не принадлежащие g.*
Пример: а) $z = 0$ — граничная точка множества $|z| > 0$;
б) $z = i$ — граничная точка как множества $|z| \leqslant 1$, так и множества $|z| < 1$.

Определение 2.4 *Совокупность граничных точек области g называется **границей** ∂g области g.*

Граница множества может состоять из конечного числа точек и даже из одной точки (как, например, у множества $|z| > 0$).

Определение 2.5 *Замыкание области g состоит в присоединении к g ее границы ∂g. Полученное множество называется **замкнутой областью**: $\overline{g} = g + \partial g$.*
Пример: Множество $|z| \leqslant 1$ — замкнутое.

Рассмотрим случай, когда функция $w = f(z)$ задана в области g комплексной плоскости z и отображает ее на область D комплексной плоскости w, и это отображение однозначно.

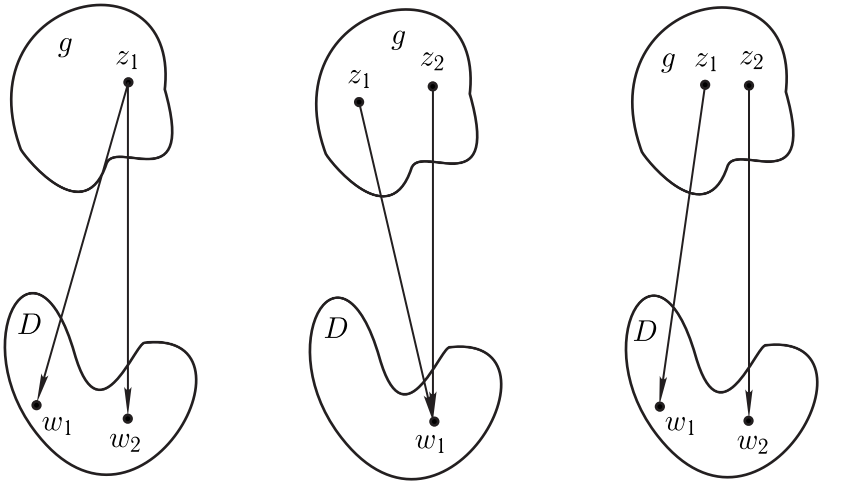
Определение 2.6 *Пусть для любых точек z_1, $z_2 \in g$, $z_1 \neq z_2$ имеет место $f(z_1) = w_1 \neq w_2 = f(z_2)$, то есть различным точкам области g соответствуют различные значения функции $w = f(z)$. Тогда функция $w = f(z)$ называется **однолистной** в области g, а область g — **областью однолистности** функции $f(z)$.*

Таким образом, отображение $g \longleftrightarrow D$, осуществляемое однолистной функцией, является взаимно однозначным. На рис. 4 приведены варианты отображений.

Нетрудно показать, что, например:
а) $w = const$ — однозначная, не однолистная;
б) $w = az + b$ — однозначная и однолистная (единственное отображение, сохраняющее подобие всех фигур);
в) $w = z^n$, $n \in \mathbb{Z}$ — однозначная, но не однолистная.

Проиллюстрируем еще раз понятия неоднолистности и неоднозначности функции комплексной переменной на примерах $w = \sqrt{z}$ и $w = z^2$.

Функция $w = \sqrt{z}$ — двузначная. Действительно, каждому $z = \rho e^{i\varphi}$ соответствуют два значения корня $w_1 = \sqrt{\rho}\, e^{i\dfrac{\varphi}{2}}$; $w_2 = \sqrt{\rho}\, e^{i\frac{\varphi}{2} + i\pi}$, причем изменение аргумента w от значения $\dfrac{\varphi}{2}$ до $\dfrac{\varphi}{2} + \pi$, то есть переход от точки w_1 к точке w_2 (кривая 1а на



а) *неоднозначное отображение*

б) *однозначное неоднолистное отображение*

в) *однозначное однолистное отображение*

Рис. 4.

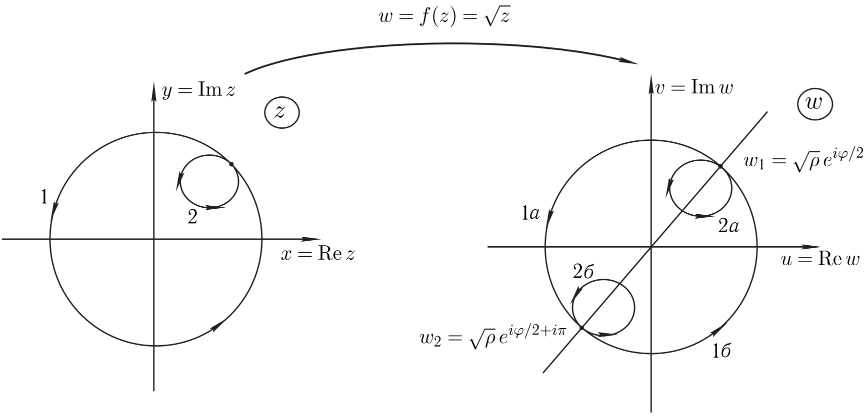


Рис. 5.

рис. 5), или от w_2 к w_1 (кривая 1б на рис. 5) на плоскости w, происходит если точка z совершает обход замкнутого контура, содержащего внутри точку $z = 0$ (кривая 1 на рис. 5). Если же точка z движется по контуру 2, не содержащему внутри точку $z = 0$, то перехода от w_2 к w_1 не происходит: аргумент w меняется непрерывно и при полном обходе замкнутого контура 2 возвращается к исходному значению $\frac{\varphi}{2}$ или $\frac{\varphi}{2}+\pi$. Точка w при этом описывает замкнутый контур 2а или 2б в зависимости от выбранного начального значения аргумента $\frac{\varphi}{2}$ или $\frac{\varphi}{2}+\pi$.

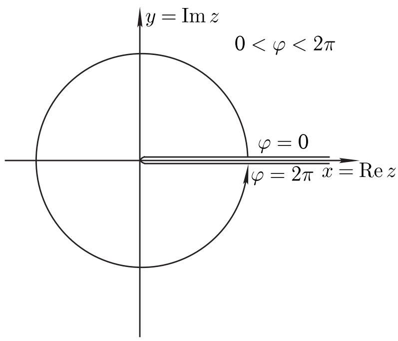


Рис. 6.

Таким образом, если запретить обход точки $z=0$ на плоскости z, то можно выделить 2 **однозначные ветви** двузначной функции $w=f(z)=\sqrt{z}$. Этого можно добиться, устроив на плоскости z **разрез**, например, по положительной части действительной оси, и считая, что на **верхнем берегу разреза** $\varphi=0$, а на **нижнем берегу разреза** $\varphi=2\pi$ (см. рис.6)). Зафиксировав таким образом аргумент z в пределах $0<\varphi<2\pi$, мы получим однозначную функцию — одну из ветвей функции $w=f(z)=\sqrt{z}$, для которой $0<\arg w<\pi$.

Функция $f(z)=z^2$, рассматриваемая на всей комплексной плоскости z, не является однолистной. Действительно, для двух различных точек плоскости $z_1=\rho e^{i\varphi}$ и $z_2=-z_1=\rho e^{i\varphi+i\pi}$ получаем $w_1=z_1^2=\rho^2 e^{2i\varphi}$ и $w_2=z_2^2=\rho^2 e^{2i\varphi+2i\pi}=w_1$, то есть точки $z_1\neq z_2$ отображаются функцией $w=z^2$ в одну и ту же точку плоскости w (см. рис. 7).

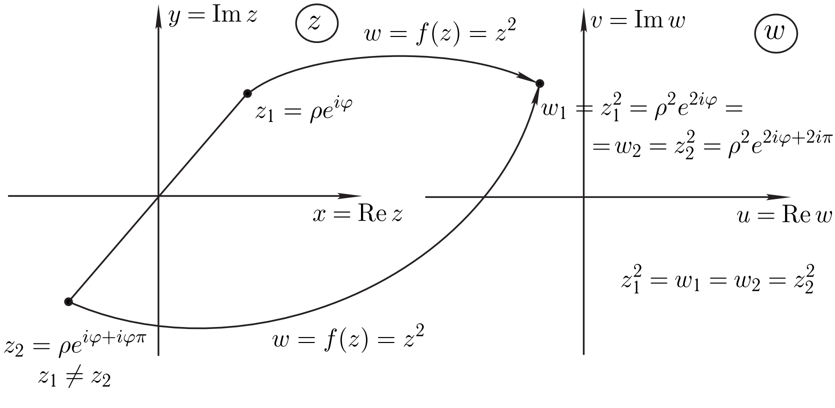


Рис. 7.

Построим следующую модель. Возьмем два экземпляра (листа) плоскости w с разрезами по положительной части действительной оси, а именно плоскость w_1, где $0 < \arg w < 2\pi$, и плоскость w_2, где $2\pi < \arg w < 4\pi$, и будем считать, что точки верхней полуплоскости z (с аргументами $0 < \arg z < \pi$) отображаются в точки плоскости w_1 ($0 < \arg w = \arg z^2 < 2\pi$), а точки нижней полуплоскости z (с аргументами $\pi < \arg z < 2\pi$) отображаются в точки плоскости w_2 ($2\pi < \arg w = \arg z^2 < 4\pi$) (см. рис. 8).

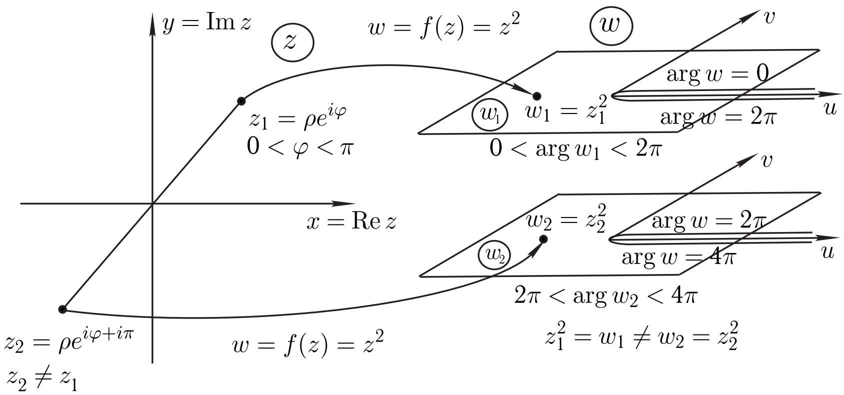


Рис. 8.

Теперь «склеим» верхний берег разреза плоскости w_1 ($\arg w = 0$) с нижним берегом разреза плоскости w_2 ($\arg w = 4\pi$), а нижний берег разреза плоскости w_1 ($\arg w = 2\pi$) — с верхним берегом разреза плоскости w_2 ($\arg w = 2\pi$) (см. рис. 9). Если в плоскости z точка описывает простую замкнутую кривую, обходя начало координат, то есть аргумент z меняется от φ до $\varphi + 2\pi$, то в плоскости w ей будет соответствовать кривая, совершающая дважды обход вокруг точки $w = 0$, а на поверхности $w_1 \cup w_2$ — простая кривая, по которой точка, взятая, например, на первом листе, перемещается по этому листу, потом по второму и возвра-

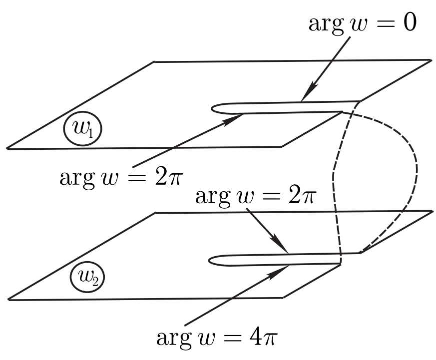


Рис. 9.

щается в исходное положение. Построенная модель называется римановой поверхностью функции $w = z^2$.

Таким образом, функция $w = z^2$ взаимно однозначно и непрерывно отображает полную плоскость z $(z \neq 0,\ z \neq \infty)$ на риманову поверхность $w_1 \cup w_2$ этой функции. Обратная функция $z = \sqrt{w}$ также взаимно однозначно и непрерывно отображает риманову поверхность $w_1 \cup w_2$ функции $w = z^2$ на полную плоскость z $(z \neq 0,\ z \neq \infty)$.

Аналогично можно рассматривать n-листную функцию $w = z^n$ и обратную к ней $w = \sqrt[n]{z}$. Например, областью однолистности данной функции является сектор $C \leqslant \arg z < C + \dfrac{2\pi}{n}$, $C \in \mathbb{R}$, так как в этой области нет точек $z = \rho e^{i\varphi}$, имеющих одинаковые модули, и аргументы, отличающиеся на величину, большую, либо равную $\dfrac{2\pi}{n}$.

Определение 2.7 *Если для точки z можно указать такую ε-окрестность, что при однократном обходе точки z по любому замкнутому контуру, целиком лежащему в этой ε-окрестности, одна ветвь многозначной функции переходит в другую, то точка z называется* ***точкой ветвления*** *данной многозначной функции.*

Рассмотрим ряд примеров.

Для **функции** $w = \sqrt{z}$, точками ветвления являются точки: $z = 0,\ z = \infty$. На комплексной плоскости с разрезом по отрицательной части вещественной оси $-\pi < \arg z \leqslant \pi$ каждая ветвь — однозначная функция, при этом $w_1 = \sqrt{z}$ называют главной ветвью, если $-\dfrac{\pi}{2} < \arg w_1 \leqslant \dfrac{\pi}{2}$.

Функция $w = \dfrac{1}{z}$ — однозначная, однолистная функция на полной комплексной плоскости, $z\,(0) = \infty$, $z\,(\infty) = 0$.

Функция Жуковского $w = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$ — однозначная, однолистная функция в любой области, где для любых z_1, z_2 выполнено неравенство $z_1 \cdot z_2 \neq 1$. Покажем это.

Пусть $z_1 \neq z_2$, тогда

$$z_1 + \frac{1}{z_1} = z_2 + \frac{1}{z_2} \quad \Leftrightarrow \quad (z_2 - z_1)\left(1 - \frac{1}{z_1 z_2}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad z_1 z_2 = 1.$$

Таким образом, областями однолистности являются, например, $|z| > 1$ и $|z| < 1$.

Показательная функция e^z,

$$w = e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x\,(\cos y\ + i \sin y)$$

— однозначная, но не однолистная функция. Областью однолистности является любая полоса шириной 2π, например, $0 < y < 2\pi$.

Логарифмическая функция $\operatorname{Ln} z$**,**

$$\operatorname{Ln} z = \ln(\rho e^{i\varphi + i\cdot 2\pi k}) = \ln\rho + i\varphi + i\cdot 2\pi k, k = 0, \pm1, \pm2, ...,$$

где $\rho = |z|$, $\varphi = \arg z$ — многозначная функция. Точки ветвления $z = 0$, $z = \infty$.

При $k = 0$ получаем **главные значения логарифма и аргумента**: $\ln z = \ln\rho + i\varphi$; $\arg z = \varphi$.

Пример 2.1. *Представить* $\operatorname{Ln}(-1-i)$ *в алгебраической форме.*

$$\operatorname{Ln}(-1-i) = \operatorname{Ln}\left(\sqrt{2}\, e^{-i\frac{3}{4}\pi + 2i\pi k}\right) = \\ = \frac{1}{2}\ln 2 - i\frac{3\pi}{4} + i2\pi k, \quad k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$$

Задача 2.2. *Представьте в алгебраической форме:*
а) $\operatorname{Ln}(-10)$; *б)* $\operatorname{Ln}\left(e^{i\varphi}\right)$.
Ответ: а) $\ln 10 + i\pi + i\cdot 2\pi k$, $k = 0, \pm1, \pm2, ...$;
б) $i\varphi + i\cdot 2\pi k$, $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$

Рассмотрим функцию $w = z^a$, которая:
1) при $a = n \in \mathbb{Z}$, $a \neq \pm1$ — однозначная, не однолистная функция;
2) при $a = \dfrac{m}{n}$, где $\dfrac{m}{n}$ — несократимая рациональная дробь, — многозначная (n-значная) функция;
3) при $a \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{C}$ — многозначная (бесконечнозначная), $w = e^{a\operatorname{Ln} z}$.
<u>Важно помнить</u>: $\sqrt[n]{z^m} \neq \left(\sqrt[n]{z}\right)^m$.

Пример 2.3. *а) Представить число* 2^i *в тригонометрической форме:*

$$2^i = e^{i\operatorname{Ln}2} = e^{i(\ln 2 + i2\pi k)} = e^{-2\pi k}\big(\cos(\ln 2) + i\sin(\ln 2)\big), \\ k = 0, \pm1, \pm2, \ldots;$$

б) представить число i^i *в показательной форме:*

$$i^i = e^{i\operatorname{Ln} i} = e^{i\left(\ln 1 + i\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)i} = e^{-\frac{\pi}{2} - 2\pi k}, \quad k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$$

Задача 2.4. *Представьте а)* 3^{i+1}; *б)* $(i+1)^{i-1}$ *в показательной форме.*

Ответ: а) $\left(3 \cdot e^{-2\pi k}\right) \cdot e^{i \ln 3}$; б) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{\pi}{4} - 2\pi k}\right) \cdot e^{i(\ln\sqrt{2} - \pi - 2\pi k)}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Отметим, что **гиперболические функции**:
$\operatorname{ch} z = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2}$; $\operatorname{sh} z = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2}$; $\operatorname{th} z = \dfrac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}$ — многолистные функции;
и **тригонометрические функции**:
$\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$; $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$; $\operatorname{tg} z = \dfrac{\sin z}{\cos z}$ — многолистные функции.

При этом функции $\cos z$, $\sin z$ являются периодическими с периодом 2π функциями, а функция $\operatorname{tg} z$ — периодической с периодом π.

Пример 2.5. *Доказать, что* $\sin(iy) = i \operatorname{sh} y$.
Доказательство.

$$\sin(iy) = \frac{e^{i(iy)} - e^{-i(iy)}}{2i} = \frac{e^{-y} - e^{y}}{2i} = i\frac{e^{-y} - e^{y}}{2i^2} = i \operatorname{sh} y.$$

Задача 2.6. *Докажите, что* $\cos(iy) = \operatorname{ch} y$.

Справедливы следующие формулы тригонометрии в комплексной области:

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cdot \cos z_2 + \cos z_1 \cdot \sin z_2;$$

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cdot \cos z_2 - \sin z_1 \cdot \sin z_2.$$

С учетом разобранного выше примера имеем:

$$\begin{aligned}
&\sin(x + iy) = \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y;\\
&\cos(x + iy) = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y;\\
&\sin^2 z + \cos^2 z = 1;\ \sin z = \cos\left(\frac{\pi}{2} - z\right).
\end{aligned}$$

Обозначим $w = \operatorname{Arch} z$, если $z = \operatorname{ch} w$. Тогда

$$z = \operatorname{ch} w = \frac{e^w + e^{-w}}{2}; \quad w = \operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right).$$

Действительно, положим $t = e^w$, тогда

$$z = \frac{t + \frac{1}{t}}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad t^2 - 2tz + 1 = 0,$$

откуда, решая квадратное уравнение, получаем

$$t = z + \sqrt{z^2 - 1}.$$

Тогда $w = \mathrm{Ln}\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right)$.

