0.5 setgray0 0.5 setgray1

Консультация 6

ПРЯМАЯ НА ПЛОСКОСТИ

ЗАДАЧА 1. Через точку $M = (4, -3)$ провести прямую так чтобы площадь треугольника, образованного этой прямой и осями координат, была равна 3. Система координат прямоугольная.

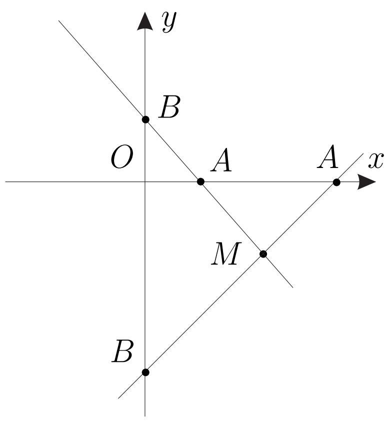

Рис. 1. К задаче 1.

Решение. Будем искать уравнение прямой в следующем виде:

$$y = kx + b.$$

Тогда точки пересечения с осями координат имеют следующий вид:

$$A = (-b/k, 0), \quad B = (0, b).$$

Площадь искомого треугольника равна

$$3 = S = -\frac{1}{2}\frac{b^2}{k} \Rightarrow k = -\frac{b^2}{6}.$$

С другой стороны, имеем по условию

$$-3 = 4k + b \Rightarrow \frac{4}{6}b^2 - b - 3 = 0 \Rightarrow b_1 = 3, \quad b_2 = -\frac{3}{2}.$$

Тогда имеем

$$k_1 = -\frac{3}{2}, \quad b_2 = -\frac{3}{8}.$$

Получаем два уравнения

$$2y + 3x - 6 = 0 \quad \text{и} \quad 8y + 3x + 12 = 0.$$

ЗАДАЧА 2. Даны уравнения двух сторон треугольника

$$2x - y = 0 \quad \text{и} \quad 5x - y = 0$$

и уравнение $3x - y = 0$ одной из его медиан. Составить уравнение третьей стороны треугольника, зная, что на ней лежит точка $(3, 9)$, и найти координаты его вершин. Система координат аффинная.

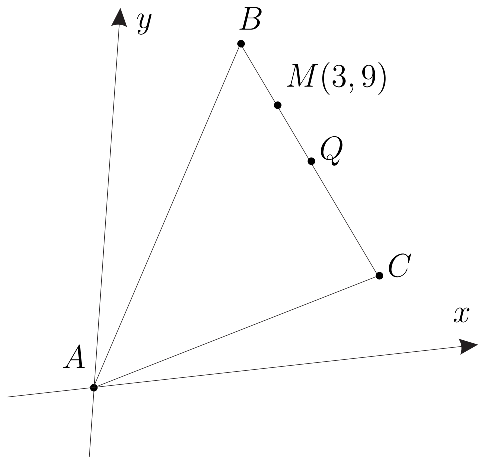

Рис. 2. К задаче 2.

Решение. Пусть $A = (0, 0)$ — это вершина треугольника ABC, образованная пересечением прямых $2x - y = 0$ и $5x - y = 0$. Пусть $B = (x_B, y_B)$ и $C = (x_C, y_C)$ — это две другие вершины треугольника, а $Q = (x_Q, y_Q)$ — это точка пересечение медианы $3x - y = 0$ со стороной BC. В силу условий задачи имеем

$$x_Q = \frac{x_B + x_C}{2}, \quad y_Q = \frac{y_B + y_C}{2},$$
$$2x_B - y_B = 0, \quad 5x_C - y_C = 0, \quad 3(x_B + x_C) - (y_B + y_C) = 0.$$

Решая последнюю систему трёх уравнений относительно четырёх неизвестных, получим следующие выражения:

$$x_B = 2x_C, \quad y_B = 4x_C, \quad y_C = 5x_C.$$

Искомое уравнение прямой

$$\frac{x - x_B}{x_C - x_B} = \frac{y - y_B}{y_C - y_B} \ni M(3, 9) \Rightarrow \frac{3 - 2x_C}{x_C - 2x_C} = \frac{9 - 4x_C}{5x_C - 4x_C} \Rightarrow x_C = 2.$$

Поэтому имеем

$$x_C = 2, \quad y_C = 10, \quad x_B = 4, \quad y_B = 8, \quad x + y - 12 = 0.$$

ЗАДАЧА 3. Даны уравнения $l_1 : 3x - 2y + 1 = 0$, $l_2 : x - y + 1 = 0$ двух сторон треугольника и уравнение $2x - y - 1 = 0$ медианы, выходящей из вершины, не лежащей на первой стороне. Составить уравнение третьей стороны треугольника. Система координат аффинная.

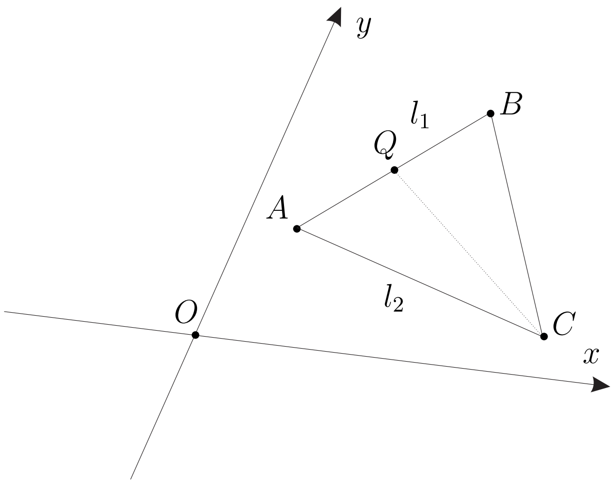

Рис. 3. К задаче 3.

