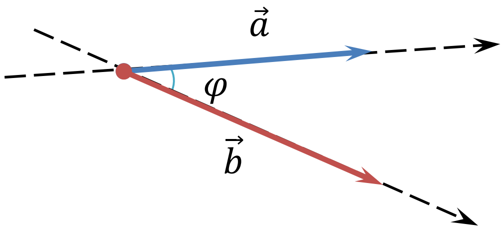
Лекция 4

Скалярное произведение



Определение. *Углом* φ *между ненулевыми векторами* $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется тот из углов, образованных этими векторами, отложенными от единого начала, который лежит в пределах от 0 до π. Если хотя бы один из векторов нулевой, то угол между ними не определён.

Определение. *Скалярным произведением* (СП) двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется *число*

$$(\vec{a},\vec{b}) = \begin{cases} |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi, & \text{если} \quad \vec{a}\neq\vec{0}, \vec{b}\neq\vec{0}, \\ 0, & \text{если} \quad \vec{a}=\vec{0} \text{ или } \vec{b}=\vec{0}, \end{cases}$$

где φ — угол между векторами.

Замечание 1. Скалярное произведение ненулевых векторов можно записать в виде

$$(\vec{a},\vec{b}) = |\vec{a}|\cdot \text{Пр}_a\vec{b}, \qquad \text{если } \vec{a}\neq\vec{0},$$

$$(\vec{a},\vec{b}) = |\vec{b}|\cdot \text{Пр}_b\vec{a}, \qquad \text{если } \vec{b}\neq\vec{0},$$

где $\text{Пр}_a\vec{b} = |\vec{b}|\cdot\cos\varphi$ — проекция вектора $\vec{b}$ на ось, образованную вектором $\vec{a}$, $\text{Пр}_b\vec{a} = |\vec{a}|\cdot\cos\varphi$ — проекция вектора $\vec{a}$ на ось, образованную вектором $\vec{b}$.

Замечание 2. Из определения скалярного произведения следует, что $(\vec{a},\vec{a}) = |\vec{a}|^2$.

Замечание 3. Для ненулевых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ справедлива формула $\varphi = \arccos\frac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$.

Замечание 4. Для ненулевых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$

1) $(\vec{a},\vec{b}) = 0 \Leftrightarrow \varphi$ — прямой,
2) $(\vec{a},\vec{b}) > 0 \Leftrightarrow \varphi$ — острый или нулевой,
3) $(\vec{a},\vec{b}) < 0 \Leftrightarrow \varphi$ — тупой или развёрнутый.

Определение. Векторы называются *ортогональными* (обозначение $\vec{a}\perp\vec{b}$), если их скалярное произведение равно нулю.

Свойства скалярного произведения. Для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и для любого вещественного числа λ

1) $(\vec{a},\vec{b}) = (\vec{b},\vec{a})$ (доказывается по определению скалярного произведения),

2) $(\lambda\vec{a},\vec{b}) = \lambda(\vec{a},\vec{b}) = (\vec{a},\lambda\vec{b})$ (доказывается через свойство 2° проекции вектора на ось),

3) $(\vec{a}+\vec{b},\vec{c}) = (\vec{a},\vec{c}) + (\vec{b},\vec{c})$, $\quad(\vec{a},\vec{b}+\vec{c}) = (\vec{a},\vec{b}) + (\vec{a},\vec{c})$ (доказывается через свойство 1° проекции вектора на ось),

4) $(\vec{a},\vec{a}) > 0$, если $\vec{a} \neq \vec{0}$; $(\vec{a},\vec{a}) = 0$, если $\vec{a} = \vec{0}$ (доказывается по определению скалярного произведения).

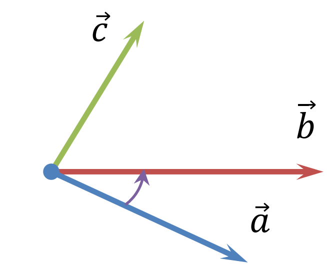
Теорема 4.1. Пусть $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ — *ортонормированный базис* в пространстве, $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$, $\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$. Тогда $(\vec{a},\vec{b}) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$. Пусть $\vec{i}$, $\vec{j}$ — *ортонормированный базис* на плоскости, $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$, $\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$. Тогда $(\vec{a},\vec{b}) = x_1x_2 + y_1y_2$.