Важно помнить: здесь, под знаком логарифма, и далее ставим перед корнем знак «+», так как квадратный корень в случае комплексных чисел по определению имеет два значения. С большой буквы обозначаются **все** значения многозначной функции.

Таким образом, $w = \mathrm{Arch}\, z = \mathrm{Ln}\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right)$ — многозначная функция, главное ее значение $w = \mathrm{arch}\, z = \ln\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right)$.

Аналогично определяются другие обратные гиперболические функции.

Задача 2.7. *Получите выражение для а)* $\mathrm{Arsh}\, z$; *б)* $\mathrm{Arth}\, z$.
Ответ: а) $\mathrm{Arsh}\, z = \mathrm{Ln}\left(z + \sqrt{z^2 + 1}\right)$; б) $\mathrm{Arth}\, z = \dfrac{1}{2}\mathrm{Ln}\dfrac{1+z}{1-z}$.

Обозначим $w = \mathrm{Arccos}\, z$, если $z = \cos w$. Тогда

$$w = -i\mathrm{Ln}\left(z + i\sqrt{1 - z^2}\right).$$

Действительно, $z = \cos w = \dfrac{e^{iw} + e^{-iw}}{2}$. Положим $t = e^{iw}$, тогда $z = \dfrac{t + \frac{1}{t}}{2}$; $t^2 - 2tz + 1 = 0$, $t = z + \sqrt{z^2 - 1}$.

Следовательно,

$$iw = \mathrm{Ln}\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right); \quad w = -i\mathrm{Ln}\left(z + i\sqrt{1 - z^2}\right).$$

Это многолистная функция, главное значение которой

$$w = \arccos z = -i \cdot \ln\left(z + i\sqrt{1 - z^2}\right).$$

Аналогично определяются другие обратные тригонометрические функции.

Задача 2.8. *Получите выражение для а)* $\mathrm{Arcsin}\, z$; *б)* $\mathrm{Arctg}\, z$.
Ответ: а) $-i\mathrm{Ln}\, i\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right)$; б) $\dfrac{i}{2}\mathrm{Ln}\dfrac{i+z}{i-z}$.

Пример 2.9. *Представить в алгебраической форме* $\arccos 3$.
Решение.

$$\cos z = 3 \quad \Leftrightarrow \quad e^{iz} + e^{-iz} = 6 \quad \Leftrightarrow \quad e^{2iz} + 1 - 6e^{iz} = 0 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad e^{iz} = 3 \pm \sqrt{8} \quad \Rightarrow \quad z = -i\mathrm{Ln}\left(3 \pm \sqrt{8}\right) =$$
$$= -i\ln\left(3 \pm \sqrt{8}\right) - 2\pi k,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Задача 2.10. *Представьте в алгебраической форме*
а) $\mathrm{Arcsin}(-3i)$; *б)* $\mathrm{Arctg}\, 2i$.
Ответ:

$$\text{а)} \quad -i\mathrm{Ln}\left(3 \pm \sqrt{10}\right) = \left[\begin{array}{l} -i\ln\left(3 + \sqrt{10}\right) + 2\pi k, \\ -i\ln\left(-3 + \sqrt{10}\right) + \pi + 2\pi k, \end{array}\right.$$
$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

$$\text{б)} \quad \frac{\pi}{2} + \frac{i}{2}\ln 3 + \pi k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

2.1. Задачи для самостоятельного решения.

1. Вычислите (найдите все значения). Результат представьте в форме $a + ib$, где a и b — действительные числа.
   а) $\cos(2+i)$; б) $\sin 2i$; в) $\cos \pi i$; г) $\mathrm{tg}(2-i)$;
   д) $\mathrm{Ln}\, 2$; е) $\ln 2$; ж) $\mathrm{Ln}\, i$; з) $\mathrm{Ln}\,(2-3i)$;
   и) $1^{\left(\frac{1+i}{1-i}\right)}$; к) i^{π}; л) π^{i}; м) $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{i}$.
2. Найдите все решения уравнения. Результат представьте в форме $a + ib$, где a и b действительные числа.
   а) $\sin z = 2$; б) $\cos z = i$; в) $\mathrm{tg}\, z = 2 + i$;
   г) $\sin z + \cos z = 2$; д) $\sin z - \cos z = 3$;
   е) $e^{2z} + e^{z} = 3$; ж) $e^{z} + i = 0$; з) $\mathrm{ch}\, z = i$;
   и) $\mathrm{ch}\, z - \mathrm{sh}\, z = 1$; к) $\mathrm{sh}\, z - \mathrm{ch}\, z = 2i$.
3. Запишите главное значение функции $f(z) = \sqrt{z}$, где $z = x + iy$, в виде $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ в области:
   а) $\mathrm{Im}\, z > 0$; б) $\mathrm{Re}\, z > 0$.

Вопросы к экзамену.

1. Сформулируйте определение функции, однолистной на некотором множестве. Приведите пример.
2. Сформулируйте определение однозначной функции. Приведите пример. Как связаны понятия однолистности и однозначности?

3. Сформулируйте определение функции, не однолистной (многолистной) на некотором множестве. Приведите пример.
4. Сформулируйте определение многозначной функции. Приведите пример. Как связаны понятия многолистности и многозначности?
5. Сформулируйте определение показательной функции e^z.
6. Сформулируйте определения тригонометрических функций $\sin z,\ \cos z,\ \operatorname{tg} z,\ \operatorname{ctg} z$.
7. Сформулируйте определения гиперболических функций $\operatorname{sh} z,\ \operatorname{ch} z,\ \operatorname{th} z,\ \operatorname{cth} z$.
8. Сформулируйте определение логарифмической функции $\operatorname{Ln} z$.
9. Сформулируйте определение общей степенной функции $z^a,\ \ a \neq 0$.
10. Сформулируйте определение дробно-линейной функции.
11. Сформулируйте определение функции Жуковского.

Теоретические задачи и задачи повышенной сложности.

1. Найдите сумму и произведение всех корней уравнения $z^n + a^n = 0,\ \ a > 0$.
2. Найдите сумму и произведение всех корней уравнения $z^n - a^n = 0,\ \ a > 0$.

§ 3. Предел и непрерывность функции комплексной переменной

3.1. Понятие предела функции комплексной переменной.

Определение 3.1 *(по Гейне) Комплексное число w_0 называется **пределом** функции $f(z), z \in g$, в точке $z_0 \in g$, где g — область на полной комплексной плоскости, если для любой последовательности $\{z_n\}$, сходящейся к z_0, $z_n \neq z_0$, соответствующая последовательность $\{f(z_n)\}$ сходится к w_0. При этом предполагается, что z_0 является точкой сгущения (предельной точкой) множества g.*

Определение 3.2 *(по Коши) Комплексное число w_0 называется **пределом** функции комплексной переменной $f(z)$ в точке $z_0 \in g$, если для $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta(\varepsilon, z_0) > 0$ такое, что для любого z, удовлетворяющего условию $0 < |z - z_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(z) - w_0| < \varepsilon$.*

Замечание 3.1 *Это определение имеет смысл лишь при конечных значениях* z_0 *и* w_0.

Теорема 3.1 *Определения по Гейне и по Коши эквивалентны при конечных значениях* z_0 *и* w_0.

Доказательство.

1. Пусть справедливо определение предела по Коши, то есть функция $f(z)$ удовлетворяет определению 3.2. Докажем, что тогда справедливо определение предела по Гейне. Возьмем любое $\varepsilon > 0$ и выберем соответствующее $\delta(\varepsilon) > 0$. Рассмотрим произвольную последовательность $\{z_n\} \to z_0$, $z_n \neq z_0$, и найдем $N(\delta(\varepsilon)) = N(\varepsilon)$ такое, что для любого $n \geqslant N(\varepsilon)$ выполняется соотношение $0 < |z_n - z_0| < \delta$. Тогда $0 < |f(z_n) - w_0| < \varepsilon$ для любого $n \geqslant N(\varepsilon)$. А так как $\varepsilon > 0$ — любое число, и $\{z_n\}$ — произвольная последовательность, сходящаяся к z_0, то это значит, что $\{f(z_n)\} \to w_0$, то есть верно определение 3.1.
2. Пусть выполнено определение предела по Гейне. Докажем, что выполнено определение предела по Коши. Предположим противное: пусть верно определение 3.1, а определение 3.2 — неверно. Последнее означает, что существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для любого $\delta_n > 0$ существует $z_n \in g$, что при $0 < |z_n - z_0| < \delta_n$, будет верно неравенство $|f(z_n) - w_0| > \varepsilon_0$. Выберем последовательность $\{\delta_n\} \to 0$ и соответствующую ей последовательность $\{z_n\}$, удовлетворяющую предыдущим неравенствам. Тогда получаем, что существует $\{z_n\} \to z_0$, а при этом $\{f(z_n)\}$ не стремится к w_0, то есть определение 3.1 — неверно. Полученное противоречие доказывается справедливость утверждения.

Определение 3.3 *Функция комплексной переменной* $f(z)$, $z \in \in g$, *называется* ***непрерывной в точке*** $z_0 \in g$, *если существует конечный предел* $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = w_0$ *и* $w_0 = f(z_0)$. *Другими словами, функция комплексной переменной* $f(z)$ *называется* ***непрерывной в точке*** $z_0 \in g$, *если для* $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta(\varepsilon, z_0) > 0$ *такое, что* $\forall z$, *удовлетворяющего условию* $0 < |z - z_0| < \delta$, *выполняется* $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$.

Очевидно, при этом достаточно малая δ-окрестность точки z_0 отображается $f(z)$ на достаточно малую ε-окрестность точки $w_0 = f(z_0)$. Это определение распространяется как на внутренние, так и на граничные точки множества.

Определение 3.4 *Точка z_0 называется* ***изолированной точкой*** *множества g, если существует такая ее ε-окрестность, в которой нет других точек множества g.*

В изолированной точке $z_0 \in g$ функция считается непрерывной.

Понятие непрерывности функции $f(z)$ справедливо и в случае бесконечно удаленной точки.

Пример 3.1. *а) функции $w = const$, $w = az + b$, $w = \overline{z}$, $w = \operatorname{Re} z$, $w = |z|$, $w = z^n$ являются непрерывными на всей комплексной плоскости;*
б) функция $w = \arg z$ является непрерывной на всей комплексной плоскости, за исключением точек $z = 0$, $z = \infty$, и точек, лежащих на положительной части действительной полуоси.

Задача 3.2. *Приведите пример функции, непрерывной на всей комплексной плоскости, кроме:*
а) двух заданных точек $z = 1$ и $z = 2i$;
б) точки $z = \infty$.

Определение 3.5 *Функция комплексной переменной $f(z)$, $z \in g$, называется* ***непрерывной в области*** *g, если она непрерывна в каждой точке $z \in g$ $(f(z) \in C(g))$.*

Аналогично определяются понятия $f(z) \in C(\overline{g})$ и $f(z) \in C(\partial g)$. При этом при определении непрерывности по Гейне в $f(z) \in C(\overline{g})$ или $f(z) \in C(\partial g)$ надо рассматривать последовательности $\{z_n\}$, состоящие только из точек $z_n \in \overline{g}$ или $z_n \in \partial g$.

Пусть $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, где $z = x + iy$, а $u(x, y)$ и $v(x, y)$ — действительные функции действительных переменных.

Теорема 3.2 *Функция $f(z)$ непрерывна в области g тогда и только тогда, если функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ непрерывны по совокупности переменных.*

Теорема 3.3 *Пусть $f(z) \in C(g)$ и $h(z) \in C(g)$. Тогда $f(z) \pm h(z) \in C(g)$, $f(z) \cdot h(z) \in C(g)$ и $\dfrac{f(z)}{h(z)} \in C(g)$, где $h(z) \neq 0$.*

Доказательство двух последних теорем опирается на аналогичные теоремы из курса математического анализа.

Пример 3.3. *Пусть функция $f(z) = \dfrac{\operatorname{Re} z}{z}$ задана в проколотой окрестности точки $z = 0$. Можно ли доопределить функцию так, чтобы она стала непрерывной в точке $z = 0$?*

Решение. Рассмотрим две последовательности: $z_n^{(1)} = \left(\dfrac{1}{n}; 0\right)$ и $z_n^{(2)} = \left(0; \dfrac{1}{n}\right)$, каждая из которых принадлежит δ—окрестности нуля. При этом $\lim\limits_{n\to\infty} z_n^{(1)} = \lim\limits_{n\to\infty} z_n^{(2)} = 0$, а $f\left(z_n^{(1)}\right) = 1$, $f\left(z_n^{(2)}\right) = 0$. Следовательно, функция не имеет предела в точке $z = 0$, поэтому невозможно доопределить ее так, чтобы она стала непрерывной.

Задача 3.4. *Пусть функция а) $f(z) = \dfrac{\mathrm{Re}(z^2)}{|z|^2}$; б) $f(z) = \dfrac{z \cdot \mathrm{Re}\, z}{|z|}$ задана в проколотой окрестности точки $z = 0$. Можно ли доопределить функцию так, чтобы она стала непрерывной в точке $z = 0$?*
Ответ: а) нет, нельзя; б) да, можно.

3.2. Равномерная непрерывность функции комплексной переменной.

В определении непрерывности по Коши для $f(z) \in C(g)$ величина δ зависит не только от ε, но и от точки z ($\delta = \delta(\varepsilon, z)$). Таким образом, на ε-окрестность любой точки $w = f(z) \in D$ отображается δ-окрестность соответствующей точки z, где величина δ, вообще говоря, различна для разных точек z.

Определение 3.6 *Функция комплексной переменной $f(z)$, $z \in g$, называется* ***равномерно непрерывной*** *в области g, если для $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta(\varepsilon) > 0$, такое, что для $\forall z_1$, $z_2 \subset g : |z_1 - z_2| < \delta$ выполняется неравенство $|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon$.*

Другими словами, любые δ-близкие точки области g отображаются на соответствующие ε-близкие точки области значений функции D.

Очевидно, что из равномерной непрерывности в области g следует непрерывность функции. Для доказательства достаточно фиксировать одну из точек, например z_2, тогда определение равномерной непрерывности превратится в условие непрерывности функции $f(z_1)$ в точке z_2.

Обратное, вообще говоря, неверно.

Определение 3.7 *Множество называется* ***ограниченным,*** *если оно целиком содержится в некотором круге $|z| < R$.*

Теорема 3.4 *Если $f(z) \in C(\overline{g})$ и $\overline{g}$ ограничено, то $f(z)$ — равномерно непрерывная функция в $\overline{g}$.*

Доказательство. (От противного.) Пусть для заданного ε_0 и для $\forall \delta_n > 0$ найдутся хотя бы две такие точки $z_1^{(n)}$ и $z_2^{(n)}$, что $\left|z_1^{(n)} - z_2^{(n)}\right| < \delta_n$, а $\left|f\left(z_1^{(n)}\right) - f\left(z_2^{(n)}\right)\right| > \varepsilon_0$. Устремив δ_n к нулю, получим последовательности $\left\{z_1^{(n)}\right\}$ и $\left\{z_2^{(n)}\right\}$, удовлетворяющие данным неравенствам для каждого δ_n. Так как $\left\{z_1^{(n)}\right\}$ ограничена по условию, то из нее можно выделить подпоследовательность $\left\{z_1^{(n_l)}\right\} \to z_1$. При этом $\left\{z_2^{(n)}\right\}$ также ограничена, и из нее можно извлечь $\left\{z_2^{(n_l)}\right\} \to z_2$. Так как $\left\{z_1^{(n_l)}\right\} \to z_1$, а $\delta_n \to 0$, то $z_1 = z_2$, а в силу сделанного предположения $|f(z_1) - f(z_2)| > \varepsilon_0$, что противоречит условию непрерывности $f(z) \in C(\overline{g})$.

Пример 3.5. *Исследовать функцию* $f(z) = \dfrac{1}{1-z}$ *на равномерную непрерывность в области* $D : |z| < 1$.
Решение. Функция, очевидно, непрерывна в любой точке рассматриваемой области. Покажем, что она не является равномерно непрерывной в этой области. Рассмотрим две последовательности: $z'_n = 1 - \dfrac{1}{n}$, $z''_n = 1 - \dfrac{2}{n}$. Тогда

$$\rho(z'_n, z''_n) = |z'_n - z''_n| = \frac{1}{n} \to 0$$

при $n \to \infty$. При этом

$$\rho\left(f\left(z'_n\right), f\left(z''_n\right)\right) = \frac{\rho(z'_n, z''_n)}{|1 - z'_n| \cdot |1 - z''_n|} = \frac{n}{2} \to \infty.$$

Следовательно, функция по определению не является равномерно непрерывной.

Задача 3.6. *Исследуйте функцию* $f(z) = \dfrac{1}{1+z^2}$ *на равномерную непрерывность в области* $D : |z| < 1$.
Ответ: не является.

Задачи для самостоятельного решения.

1. Пусть функция $f(z) = \dfrac{z}{|z|}$ задана в проколотой окрестности точки $z = 0$. Можно ли доопределить функцию так, чтобы она стала непрерывной в точке $z = 0$?
2. Исследуйте функцию $e^{-\frac{1}{|z|}}$ в круге $|z| < R$ с выколотой точкой 0 на а) непрерывность; б) равномерную непрерывность.
3. Исследуйте функцию $e^{-\frac{1}{z^2}}$ в круге $|z| < R$ с выколотой точкой 0 на а) непрерывность; б) равномерную непрерывность.
4. Исследуйте функцию $e^{-\frac{1}{z^2}}$ на равномерную непрерывность в секторе $0 < |z| \leqslant R$; $|\arg z| \leqslant \dfrac{\pi}{6}$.

5. Функция $f(z) = e^{-\frac{1}{z^2}}$ определена всюду, кроме точки $z = 0$. Докажите, что

   а) в полукруге $0 < |z| \leqslant 1$; $|\arg z| \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ функция ограничена, но не непрерывна;

   б) внутри этого полукруга функция непрерывна, но не равномерно непрерывна;

   в) в секторе $0 < |z| \leqslant 1$; $|\arg z| \leqslant \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ функция равномерно непрерывна.

Вопросы к экзамену.

1. Сформулируйте определение предела функции по Гейне и по Коши.
2. Сформулируйте определение непрерывной функции.
3. Теорема о связи непрерывности функции $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ и непрерывности функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$.
4. Сформулируйте определение равномерно непрерывной функции.
5. Как связаны понятия непрерывности и равномерной непрерывности?

§ 4. Дифференцирование функций комплексной переменной. Аналитические функции

4.1. Понятие дифференцируемости.

Определение 4.1 *Функция $f(z) \in C(g)$ называется **дифференцируемой** в точке $z_0 \in g$, если существует конечный предел разностного отношения* $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$.

Этот предел называют производной функции в точке z_0:

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}.$$

<u>Важно помнить</u>, что по определению предел не зависит от способа стремления $\Delta z \to 0$.

На первый взгляд производная функции комплексной переменной определяется совершено аналогично производной функции действительной переменной, как предел разностного отношения. Однако приращение аргумента Δz характеризуется не только величиной $|\Delta z|$, но и направлением $\arg \Delta z$, а производная по определению от этого направления не зависит. Поэтому дифференцируемость функции комплексного переменного есть значительно более сложное понятие, чем дифференцируемость функции вещественного переменного.

Определение 4.2 ***Дифференциалом функции*** $w = f(z)$ *называется* $dw = f'(z)dz$*, где* $dz = \Delta z$ *— дифференциал независимой переменной* z*.*

Пусть $f(z) = u + iv$, где $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$.