Решение. Пусть $A = (x_A, y_A)$ — вершина треугольника ABC, образованная пересечением прямых в условии задачи. Имеем

$$3x_A - 2y_A + 1 = 0, \quad 2x_A - 2y_A + 2 = 0 \Rightarrow x_A = 1, \quad y_A = 2.$$

Пусть $C = (x_C, y_C)$ — это вершина треугольника ABC, из которой опущена медиана CQ. Поэтому имеем

$$2x_C - y_C - 1 = 0, \quad x_C - y_C + 1 = 0 \Rightarrow x_C = 2, \quad y_C = 3.$$

Пусть $B = (x_B, y_B)$. Тогда имеем

$$x_Q = \frac{1}{2}(x_A + x_B) = \frac{1}{2}(1 + x_B), \quad y_Q = \frac{1}{2}(y_A + y_B) = \frac{1}{2}(2 + y_B),$$

$$2x_Q - y_Q - 1 = 0, \quad 3x_B - 2y_B + 1 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2x_B - y_B - 2 = 0, \quad 3x_B - 2y_B + 1 = 0 \Rightarrow x_B = 5, \quad y_B = 8.$$

Таким образом, искомая прямая определяется как прямая, проходящая через точки C и B :

$$\frac{x - x_B}{x_C - x_B} = \frac{y - y_B}{y_C - y_B} \Leftrightarrow \frac{x - 5}{-3} = \frac{y - 8}{-5} \Leftrightarrow 5x - 3y - 1 = 0.$$

З А Д А Ч А 4. Даны две смежные стороны параллелограмма

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0, \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

и точка пересечения его диагоналей $M_0 = (x_0, y_0)$. Написать уравнения двух других его сторон.

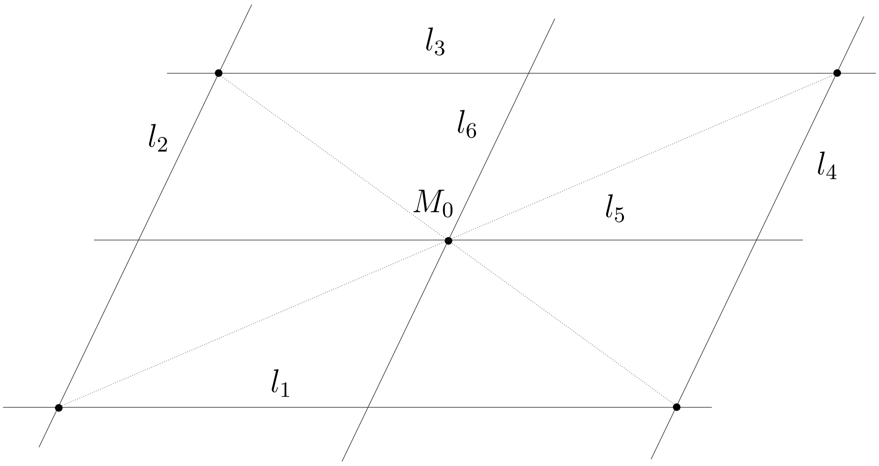

Рис. 4. К задаче 4.

Р е ш е н и е. Пусть

$$l_1: \quad A_1x + B_1y + C_1 = 0, \quad l_2: \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0.$$

Тогда уравнения двух других сторон следующие:

$$l_3: \quad A_1x + B_1y + C_3 = 0, \quad l_4: \quad A_2x + B_2y + C_4 = 0.$$

Заметим, что тогда прямые l_5 и l_6, которые соединяют середины противоположных сторон параллелограмма, имеют следующий вид:

$$l_5: \quad A_1x + B_1y + \frac{1}{2}(C_1 + C_3) = 0, \quad l_6: \quad A_2x + B_2y + \frac{1}{2}(C_2 + C_4) = 0$$

проходят через точку $M_0(x_0, y_0)$

□ Действительно, точки от прямых l_1 и l_3 равноудалены от прямой l_5. Проведём перпендикуляр к прямым l_1 и l_3 и пусть $M_1(x_1, y_1) \in l_1$, $M_3(x_2, y_2) \in l_3$ — это точки пересечения перпендикуляра. Тогда

$$d(M_1, l_5) = d(M_3, l_5) \Leftrightarrow \frac{|A_1x_1 + B_1y_1 + C_5|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \frac{|A_1x_3 + B_1y_3 + C_5|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |A_1x_1 + B_1y_1 + C_5| = |A_1x_3 + B_1y_3 + C_5| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_1x_1 + B_1y_1 + C_5 = -A_1x_3 - B_1y_3 - C_5,$$

поскольку точки M_1 и M_3 по разные стороны от прямой l_5. Осталось воспользоваться равенствами

$$C_1 = -A_1x_1 - B_1y_1, \quad C_3 = -A_1x_3 - B_1y_3$$

и получить равенство

$$C_5 = \frac{C_1 + C_3}{2}.$$

Аналогичным образом доказывается, что для прямой l_6, заданной уравнением $A_2x + B_2y + C_6 = 0$ имеет место следующее равенство:

$$C_6 = \frac{C_2 + C_4}{2}. \quad \boxtimes$$

Поэтому имеем

$$C_3 = -2A_1x_0 - 2B_1y_0 - C_1, \quad C_4 = -2A_2x_0 - 2B_2y_0 - C_2.$$

ЗАДАЧА 5. Найти условия, необходимые и достаточные для того, чтобы три прямые $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, $A_3x + B_3 + C_3 = 0$ образовывали треугольник.

Решение. Очевидно, что необходимо, чтобы эти прямые попарно пересекались, но не совпадали. Это значит, что любые два уравнения из трёх имели единственное решение. Таким образом,

$$\delta_1 = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0, \quad \delta_2 = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix} \neq 0, \quad \delta_3 = \begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Однако, нам нужно исключить случай, когда все три прямые пересекаются в единственной точке. Для этого необходимо потребовать, чтобы система трёх уравнений не имела решение, т.е.