Доказательство. Докажем в пространстве. Использовав свойства 2), 3) скалярного произведения (т.е. линейность по каждому аргументу) и определение ортонормированного базиса, получим

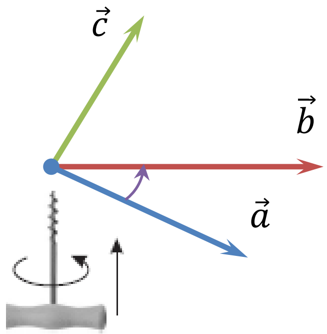
$$(\vec{a},\vec{b}) = (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}, x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) =$$
$$= x_1x_2\underbrace{(\vec{i},\vec{i})}_{1} + x_1y_2\underbrace{(\vec{i},\vec{j})}_{0} + x_1z_2\underbrace{(\vec{i},\vec{k})}_{0} + y_1x_2\underbrace{(\vec{j},\vec{i})}_{0} + y_1y_2\underbrace{(\vec{j},\vec{j})}_{1} + y_1z_2\underbrace{(\vec{j},\vec{k})}_{0} + z_1x_2\underbrace{(\vec{k},\vec{i})}_{0} +$$
$$+ z_1y_2\underbrace{(\vec{k},\vec{j})}_{0} + z_1z_2\underbrace{(\vec{k},\vec{k})}_{1} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2, \qquad \text{ч. т. д.}$$

На плоскости доказательство аналогично.

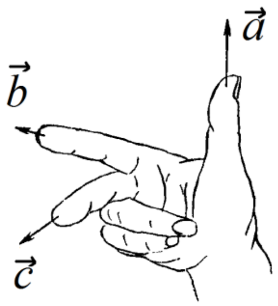
Векторное и смешанное произведения



Определение 1. Упорядоченная тройка некомпланарных векторов называется *правой (левой)* тройкой векторов в том случае, если, отложив векторы от общего начала и глядя из конца третьего вектора, мы будем наблюдать кратчайший поворот от первого вектора ко второму совершающимся против часовой стрелки (по часовой стрелке).



Определение 2 (правило буравчика или правило правого винта)**.** Упорядоченная тройка некомпланарных векторов называется *правой* тройкой векторов в том случае, если, отложив векторы от общего начала и вращая винт в направлении от первого вектора ко второму, острие винта будет двигаться в направлении третьего вектора. В противном случае упорядоченная тройка некомпланарных векторов называется *левой.*



Определение 3 (правило правой/левой руки)**.** Упорядоченная тройка некомпланарных векторов называется *правой (левой)* тройкой векторов в том случае, если векторы, отложенные от общего начала, можно совместить с большим, указательным и средним пальцем правой (левой) руки соответственно.

Эти три определения эквивалентны.

На рисунках изображены правые тройки векторов: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$; $\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}$; $\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}$; левые тройки векторов: $\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}$; $\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}$; $\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}$.

Определение. Прямоугольная или косоугольная система координат в пространстве называется *правой (левой)*, если её базис является правой (левой) тройкой векторов.

Определение. Прямоугольная или косоугольная система координат на плоскости называется *правой (левой)*, если кратчайший поворот от первого базисного вектора ко второму осуществляется против часовой стрелки (по часовой стрелке).

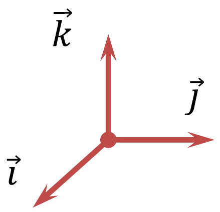
Определение. Пусть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ненулевые. *Векторным произведением* вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, удовлетворяющий условиям:

1) $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\varphi$, где φ — угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$,
2) $\vec{c} \perp \vec{a}, \vec{c} \perp \vec{b}$,
3) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ — правая тройка векторов.

Обозначение: $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$.

Если же хотя бы один из векторов $\vec{a}, \vec{b}$ нулевой, то $[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{0}$.

Пример. Рассмотрим *правый ортонормированный базис*, т.е. правую тройку единичных попарно ортогональных векторов $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$.