Теорема 4.1 *Пусть* $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ *дифференцируема в точке* z_0*, тогда существуют частные производные* $u_x(x_0, y_0)$*,* $u_y(x_0, y_0)$*,* $v_x(x_0, y_0)$*,* $v_y(x_0, y_0)$*, причем они связаны* ***условиями Коши–Римана:***

$$u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0); \quad u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0).$$

Доказательство. Представим Δz в виде $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$. Так как по определению производной предел разностного отношения, если он существует, не зависит от способа стремления Δz к нулю, то положим сначала $\Delta z = \Delta x$. Получим

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \\ = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0) + i(v(x_0 + \Delta x, y_0) - v(x_0, y_0))}{\Delta x} = \\ = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0). \quad (4.1)$$

Положив $\Delta z = i\Delta y$, получим:

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta f}{i\Delta y} = \\ -i \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0) + i(v(x_0 + \Delta x, y_0) - v(x_0, y_0 + \Delta y))}{\Delta y} = \\ = -iu_y(x_0, y_0) + v_y(x_0, y_0).$$

Два полученных значения предела по определению равны между собой. Приравнивая их вещественные и мнимые части, получим

$$u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0); \quad u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0)$$

— условия Коши–Римана.

Пусть $f(z) \in C(g)$ и $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$.

Теорема 4.2 *Пусть в точке* $z_0 = x_0 + iy_0 \in g$ *функции* $u(x, y)$ *и* $v(x, y)$ *дифференцируемы, и частные производные первого порядка этих функций в точке* (x_0, y_0) *связаны условиями Коши–Римана, тогда* $f(z)$ *— дифференцируемая функция в точке* z_0*.*

Доказательство. По определению дифференцируемой функции имеем:

$$\Delta u = u_x(x_0, y_0)\Delta x + u_y(x_0, y_0)\Delta y + \xi(x, y); \lim_{|\Delta z|\to 0} \frac{\xi(x, y)}{|\Delta z|} = 0;$$

$$\Delta v = v_x(x_0, y_0)\Delta x + v_y(x_0, y_0)\Delta y + \eta(x, y); \lim_{|\Delta z|\to 0} \frac{\eta(x, y)}{|\Delta z|} = 0.$$

Обозначим $\zeta(x, y) = \xi(x, y) + i\eta(x, y)$. Тогда с использованием условий Коши–Римана получаем

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{u_x(x_0, y_0)\Delta x + u_y(x_0, y_0)\Delta y + i\left(v_x(x_0, y_0)\Delta x + v_y(x_0, y_0)\Delta y\right)}{\Delta x + i\Delta y} + \frac{\zeta(x, y)}{\Delta z} =$$

$$= \frac{u_x(x_0, y_0)\Delta x - v_x(x_0, y_0)\Delta y + i\left(v_x(x_0, y_0)\Delta x + u_x(x_0, y_0)\Delta y\right)}{\Delta x + i\Delta y} + \frac{\zeta(x, y)}{\Delta z} =$$

$$= u_x(x_0, y_0) + i \cdot v_x(x_0, y_0) + \frac{\zeta(x, y)}{\Delta z}.$$

Отсюда следует, что существует $\lim\limits_{\Delta z\to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta z} = f'(z_0)$.

Замечание 4.1 *к теореме* 4.2

1. Эквивалентные формы записи производной:

$$f'(z) = u_x(x, y) + i \cdot v_x(x, y) = v_y(x, y) + i \cdot v_x(x, y) =$$

$$= u_x(x, y) - i \cdot u_y(x, y) = v_y(x, y) - i \cdot u_y(x, y).$$

2. Нетрудно видеть, что выполнения условий Коши–Римана недостаточно для дифференцируемости функции $f(z)$ в точке. Достаточные условия сформулированы в теореме 4.2, которая не является обратной к теореме 4.1.
   В качестве примера можно рассмотреть функцию $f(z) = \sqrt{|\operatorname{Re} z \cdot \operatorname{Im} z|} = \sqrt{|xy|}$, которая не является дифференцируемой в точке $z = 0$, однако условия Коши–Римана выполнены в этой точке.

Пример 4.1. *Исследовать на дифференцируемость функцию* $f(z) = z^2$.

Решение.

$$z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy.$$

Воспользуемся условиями Коши–Римана:

$$\frac{\partial(x^2 - y^2)}{\partial x} = 2x; \quad \frac{\partial(2xy)}{\partial y} = 2x;$$

$$\frac{\partial(x^2-y^2)}{\partial y} = -2y; \quad -\frac{\partial\,(2xy)}{\partial x} = -2y.$$

Следовательно, функция дифференцируема в любой точке комплексной плоскости.

Задача 4.2. *Исследуйте на дифференцируемость функцию* $f\,(z) = \cos z$.

Определение 4.3 *Функция* $f(z) \in C(g)$*, дифференцируемая во всех точках* $z \in g$*, производная которой* $f'(z) \in C(g)$*, называется* ***аналитической функцией*** *в области* g*, будем обозначать ее* $f(z) \in C^\infty(g)$.

Данное обозначение оправдано тем, что, как далее будет показано, аналитическая функция в области является бесконечно дифференцируемой в этой области.

Теорема 4.3 *Необходимым и достаточным условиями аналитичности функции* $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ *в области* g*, являются непрерывность первых частных производных* $(u_x, u_y, v_x, v_y \in C(g))$ *при выполнении условий Коши–Римана.*

Необходимость. Если $f(z) \in C^\infty(g)$ то $f'(z) \in C(g)$, откуда $u_x, u_y, v_x, v_y \in C(g)$. Выполнение условий Коши–Римана следует из теоремы 4.1.

Достаточность. Если $u_x, u_y, v_x, v_y \in C(g)$, то существуют первые дифференциалы функций $u(x,y)$ и $v(x,y)$, и по теореме 4.2 существует $f'(z) \in C(g) = u_x + iv_x$, причем непрерывность $f'(z)$ следует из непрерывности частных производных.

Важно помнить:

1. Действительная и мнимая части аналитической функции удовлетворяют условиям Коши–Римана:

$$u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0); \quad u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0).$$

2. Действительная и мнимая части аналитической функции удовлетворяют уравнению Лапласа:

$$u_{xx} + u_{yy} \equiv \Delta u = 0;$$

$$v_{xx} + v_{yy} \equiv \Delta v = 0.$$

3. Действительная и мнимая части аналитической функции $f(z) = u(\rho, \varphi) + iv(\rho, \varphi)$ комплексной переменной $z = \rho \cdot e^{i\varphi}$ связаны соотношениями:

$$v_\varphi = \rho \cdot u_\rho, \quad u_\varphi = -\rho \cdot v_\rho.$$

4. Модуль и аргумент аналитической функции $f(z) = R(x,y)e^{i\Phi(x,y)}$ связаны соотношениями:

$$R_x = R \cdot \Phi_y, \quad R_y = -R \cdot \Phi_x.$$

Свойства аналитических функций.

1. Если $f(z) \in C^{\infty}(g)$ (аналитическая в области g), то $f(z) \in C(g)$ (непрерывна в области g).
2. Сумма, разность и произведение аналитических функций есть аналитическая функция. Отношение аналитических функций есть аналитическая функция всюду, где знаменатель отличен от нуля.
3. Если $w = f(z) \in C^{\infty}(g)$ есть аналитическая функция, причем в области ее значений G на плоскости w определена аналитическая функция $\varphi(w) \in C^{\infty}(G)$, то функция $F(z) = \varphi(f(z)) \in C^{\infty}(g)$ является аналитической функцией в области g.
4. Пусть $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y) \in C^{\infty}(g)$ и $f'(z_0) \neq 0$, $z_0 \in g$. Тогда в окрестности точки $w_0 = f(z_0)$ определена обратная аналитическая функция $z = \varphi(w) \in C^{\infty}$, $(|w - w_0| < \varepsilon)$, отображающая эту окрестность на окрестность точки z_0, причем $\varphi'(w_0) = 1/f'(z_0)$.

   Доказательство. Для существования обратной функции необходимо, чтобы уравнения $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$ можно было разрешить относительно x, y в окрестности точки w_0 считая, что эти уравнения задают неявные функции x, y переменных u, v. Как было показано в курсе математического анализа, для этого достаточно, чтобы в окрестности точки z_0 выполнялось условие: $\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} \neq 0$.

   С учетом условий Коши–Римана получаем

$$\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = u_x \cdot v_y - u_y \cdot v_x = u_x^2 + v_y^2 = f'(z_0) \neq 0.$$

   Таким образом, доказано существование обратной функции $z = \varphi(w)$. Составив разностное отношение $\dfrac{\Delta z}{\Delta w} = \dfrac{1}{\dfrac{\Delta w}{\Delta z}}$, можно доказать существование и непрерывность производной $\varphi'(w_0)$ при условии $f'(z_0) \neq 0$.
5. Аналитическую функцию можно восстановить по ее действительной или по мнимой части с точностью до аддитив-

ной постоянной.

Доказательство. Например, пусть в односвязной области g плоскости (x, y) задана функция $u(x, y)$, являющаяся действительной частью аналитической функции $f(z)$. В силу условий Коши–Римана дифференциал неизвестной функции $v(x, y)$ однозначно определен по функции $u(x, y)$:

$$dv = v_x dx + v_y dy = -u_y dx + u_x dy,$$

то есть мнимая часть этой функции определяется с точностью до аддитивной постоянной, так как функцию двух действительных переменных можно определить по ее полному дифференциалу с точностью до аддитивной постоянной.

6. Линии уровня $u(x, y) = const$, $v(x, y) = const$ взаимно ортогональны.

Доказательство. Пусть $\operatorname{grad} u = \{u_x, u_y\}$, $\operatorname{grad} v = \{v_x, v_y\}$, тогда скалярное произведение этих векторов равно

$$(\operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v) = u_x \cdot v_x + u_y \cdot v_y = -u_y \cdot v_y + u_y \cdot v_y = 0.$$

Градиент ортогонален линии уровня, следовательно, линии уровня тоже ортогональны.

Пример 4.3. *Исследовать функцию на аналитичность.*

а) Функция $f(z) = C$, где $C = const$, — аналитическая на расширенной комплексной плоскости $(f'(z) = 0)$.

б) $f(z) = \dfrac{1}{z}$ — аналитическая всюду, кроме точки $z = 0$ $\left(f'(z) = -\dfrac{1}{z^2}\right)$.

в) $f(z) = e^z$ — аналитична на всей комплексной плоскости.

г) $f(z) = \overline{z} = x - iy$ — не аналитическая, так как не выполняются условия Коши–Римана: $u_x = 1 \neq v_y = -1$.

д) $f(z) = \sin \overline{z}$ — условия Коши–Римана выполняются только в точках $\left(\dfrac{\pi}{2} + \pi n, 0\right)$, значит, функция не является аналитической.

Задача 4.4. *Исследуйте функцию на аналитичность:*

а) Линейная функция $f(z) = az + b$;

б) $f(z) = z^n$, n — целое положительное число;

в) $f(z) = (\overline{z})^2$;

г) $f(z) = \cos \overline{z}$.

Ответ:

а)аналитическая на всей комплексной плоскости: $f'(z) = a$;

б)аналитическая на всей комплексной плоскости: $f'(z) = nz^{n-1}$;

в) условия Коши–Римана выполняются только в точке $(0;0)$, значит, функция не является аналитической;

г) условия Коши–Римана выполняются только в точках $(\pi n;0)$, значит, функция не является аналитической.

Пример 4.5. *Исследовать функцию $w = \ln z = \ln r + i\varphi$ на аналитичность.*

Решение. Докажем, что данная функция является аналитической везде, кроме точки $z = 0$. Воспользуемся условиями Коши–Римана для $f(z) = u(\rho,\varphi) + iv(\rho,\varphi)$:

$$v_\varphi = \rho \cdot u_\rho; \quad u_\varphi = -\rho \cdot v_\rho \quad \Longleftrightarrow \quad 1 = r\frac{1}{r}; \;\; 0 = 0,$$

что справедливо в рассматриваемой области. Значит, функция аналитическая везде, кроме точки $z = 0$.

Задача 4.6. *Исследуйте функцию $w = \ln \overline{z}$ на аналитичность.*
Ответ: не является аналитической.

Пример 4.7. *Найти мнимую часть аналитической функции $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, если ее действительная часть $u(x,y) = e^x \sin y + 2xy$.*

Решение.

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = e^x \sin y + 2y \Longrightarrow v = -e^x \cos y + y^2 + C(x),$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \cos y - 2x = -e^x \cos y + C'(x) \Longrightarrow$$

$$C(x) = -x^2 + C_0 \Longrightarrow v(x,y) = -e^x \cos y + \left(y^2 - x^2\right) + C_0,$$

где C_0 — произвольная константа.

Задача 4.8. *Найдите действительную часть аналитической функции $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ по ее известной мнимой части $v(x,y) = 3x^2y - y^3 - y$.*
Ответ: $u(x,y) = x^3 - 3xy^2 - x + C_0$.

4.2. Задачи для самостоятельного решения.

1. Исследуйте на дифференцируемость функции:
 а) $f(z) = \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z$; б) $f(z) = z + \overline{z}$;
 в) $f(z) = \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} \overline{z}$; г) $f(z) = z^2 + (\overline{z})^2$; д) $f(z) = \overline{z}$;
 е) $f(z) = \overline{z} \cdot \operatorname{Im} z$; ж) $f(z) = \operatorname{Re} z \cdot \operatorname{Im} z$.

2. Исследуйте функцию $f(z)$ на аналитичность, укажите область аналитичности:
   а) $f(z) = \operatorname{Re}\left(z^2\right)$; б) $f(z) = \operatorname{Im}\left(z^2\right)$;
   в) $f(z) = |z|^2 \cdot \operatorname{Re} z$; г) $f(z) = |z|^2 \cdot \operatorname{Im} z$;
   д) $f(z) = \overline{z} \cdot \operatorname{Re} z$; е) $f(z) = z \cdot \operatorname{Im} \overline{z}$;
   ж) $f(z) = (\overline{z})^2$; з) $f(z) = z^2 + |\overline{z}|^2$; и) $f(z) = z^2 + (\overline{z})^2$.
   к) $f(z) = \dfrac{i}{z}$; л) $f(z) = (z + 2i)^3$; м) $f(z) = e^{iz}$;
   н) $f(z) = \sin 2z$; о) $f(z) = \operatorname{ch} z$; п) $f(z) = \dfrac{1}{2} \cdot \left(z + \dfrac{1}{z}\right)$;
   р) $f(z) = z^n, n \in \mathbb{N}$; с) $f(z) = \ln|z| + i\arg z$;
   т) $f(z) = z \cdot |z|$; у) $f(z) = z \cdot \operatorname{Re} z$.
3. Найдите мнимую часть аналитической функции $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ по ее известной действительной части:
   а) $u(x, y) = x^3 - 3xy^2 - x$;
   б) $u(x, y) = x^2 - y^2 + 5x + y - \dfrac{y}{x^2 + y^2}$.
4. Найдите действительную часть аналитической функции $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ по ее известной мнимой части:
   а) $v(x, y) = 3x^2y - y^3 - y$; б) $v(x, y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$.
   в) $v(x, y) = \ln\left(x^2 + y^2\right) + x^3 - 2y$.
5. Докажите, что указанные ниже функции могут быть действительной $u(x, y)$ или мнимой $v(x, y)$ частью аналитической функции комплексной переменной

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \text{ где } z = x + iy.$$

   а) $u(x, y) = x^3 - 3xy^2 - x$;
   б) $u(x, y) = x^2 - y^2 + 5x + y - \dfrac{y}{x^2 + y^2}$;
   в) $v(x, y) = 3x^2y - y^3 - y$;
   г) $v(x, y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$;
   д) $v(x, y) = \ln\left(x^2 + y^2\right) + x^3 - 2y$.

Вопросы к экзамену.

1. Сформулируйте определение функции комплексной переменной, дифференцируемой в точке. Приведите пример.
2. Сформулируйте, в чем состоит геометрический смысл аргумента производной аналитической функции.
3. Сформулируйте необходимые и достаточные условия дифференцируемости функции в точке.
4. Сформулируйте определение функции, аналитической в области, не содержащей точку $z = \infty$.

5. Сформулируйте необходимые и достаточные условия аналитичности функции в области, не содержащей точку $z = \infty$.
6. Сформулируйте определение функции, гармонической в некоторой области.
7. Сформулируйте определение сопряженных гармонических в некоторой области функций.
8. Сформулируйте, как связаны аналитичность функции $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ с гармоничностью функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$.
9. Запишите условия Коши–Римана в случае, когда $z = x + iy$, $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$.
10. Запишите условия Коши–Римана в случае, когда $z = re^{i\varphi}$, $w = f(z) = u(r, \varphi) + iv(r, \varphi)$.
11. Запишите условия Коши–Римана в случае, когда $z = x + iy$, $w = f(z) = R(x, y) \cdot e^{i\Phi(x,y)}$.
12. Запишите условия Коши–Римана в случае, когда $z = re^{i\varphi}$, $w = f(z) = R(r, \varphi) \cdot e^{i\Phi(r,\varphi)}$.

Теоретические задачи и задачи повышенной сложности.

1. Докажите, что $f(z) = z \cdot \operatorname{Re} z$ дифференцируема только в точке $z = 0$ и найдите $f'(0)$.
2. Докажите, что для функции $f(z) = \sqrt{|\operatorname{Re} z \cdot \operatorname{Im} z|}$ в точке $z = 0$ выполняются условия Коши–Римана, но $f'(0)$ не существует.
3. Пусть $w = f(z)$ обладает следующими свойствами в точке z: u и v — дифференцируемые функции ($w = u + iv$); существует $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \arg \dfrac{\Delta w}{\Delta z}$. Докажите, что функция $w = f(z)$ дифференцируема в точке z.
4. Пусть $w = f(z)$ обладает следующими свойствами в точке z: u и v — дифференцируемые функции ($w = u + iv$); существует $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \left|\dfrac{\Delta w}{\Delta z}\right|$. Докажите, что либо функция $w = f(z)$, либо функция $w = \overline{f(z)}$ дифференцируема в точке z.
5. Пусть в области $D:\ -\pi < \arg z < \pi$ задана функция $f(z) = \sqrt[n]{r}\, e^{i\frac{\varphi}{n}}$, $z = re^{i\varphi}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Докажите, что $f(z)$ является аналитической в D и $f'(z) = \dfrac{f(z)}{nz}$.
6. Выясните, будет ли гармонической функция u^2, если u — гармоническая функция?
7. Пусть функция $f(z)$ является аналитической в некоторой области. Является ли указанная ниже функция $u(x, y)$ гар-

моническом в этой области? Ответ обоснуйте.
а) $u(x, y) = |f(z)|$; б) $u(x, y) = \ln |f(z)|$;
в) $u(x, y) = \arg f(z)$.

§ 5. Конформные отображения

5.1. Определение и свойства конформного отображения. Пусть $w = f(z)$, где $f(z)$ является аналитической функцией комплексной переменной $z = x + iy$ в области g, при этом w принадлежит некоторой области D. Пусть также в точке $z_0 \in g$ существует $f'(z_0) = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{\Delta w}{\Delta z} \neq 0$.