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Действительно, в этом случае расширенная матрицы системы имеет ранг, равный трём, в то время как ранг основной матрицы системы равен двум. Согласно теореме Кронеккера–Капелли решений у этой системы трёх уравнений нет.

ЗАДАЧА 6. Пусть заданы две различные прямые на плоскости

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \quad \text{и} \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0,$$

которые пересекаются в точке $M_0(x_0, y_0)$. Доказать, что уравнение произвольной прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ имеет следующий вид:

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2) = 0, \quad \alpha^2 + \beta^2 > 0. \qquad (0.1)$$

Решение. Прежде всего докажем, что уравнение (0.1) действительно описывает прямую. Предположим, что

$$\alpha A_1 + \beta A_2 = 0, \quad \alpha B_1 + \beta B_2 = 0.$$

Поскольку прямые различны, то

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \alpha = \beta = 0,$$

но это противоречит тому, что по условию $\alpha^2 + \beta^2 > 0$. Значит, (0.1) — это уравнение прямой.

Теперь докажем, что произвольная прямая $l_3 : A_3x + B_3y + C_3 = 0$, проходящая через точку $M_0(x_0, y_0)$ имеет вид (0.1). Пусть $M_1(x_1, y_1)$ — это точка прямой l_3, отличная от точки $M_0(x_0, y_0)$. Тогда рассмотрим уравнение (0.1) с параметрами

$$\alpha = A_2x_1 + B_2y_1 + C_2, \quad \beta = -A_1x_1 - B_1y_1 - C_1,$$

которые одновременно в ноль не обращается, поскольку точка $M_1(x_1, y_1)$ не может лежать одновременно на двух различных заданных нам ранее прямых, и получим уравнение прямой

$$(A_2x_1 + B_2y_1 + C_2)(A_1x + B_1y + C_1) - \\ - (A_1x_1 + B_1y_1 + C_1)(A_2x + B_2y + C_2) = 0.$$

Это уравнение прямой, проходящей через две различные точки $M_0(x_0, y_0)$ и $M_1(x_1, y_1)$, и значит совпадает с прямой l_3.

ЗАДАЧА 7. Стороны треугольника заданы уравнениями

$$l_1 : \ A_1x + B_1y + C_1 = 0, \quad l_2 : \ A_2x + B_2y + C_2 = 0,$$
$$l_3 : \ A_3x + B_3y + C_3 = 0.$$

Написать уравнение медианы, проведённой из точки пересечения первой и второй сторон.

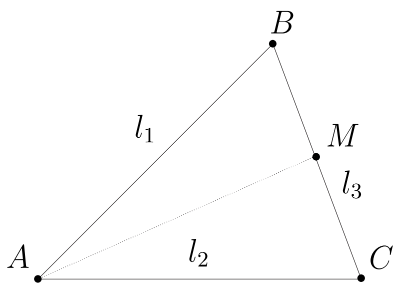

Рис. 5. К задаче 7.

Решение. Искомое уравнение имеет следующий вид:

$$\alpha\,(A_1x + B_1y + C_1) + \beta\,(A_2x + B_2y + C_2) = 0.$$

Пусть $B = (x_B, y_B)$ и $C = (x_C, y_C)$. Тогда имеем

$$A_1 x_B + B_1 y_B + C_1 = 0 \quad \text{и} \quad A_3 x_B + B_3 y_B + C_3 = 0;$$
$$A_2 x_C + B_2 y_C + C_2 = 0 \quad \text{и} \quad A_3 x_C + B_3 y_C + C_3 = 0.$$

Отсюда получаем следующие равенства:

$$x_C = -\frac{\begin{vmatrix} C_2 & B_2 \\ C_3 & B_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix}}, \quad y_C = -\frac{\begin{vmatrix} A_2 & C_2 \\ A_3 & C_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix}},$$

$$x_B = -\frac{\begin{vmatrix} C_1 & B_1 \\ C_3 & B_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix}}, \quad y_B = -\frac{\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_3 & C_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix}}.$$

При этом основание медианы $M = (x_M, y_M)$ и имеют место следующие равенства:

$$x_M = \frac{x_B + x_C}{2}, \quad y_M = \frac{y_B + y_C}{2}.$$

Справедливо следующее равенство:

$$\alpha\,(A_1 x_C + A_1 x_B + B_1 y_C + B_1 y_B + 2C_1) + \\ + \beta\,(A_2 x_C + A_2 x_B + B_2 y_C + B_2 y_B + 2C_2) = 0.$$

Отсюда сразу же получаем равенство

$$\alpha\,(A_1 x_C + B_1 y_C + C_1) + \beta\,(A_2 x_B + B_2 y_B + C_2) = 0. \tag{0.2}$$

После подстановки в это равенство равенств для x_B, y_B, x_C и y_C получим равенство следующего вида:

$$\frac{\alpha}{\begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix}} D_1 + \frac{\beta}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix}} D_2 = 0, \tag{0.3}$$

где

$$D_1 = -A_1 \begin{vmatrix} C_2 & B_2 \\ C_3 & B_3 \end{vmatrix} - B_1 \begin{vmatrix} A_2 & C_2 \\ A_3 & C_3 \end{vmatrix} + C_1 \begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix} = \\ = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} \neq 0,$$

$$D_2 = -A_2 \begin{vmatrix} C_1 & B_1 \\ C_3 & B_3 \end{vmatrix} - B_2 \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_3 & C_3 \end{vmatrix} + C_2 \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

В результате приходим к одному из решений

$$\alpha = \begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix}, \quad \beta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix}.$$

Итак, уравнение медианы следующее:

$$\begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix} (A_1x + B_1y + C_1) + \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix} (A_2x + B_2y + C_2) = 0.$$

З А Д А Ч А 8. Стороны треугольника заданы уравнениями

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0, \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0, \quad A_3x + B_3y + C_3 = 0.$$

Составить уравнение высоты треугольника, опущенной из точки пересечения первых двух сторон на третью его сторону. <u>Система координат декартова прямоугольная</u>.