Выберем такой способ стремления Δz к нулю, при котором точки $z = z_0$ и $z = z_0 + \Delta z$ принадлежат некоторой гладкой кривой $\gamma_1 \in g$. Соответствующие им точки $w = w_0$ и $w = w_0 + \Delta w$ принадлежат Γ_1 — некоторой кривой в области D. Приращениям Δz и Δw соответствуют ***векторы секущих к кривым*** γ_1 и Γ_1 соответственно. При этом $\arg \Delta z$ и $\arg \Delta w$ имеют геометрический смысл ***углов,*** которые соответствующие векторы составляют с положительными направлениями осей абсцисс на комплексных плоскостях z и w соответственно, а $|\Delta z|$ и $|\Delta w|$ — ***длины*** этих векторов. При $\Delta z \to 0$ векторы секущих переходят в векторы касательных к соответствующим кривым (рис. 10).

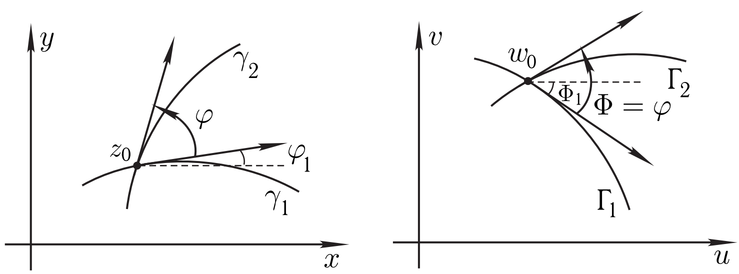


Рис. 10.

Представим отличную от нуля производную функции $f(z)$ в показательной форме: $f'(z) = ke^{i\alpha}$, $k > 0$, где α — определенное действительное число. Тогда $|\Delta w| = k|\Delta z| + o(|\Delta z|)$, причем $k = |f'(z)|$ не зависит от выбора кривой γ_1.

Таким образом, при отображении $w = f(z) \in C^\infty(g)$ и $f'(z_0) \neq 0$ бесконечно малые линейные элементы преобразуются подобным образом, причем $k = |f'(z_0)|$ — коэффициент преобразования подобия, что именуется ***свойством постоянства растяжения***.

Теперь рассмотрим угол

$$\alpha = \arg f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \arg \Delta w - \lim_{\Delta z \to 0} \arg \Delta z = \Phi_1 - \varphi_1,$$

равный разности угла Φ_1 (угол между касательной к кривой Γ_1 и положительным направлением оси $u = \operatorname{Re} w$ на плоскости w) и угла φ_1 (угол между касательной к кривой γ_1 и положительным направлением оси x на плоскости z). Тогда $\Phi_1 = \varphi_1 + \alpha$.

Другими словами, аргумент производной $\arg f'(z_0)$ в точке z_0 определяет величину угла, на который нужно повернуть касательную к любой гладкой кривой γ, проходящей через точку z_0, чтобы получить касательную к образу этой кривой в точке $w_0 = f(z_0)$. Так как $\alpha = \arg f'(z_0)$ не зависит от выбора γ_1, то для любой кривой γ_2: $z_0 \in \gamma_2$ выполняется равенство $\Phi_2 = \varphi_2 + \alpha$, откуда $\Phi = \Phi_2 - \Phi_1 = \varphi_2 - \varphi_1 = \varphi$ (сохраняется величина и направление углов) — это ***свойство сохранения углов.***

Определение 5.1 *Непрерывное взаимно однозначное отображение области g комплексной плоскости z на область D комплексной плоскости w, при котором в любой точке $z \in g$ выполняются свойства сохранения углов и постоянства растяжений, называется* ***конформным отображением*** *g на D.*

Замечание 5.1 *При конформном отображении бесконечно малая окружность преобразуется в бесконечно малую окружность; бесконечно малый треугольник — в бесконечно малый треугольник.*

Выясним, какими свойствами должна обладать функция комплексной переменной, чтобы отображение, осуществляемое этой функцией, было конформно.

Теорема 5.1 *Если функция $f(z) \in C^\infty(g)$, является однозначной и однолистной, и $f'(z) \neq 0$ для любых точек $z \in g$, то $f(z)$ осуществляет конформное отображение $g \overset{K}{\longleftrightarrow} D$.*

Доказательство. Отображение, осуществляемое указанной функцией $f(z)$, обладает свойствами сохранения углов и постоянства растяжений, как было показано выше, и оно взаимно однозначное. Следовательно, отображение — конформное.

Итак, условия аналитичности, однолистности и отличия от нуля производной функции являются достаточными условиями конформности отображения, осуществляемой этой функцией.

Сформулируем теорему о необходимых условиях.

Теорема 5.2 *Если функция $f(z)$ осуществляет конформное отображение $g \overset{K}{\longleftrightarrow} D$, то $f(z) \in C^\infty(g)$, однолистна, и ее* *производная $f'(z) \neq 0$ для любой точки $z \in g$.*

Рассмотренное отображение называется **конформным отображением первого рода**.

Конформное отображение, при котором сохраняются абсолютные величины углов между кривыми и их образами, но направление углов меняется на противоположное, называется **конформным отображением второго рода**. Очевидно, что конформное отображение второго рода осуществляется функциями, являющимися комплексно сопряженными аналитическим функциям с отличной от нуля производной.

5.2. Основные принципы конформных отображений.

1. **Взаимно однозначное соответствие областей.** Следует из теорем 5.1 и 5.2.

2. **Принцип соответствия границ.**

Теорема 5.3 *Если $w = f(z)$, где $f(z) \in C^\infty(g)$, область g односвязна, и граница области g взаимно однозначно отображается на границу области D на плоскости w с сохранением направления обхода, то преобразование $f(z)$ осуществляет конформное отображение области g на область D (при положительном направлении обходе контура область остается слева).*

3. **Принцип симметрии**. Пусть граница ∂g области g имеет прямолинейный участок γ'. Область g', полученную в результате зеркального отражения g относительно прямой, на которой лежит отрезок γ', будем называть областью, симметричной области g относительно γ'. Сформулируем принцип симметрии.

Теорема 5.4 *Точки, симметричные относительно прямолинейных участков границы, при конформном отображении переходят в точки, симметричные относительно прямолинейного участка — образа границы.*

Замечание 5.2 *Данная теорема остается справедливой, если прямолинейный участок заменить на отрезок дуги окружности, так как прямую можно интерпретировать как окружность бесконечного радиуса.*

Пример 5.1. *Показать, что точки $z_1 = 2 + 3i$ и $z_2 = 3 + 2i$, симметричные относительно прямой $y = x$, при отображении функции $w = e^{-i\frac{\pi}{2}}z$ переходят в точки, симметричные относительно образа прямой.*

Решение. Сначала найдем образ прямой $y = x$:

$$w = e^{-i\frac{\pi}{2}}z = e^{-i\frac{\pi}{2}}(x + iy) = -i(x + iy) = y - ix,$$

то есть прямая $y = x$ переходит в прямую $y = -x$. Далее, точки $z_1 = 2 + 3i$ и $z_2 = 3 + 2i$ отображаются в точки $w_1 = e^{-i\frac{\pi}{2}} z_1 = e^{-i\frac{\pi}{2}}(2 + 3i) = 3 - 2i$; $w_2 = 2 - 3i$, симметричные относительно прямой $y = -x$.

Задача 5.2. *Покажите, что точки $z_1 = 1 + 2i$ и $z_2 = 1 - 2i$, симметричные относительно прямой $\operatorname{Re} z = 0$, при отображении функции $w = e^{i\frac{\pi}{2}} z$ переходят в точки, симметричные относительно образа прямой.*

5.3. Теорема Римана (основной закон конформных отображений). Пусть заданы область g комплексной плоскости z и область D комплексной плоскости w. Требуется найти функцию $f(z) = w$, конформно отображающую g на D.

Теорема 5.5 (*Римана*) *Всякую односвязную область g комплексной плоскости z, граница которой состоит более чем из одной точки, можно конформно отобразить на внутренность единичного круга $|w| < 1$ плоскости w.*

Полное доказательство см., например, А.В.Бицадзе «Основы теории аналитических функций».

Замечание 5.3

1. *Пусть область g комплексной плоскости z и область D комплексной плоскости w удовлетворяют условиям теоремы Римана: существует $\xi = f(z) : g \overset{K}{\longleftrightarrow} |\xi| < 1$, $f(z_0) = \xi_0$ и существует $w = \varphi(\xi) : |\xi| < 1 \overset{K}{\longleftrightarrow} D$, $\varphi(\xi_0) = w_0$. Тогда существует $w = F(z) = \varphi(f(z)) : g \overset{K}{\longleftrightarrow} D$, $F(z_0) = w_0$.*
2. *Требование односвязности является существенным. Предположение о возможности конформного отображения многосвязной области на односвязную приводит к противоречию. Однако в ряде случаев возможно конформное отображение областей одинаковой связности.*
3. *Условия теоремы Римана можно заменить установлением соответствия 3-х точек ∂g — границы области g, трем точкам ∂D — границы области D.*

5.4. Основные функции, используемые при конформном отображении $w = f(z)$.

1. Линейная функция $f(z) = az + b$;
2. Дробно-линейная функция $f(z) = \dfrac{az + b}{cz + d}$;

3. Степенная функция $f(z) = z^n$, область однолистности: $0 < \arg\ z < \dfrac{2\pi}{n}$;
4. $f(z) = \dfrac{1}{z}$, область однолистности — вся комплексная плоскость с выколотой точкой $z = 0$;
5. $f(z) = e^z$, область однолистности: $-\pi < \operatorname{Im} z < \pi$.

Пример 5.3. *Указать геометрический смысл отображения.*

а) $w = z + 3\ i$ — параллельный перенос на 3 вдоль мнимой оси;

б) $w = z + 5$ — параллельный перенос на 5 вдоль действительной оси;

в) $w = iz$ — поворот на 90° против часовой стрелки;

г) $w = z \cdot e^{-i\frac{\pi}{6}}$ — поворот на 30° по часовой стрелке;

д) $w = 3z$ — растяжение (подобие с коэффициентом 3).

Задача 5.4. *Укажите геометрический смысл отображения:*

а) $w = i\,(z + 3)$; б) $w = 4e^{i\frac{\pi}{3}}z - 2$.

Пример 5.5. *Найти линейную функцию, отображающую треугольник с вершинами в точках* $0;\ 1;\ i$ *в подобный треугольник с вершинами в* $0;\ 2;\ 1 + i$.

Решение. Здесь важно понять, что если сохраняются углы, то прямой угол исходного треугольника отобразится в прямой угол образа. Значит, $0 \longrightarrow 1 + i;\ 1 \longrightarrow 0$. Отсюда

$$w = (1 - z)(1 + \ i).$$

Прямой подстановкой убеждаемся, что третья вершина $z = i$ переходит в $w = 2$.

Задача 5.6. *Найдите линейную функцию, отображающую треугольник с вершинами в точках* $0;\ -4;\ -2 + 2i$ *в подобный треугольник с вершинами в* $0;\ 1;\ -i$.

Ответ: $w = \dfrac{1 + i}{4}z + 1$.

Пример 5.7. *Отобразить первый квадрант на плоскости* z *на верхнюю полуплоскость плоскости* w*:*

$$\operatorname{Re} z > 0 \cap \operatorname{Im} z > 0 \quad \stackrel{K}{\longleftrightarrow} \quad \operatorname{Im} w > 0.$$

Решение. Преобразование осуществляется функцией

$$w(z) = az^2 + b,\ a,\ b \in \mathbb{R},\ a > 0.$$

Задача 5.8. *Отобразите сектор* $0 < \varphi < \dfrac{\pi}{3}$, $z = \rho e^{i\varphi}$ *на верхнюю полуплоскость* $\operatorname{Im} w > 0$.
Ответ: $w(z) = z^3$.

Пример 5.9. *Отобразить полосу* $0 < \operatorname{Re} z < a$ *на верхнюю полуплоскость* $\operatorname{Im} w > 0$.
Решение.

Пусть $z_1 = \dfrac{\pi}{a} \cdot z$, тогда $0 < \operatorname{Re} z < a \xleftrightarrow{K} 0 < \operatorname{Re} z_1 < \pi$; далее, пусть $z_2 = iz_1$, $0 < \operatorname{Re} z_1 < \pi \xleftrightarrow{K} 0 < \operatorname{Im} z_2 < \pi$; $w = \exp(z_2)$, $0 < \operatorname{Im} z_2 < \pi \xleftrightarrow{K} \operatorname{Im} w > 0$, следовательно, $w = \exp(i\pi z/a)$ (рис. 11-12).

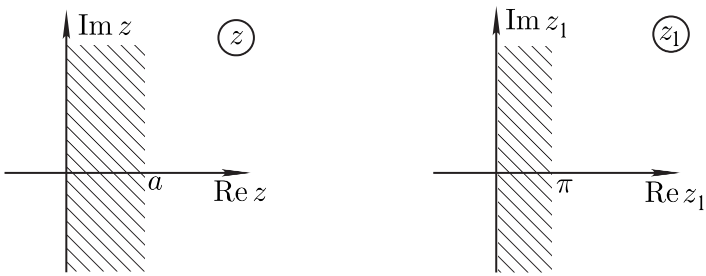


Рис. 11.

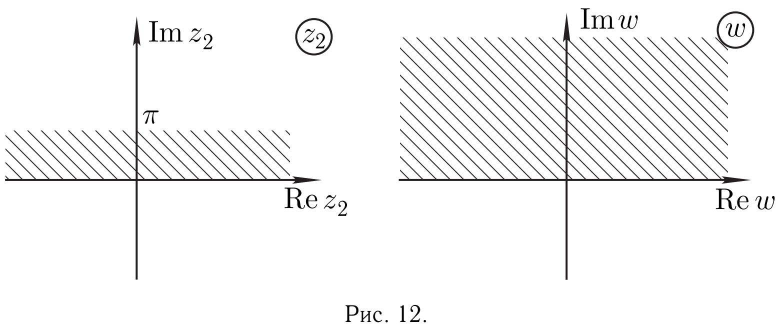


Рис. 12.

Задача 5.10. *Отобразите полосу* $0 < \operatorname{Im}\ z < \dfrac{\pi}{3}$ *на верхнюю полуплоскость* w: $\operatorname{Im} w > 0$.
Ответ: $w = e^{3z}$.

Пример 5.11. *Описать геометрическую интерпретацию преобразования* $w = \dfrac{1}{z}$.

Рассмотрим функцию $f(z) = \dfrac{1}{z}$. На области определения функция однозначна и однолистна, а также непрерывна. Если записать z в показательной форме: $z = \rho e^{i\varphi}$, то $w = \dfrac{1}{\rho} e^{-i\varphi}$, то есть $\arg w = -\arg z$. Тогда преобразование $w = \dfrac{1}{z}$ можно рассматривать как суперпозицию двух преобразований: $\xi = \xi(z)$, где $|\xi| = |z|$, $\arg \xi = -\arg z$, и $w = w(\xi)$, где $|w| = \dfrac{1}{|\xi|}$, $\arg w = \arg \xi$ — инверсия в единичном круге. Под инверсией понимается такое преобразование, при котором каждой точке внутри (вне) круга ставится в соответствие точка вне (внутри) круга, лежащая на луче, проведенном из центра окружности в эту точку. При этом произведение расстояний от точек до центра равно квадрату радиуса круга.

Задача 5.12. *На какую область функция* $w = \dfrac{1}{z}$ *отобразит полуполосу* $0 < \operatorname{Re} z < 1$*,* $\operatorname{Im} z > 0$*?*

5.5. Дробно-линейная функция.

Пусть $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$.

Будем считать, что $a \neq 0$, $c \neq 0$, $\dfrac{b}{a} \neq \dfrac{d}{c}$. Тогда

$$w = f(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \lambda \frac{z+\alpha}{z+\beta} = \left(1 + \frac{\alpha-\beta}{z+\beta}\right), \tag{5.1}$$

где $\lambda = \dfrac{a}{c}$, $\alpha = \dfrac{b}{a}$, $\beta = \dfrac{d}{c}$. Таким образом, отображение определяется тремя параметрами, причем $\alpha \neq \beta$.

Также можно записать преобразование в обратную сторону: $z = \lambda' \dfrac{w+\alpha'}{w+\beta'}$; $z \xleftrightarrow{K} w$, $\alpha' \neq \beta'$, $f'(z) \neq 0$ для любого z.

<u>Важно помнить.</u> Геометрический смысл конформного отображения, осуществляемого дробно-линейной функцией, — это повороты и растяжения, отражение относительно действительной оси, инверсия.

Заданием соответствия трех точек плоскости z трем точкам плоскости w: $z_1 \leftrightarrow w_1$, $z_2 \leftrightarrow w_2$, $z_3 \leftrightarrow w_3$, дробно-линейная функция определена однозначно, то есть коэффициенты λ, α, β однозначно определяются указанными выше соотношениями через 6 заданных комплексных чисел.

Действительно, пусть $w_1 = \lambda\dfrac{z_1+\alpha}{z_1+\beta}$; $w_2 = \lambda\dfrac{z_2+\alpha}{z_2+\beta}$; $w_3 = \lambda\dfrac{z_3+\alpha}{z_3+\beta}$ =>

$$w_1 - w_2 = \lambda\frac{(z_2-z_1)(\alpha-\beta)}{(z_1+\beta)(z_2+\beta)}\ ; \quad w_1 - w_3 = \lambda\frac{(z_3-z_1)(\alpha-\beta)}{(z_1+\beta)(z_3+\beta)};$$

$$A = \frac{w_1-w_2}{w_1-w_3} = \frac{(z_1-z_2)(z_3+\beta)}{(z_1-z_3)(z_2+\beta)};$$

$$B = \frac{w-w_2}{w-w_3} = \frac{(z-z_2)(z_3+\beta)}{(z-z_3)(z_2+\beta)};$$

$$\frac{B}{A} = \frac{(w-w_2)\,(w_1-w_3)}{(w-w_3)\,(w_1-w_2)} = \frac{(z-z_2)(z_1-z_3)}{(z-z_3)(z_1-z_2)}.$$

Из этого соотношения получаем дробно-линейную функцию $w = f(z)$.

Пример 5.13. *Найти дробно-линейную функцию, переводящую точки $z_1 = 1$, $z_2 = i$, $z_3 = -1$ соответственно в точки $w_1 = -1$, $w_2 = 0$, $w_3 = 1$.*

Решение. Воспользуемся полученной формулой, подставив в нее заданные точки:

$$\frac{(w-0)(-1-1)}{(w-1)(-1-0)} = \frac{(z-i)(1+1)}{(z+1)(1-i)} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{-2w}{1-w} = \frac{2z-2i}{(z+1)(1-i)}.$$

После преобразований имеем

$$w = \frac{z-i}{iz-1} = i\frac{i-z}{z+i}.$$

Замечание 5.4 *Если одна из точек z или w равны ∞, надо в формуле заменить скобки с этой точкой на единицу.*

Задача 5.14. *Найти дробно-линейную функцию, переводящую точки $z_1 = -1$, $z_2 = \infty$, $z_3 = i$ соответственно в точки $w_1 = \infty$, $w_2 = 0$, $w_3 = 1$.*

Ответ: $w = \dfrac{1+i}{z+1}$.

Пример 5.15. *Найти дробно-линейное отображение $w = f(z)$, переводящее точки -1, 0, 1 соответственно в точки 1, i, -1.*

Выяснить, какая область на плоскости w является образом полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$.

Решение. Общий вид дробно-линейной функции

$$f(z)=\lambda\,\frac{z+\alpha}{z+\beta}.$$

Здесь можно либо воспользоваться формулой, приведенной выше, либо провести эти преобразования для конкретной задачи: из соотношений $f(-1)=1$, $f(0)=i$, $f(1)=-1$, данных в условии, получим уравнения для определения параметров дробно-линейной функции

$$\lambda\,\frac{-1+\alpha}{-1+\beta}=1,\qquad \lambda\,\frac{\alpha}{\beta}=i,\qquad \lambda\,\frac{1+\alpha}{1+\beta}=-1.$$

Отсюда найдем $\alpha=-i$, $\beta=i$, $\lambda=-i$.

Следовательно, искомое отображение $w=-i\,\dfrac{z-i}{z+i}$.

Для ответа на второй вопрос задачи заметим, что заданные в условии точки -1, 0 и 1 лежат на границе области $\operatorname{Im} z>0$ и отображаются в точки 1, i, -1, лежащие на окружности $|w|=1$. Так как дробно-линейная функция отображает окружность в окружность (напомним, что прямая — окружность бесконечного радиуса), то образом границы области $\operatorname{Im} z>0$ является окружность $|w|=1$.

При этом, образом полуплоскости $\operatorname{Im} z>0$ является внутренность круга $|w|<1$, так как, например, $w(i)=0$, но $z=i\in \operatorname{Im} z>0$, а $w=0\in |w|<1$.

Чтобы установить, что образом полуплоскости $\operatorname{Im} z>0$ является именно внутренность круга $|w|<1$, можно также использовать принцип соответствия границ. Так как $w(-1)=1$, $w(0)=i$, $w(1)=-1$ и при заданном порядке прохождения точек границы $z=-1\ \to\ z=0\ \to\ z=1$ область $\operatorname{Im} z>0$ остается слева, то для соответствующей последовательности образов $w(-1)=1$, $w(0)=i$, $w(1)=-1$ область $|z|<1$ — тоже слева (рис. 13).

Ответ: искомое отображение $w=-i\,\dfrac{z-i}{z+i}$; образом полуплоскости $\operatorname{Im} z>0$ является внутренность круга $|w|<1$.

Пример 5.16. *Найти дробно-линейное отображение $w=f(z)$, переводящее точки -1, ∞, i соответственно в точки i, 1, $1+i$.*

Выяснить, какая область на плоскости w является образом полуплоскости $\operatorname{Im} z>0$.

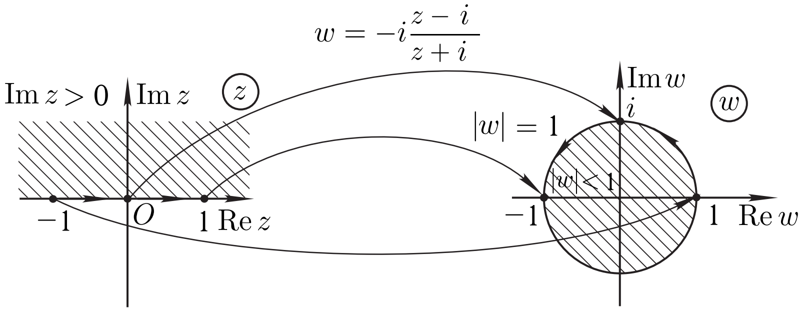


Рис. 13. К примеру 5.15.

Решение. Общий вид дробно-линейной функции

$$f(z) = \lambda\,\frac{z+\alpha}{z+\beta}.$$

Используя соотношения $f(-1) = i$, $f(\infty) = 1$, $f(i) = 1 + i$, данные в условии, получим уравнения для определения параметров дробно-линейной функции

$$\lambda\,\frac{-1+\alpha}{-1+\beta} = i, \qquad \lambda\,\frac{z+\alpha}{z+\beta}\bigg|_{z=\infty} = \lambda = 1, \qquad \lambda\,\frac{i+\alpha}{i+\beta} = 1 + 1,$$

откуда найдем $\alpha = 2 + i$, $\beta = 2 - i$, $\lambda = 1$.

Следовательно, искомое отображение $w = \dfrac{z+2+i}{z+2-i}$.

Для ответа на второй вопрос найдем образы трех точек -1, 0 и $\operatorname{Re} z = \infty$, лежащих на границе области $\operatorname{Im} z > 0$ (при указанной последовательности точек — область $\operatorname{Im} z > 0$ слева):

$$w(-1) = i, \quad w(0) = \frac{3}{5} + \frac{4}{5}\,i, \quad w(\infty) = 1.$$

Заметим, что полученные образы лежат на окружности $|w| = 1$. Так как дробно-линейная функция отображает окружность в окружность (прямая — частный случай окружности !!), то образом границы области $\operatorname{Im} z > 0$ является окружность $|w| = 1$.

При этом, образом полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ является область вне круга $|w| < 1$, что можно установить, пользуясь принципом соответствия границ, или найдя образ какой либо точки, лежащей в полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$. Например,

$$w(i) = \frac{2+2i}{2} = 1 + i \in |w| > 1.$$

Ответ: искомое отображение $w = \dfrac{z+2+i}{z+2-i}$; образом полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ является область $|w| > 1$.

Задача 5.17. *Найти дробно-линейное отображение $w = f(z)$, переводящее точки -1, ∞, i соответственно в точки* 0, ∞, 1.

Выяснить, какая область на плоскости w является образом полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$.

Совет. Так как $w(\infty) = \infty$, а $\left|\lambda \dfrac{z+\alpha}{z+\beta}\right|_{z=\infty} = |\lambda| \neq \infty$, то искомое отображение следует искать в виде $w = \lambda z + \alpha$.

Ответ: искомое отображение $w = \dfrac{1-i}{2}(z+1)$; образом полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ является полуплоскость $\operatorname{Re} w + \operatorname{Im} w > 0$.

Круговое свойство: дробно-линейная функция переводит окружность в окружность

Из (5.1) следует, что достаточно показать, что функция $w = f(z) = \dfrac{1}{z}$ обладает этим свойством, так как параллельный перенос не изменяет вид кривой. Рассмотрим произвольную окружность в плоскости z: $A\left(x^2+y^2\right) + Bx + Cy + D = 0$. Пусть $w = \xi + i\eta$, тогда $z = x + iy = \dfrac{1}{w} = \dfrac{1}{\xi + i\eta} = \dfrac{\xi}{\xi^2+\eta^2} - i\dfrac{\eta}{\xi^2+\eta^2}$. Подставляя полученные значения x и y в уравнение окружности в плоскости z, получим окружность в плоскости w: $A + B\xi - C\eta + D\left(\xi^2+\eta^2\right) = 0$.

Окружность на плоскости однозначно определяется заданием 3-х точек, поэтому, задав соответствие $z_i \longleftrightarrow w_i$, $i = 1, 2, 3$, с сохранением направления обхода, мы однозначно определим дробно-линейную функцию, конформно отображающую $g \overset{K}{\longleftrightarrow} D$.

Пример 5.18. *Найти дробно-линейное отображение $w(z)$, переводящее круг радиуса $|z| < 1$ в верхнюю полуплоскость* $\operatorname{Im} w > 0$.

Решение. Возможны различные подходы к решению задачи.

Можно воспользоваться, например, принципом соответствия границ. Зададим три последовательные точки на границе (окружности $|z| = 1$), например, $z = 1$, $z = i$, и $z = -1$, так, чтобы область $|z| < 1$ при движении от первой к третьей точке оставалась слева. Поставим им в соответствие три последовательные точки прямой $\operatorname{Im} w = 0$ (границы области $\operatorname{Im} w > 0$) так, чтобы область $\operatorname{Im} w > 0$ также была слева (рис. 14). Например:

$$w(1) = -1, \quad w(i) = 0, \quad w(-1) = \infty; \qquad w = \lambda \cdot \frac{z+\alpha}{z+\beta}.$$

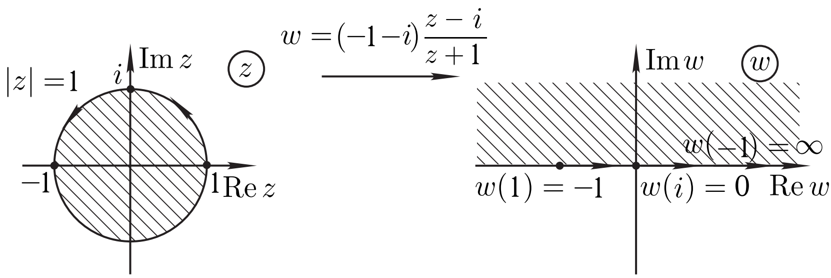


Рис. 14. К примеру 5.18.

Используя эти соотношения, получим:

$$\beta = 1, \quad \lambda = -1 - i, \quad \alpha = -i \qquad \Rightarrow \qquad w = (-1-i) \cdot \frac{z-i}{z+1}.$$

Ответ: $w = (-1-i) \cdot \dfrac{z-i}{z+1}$.

Возможно и другое решение, например, с использованием принципа симметрии.

Напомним, что точки z_1 и z_2, симметричные относительно окружности радиуса R на плоскости z, то есть для которых выполняется соотношение $z_1 \cdot z_2 = R^2$, при отображении дробно-линейной функцией отображаются в точки, симметричные относительно образа окружности.

Пусть центр круга точка $z = 0$ отображается, например, в точку $w = i$, тогда симметричная относительно окружности $|z| = 1$ точка $z = \infty$ — в симметричную относительно действительной оси точку $w = -i$ (рис. 15). Это отображение можно осуществить с помощью дробно-линейной функции $w = -i \cdot \dfrac{z - z_0}{z + z_0}$. Так как точка $w(z_0)$ находится на действительной оси плоскости w, то точка z_0 должна находиться на окруженсти $|z| = 1$, то есть $z_0 = e^{i\alpha}$, где α — любое действительное число.

Ответ: $w = -i \cdot \dfrac{z - e^{i\alpha}}{z + e^{i\alpha}}$.

Отметим, что и в первом случае принцип симметрии, естественно, выполняется, только $w(0) = -1 + i$, а $w(\infty) = -1 - i$.

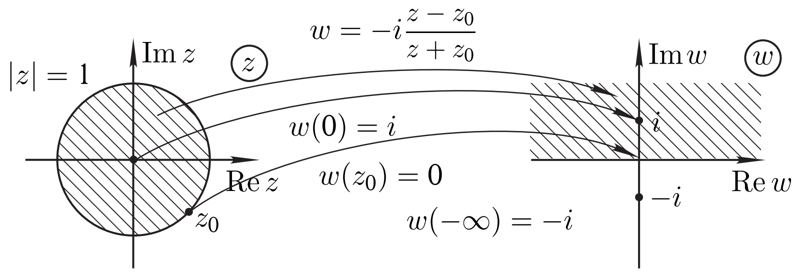


Рис. 15. К примеру 5.18.

Пример 5.19. *Найти конформное отображение, переводящее верхнюю полуплоскость* $\operatorname{Im} z > 0$ *во внутренность круга* $|w| < 1$ *так, чтобы точка* z_0 $(\operatorname{Im} z_0 > 0)$ *перешла в точку* $w_0 = 0$.
Решение. Границей верхней полуплоскости является прямая $y = 0$. Симметричной точке $z_0 = x_0 + iy_0$ является точка $\overline{z}_0 = x_0 - iy_0$, поэтому если z_0 соответствует $w_0 = 0$, то точке $\overline{z}_0$ в силу симметрии соответствует точка $w = \infty$. Отсюда

$$w = \lambda\frac{z - z_0}{z - \overline{z}_0}.$$

Значение λ находим из требования, чтобы граничная точка перешла в граничную. Например, $z = 0 \longrightarrow w$, $|w| = 1$. Значит, $|\lambda| = 1$,

$$w = \frac{z - z_0}{z - \overline{z}_0}.$$

Задача 5.20. *Найдите дробно-линейное отображение* $w(z)$, *переводящее внутренность круга радиуса* $|z| < 2$ *в верхнюю полуплоскость* $\operatorname{Im} w > 0$ *так, что* $w(0) = 1 + i$.
Совет. Учтите, что так как $w(0) = 1 + i$, то в силу принципа симметрии $w(\infty) = 1 - i$.

Ответ: $w = (1 - i)\cdot\dfrac{z - 2e^{i\alpha}}{z + 2ie^{i\alpha}}$, где α — любое действительное число.

Замечание 5.5 *Для получения единственного решения можно задать дополнительное условие. Например,* $w(1) = 0$, *тогда* $z_0 = 1$ *и* $w = -i\cdot\dfrac{z-1}{z+1}$, *или* $\arg w'(0) = 0$, *тогда* $z_0 = -i$ *и* $w = -i\cdot\dfrac{z+i}{z-i}$.

Пример 5.21. *Найти конформное отображение, переводящее* $|z| < R \overset{K}{\longleftrightarrow} |w| < 1$ *так, чтобы* $z_0 \longleftrightarrow w_0 = 0$ $(|z_0| < R)$.

Решение. С учетом симметрии точек относительно окружности имеем $w = \lambda \dfrac{z - z_0}{z - \dfrac{R^2}{z_0^*}}$, где z_0^* — точка, симметричная z_0 относительно окружности. При этом значение $|\lambda| = \dfrac{R}{|z_0|}$ находим из того условия, что граничная точка переходит в граничную. Например, $z = R \leftrightarrow |w| = 1$.

Пример 5.22. *Найти конформное отображение двуугольника* $z : |z| < 1 \cap \operatorname{Im} z > 0$ *на верхнюю полуплоскость* $\operatorname{Im} w > 0$.

Решение. Двуугольником называется область, образующаяся при пересечении дуг двух окружностей, вообще говоря, разных радиусов. В данном случае одна из "дуг" является отрезком прямой, что соответствует окружности бесконечного радиуса.

Функция $\xi = f(z) = \dfrac{z+1}{z-1}$ отображает точку $z = -1$ в точку $\xi = 0$, а точку $z = 1$ в точку $\xi = \infty$. Поэтому две части границы — полуокружность $|z| = 1, \operatorname{Im} \xi > 0$ и отрезок $\operatorname{Re} z \in [-1; 1]$ — переходят в два луча, направленных от точки $\xi = 0$ к $\xi = \infty$, а двуугольник — в сектор, ограниченный этими лучами. Так как $\xi(0) = -1$, а $\xi(i) = -i$, то полуокружность переходит в луч на отрицательной части мнимой оси плоскости ξ, а отрезок — в луч на отрицательной части действительной оси плоскости ξ.

При последовательном обходе точек границы двуугольника в направлении $z = i \to z = -1 \to z = 1$ область на плоскости z остается слева, поэтому при последовательном обходе их образов по границе сектора $\xi(i) = -i \to \xi(-1) = 0 \to \xi(1) = -1$ сам сектор также должен оставаться слева. Таким образом, двуугольник отображается в 3-й квадрант плоскости ξ (см. рис. 16).

Далее, отображение $w = \xi^2$ переводит это сектор в верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$.

Ответ: $w = \left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^2$.

Пример 5.23. *Найдите функцию* $w = f(z)$*, осуществляющую конформное отображение сектора* $0 < \arg z < \alpha$*, где* α *— заданный угол, на верхнюю полуплоскость* $\operatorname{Im} w > 0$.
Решение. См. рис. 17.

Задача 5.24. *Найдите функцию* $w = f(z)$*, осуществляющую конформное отображение сектора* $\dfrac{\pi}{4} < \arg z < \dfrac{3\pi}{4}$ *на верхнюю*

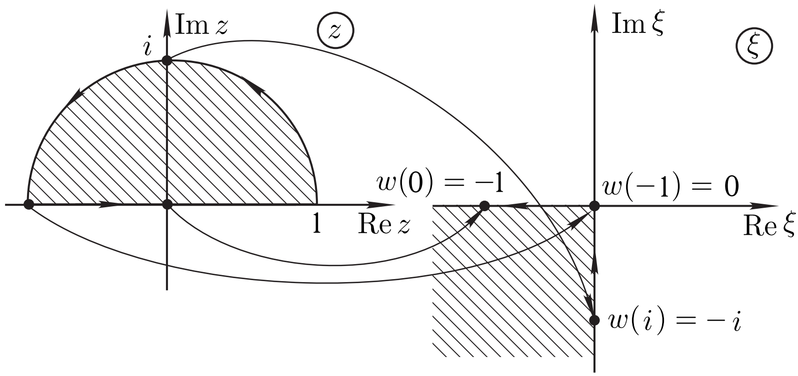


Рис. 16. К примеру 5.22.

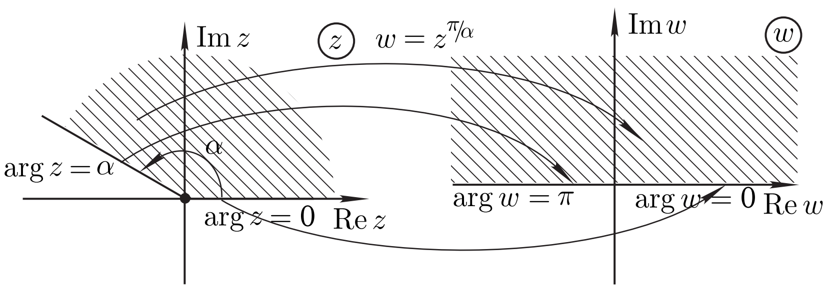
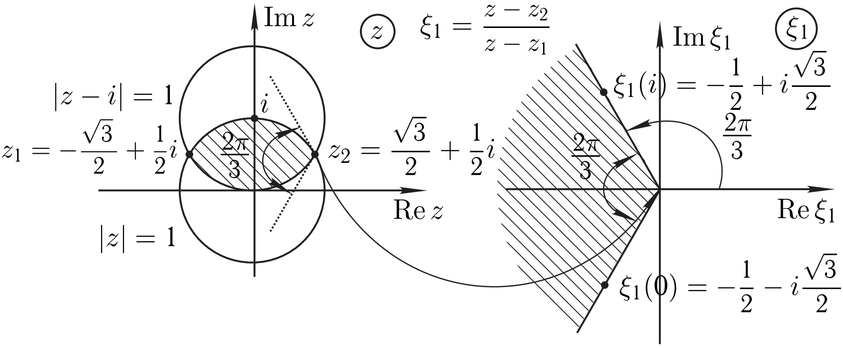


Рис. 17. К примеру 5.23.

полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$.
Ответ: $w = -iz^2$.