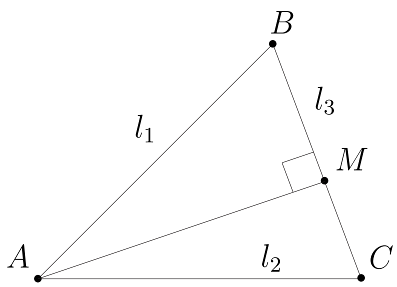

Рис. 6. К задаче 8.

Р е ш е н и е. Итак, искомое уравнение имеет следующий вид:

$$(\alpha A_1 + \beta A_2)\, x + (\alpha B_1 + \beta B_2)\, y + \alpha C_1 + \beta C_2 = 0.$$

Направляющий вектор этой прямой имеет следующий вид:

$$\mathbf{a} = \{-\alpha B_1 - \beta B_2, \alpha A_1 + \beta A_2\}.$$

Направляющий вектор третьей стороны

$$\mathbf{b} = \{-B_3, A_3\}.$$

Векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ являются ортогональными. Поэтому получим равенство

$$\alpha\,(A_1A_3 + B_1B_3) + \beta\,(A_2A_3 + B_2B_3) = 0.$$

В качестве одного из решений возьмём

$$\alpha = A_2A_3 + B_2B_3, \quad \beta = -A_1A_3 - B_1B_3.$$

Итак, искомое уравнение имеет следующий вид:

$$(A_2A_3 + B_2B_3)\,(A_1x + B_1y + C_1) = (A_1A_3 + B_1B_3)\,(A_2x + B_2y + C_2)\,.$$

ЗАДАЧА 9. Стороны треугольника заданы уравнениями

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0, \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0, \quad A_3x + B_3y + C_3 = 0.$$

Составить уравнение биссектрисы внутреннего угла треугольника, образованного первой и второй прямыми.

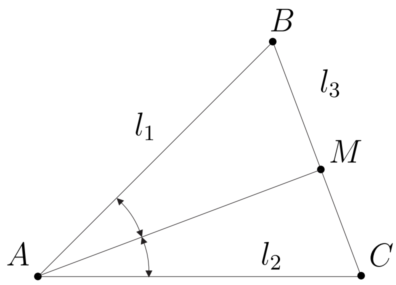

Рис. 7. К задаче 9.

Решение. Пусть указанная в условии задачи вершина $A = (x_0, y_0)$. Векторы

$$\mathbf{a}_1 = \{-B_1, A_1\} \quad \text{и} \quad \mathbf{a}_2 = \{-B_2, A_2\}$$

— это направляющие векторы первой и второй прямых. Тогда мы можем записать уравнения первой и второй прямых в следующих параметрических формах:

$$l_1: \quad x = x_0 - B_1t \quad \text{и} \quad y = y_0 + A_1t,$$

$$l_2: \quad x = x_0 - B_2\tau \quad \text{и} \quad y = y_0 + A_2\tau.$$

Найдём значения параметров t_0 и τ_0, соответствующих точкам пересечения прямых l_1 и l_2 с третьей прямой l_3. Справедливы следующие равенства:

$$A_3(x_0 - B_1t_0) + (B_3y_0 + A_1t_0) + C_3 = 0,$$

$$A_3(x_0 - B_2\tau_0) + (B_3y_0 + A_2\tau_0) + C_3 = 0,$$

$$t_0 = -\frac{A_3x_0 + B_3y_0 + C_3}{\begin{vmatrix} A_1 & A_3 \\ B_1 & B_3 \end{vmatrix}}, \quad \tau_0 = -\frac{A_3x_0 + B_3y_0 + C_3}{\begin{vmatrix} A_2 & A_3 \\ B_2 & B_3 \end{vmatrix}}.$$

Пусть $B = (x_B, y_B)$ и $C = (x_C, y_C)$. Теперь находим длины векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_0)^2 + (y_B - y_0)^2}\,, \quad |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(x_C - x_0)^2 + (y_C - y_0)^2}\,,$$

где

$$x_B = x_0 - B_1 t_0, \quad y_B = y_0 + A_1 t_0, \quad x_C = x_0 - B_2 \tau_0, \quad y_C = y_0 + A_2 \tau_0.$$

Итак, имеем

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{A_1^2 + B_1^2}\,\frac{|A_3 x_0 + B_3 y_0 + C_3|}{\left|\begin{vmatrix} A_1 & A_3 \\ B_1 & B_3 \end{vmatrix}\right|},$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{A_2^2 + B_2^2}\,\frac{|A_3 x_0 + B_3 y_0 + C_3|}{\left|\begin{vmatrix} A_2 & A_3 \\ B_2 & B_3 \end{vmatrix}\right|}.$$

Введём параметр λ :

$$\lambda = \frac{|\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{AC}|} = \frac{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}\,\frac{\left|\begin{vmatrix} A_2 & A_3 \\ B_2 & B_3 \end{vmatrix}\right|}{\left|\begin{vmatrix} A_1 & A_3 \\ B_1 & B_3 \end{vmatrix}\right|}.$$

Пусть Q — это точка пересечения биссектрисы с третьей стороной треугольника. Согласно результату задачи 3 консультации 1 имеем

$$x_Q = \frac{x_B + \lambda x_C}{1 + \lambda}, \quad y_Q = \frac{y_B + \lambda y_C}{1 + \lambda},$$

где $Q = (x_Q, y_Q)$ — основание биссектрисы. Уравнение искомой биссектрисы имеет следующий вид:

$$\alpha\,(A_1 x + B_1 y + C_1) + \beta\,(A_2 x + B_2 y + C_2) = 0.$$

Точка Q по определению лежит на биссектрисе. Поэтому имеет место следующее равенство:

$$\alpha\,(A_1 x_B + \lambda A_1 x_C + B_1 y_B + \lambda B_1 y_C + (1+\lambda) C_1) +$$
$$+ \beta\,(A_2 x_B + \lambda A_2 x_C + B_2 y_B + \lambda B_2 y_C + (1+\lambda) C_2) = 0.$$