Пример 5.25. *Отобразить конформно пересечение кругов* $|z| < 1$, $|z - i| < 1$ *на верхнюю полуплоскость.*
Решение. Сначала найдем точки пересечения кругов и угол между касательными в точках пересечения: $z_1 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} + i\dfrac{1}{2}$; $z_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + i\dfrac{1}{2}$; $\varphi = \dfrac{2\pi}{3}$. Рассматриваемая область представляет собой двуугольник с вершинами в точках z_1 и z_2. Сначала преобразуем двуугольник в сектор, для этого используем дробно-линейную функцию $\xi_1 = \dfrac{z - z_2}{z - z_1}$. Далее повернем сектор на угол $\dfrac{2\pi}{3}$ с помощью преобразования $\xi_2 = e^{-\frac{2i\pi}{3}}\xi_1$, а в итоге отобразим полученный сектор на верхнюю полуплоскость:



$$w = \xi_2^{\frac{3}{2}} = \left(e^{-\frac{2}{3}i\pi} \cdot \frac{z-z_2}{z-z_1}\right)^{\frac{3}{2}}$$

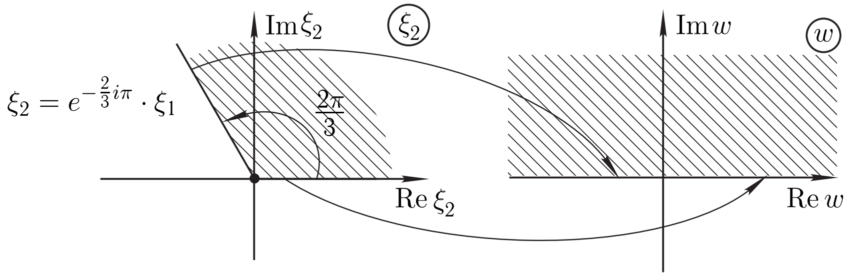


Рис. 18. К примеру 5.25.

$w = (\xi_2)^{-\frac{3}{2}}$.

Ответ: $w = -\left(\dfrac{z-z_2}{z-z_1}\right)^{\frac{3}{2}}$.

Задача 5.26. *Отобразить конформно пересечение кругов*

$$|z-1| < 1, \ |z| < 1$$

на верхнюю полуплоскость.

5.6. Задачи для самостоятельного решения.

1. Найдите дробно-линейные функции, отображающие:

   а) точки -1; i; $1+i$ соответственно в точки 0; $2i$; $1-i$;

   б) точки -1; i; $1+i$ соответственно в точки i; ∞; 1;

   г) точки -1; ∞; i соответственно в точки ∞; i; 1;

   е) точки 1; i; 0 соответственно в точки 1; i; -1;

   ж) точки -1; 0; 1 соответственно в точки 1; i; -1.

В последнем случае выяснить, какая область является образом полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$?

2. Найдите образы областей g при заданных дробно-линейных отображениях $w = f(z)$:

а) $g : |z| < 1;\ \operatorname{Re} z < 0;\quad w = \dfrac{1}{z};$

б) $g : |z| < 1;\ \operatorname{Im} z > 0;\quad w = \dfrac{2z - i}{2 + iz};$

в) $g : 0 < \operatorname{Re} z < 1;\ \operatorname{Im} z > 0;\quad w = \dfrac{1}{z};$

г) $g : \operatorname{Re} z > 0;\ \operatorname{Im} z > 0;\quad w = \dfrac{z - i}{z + i};$

д) $g : 0 < \operatorname{Re} z < 1;\quad w = \dfrac{z - 1}{z};$

е) $g : 0 < \operatorname{Re} z < 1;\quad w = \dfrac{z - 1}{z - 2};$

ж) $g : 0 < \operatorname{Im} z < 1;\quad w = \dfrac{z - i}{z + i};$

з) $g : 0 < \arg z < \dfrac{\pi}{4};\quad w = \dfrac{z}{z + 1};$

и) $g : \dfrac{\pi}{2} < \arg z < \pi;\quad w = \dfrac{z + 1}{z - 1};$

к) $g : 1 < |z| < 2;\quad w = \dfrac{z}{z - 1}.$

3. Найдите дробно-линейную функцию $w = f(z)$, конформно отображающую область g плоскости z на область D плоскости w и удовлетворяющую заданным условиям:

а) $g : \operatorname{Im} z > 0 \to D : |w| < 1,\quad w(z_0) = 0$, где $z_0 \in g$;

б) $g : \operatorname{Im} z > 0 \to D : |w| < 1;\quad w(i) = 0,\ \arg w'(i) = -\dfrac{\pi}{2};$

в) $g : \operatorname{Im} z > 0 \to D : |w| < 4;\quad w(i) = 0,\ \arg w'(i) = \alpha;$

г) $g : \operatorname{Im} z > 0 \to D : |w| < 1;\quad w(2i) = 0,\ \arg w'(2i) = 0;$

д) $g : \operatorname{Im} z < 0 \to D : \operatorname{Im} w > 0;\quad w(1) = 0,\quad w(0) = 1,\quad w(-1) = \infty;$

е) $g : \operatorname{Im} z < 0 \to D : |w| < 1;\quad w(-2i) = 0,\ \arg w'(-2i) = 0;$

ж) $g : |z| < 1 \to D : |w| < 2;\quad w(0) = i,\ \arg w'(0) = \dfrac{\pi}{2};$

з) $g : |z| < 2 \to D : |w| < 1;\quad w(1) = 0,\ \arg w'(1) = \pi;$

и) $g : |z - 1| < 1 \to D : |w| < 2;\quad w\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0,\ \arg w'\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\pi}{2};$

к) $g : |z| < 2 \to D : |w - i| < 2;\quad w(0) = 2i,\ \arg w'(0) = -\pi;$

л) $g : |z + i| < 2 \to D : \operatorname{Re} w > \operatorname{Im} w;\quad w(-i) = 2,\ w(i) = 0.$

4. Найдите образы указанных областей g или кривых L при заданном отображении $w = f(z)$:

а) g : полоса $0 < \operatorname{Im} z < \dfrac{\pi}{3};\quad w = e^z;$

б) g : полоса $0 < \operatorname{Re} z < \pi;\quad w = e^{iz};$

в) L : прямая $\operatorname{Im} z = \dfrac{\pi}{3}$; $\quad w = e^{2z}$;

г) L : отрезок $[1; 1+2i]$; $\quad w = e^{z}$;

д) L : дуга окружности $|z| = 1$, $0 \leqslant \arg z \leqslant \dfrac{\pi}{4}$; $\quad w = z^2$;

е) g : часть плоскости $|z| > 2$, $-\dfrac{\pi}{4} < \arg z < \dfrac{\pi}{4}$; $\quad w = z^2$.

Вопросы к экзамену.

1. Сформулируйте определение отображения $w = f(z)$, конформного в точке $z_0 \neq \infty$.
2. Сформулируйте определение конформного отображения области комплексной плоскости на область комплексной плоскости.
3. Сформулируйте теорему о существовании и аналитичности обратной функции.
4. Сформулируйте теорему Римана о существовании конформного отображения.
5. Сформулируйте теорему единственности конформного отображения.
6. Сформулируйте принцип соответствия границ при конформном отображении.
7. Сформулируйте определение дробно–линейной функции.
8. Сформулируйте групповое свойство дробно–линейной функции.
9. Сформулируйте круговое свойство дробно–линейной функции.
10. Сформулируйте свойство сохранения симметрии дробно–линейной функции.

§ 6. Интеграл от функции комплексной переменной по кривой на комплексной плоскости.

Для определения интеграла от функции комплексной переменной требуется задать некоторую кривую C на комплексной плоскости, например, $\zeta(t) = \xi(t) + i \cdot \eta(t)$, где t — действительный параметр, $\xi(t)$ и $\eta(t)$ — кусочно гладкие функции, причем $\xi^2(t) + \eta^2(t) \neq 0$. Как и при определении криволинейных интегралов для функции действительной переменной, кривая C разбивается на n частичных дуг (ζ_{k-1}, ζ_k) длиной Δl_k, на каждой их которых выбирается точка $\zeta_k{}^*$, после чего для данной функции комплексной переменной $f(z)$ составляется интегральная сумма $\sum\limits_{k=0}^{n} f(\zeta_k{}^*)\Delta l_k$.

Определение 6.1 *Если предел интегральной суммы при стремлении к нулю* $\Delta = \max\limits_k \Delta l_k$ *существует и не зависит от выбора разбиения и выбора точек* $\zeta_k{}^*$*, то этот предел называют интегралом от функции* $f(z)$ *по кривой* C.

Нетрудно показать, что интеграл от функции комплексной переменной $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ по кривой C может быть вычислен как сумма интегралов второго рода от действительной и мнимой частей функции $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$:

$$\int\limits_C f(z)dz = \int\limits_C [u(x,y) + iv(x,y)]\,(dx + idy) =$$

$$= \int\limits_C udx - vdy + i\int\limits_C vdx + udy.$$

Достаточные условие существования интеграла $\int\limits_C f(z)dz$ определяются условиями существования криволинейного интеграла второго рода.

Пример 6.1. *Вычислить интегралы а)* $\int\limits_L \overline{z}dz$; *б)* $\int\limits_L zdz$ *по кривой* L: $y = x^\alpha$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, $\alpha > 0$.

Решение.

а) $$\int\limits_L \overline{z}dz = \int\limits_L xdx + ydy + i\int\limits_L xdy - ydx = \left\{dy = \alpha x^{\alpha-1}dx\right\} =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(x + \alpha x^{2\alpha-1}\right)dx + i\int\limits_0^1 (\alpha x^\alpha - x^\alpha)\,dx =$$

$$= \frac{1}{2} + \left.\frac{x^{2\alpha}}{2}\right|_0^1 + i(\alpha-1)\left.\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right|_0^1 = 1 + i\frac{\alpha-1}{\alpha+1};$$

б) $$\int\limits_L zdz = \int\limits_L xdx - ydy + i\int\limits_L xdy + ydx = \left\{dy = \alpha x^{\alpha-1}dx\right\} =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(x - \alpha x^{2\alpha-1}\right)dx + i\int\limits_0^1 (\alpha x^\alpha + x^\alpha)\,dx =$$

$$= \frac{1}{2} - \left.\frac{x^{2\alpha}}{2}\right|_0^1 + i(\alpha+1)\left.\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right|_0^1 = i.$$

Заметим, что в первом случае результат зависит от α, то есть от пути интегрирования, а во втором — нет. Дело в том, что, во втором случае функция является аналитической, а в первом — нет (см. теорему 7.1 и следствие из нее).

Задача 6.2. *Вычислите интеграл* $\int\limits_C (2z-3)\,dz$ *по отрезку, соединяющему точки* $z=0$ *и* $z=1-i$.
Ответ: $-3+i$.

6.1. Свойства интеграла от функции комплексной переменной. Поскольку значение криволинейного интеграла второго рода в общем случае зависит от направления обхода кривой. Условимся в качестве положительного направления обхода замкнутого контура принимать направление, при котором область, ограниченная данным контуром, остается слева. Интегрирование в положительном направлении будем обозначать символом $\int\limits_{C^+} f(z)dz$ или просто $\int\limits_C f(z)dz$, интегрирование в отрицательном направлении — символом $\int\limits_{C^-} f(z)dz$.

Свойства интеграла и способы его вычисления.

1. $\int\limits_{C^-} f(z)\,dz = -\int\limits_{C^+} f(z)\,dz.$
2. Линейность: $\int\limits_c (af(z)+bg(z))\,dz = a\int\limits_c f(z)\,dz + b\int\limits_c g(z)\,dz,$ где a и b — комплексные числа.
3. Интеграл по объединению контуров равен сумме интегралов по каждому из контуров: $\int\limits_{C_1+C_2+\ldots+C_n} f(z)\,dz =$
$$= \int\limits_{C_1} f(z)\,dz + \int\limits_{C_2} f(z)\,dz + \ldots + \int\limits_{C_n} f(z)\,dz.$$

4. Если для функции $f(z)$ выполняется условие $|f(z)| \leqslant M$, то $\left|\int\limits_C f(z)dz\right| \leqslant \int\limits_C |f(z)|\,dl \leqslant ML_C$, где dl — элемент длины дуги кривой C, L_C — длина кривой C.
5. Вычисление интеграла можно осуществлять как интегрирование по кривой, заданной функцией $z(t)$ параметра t:
$$\int\limits_C f(z)dz = \int\limits_a^b f\left(z(t)\right) z'(t)dt,$$
где $z(a)$ и $z(b)$ — начальная и конечная точки кривой C.
6. Замена переменных при интегрировании: пусть существует функция $\varphi(\xi)$, такая, что $z = \varphi(\xi)$, и кривая C на комплексной плоскости z соответствует кривой Γ на комплексной плоскости ξ. При этом $\varphi(\xi) \in C^{\infty}(D)$ и является однолистной в D, где D — область комплексной плоскости ξ, содержащая Γ. Тогда
$$\int\limits_C f(z)dz = \int\limits_\Gamma f\left(\varphi(\xi)\right) \varphi'(\xi)d\xi.$$

Пример 6.3. *Вычислить интеграл* $\int\limits_{\mathrm{C}} (z-2)dz$ *по отрезку прямой, соединяющей точки* $z_1 = -1 - 2i,\ z_2 = 2 + 4i$.
Решение. Отрезок прямой, соединяющий указанные точки, лежит на прямой $y = 2x$. Тогда
$$\int\limits_{\mathrm{C}} (z-2)dz = \int\limits_{\mathrm{C}} \left((x-2)+iy\right)(dx+idy) =$$
$$= \int\limits_{\mathrm{C}} (x-2)\,dx - ydy + i\int\limits_{\mathrm{C}} (ydx + (x-2)dy) =$$
$$= [y = 2x,\ dy = 2dx,\ -1 \leqslant x \leqslant 2] =$$
$$= \int\limits_{-1}^{2} (-3x-2)dx + i\int\limits_{-1}^{2} (4x-4)\,dx = -10,5 - 6i.$$

Задача 6.4. *Вычислите интеграл* $\int\limits_{C}(z+i)dz$ *по отрезку прямой, соединяющей точки* $z_1=-2+i,\ z_2=1-0,5i$.
Ответ: $\dfrac{3}{8}+i\dfrac{9}{2}$.

Пример 6.5. *Вычислить интеграл* $\int\limits_{C} zdz$*, где* C *— дуга кубической параболы* $y=2x^3$*, от точки* $z=0$ *до точки* $1+2i$.
Решение.

$$\int\limits_{C} zdz=\int\limits_{C} xdx-ydy+i\int\limits_{C} ydx+xdy=\left[y=2x^3,\ dy=6x^2dx\right]=$$
$$=\int\limits_{0}^{1}\left(x-12x^5\right)dx+i\int\limits_{0}^{1}\left(2x^3+6x^3\right)dx=-1,5+2i.$$

Задача 6.6. *Вычислите интеграл* $\int\limits_{C} z\overline{z}dz$*, где* C *— дуга параболы* $y=2x^2$*, от точки* $z=0$ *до точки* $1+2i$.
Ответ: $\dfrac{17}{15}+i\dfrac{11}{3}$.

Пример 6.7. *Вычислить интеграл* $\int\limits_{C} z^2\overline{z}dz$*, где* C *— кривая, заданная соотношениями:* $|z|=1,\ 0\leqslant \arg z\leqslant \dfrac{\pi}{2}$.
Решение.

$$\int\limits_{C} z^2\overline{z}dz=\left[z=e^{i\varphi},dz=ie^{i\varphi},\ \overline{z}=e^{-i\varphi}\ \right]=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} ie^{2i\varphi}d\varphi=-2i.$$

Задача 6.8. *Вычислите интеграл* $\int\limits_{C}(z^2+z\cdot\overline{z})dz$*, где* C *— кривая, заданная соотношениями:* $|z|=1,\ 0\leqslant \arg z\leqslant \pi$.
Ответ: $-\dfrac{8}{3}$.

Пример 6.9. *Вычислить интеграл* $\displaystyle\int\limits_{|z-z_0|=R_0} \frac{dz}{z-z_0}$.

Решение.

$$\int\limits_{|z-z_0|=R_0} \frac{dz}{z-z_0} = \left[z = z_0 + R_0 e^{i\varphi}; dz = iR_0 e^{i\varphi}\cdot d\varphi\right] =$$

$$= i\int\limits_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi \cdot i.$$

Отметим, что результат не зависит ни от R_0, ни от z_0.

Задача 6.10. *Вычислите интеграл* $\displaystyle\int\limits_{|z-2i|=3} \frac{dz}{z-2i}$.

Ответ: $2\pi i$.

6.2. Задачи для самостоятельного решения.

Вычислите интегралы по указанным кривым на комплексной плоскости (первой указана начальная точка интегрирования).

1. $\displaystyle\int\limits_C |z|^2 dz$, где: а) C — отрезок прямой, соединяющий точки $z = -2i$ и $z = 2i$;
   б) C — дуга окружности $|z| = 2$, $\operatorname{Re} z \geqslant 0$.
2. $\displaystyle\int\limits_C z^2 dz$, где: а) C — отрезок прямой, соединяющий точки $z = -2i$ и $z = 2i$; б) C — дуга окружности $|z| = 2$, $\operatorname{Re} z \leqslant 0$.
3. $\displaystyle\int\limits_C z dz$, где: а) C — отрезок прямой, соединяющий точки $z = 0$ и $z = 1 + i$; б) C — дуга параболы $y = x^2$, соединяющая точки $z = 0$ и $z = 1 + i$; в) C — кривая, состоящая из двух отрезков прямых, последовательно соединяющих точки $z = 0$, $z = 1$ и $z = 1 + i$.
4. $\displaystyle\int\limits_C \overline{z} dz$, где: а) C — отрезок прямой, соединяющий точки $z = 0$ и $z = 1 + i$; б) C — дуга параболы $y = x^2$, соединяющая точки $z = 0$ и $z = 1 + i$; в) C — кривая, состоящая из двух отрезков прямых, последовательно соединяющих точки $z = 0$, $z = 1$ и $z = 1 + i$.

5. $\oint\limits_{|z|=R} \frac{dz}{z}$ (обход окружности $|z| = R$ в положительном направлении).
6. $\oint\limits_{|z|=R} \frac{dz}{\overline{z}}$ (обход окружности $|z| = R$ в положительном направлении).

Вопросы к экзамену.

1. Сформулируйте определение интеграла от непрерывной функции комплексной переменной вдоль кусочно-гладкой кривой.
2. Запишите формулу вычисления интеграла от непрерывной функции комплексной переменной вдоль кусочно-гладкой кривой через определенный интеграл.
3. Сформулируйте основные свойства интеграла.
4. Запишите неравенство для модуля интеграла.

Теоретические задачи и задачи повышенной сложности.

1. Вычислите интеграл $\oint\limits_{|z-z_0|=R} (z - z_0)^m \, dz$ для различных целых значений m.

§ 7. Теорема Коши

7.1. Вспомогательные положения.

Определение 7.1 *Область g на плоскости называется* ***односвязной****, если для любого замкнутого контура, принадлежащему области g, ограниченная им часть плоскости целиком принадлежит g. Область, которая не является односвязной, называется* ***неодносвязной****, или* ***многосвязной****.*

Формула Грина. Пусть функции действительных переменных $P(x,y)$, $Q(x,y) \in C(\overline{G})$, где $\overline{G}$ — замкнутая область на плоскости, причем полная граница ∂G области G состоит из кусочно-гладких контуров, и частные производные функций P и Q удовлетворяют условию: P_x, P_y, Q_x, $Q_y \in C(G)$. Тогда

$$\int\limits_{\partial G} Pdx + Qdy = \int\limits_{G}\!\!\int \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy.$$

7.2. Теорема Коши.

Теорема 7.1 *(Коши) Если $f(z) \in C^{\infty}(g)$, в* <u>*односвязной*</u> *области g, то для любого замкнутого контура $\gamma \subset g$ выполняется*

$$\int\limits_{\gamma} f(z)dz = 0.$$

Доказательство.

$$\int\limits_{\gamma} f(z)dz = \int\limits_{\gamma} udx - vdy + i\int\limits_{\gamma} vdx + udy = [\text{по формуле Грина}] =$$

$$= \int\limits_{g}\!\!\int (-v_x - u_y)dxdy + i\int\limits_{g}\!\!\int (u_x - v_y)dxdy =$$

$$= [\text{из условий Коши–Римана: } u_x = v_y; u_y = -v_x] =$$

$$= \int\limits_{g}\!\!\int (u_y - u_y)dxdy + i\int\limits_{g}\!\!\int (v_y - v_y)dxdy = 0. \qquad (7.1)$$

Замечание 7.1 *Требование односвязности области является существенным.*

Например, рассмотрим функцию $f(z) = \dfrac{1}{z}$, где область g представляет собой круговое кольцо $1 < |z| < 3$. При этом, несмотря на то, что функция $f(z)$ является аналитической в рассматриваемой области, $\int\limits_{|z|=2} \frac{dz}{z} = 2\pi i \neq 0.$

Определение 7.2 *Функция называется* ***аналитической в замкнутой области*** $\overline{g}$ $(f(z) \in C^{\infty}(\overline{g}))$, *если* $f(z) \in C^{\infty}(g)$ *и* $f(z) \in C(\overline{g})$. *Определение справедливо и для многосвязной области.*

Теорема 7.2 *(Коши) Если* $f(z) \in C^{\infty}(\overline{g})$ *и* g *— односвязная область, то интеграл* $\int\limits_{\partial g} f(z)dz = 0$, *где* ∂g *— граница области.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 7.2.

Теорема 7.3 *(теорема Коши для многосвязной области). Пусть* $f(z) \in C^{\infty}(g)$, *где* g *— многосвязная область, ограниченная извне контуром* C_0, *а изнутри — контурами* C_1, C_2, $\ldots$, C_n *и пусть* $f(z) \in C(\overline{g})$. *Тогда* $\int\limits_C f(z)dz = 0$, *где* C *— полная граница области* g, *проходимая в* ***положительном*** *направлении.*

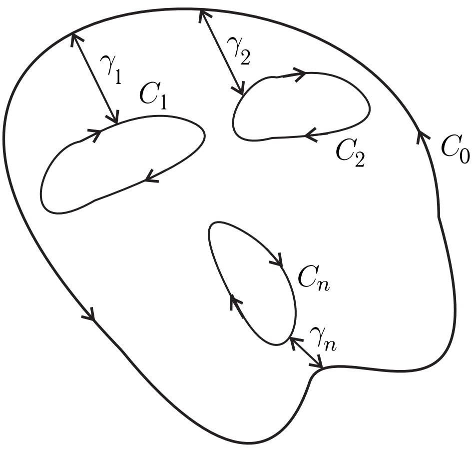


Рис. 19.

Доказательство. Проведем гладкие кривые γ_1, $\gamma_2, \ldots, \gamma_n$, соединяющие контур C_0 с контурами C_1, C_2, $\ldots, C_n$ и не пересекающиеся между собой (рис. 19). Тогда область, ограниченная кривыми C_0, C_1, $C_2 \ldots, C_n$ и кривыми γ_1, $\gamma_2, \ldots, \gamma_n$, проходимыми дважды в противоположных направлениях, оказывается **односвязной**. По теореме 7.2 интеграл по границе этой области равен 0. При этом интегралы по вспомогательным кривым $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ проходятся дважды в противоположных направлениях, и их суммарный вклад равен нулю. Поэтому

$$\int\limits_{C_0^+} f(z)\,dz + \int\limits_{C_1^-} f(z)\,dz + \int\limits_{C_2^-} f(z)\,dz + \ldots + \int\limits_{C_n^-} f(z)\,dz = 0.$$

Следствие 7.1 *Если g — односвязная область и $f(z) \in C^\infty(g)$, то для любых z_0, $z \in g$ интеграл $\int\limits_{z_0}^{z} f(\xi)d\xi$ не зависит от пути интегрирования.*

7.3. Неопределенный интеграл от функции комплексной переменной.

Заметим, что при фиксированном значении z_0 интеграл $\int\limits_{z_0}^{z} f(\xi)d\xi$ есть функция переменной z.

Теорема 7.4 *Если g — односвязная область, $f(z) \in C(g)$ и для любого замкнутого контура $\gamma \subset g$ выполняется $\int\limits_{\gamma} f(z)dz = 0$, то существует такая функция $F(z) \in C^\infty(g)$, что $F'(z) = f(z)$.*

Доказательство. Для любого $\varepsilon > 0$ существует такое значение $\delta > 0$, что

$$\left|\frac{\Delta F}{\Delta z} - f(z)\right| = \left|\frac{1}{\Delta z}\int\limits_{z}^{z+\Delta z} f(\xi)d\xi - f(z)\right| = \left\{\int\limits_{z}^{z+\Delta z} d\xi = \Delta z\right\} =$$

$$= \frac{1}{|\Delta z|}\left|\int\limits_{z}^{z+\Delta z} \{f(\xi) - f(z)\}\,d\xi\right| \leqslant \frac{|\Delta z|}{|\Delta z|}\max_{\xi\in[z,z+\Delta z]}|f(\xi) - f(z)| < \varepsilon$$

при $\Delta z < \delta$. Тогда существует $\lim\limits_{\Delta z \to 0}\dfrac{\Delta F}{\Delta z} = F'(z) = f(z) \in C(g)$, следовательно, $F(z) \in C^\infty(g)$.

Определение 7.3 *Пусть $f(z) \in C(g)$. Функция $F(z) \in C^\infty(g)$ называется* ***первообразной*** *функции $f(z)$ в области g, если $F'(z) = f(z)$.*

Если существует одна первообразная $F(z)$, то существует и бесконечно много первообразных, но все они различаются на аддитивную постоянную:

$$F_1'(z) - F_2'(z) = 0 \quad \Longrightarrow \quad F_2(z) = F_1(z) + C.$$

Определение 7.4 *Совокупность всех первообразных функции $f(z)$ называется неопределенным интегралом.*

7.4. Основные формулы интегрирования.

1. Формула Ньютона–Лейбница. Если g — односвязная область, $f(z) \in C(g)$ и $\int\limits_{\gamma} f(z)dz = 0$ для любого замкнутого контура γ в области g, то $\int\limits_{z_1}^{z_2} f(\xi)d\xi = F(z_2) - F(z_1)$, где $F(z)$ — любая первообразная функции $f(z)$.
2. Формула интегрирования по частям. Если g — односвязная область, $f(z)$, $h(z) \in C(g)$ и для любого замкнутого контура $\gamma \subset g$ верны соотношения $\int\limits_{\gamma} f(z)dz = 0$ и $\int\limits_{\gamma} h(z)dz = 0$, то
$$\int\limits_{z_1}^{z_2} f(\xi)h'(\xi)d\xi = f(z)h(z)\Big|_{z_1}^{z_2} - \int\limits_{z_1}^{z_2} h(\xi)f'(\xi)d\xi$$
для любых точек $z_1,\ z_2\ \in g$.
3. Пусть g — односвязная область, $f(z) \in C^{\infty}(g)$ и для любого замкнутого контура $\gamma \subset g$ имеет место $\int\limits_{\gamma} f'(\xi)d\xi = 0$. Тогда
$$\int\limits_{z}^{z+\Delta z} f'(\xi)d\xi = f(z+\Delta z) - f(z).$$
Если в качестве пути интегрирования взять прямолинейный отрезок, соединяющий точки z и $z+\Delta z$: $\xi = z + \theta\Delta z$; $0 \leqslant \theta \leqslant 1$; $d\xi = \Delta z d\theta$, то получим ***формулу Коши–Адамара:***
$$f(z+\Delta z) - f(z) = \Delta z \cdot \int\limits_{0}^{1} f'\,(z + \Delta z\cdot\theta)d\theta.$$

Важно помнить. При вычислении интеграла от аналитической функции контур интегрирования можно произвольно деформировать, но так, чтобы он не выходил из области аналитичности подынтегральной функции. Деформируя контур интегрирования так, как это допускается теоремой Коши, можно упростить вычисление некоторых интегралов.

Пример 7.1. *Вычислить интеграл* $\int\limits_C \frac{dz}{z}$ *по контуру, изображенному на рисунке* 20.

Решение. Обратим внимание на то, что контур вообще не задан

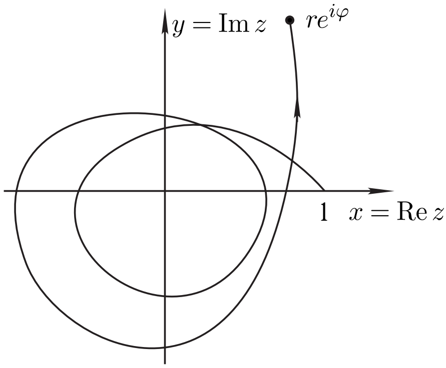


Рис. 20.

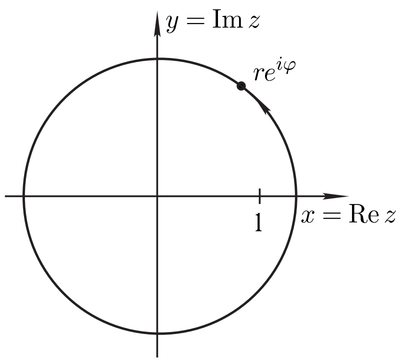


Рис. 21.

какой-либо формулой. Важны его начальная и конечная точки, и то, сколько раз он обходит вокруг начала координат.

Заметим, что интеграл $\int\limits_C \frac{dz}{z}$ легко вычисляется по контурам двух типов: во-первых, вдоль действительной оси: $dz = dx$, $\int\limits_1^x \frac{dz}{z} = \ln x \ (x > 0)$; во-вторых, что менее очевидно, по дуге окружности L с центром в точке $z = 0$ и заданным радиусом $r > 0$ (рис. 20). На этой окружности $z = re^{i\varphi}$, $dz = ire^{i\varphi}d\varphi$, так что $\int\limits_L \frac{dz}{z} = i\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi$, $\varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_2$ характеризует дугу L. Поэтому надо деформировать контур в окружность с центром в нуле и радиусом r так, чтобы окружность проходилась дважды целиком

и еще по дуге в φ радиан (рис. 21).
Ответ: $\ln r + 4\pi i + i\varphi$.

Пример 7.2. *Вычислить* $\int\limits_{|z-a|=r} (z-a)^n dz.$

Решение.

$$\int\limits_{|z-a|=r} (z-a)^n dz = \left\{z = a + re^{i\varphi},\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi;\ dz = ire^{i\varphi}d\varphi\right\} =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} ir^{n+1}e^{i(n+1)\varphi}d\varphi =$$

$$= \begin{cases} \int\limits_0^{2\pi} e^{i(n+1)\varphi}d\varphi = \dfrac{e^{2\pi i(n+1)} - 1}{i\,(n+1)} = 0, \text{ при } n \neq -1, \\ \int\limits_0^{2\pi} e^{i(n+1)\varphi}d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi, \text{ при } n = -1. \end{cases}$$

Значит, для любого $n \in \mathbb{Z}$ $\int\limits_{|z-a|=r} (z-a)^n dz = \begin{cases} 0, & n \neq -1 \\ 2\pi i, & n = -1. \end{cases}$

Таким образом, аналитичность подынтегральной функции внутри замкнутого контура интегрирования *не является необходимым условием равенства нулю* интеграла по этому контуру.

Задача 7.3. *Вычислить интеграл* $\int\limits_1^i \dfrac{\ln^3 z}{z}dz$ *по дуге окружности* $|z| = 1$ *против часовой стрелки.*
Ответ: $\dfrac{\pi^4}{64}$.

§ 8. Интеграл Коши

8.1. Интегральная формула Коши. Пусть $f(z) \in C^\infty(\overline{g})$. Рассмотрим $\varphi(z) = \dfrac{f(z)}{z - z_0}$, определенную во всех точках замкнутой области $\overline{g}$, кроме точки z_0. Если в области g взять такой замкнутый контур γ (рис. 22), что точка z_0 находится внутри ограниченной им области, то $\varphi(z)$ будет аналитической в *двухсвязной* области g^*, заключенной между ∂g и γ. По теореме Коши для многосвязной области интеграл от аналитической функции $\varphi(z)$ по $\partial g + \gamma$ равен нулю:

$$\int\limits_{\partial g^+} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} d\xi + \int\limits_{\gamma^-} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} d\xi = 0.$$

Изменяя направление обхода кривой γ на положительное,

$$\int\limits_{\gamma^-} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} d\xi = -\int\limits_{\gamma^+} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} d\xi,$$

получаем

$$\int\limits_{\partial g^+} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} d\xi = \int\limits_{\gamma^+} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} d\xi. \qquad (8.1)$$

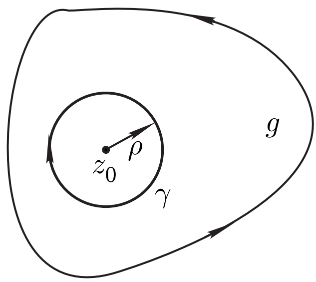


Рис. 22.

Поскольку интеграл, стоящий в левой части равенства (8.1), не зависит от выбора контура γ, то этим свойством обладает и интеграл, стоящий справа. Удобно в качестве контура интегрирования γ^+ выбрать окружность γ_ρ радиуса ρ с центром в точке z_0. Положив $\xi = z_0 + \rho e^{i\varphi}$, $d\xi = i\rho e^{i\varphi} d\varphi$ на контуре γ_ρ, имеем

$$\int\limits_{\gamma_\rho^+} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} d\xi = i\int\limits_0^{2\pi} f(\xi) d\varphi =$$

$$= i\int\limits_0^{2\pi} \left[f(\xi) - f(z_0)\right] d\varphi + i\int\limits_0^{2\pi} f(z_0)\, d\varphi \qquad (8.2)$$

Устремим $\rho \to 0$, при этом $\xi(\rho) \to z_0$. Так как $f(z)$ — аналитическая, а, следовательно, непрерывная в области g, то для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что как только $|\xi(\rho) - z_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(\xi) - f(z_0)| < \varepsilon$. А это значит, что при $\rho \to 0$ первый интеграл в правой части (8.2) стремится к нулю, а второй не зависит от ρ и равен $2\pi f(z_0)$. Тогда, переходя в (8.1) к пределу при $\rho \to 0$, имеем

$$\int\limits_{\partial g^+} \frac{f(\xi)\,d\xi}{\xi - z_0} = 0 + 2\pi i f(z_0),$$

откуда получаем ***интегральную формулу Коши:***

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial g^+} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} d\xi. \tag{8.3}$$

Итак, значения аналитической функции на некотором замкнутом контуре определяют эту функцию в любой точке области, ограниченной этим контуром. Это еще раз показывает, насколько сильным является требование аналитичности функции.

Пример 8.1. *Вычислите интеграл:*
а) $\int\limits_{|z|=2} \frac{\cos z}{z} dz;$ *б)* $\int\limits_{|z|=1} \frac{\sin^2 z}{z^3} dz.$

Решение. а) $\int\limits_{|z|=2} \frac{\cos z}{z} dz = \pi i \cos(0) = 2\pi i$.

б) $$\int\limits_{|z|=1} \frac{\sin^2 z}{z^3} dz = \int\limits_{|z|=1} \frac{\frac{\sin^2 z}{z^2}}{z} dz = \left\{ f(z) = \frac{\sin^2 z}{z^2};\ z_0 = 0 \right\} =$$
$$= 2\pi i f(0) = 2\pi i.$$

Задача 8.2. *Вычислите интеграл: а)* $\int\limits_{|z|=1} \frac{e^z}{z} dz;$ *б)* $\int\limits_{|z|=1} \frac{\sin z}{z^2} dz.$

Ответ: а) $2\pi i$; б) $2\pi i$.

Пример 8.3. *Вычислите интеграл:*
а) $\int\limits_{|z|=2} \frac{\cos z}{z^2 + 4z + 3} dz;$ *б)* $\int\limits_{|z|=4} \frac{\cos z}{z^2 + 4z + 3} dz.$

Решение.

$$a)\ \int\limits_{|z|=2} \frac{\cos z}{z^2+4z+3}dz = \int\limits_{|z|=2} \frac{\dfrac{\cos z}{z+3}dz}{z+1} =$$

$$= \left[f(z) = \frac{\cos z}{z+3};\ z_0 = -1\right] = 2\pi i f(-1) = \pi i \cos(-1),$$

так как внутрь контура попадает только одна точка $z = -1$.
б) Так как в этом примере внутрь контура $|z| = 4$ попадают оба нуля знаменателя $z = -1$ и $z = -3$, то для вычисления интеграла приведем подынтегральную функцию к следующему виду:

$$\frac{\cos z}{z^2+4z+3} = \frac{\cos z}{2(z+1)} - \frac{\cos z}{2(z+3)}.$$

Тогда

$$\int\limits_{|z|=4} \frac{\cos z}{z^2+4z+3}\,dz = \frac{1}{2}\int\limits_{|z|=4} \frac{\cos z}{z+1}\,dz - \frac{1}{2}\int\limits_{|z|=4} \frac{\cos z}{z+3}\,dz =$$

$$= \Big[f(z) = \cos z,\ \ z_0 = -1 \ \text{и}\ z_0 = -3\Big] = \pi i \cdot \big(\cos(-1) - \cos(-3)\big)\,.$$

Возможно и другое решение без разложения на простейшие дроби с использованием идеи решения п. а). Разобьем контур интегрирования на два контура L_1 и L_2, соединенных кривой L так, чтобы внутрь каждого замкнутого контура L_1 и L_2 попадала только одна из точек $z = -1$ и $z = -3$ (рис. 23). При этом кривая L проходится дважды в противо-

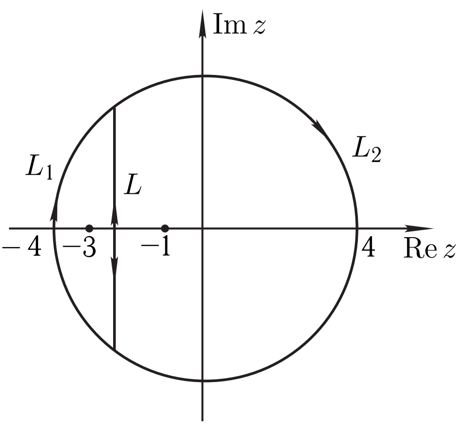


Рис. 23.

положных направлениях, поэтому вклад в интеграл не вносит. Получим:

$$\int\limits_{|z|=4} \frac{\cos z}{z^2+4z+3}\,dz = \Big[C:(|z|=4) \Leftrightarrow L_1 + L_2,\ \text{см. рис. } 23\Big]$$

$$= \int\limits_{L_1} \frac{\dfrac{\cos z}{z+3}dz}{z+1} + \int\limits_{L_2} \frac{\dfrac{\cos z}{z+1}dz}{z+3} =$$

$$\left[\text{полагая } f(z) = \frac{\cos z}{z+3},\ z_0 = -1 \ \text{ и } \ g(z) = \frac{\cos z}{z+1},\ z_0 = -3\right]$$

$$= 2\pi i\big(f(-1) + g(-3)\big) = \pi i \cdot \big(\cos(-1) - \cos(-3)\big)\,.$$

Задача 8.4. *а)* $\displaystyle\int\limits_{|z|=1} \frac{e^z}{2z^2+5z-3}dz;$ *б)* $\displaystyle\int\limits_{|z|=5} \frac{e^z}{2z^2+5z-3}dz.$

Ответ: а) $\dfrac{2\sqrt{e}\,\pi i}{7}$; б) $2\pi i\left(\dfrac{\sqrt{e}}{7} - \dfrac{1}{7e^3}\right)$.