Заметим, что

$$A_1 x_B + B_1 y_B + C_1 = 0 \quad \text{и} \quad A_2 x_C + B_2 y_C + C_2 = 0.$$

Поэтому имеет место следующее равенство:

$$\lambda\alpha\,(A_1 x_C + B_1 y_C + C_1) + \beta\,(A_2 x_B + B_2 y_B + C_2) = 0.$$

Далее рассуждая точно также как и при решении задачи 7 (сравни с формулами (0.2) и (0.3)), мы приходим к равенствам

$$\frac{\lambda\alpha}{\begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix}} = \frac{\beta}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}{\operatorname{sign}\begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix}}\alpha = \frac{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}{\operatorname{sign}\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix}}\beta.$$

$$\alpha = \frac{\operatorname{sing}\begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix}}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}, \quad \beta = \frac{\operatorname{sing}\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix}}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

Таким образом, искомое уравнение имеет следующий вид:

$$\frac{\operatorname{sing}\begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix}}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}\,(A_1x + B_1y + C_1) + \frac{\operatorname{sing}\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix}}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}\,(A_2x + B_2y + C_2) = 0.$$

ЗАДАЧА 10. Написать уравнения прямых, проходящих соответственно через точки $B = (15, 10)$ и $C = (10, 5)$, зная, что прямая $x + 2y = 0$ делит пополам углы, образуемые искомыми прямыми.

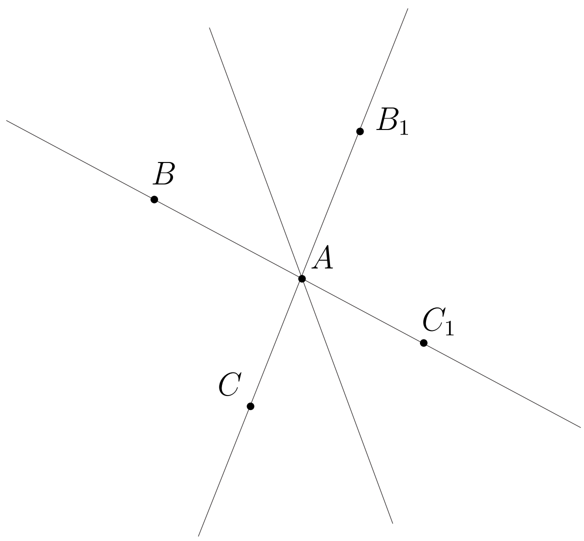

Рис. 8. К задаче 10.

Решение. Сначала решим задачу в общем виде о нахождении точки $M_2 = (x_2, y_2)$ симметричной точке $M_1 = (x_1, y_1)$ относительно прямой $Ax + By + C = 0$ в прямоугольной декартовой системе координат. Общее решение следующее:

$$x_2 = x_1 - 2\frac{Ax_1 + By_1 + C}{A^2 + B^2}A, \quad y_2 = y_1 - 2\frac{Ax_1 + By_1 + C}{A^2 + B^2}B.$$

Найдём точку $B_1 = (x_{B_1}, y_{B_1})$ симметричную точке $B = (15, 10)$ относительно биссектрисы $x + 2y = 0$. Согласно полученным формулам имеем

$$x_{B_1} = 1, \quad y_{B_1} = -18.$$

Найдём теперь уравнение одной из прямых

$$(B_1C):\ \frac{x-x_{B_1}}{x_C-x_{B_1}}=\frac{y-y_{B_1}}{y_C-y_{B_1}}\Rightarrow\frac{x-1}{10-1}=\frac{y+18}{5+18}\Leftrightarrow 23x-9y-185=0.$$

Найдём теперь точку $C_1=(x_{C_1},y_{C_1})$ симметричную точке $C=(10,5)$ относительно биссектрисы $x+2y=0$. Согласно общим формулам имеем

$$x_{C_1}=2,\quad y_{C_1}=-11.$$

Находим уравнение второй прямой.

$$(C_1B):\ \frac{x-x_{C_1}}{x_B-x_{C_1}}=\frac{y-y_{C_1}}{y_B-y_{C_1}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{x-2}{15-2}=\frac{y+11}{10+11}\Leftrightarrow 21x-13y-185=0.$$

ЗАДАЧА 11. Доказать: если три прямые, образующие треугольник, занумерованы числами 1, 2, 3, то три угла φ_{12}, φ_{23}, φ_{31} — угол от первой прямой до второй, угол от второй прямой до третьей и угол от третьей прямой до первой — являются одновременно либо внутренними углами треугольника, либо внешними его углами.

Решение. Пусть фиксирована некоторая прямоугольная декартова система координат $\{O,\mathbf{i},\mathbf{j}\}$ и определены соответствующие ось абсцисс Ox и ось ординат Oy.

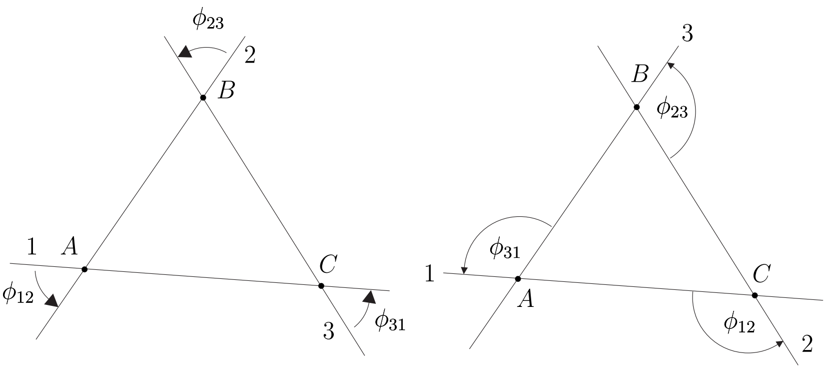

Рис. 9. К задаче 11.

Рассмотрим сначала случай, когда углы отсчитываются от оси абсцисс Ox в направлении против часовой стрелки. Пусть φ_j — это угол между осью абсцисс и j–ой прямой. Тогда соответствующие углы φ_{12}, φ_{23} и φ_{31} отсчитываются против часовой стрелки от первой прямой до второй, от второй прямой до третьей и от третьей до первой. На рисунке изображены два возможных случая: первый случай, когда переход $1\mapsto 2\mapsto 3\mapsto 1$ осуществляется против часовой стрелки и второй случай, когда переход $1\mapsto 2\mapsto 3\mapsto 1$ осуществляется по часовой стрелке. В любом случае углы φ_{12}, φ_{23}, φ_{31}либо внутренние либо внешние для треугольника.

Аналогичным образом рассматривается случай когда отсчет осуществляется от оси абсцисс Ox по часовой стрелке.

ЗАДАЧА 12. Найти угол φ_{12} между прямыми l_1 и l_2, заданные уравнениями

$$y = k_1x + b_1 \quad \text{и} \quad y = k_2x + b_2.$$

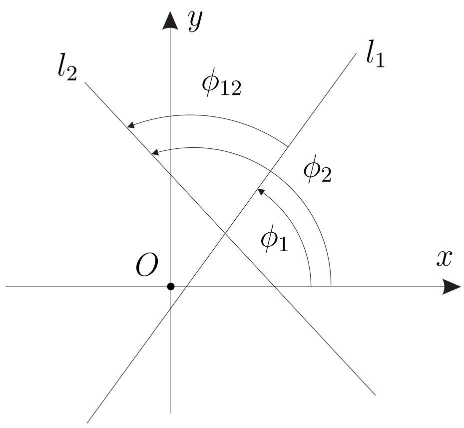

Рис. 10. К задаче 12.

Решение. Действительно, искомый угол φ_{12} равен

$$\varphi_{12} = \varphi_2 - \varphi_1,$$

где углы φ_1 и φ_2 — это углы между осью абсцисс и соответствующим прямыми, отсчитываемые в одном направлении от оси абсцисс. Тогда имеем

$$\tan\varphi_{12} = \tan(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{\sin\varphi_2\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2\sin\varphi_1}{\cos\varphi_2\cos\varphi_1 + \sin\varphi_2\sin\varphi_1} = \\ = \frac{\tan\varphi_2 - \tan\varphi_1}{1 + \tan\varphi_1\tan\varphi_2} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2},$$

поскольку

$$k = \tan\varphi_1, \quad k_2 = \tan\varphi_2.$$

ЗАДАЧА 13. Найти внутренние углы треугольника, стороны которого заданы уравнениями

$$3x - y + 6 = 0, \quad x - y + 4 = 0, \quad x + 2y = 0.$$

Решение. Пусть первая прямая l_1 — это $3x - y + 6 = 0$, вторая прямая l_2 — это $x - y + 4 = 0$, третья l_3 — это $x + 2y = 0$. Соответствующие угловые коэффиценты

$$k_1 = 3, \quad k_2 = 1, \quad k_3 = -\frac{1}{2}.$$

Согласно общей формуле задачи 12 имеем

$$\tan\varphi_{12} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} = -\frac{1}{2}, \quad \tan\varphi_{23} = \frac{k_3 - k_2}{1 + k_3 k_2} = -3,$$

$$\tan\varphi_{31} = \frac{k_1 - k_3}{1 + k_1 k_3} = -7.$$

Все тангенсы углов отрицательные — это означает, что они все тупые, а это означает, что они внешние. Таким образом, внутренние углы равны соответственно

$$\arctan\left(\frac{1}{2}\right), \quad \arctan(3), \quad \arctan(7).$$

ЗАДАЧА 14. Основанием равнобедренного треугольника служит прямая $2x - 5y + 1 = 0$, а боковой стороной — прямая $12x - y - 23 = 0$. Написать уравнение другой боковой стороны треугольника, зная, что она проходит через точку $Q(3, 1)$.

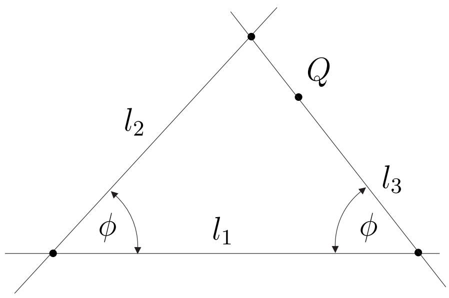

Рис. 11. К задаче 14.

Решение. Пусть

$$l_1: \quad 2x - 5y + 1 = 0, \quad l_2: \quad 12x - y - 23 = 0, \quad l_3: \quad y = k_3 x + b_3.$$

Тогда

$$k_1 = \frac{2}{5}, \quad k_2 = 12.$$

Имеем

$$\tan\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1} = 2.$$

Но тогда

$$2 = \tan\varphi = \frac{k_1 - k_3}{1 + k_1 k_3} \Rightarrow k_3 = -\frac{8}{9}.$$

С учётом условия, что $Q = (3, 1) \in l_3$ приходим к уравнению

$$9y + 8x - 33 = 0.$$

ЗАДАЧА 15. Концы основания равнобедренного треугольника находятся в точках $A = (-3, 4)$, $B = (6, -2)$; тангенс угла при основании равен $3/2$. Найти координаты вершины C, зная, что начало координат и точка C лежат по разные стороны от прямой (AB).

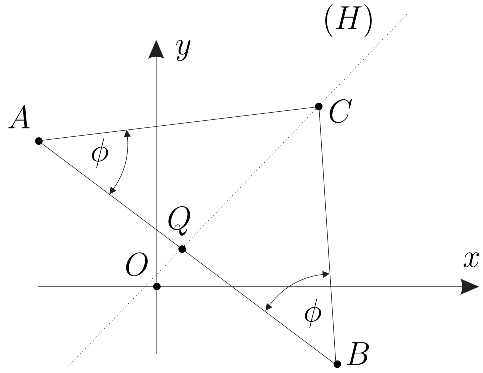

Рис. 12. К задаче 15.