Замечание 8.1 *Из интегральной формулы Коши вытекают следующие утверждения.*

1. *Формула (8.3) верна как для g односвязной, так и для g многосвязной области, только в последнем случае ∂g^+ — полная граница области, проходимая в положительном направлении.*
2. *Интеграл вида* $I(z_0) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_{\partial g^+} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0}d\xi$ *имеет смысл для любого положения точки z_0 на комплексной плоскости при условии, что $z_0 \notin \partial g$. Если $z_0 \in g$, то $I(z_0) = f(z_0)$. Если $z_0 \notin g$, то $I(z_0) = 0$, поскольку в этом случае подынтегральная функция* $\varphi(\xi) = \dfrac{f(\xi)}{\xi - z_0} \in C^\infty(g)$ *является аналитической всюду в области g.*
3. *При $z_0 \in \partial g$ интеграл в обычном смысле не существует, однако, при дополнительных требованиях на поведение функции $f(\xi)$ на контуре границы, этому интегралу может быть придан определенный смысл. Так, если $f(\xi)$ удовлетворяет на границе области ∂g* ***условию Гельдера:*** $|f(\xi_1) - f(\xi_2)| < C|\xi_1 - \xi_2|^\delta$, $0 < \delta < 1$ *(функция*

Гельдер - непрерывна), то существует ***главное значение по Коши*** *интеграла $I(z_0)$:*

$$V.p.\ \ I(z_0) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_\varepsilon}\frac{f(\xi)}{\xi - z_0}d\xi,$$

где γ_ε представляет собой часть контура ∂g, лежащую ***вне*** *круга $|\xi - z_0| < \varepsilon$. При этом*

$$V.p.\ \ I(z_0) = \frac{1}{2}f(z_0).$$

Окончательно для $f(z) \in C^\infty(g)$ можно записать:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_\varepsilon}\frac{f(\xi)}{\xi - z_0}d\xi = \begin{cases} f(z_0), & z_0 \in g; \\ \frac{1}{2}f(z_0), & z_0 \in \partial g\ \ (V.p.)\,; \\ 0, & z_0 \notin g. \end{cases}$$

4. *Формула Коши верна и для любого контура $C^+ \subset g$, который можно стянуть к z_0, оставаясь внутри g.*

Из формулы Коши можно получить ряд важных соотношений.

8.2. Формула среднего значения. Пусть z_0 — некоторая внутренняя точка односвязной области g и $f(z) \in C^\infty(g)$. Для окружности C_R с центром в точке z_0 и радиусом R, целиком принадлежащей области g, справедлива формула:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_R}\frac{f(\xi)}{\xi - z_0}d\xi = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f\left(z_0 + Re^{i\varphi}\right)d\varphi = \frac{1}{2\pi R}\int\limits_{C_R} f(\xi)dl,$$

где dl — элемент длины дуги окружности C_R, $C_R \subset g$.

8.3. Принцип максимума модуля.

Теорема 8.1 *Если $f(z) \in C^\infty(\overline{g})$ и $f(z) \neq const$, то $|f(z)|$ достигает своего максимального значения на границе ∂g области g.*

Доказательство. В области g существует такая точка z_0, что $|f(z_0)| = M \geqslant |f(z)|$ для любой точки $z \in \overline{g}$, так как действительная функция достигает своего максимума в замкнутой ограниченной области. Пусть z_0 — внутренняя точка области

g. Запишем формулу среднего значения в некотором круге K_0 радиуса R с центром в z_0:

$$M = \left| \frac{1}{2\pi R} \int\limits_{C_R} f(\xi) dl \right| \leqslant \frac{1}{2\pi R} \int\limits_{C_R} |f(\xi)|\, dl \leqslant M \frac{1}{2\pi R} \int\limits_{C_R} dl = M,$$

где C_R — окружность $|z - z_0| = R$, dl — элемент длины дуги окружности C_R, $C_R \subset g$.

Докажем, что отсюда следует $|f(\xi)| = M$ для всех точек окружности C_R. Действительно, мы считаем, что $|f(\xi)| \leqslant M$ для $\forall \xi \in C_R$. Предположим, что в некоторой точке $\xi_0 \in C_R$ выполняется условие $|f(\xi_0)| < M$. Тогда, в силу непрерывности $f(\xi)$ на C_R существует дуга γ_R ($\xi_0 \in \gamma_R$) (некоторая окрестность точки ξ_0 на кривой), на которой $|f(\xi)| \leqslant M - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ (а на остальной части окружности $|f(\xi)| = M$ для $\forall \xi \in C_R \backslash \gamma_R$). Тогда

$$M = \frac{1}{2\pi R} \int\limits_{C_R} |f(\xi)|\, dl = \frac{1}{2\pi R} \int\limits_{\gamma_R} |f(\xi)|\, dl + \frac{1}{2\pi R} \int\limits_{C_R \backslash \gamma_R} |f(\xi)|\, dl \leqslant$$

$$\leqslant (M - \varepsilon) L_{\gamma_R} \frac{1}{2\pi R} + M(2\pi R - L_{\gamma_R}) \frac{1}{2\pi R} = M - \varepsilon L_{\gamma_R} \frac{1}{2\pi R} < M.$$

Этого быть не может, значит на окружности C_R нет точки, в которой $|f(\xi)| < M$. Следовательно, $|f(\xi)| = M$ на C_R, а, значит, и во всем круге K_0. Для доказательства, что неравенство верно во всех внутренних точках области, возьмем произвольную точку z^*, соединим ее с z_0 кривой, целиком лежащей в области, и построим конечную систему перекрывающихся кругов, как показано на рис. 24. Проводя на каждом из кругов $K_1 \ldots K_n$ рас-

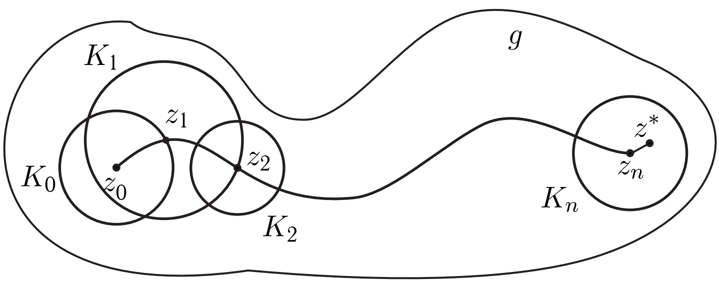


Рис. 24.

суждения, аналогичные проведенным для круга K_0, получим, что

$|f(z^*)| = M$. В силу произвольности выбора точки z^* получаем, что $|f(z)| = M$ во всей области.

Замечание 8.2

1. *Если $f(z) \in C^\infty(\overline{g})$ и $f(z) \neq 0$ для $\forall z \in \overline{g}$, то имеет место принцип **минимума модуля**. Для доказательства достаточно рассмотреть функцию $\varphi(z) = \dfrac{1}{f(z)}$ и воспользоваться для нее принципом максимума модуля.*
2. *Теорема верна как для односвязной, так и для многосвязной области.*

8.4. Задачи для самостоятельного решения. Вычислите интегралы, используя интегральную формулу Коши:

1. Вычислите интеграл $\displaystyle\oint\limits_{|z-z_0|=R} \frac{dz}{z-z_0}$. Объясните, почему результат не зависит ни от R, ни от z_0.
2. а) $\displaystyle\int\limits_{|z|=2} \frac{e^z dz}{(z+1)^3}$; б) $\displaystyle\int\limits_{|z+i|=2} \frac{\sin z\, dz}{z(1-z)^2}$; в) $\displaystyle\int\limits_{|z-3|=3} \frac{z dz}{z^4-1}$.
3. $\displaystyle\int\limits_C \frac{dz}{z(z^2-1)}$ (C — замкнутая простая кусочно-гладкая кривая, <u>не</u> проходящая через точки $z=0$, $z=1$ и $z=-1$). Найдите все возможные значения указанного интеграла при различных положениях контура C.

Вопросы к экзамену.

1. Сформулируйте теорему Коши для односвязной области.
2. Сформулируйте теорему Коши для ограниченной области.
3. Сформулируйте теорему Коши для многосвязной области.
4. Сформулируйте теорему об аналитичности интеграла с переменным верхним пределом.
5. Сформулируйте определение первообразной для функции $f(z)$, заданной в некоторой области.
6. Запишите формулу Ньютона–Лейбница и укажите условия ее применимости.
7. Запишите формулу Коши–Адамара. Сформулируйте условия ее применимости.
8. Запишите интегральную формулу Коши для односвязной области.

Теоретические задачи и задачи повышенной сложности.

1. Является ли функция $f(z) = \int\limits_L \frac{\operatorname{Re}\xi}{\xi - z} d\xi$, где L —окружность $|z| = 1$, проходимая против часовой стрелки, аналитической в круге $|z| < 1$? Ответ обоснуйте.
2. Вычислите интеграл $\oint\limits_{|z|=2} \frac{dz}{z}$. Поясните, почему, несмотря на то, что интегрирование ведется по замкнутому контуру, целиком лежащему в области $1 < |z| < 3$, которая является областью аналитичности функции $f(z) = \frac{1}{z}$, интеграл отличен от нуля.
3. Пусть функция $f(z)$ аналитична в круге $|z| < 1$ и непрерывна в замкнутом круге $|z| \leqslant 1$, причем $f(z) \equiv \text{const} \neq 0$ при $|z| = 1$. Докажите, что тогда либо $f(z) \equiv \text{const}$ в круге $|z| < 1$, либо $f(z)$ имеет нуль в этом круге.
   Совет. Воспользуйтесь принципом максимума модуля аналитической функции.

§ 9. Интеграл типа Коши

Пусть L — кусочно гладкая кривая конечной длины и $f(\xi) \in C(L)$. Тогда при $z \notin L$ существует функция $F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$ — ***интеграл типа Коши.***

Теорема 9.1 *В любой точке $z \notin L$ определена дифференцируемая функция $F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$, причем*

$$F'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi.$$

Доказательство. Пусть точки $z = z_0$ и $z = z_0 + \Delta z$ не принадлежат кривой L. Так как $z_0 \notin L$, то существуют такие $\delta_0 > 0$ и $d_0 > 0$, что замкнутый круг $|z - z_0| \leqslant \delta_0$ будет находиться на конечном расстоянии d_0 от кривой L. Пусть $|\Delta z| < \delta_0$. Тогда для $\forall \xi \in L$: $|\xi - z_0| > d_0$, $|\xi - z_0 - \Delta z| > d_0$. Отсюда имеем

$$\left| \frac{\Delta F}{\Delta z} - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^2} d\xi \right| = \frac{1}{2\pi} \left| \frac{1}{\Delta z} \int\limits_L f(\xi) \left(\frac{1}{\xi - z_0 - \Delta z} - \frac{1}{\xi - z_0} \right) d\xi - \right.$$

$$-\int\limits_L \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^2} d\xi \Bigg| = \frac{1}{2\pi} \left| \int\limits_L f(\xi) \left(\frac{1}{(\xi - z_0 - \Delta z)(\xi - z_0)} - \frac{1}{(\xi - z_0)^2} \right) d\xi \right| =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left| \int\limits_L \frac{f(\xi)\Delta z d\xi}{(\xi - z_0 - \Delta z)(\xi - z_0)^2} \right| \leqslant \frac{\max\limits_{\xi \in L} |f(\xi)| \cdot |\Delta z| \, L}{2\pi d_0^3} < \varepsilon$$

при $|\Delta z| < \delta < \delta_0$, следовательно, существует $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{\Delta F}{\Delta z} = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int\limits_L \dfrac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^2} d\xi$. Итак, в точке $z = z_0$ определена производная $F'(z_0)$.

Замечание 9.1 *Непрерывность $F'(z)$ в точках $z \notin L$ доказывается аналогично с помощью оценки $|\Delta F'(z)|$.*

Теорема 9.2 *При $z \notin L$ функция $F(z)$ имеет непрерывные производные n-ого порядка для любого n, причем*

$$F^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_L \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi.$$

Доказывается методом математической индукции, опираясь на теорему 9.1.

Теорема 9.3 *(О существовании производных любого порядка у аналитической функции). Если $f(z) \in C^\infty(g)$, то для любого n и для $\forall z \in g$ существует $f^{(n)}(z) \in C^\infty(g)$.*

Доказательство. Пусть $z_0 \in g$. Построим замкнутый контур L, содержащий z_0, который можно стянуть к точке z_0, оставаясь все время в области g. Тогда в силу интегральной формулы Коши

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} d\xi,$$

но это интеграл типа Коши, поэтому

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_L \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi.$$

Следовательно, существует $f^{(n)}(z) \in C^\infty(g)$.

Важно помнить. Если функция $f(z)$ является аналитической в области g, то у нее в этой области существуют непрерывные производные всех порядков. Это существенное отличие от функции действительной переменной, для которой из существования первой производной, вообще говоря, не следует существование высших производных. Например, $y(x) = x|x| \in C(R)$: $y'(x) = 2|x| \in C(R)$, $y''(0)$ не существует.

Пример 9.1. *Вычислить* $f(z) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_L \frac{\xi e^{\xi}}{(\xi - z)^2}d\xi$, *если точка* z *находится внутри контура* L.

Решение. По формуле Коши для производных аналитической функции

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int\limits_L \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}}\,d\xi.$$

Поэтому $f'(z) = \dfrac{1!}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_L \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2}\,d\xi$, и для $f(z) = ze^z$ получаем:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\xi e^{\xi}}{(\xi - z)^2}\,d\xi = \frac{1}{1!}\,\frac{d}{dz}\,(ze^z) = e^z(z+1).$$

Ответ: $e^z(z+1)$.

Задача 9.2. *Вычислите* $f(z) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_L \frac{\xi \sin\xi}{(\xi - z)^3}d\xi$, *если точка* z *находится внутри контура* L.

Ответ: $\cos z - \dfrac{z}{2}\sin z$.

Задача 9.3. *Вычислите* $\displaystyle\int\limits_L \frac{e^{\xi}}{(\xi - z)^4}d\xi$, *если точка* z *находится внутри контура* L.

Ответ: $\dfrac{\pi i}{3}e^z$.

Теорема 9.4 *(Мореры) Если* $f(z) \in C(g)$, g — *односвязная область и* $\displaystyle\int\limits_L f(z)dz = 0$ *для любого* $L \subset g$, *где* L — *замкнутый контур, который можно стянуть в точку, оставаясь в области* g, *то* $f(z) \in C^{\infty}(g)$.

Доказательство. При условиях теоремы существует $F(z) = \displaystyle\int\limits_{z_0}^{z} f(\xi)d\xi \in C^{\infty}(g)$ (Теорема 7.4), где z_0 и z — произвольные точки области g, а интеграл берется по любой кривой в области g, соединяющей эти точки. При этом $F'(z) = f(z)$. Но производная аналитической функции сама является аналитической функцией, то есть существует $F''(z) \in C^{\infty}(g)$, а именно $F''(z) = f'(z)$.

Замечание 9.2

1. *Теорема Мореры* 9.4 *является в некотором смысле обратной к теореме Коши.*
2. *Теорема* 9.3 *и теорема Мореры* 9.4 *справедливы и для многосвязных областей.*

Теорема 9.5 (*Лиувилля*) *Пусть $f(z)$ — аналитическая на всей комплексной плоскости и для любого z существует такое M, что $|f(z)| \leqslant M$ (то есть $|f(z)|$ равномерно ограничен на всей комплексной плоскости), то $f(z) \equiv const$.*

Доказательство. По теореме 9.1 $f'(z) = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int\limits_{C_R} \dfrac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi$, где $C_R : |\xi - z| = R$. По условию теоремы $\exists M : |f(z)| \leqslant M$ *независимо* от R, тогда

$$|f'(z)| \leqslant \frac{2\pi RM}{2\pi R^2} = \frac{M}{R}.$$

Так как R можно выбрать сколь угодно большим, а $f'(z)$ не зависит от R, то $|f'(z)| = 0$. В силу произвольности выбора z $|f'(z)| = 0$ на всей комплексной плоскости, следовательно, $f(z) \equiv \equiv const$ для всех значений z.

Замечание 9.3 *Возможна другая формулировка теоремы Лиувилля: если $f(z) \in C^{\infty}$ и $f(z) \neq const$, то при $z \to \infty$ $|f(z)| \to \infty$.*

Определение 9.1 *Функция, аналитическая на всей комплексной плоскости, называется* ***целой*** *функцией.*

Важно помнить:

Целая функция, не равная константе, не может быть ограничена по абсолютной величине. Так, например, целые функции $\sin z$ и $\cos z$ не ограничены по модулю!

9.1. Задачи для самостоятельного решения.

1. Пусть $f(z)$ является аналитической на всей комплексной плоскости, причем $\sup |f(z)| \leqslant 2$, $f(1) = 1$. Найдите $f(i)$.
2. Существует ли функция $f(z)$, аналитическая на всей комплексной плоскости и удовлетворяющая условиям $f(0) = 0$ и $\lim\limits_{z \to \infty} f(z) = 1$? Ответ обоснуйте.

3. Докажите теорему Лиувилля, вычислив интеграл $\int\limits_{|z|=R} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)}dz$, $|a| < R, |b| < R$, и произведя его оценку при $R \to \infty$.

Вопросы к экзамену.

1. Сформулируйте определение интеграла типа Коши.
2. Сформулируйте теорему о среднем.
3. Сформулируйте теорему Лиувилля.
4. Сформулируйте теорему Морера.
5. Сформулируйте принцип максимума модуля аналитической функции.
6. Сформулируйте принцип минимума модуля аналитической функции.

Теоретические задачи и задачи повышенной сложности.

1. Имеет ли функция $f(z) = \frac{1}{z}$ первообразную в области $0 < |z| < 2$? Ответ обоснуйте.
2. Пусть функция $f(z)$ аналитична в круге $|z| < R$ и непрерывна в замкнутом круге $|z| \leqslant R$. Докажите, что для любой точки z, принадлежащей кругу $|z| < R$, выполнено неравенство $|f(z)| \leqslant \frac{MR}{R-|z|}$, где $M = \max\limits_{|z|=R} |f(z)|$.
3. Пусть функция $f(z)$ аналитична в круге $|z| < 1$ и непрерывна в замкнутом круге $|z| \leqslant 1$, причем $f(z) \equiv \mathrm{const} \neq 0$ при $|z| = 1$. Докажите, что тогда либо $f(z) \equiv \mathrm{const}$ в круге $|z| < 1$, либо $f(z)$ имеет нуль в этом круге.
   Указание: воспользуйтесь принципом максимума модуля аналитической функции.
4. Пусть $f(z)$ является аналитической на всей комплексной плоскости, причем $\sup\limits_{z\in\mathbb{C}} |f(z)| \leqslant 2$, $f(1) = 1$. Найдите $f(i)$.
   Существует ли функция $f(z)$, аналитическая на всей комплексной плоскости и удовлетворяющая условиям $f(0) = 0$ и $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = 1$? Ответ обоснуйте.