Решение. Сначала найдём уравнение прямой (AB). Действительно,

$$(AB): \quad \frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} \Rightarrow 2x + 3y - 6 = 0.$$

Угловой коэффициент равен $k_1 = -2/3$. Пусть уравнение стороны (AC) имеет следующий вид:

$$(AC): \quad y = k_2 x + b.$$

Возможны два случая. Либо

$$\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} = \frac{3}{2} \Rightarrow k_2 = \frac{5}{12};$$

либо

$$\frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2} = \frac{3}{2} \Rightarrow k_2 = \infty.$$

Поэтому уравнение стороны (AC) либо

$$y = \frac{5}{12}x + b \quad \text{либо} \quad x + b = 0.$$

Поскольку точка $A = (-3, 4)$ принадлежит обеим прямым, то

$$y = \frac{5}{12}x + \frac{21}{4} \quad \text{либо} \quad x + 3 = 0.$$

Найдём теперь уравнение высоты треугольника, опущенную из точки C на основание AB. Очевидно, что

$$(H): \quad -3x + 2y + c_1 = 0.$$

Пусть $Q = (x_Q, y_Q)$ — это основание высоты. Тогда поскольку треугольник равнобедренный с основанием AB, то

$$x_Q = \frac{1}{2}(x_A + x_B) = \frac{3}{2}, \quad y_Q = \frac{1}{2}(y_A + y_B) = 1$$

Очевидно, что $Q \in (H)$, поэтому находим

$$(H): \quad -3x + 2y + \frac{5}{2} = 0.$$

Пересечение прямых (AC) и (H) даёт искомые координаты точки C:

$$C = \left(6, \frac{31}{4}\right) \quad \text{либо} \quad C = \left(-3, -\frac{23}{4}\right).$$

Под условие задачи подходит только точка $C = \left(6, \dfrac{31}{4}\right)$.

ЗАДАЧА 16. Найти общие касательные к двум окружностям, центры которых находятся в точках $O_1(1, 1)$ и $O_2(2, 3)$, а радиусы соответственно равны 2 и 4.

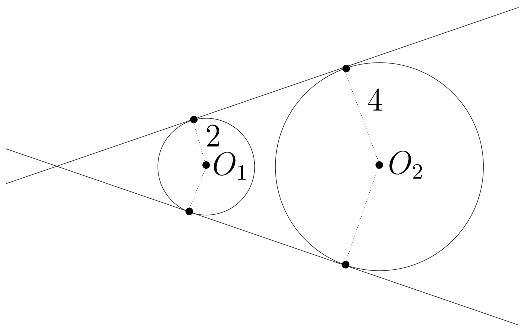

Рис. 13. К задаче 16.

Решение. Пусть уравнение касательной следующее:

$$y = kx + b.$$

Из условия задачи следует, что точка $O_1(1, 1)$ отстоит от касательной на расстоянии 2, а точка $O_2(2, 3)$ отстоит от касательной на расстоянии 4. Тогда имеем два равенства

$$2 = \frac{|1 - k - b|}{\sqrt{1 + k^2}}, \quad 4 = \frac{|3 - 2k - b|}{\sqrt{1 + k^2}}.$$

Отсюда получаем следствие

$$|3 - 2k - b| = 2|1 - k - b|.$$

П е р в ы й   с л у ч а й.

$$(3 - 2k - b) = 2(1 - k - b) \Rightarrow b = -1.$$

Следовательно,

$$2 = \frac{|2-k|}{\sqrt{1+k^2}} \Rightarrow 4(1+k^2) = (2-k)^2 \Leftrightarrow 3k^2 + 4k = 0 \Leftrightarrow k = 0 \quad \text{и} \quad k = -\frac{4}{3}.$$

Получаем в первом случае две касательные:

$$y + 1 = 0, \quad 4x + 3y + 3 = 0.$$

В т о р о й   с л у ч а й.

$$3 - 2k - b = 2(b + k - 1) \Rightarrow b = \frac{5-4k}{3}.$$

Следовательно,

$$2 = \frac{\left|1 - k + \dfrac{4k-5}{3}\right|}{\sqrt{1+k^2}},$$

$$6\sqrt{1+k^2} = |k - 2| \Rightarrow 35k^2 + 4k + 32 = 0.$$

Вещественных корней у последнего квадратного уравнения нет.

З А Д А Ч А 17. Даны две пересекающиеся прямые

$$l_1 : \ A_1x + B_1y + C_1 = 0 \quad \text{и} \quad l_2 : \ A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

и точка $M_0(x_0, y_0)$, не принадлежащая ни одной из этих прямых. Написать уравнение биссектрисы того угла между прямыми, в котором лежит данная точка.

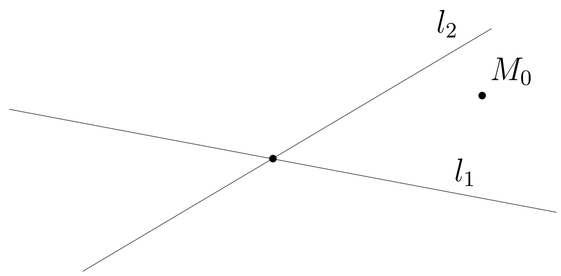

Рис. 14. К задаче 17.

Решение. Биссектриса определяется как геометрическое место точек равноудаленных от двух заданных прямых. Рассмотрим два равенства

$$d_1(x_0, y_0) = \frac{A_1x_0 + B_1y_0 + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}, \quad d_2(x_0, y_0) = \frac{A_2x_0 + B_2y_0 + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

Это ориентированное расстояние от точки $M_0 = (x_0, y_0)$ до двух прямых. Причём знак ориентированного расстояния от произвольной точки $M = (x, y)$ до тех же прямых сохраняется внутри угла, если точка $M(x, y)$ лежит в том же угле, что и точка $M_0 = (x_0, y_0)$. Существуют две биссектрисы, уравнения которых следующие:

$$d_1(x, y) = d_2(x, y) \quad \text{и} \quad d_1(x, y) = -d_2(x, y),$$

в зависимости от знаков ориентированных расстояний. Итак, результат следующий:

$$\frac{\operatorname{sing}(A_1x_0 + B_1y_0 + C_1)}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}(A_1x + B_1y + C_1) = \\ = \frac{\operatorname{sing}(A_2x_0 + B_2y_0 + C_2)}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}(A_2x + B_2y + C_2)$$

для биссектрисы того угла, в котором лежит точка $M_0(x_0, y_0)$. Действительно, если точка $M(x, y)$ лежит в том же угле, что и точка $M_0(x_0, y_0)$ то тогда знаки следующих пар выражений одинаковые:

$$A_1x_0 + B_1y_0 + C_1 \quad \text{и} \quad A_1x + B_1y + C_1,$$
$$A_2x_0 + B_2y_0 + C_2 \quad \text{и} \quad A_2x + B_2y + C_2,$$

поскольку точки $M_0(x_0, y_0)$ и $M(x, y)$ лежат по одну сторону от обеих частей. Следовательно,

$$\frac{\operatorname{sing}(A_1x_0 + B_1y_0 + C_1)}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}(A_1x + B_1y + C_1) = \frac{|A_1x + B_1y + C_1|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}},$$
$$\frac{\operatorname{sing}(A_2x_0 + B_2y_0 + C_2)}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}(A_2x + B_2y + C_2) = \frac{|A_2x + B_2y + C_2|}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

Поскольку для точек биссектрисы выполнено равенство

$$\frac{|A_1x + B_1y + C_1|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \frac{|A_2x + B_2y + C_2|}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

С другой стороны, для точек биссектрисы смежного угла точка $M(x, y)$ и точка $M_0(x_0, y_0)$ лежат по одну сторону от одной из прямых и по разные стороны от другой прямой и поэтому биссектриса смежного угла имеет следующий вид:

$$\frac{\operatorname{sing}(A_1x_0+B_1y_0+C_1)}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}(A_1x+B_1y+C_1)= \\ =-\frac{\operatorname{sing}(A_2x_0+B_2y_0+C_2)}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}(A_2x+B_2y+C_2)$$

З А Д А Ч А 18. Написать уравнения сторон прямоугольника, зная уравнения его диагоналей

$$l_1: \quad 7x-y+4=0 \quad \text{и} \quad l_2: \quad x+y-2=0$$

и внутреннюю точку $A=(3,5)$ одной из его сторон.

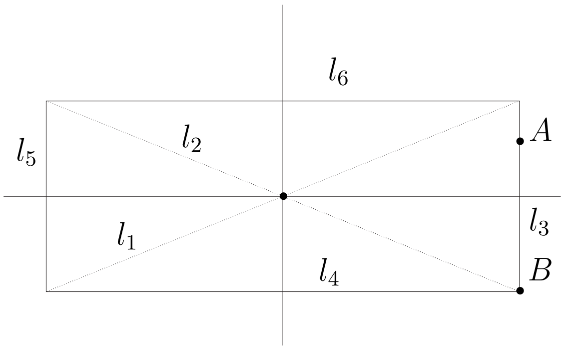

Рис. 15. К задаче 18.

Р е ш е н и е. Согласно результату задачи 17 биссектриса того угла, в котором лежит точка $A(3,5)$, имеет следующий вид:

$$\frac{1}{\sqrt{50}}\,(7x-y+4)=\frac{1}{\sqrt{2}}(x+y-2),$$

т. е. уравнение биссектрисы этого угла следующее:

$$x-3y+7=0.$$

Тогда уравнение взаимной биссектрисы имеет следующий вид:

$$\frac{1}{\sqrt{50}}\,(7x-y+4)=-\frac{1}{\sqrt{2}}(x+y-2)\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 6x+2y-3=0\Leftrightarrow 3x+y-\frac{3}{2}=0.$$

Ищем уравнение стороны прямоугольника параллельной данной биссектрисе в следующем виде:

$$l_3: \quad 3x + y + c_1 = 0.$$

Из условия, что $A = (3, 5) \in l_3$ приходим к искомому уравнению

$$3x + y - 14 = 0.$$

Параллельную сторону l_5 прямоугольника ищем в виде:

$$3x + y + c_2 = 0 \Rightarrow \frac{c_2 - 14}{2} = -\frac{3}{2} \Rightarrow c_2 = 11,$$

где мы воспользовались рассуждениями при решении задачи 4. Итак, параллельная сторона имеет следующий вид:

$$3x + y + 11 = 0.$$

Уравнение других двух параллельных сторон прямоугольника ищем в следующем виде:

$$l_4: \quad x - 3y + c_3 = 0.$$

Найдем одну из вершин прямоугольника:

$$B(x_B, y_B) = l_2 \cap l_3: \quad x_B + y_B - 2 = 0 \quad \text{и} \quad 3x_B + y_B - 14 = 0 \Rightarrow B = (6, -4).$$

Поэтому имеем

$$x - 3y - 18 = 0.$$

Далее ищем точку пересечения $C = (x_C, y_C) = l_1 \cap l_3$:

$$7x_C - y_C + 4 = 0, \quad 3x_C + y_C - 14 = 0 \Rightarrow C = (1, 11).$$

Уравнение стороны l_6 ищем в следующем виде:

$$x - 3y + c_4 = 0 \Rightarrow C(1, 11) \in l_6: \quad c_4 = 32.$$

Итак, уравнение стороны l_6 имеет вид $x - 3y + 32 = 0$.