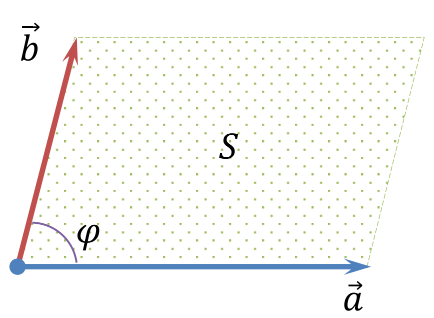
Тогда
$[\vec{\imath}, \vec{\jmath}] = \vec{k}$,
$[\vec{\jmath}, \vec{k}] = \vec{\imath}$,
$[\vec{k}, \vec{\imath}] = \vec{\jmath}$.

Свойства векторного произведения

1⁰. (Необходимое и достаточное условие коллинеарности.) $\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{b}] = \vec{0}$.

(Следует из определения векторного произведения.)

2⁰. Если $\vec{a} \nparallel \vec{b}$, то длина векторного произведения $\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right|$ равна площади S параллелограмма, построенного на приведённых к общему началу векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.



Доказательство. Если $\vec{a} \nparallel \vec{b}$, то векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ненулевые. Тогда по определению векторного произведения $\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right| = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \sin\varphi$, а это и есть площадь параллелограмма, построенного на приведённых к общему началу векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

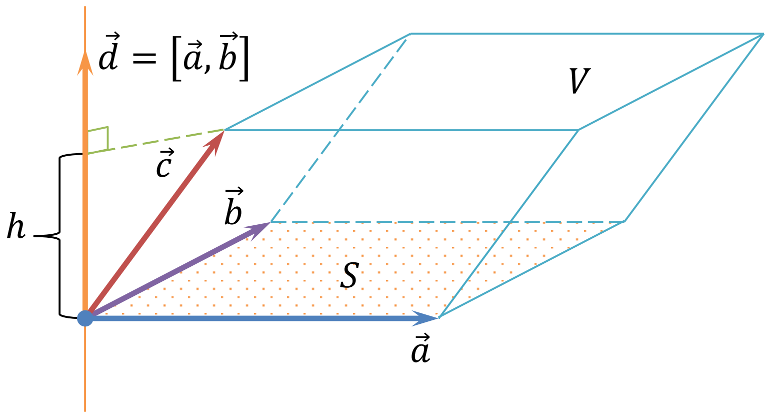
3⁰. Для любых векторов $\vec{a}, \vec{b}$

1) $\left[\vec{a},\vec{b}\right] = -\left[\vec{b},\vec{a}\right]$ (следует из определения векторного произведения),
2) $\left[\vec{a},\vec{a}\right] = \vec{0}$ (следует из определения векторного произведения).

Определение. *Смешанным произведением* $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)$ трёх векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ называется число, равное $\left(\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{c}\right)$ (скалярному произведению вектора $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ и вектора $\vec{c}$).

Теорема 4.2. Смешанное произведение $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)$ равно объёму V параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, отложенных от общего начала, взятому со знаком «+», если $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ — правая тройка, или со знаком «–», если $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ — левая тройка. Если векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарны, то $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right) = 0$:

$$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right) = \begin{cases} V, & \text{если } \vec{a},\vec{b},\vec{c} \text{ — правая тройка,} \\ -V, & \text{если } \vec{a},\vec{b},\vec{c} \text{ — левая тройка.} \\ 0, & \text{если } \vec{a},\vec{b},\vec{c} \text{ компланарны.} \end{cases}$$



Доказательство. Пусть векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ некомпланарны. Рассмотрим

$$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right) = \left(\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{c}\right).$$

Векторное произведение $\vec{d} = \left[\vec{a},\vec{b}\right]$ представляет собой вектор, длина которого равна S — площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (по свойству векторного произведения), а направлен он перпендикулярно векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т.е. перпендикулярно плоскости этого параллелограмма. Тогда

$$\left(\left[\vec{a}, \vec{b}\right], \vec{c}\right) = \left|\vec{d}\right| \cdot \text{Пр}_d \vec{c} = S \cdot \text{Пр}_d \vec{c}.$$

С другой стороны,

$$\text{Пр}_d \vec{c} = \begin{cases} h, & \text{если } \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ — правая тройка,} \\ -h, & \text{если } \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ — левая тройка,} \end{cases}$$

где h — высота параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

Тогда

$$\left(\left[\vec{a}, \vec{b}\right], \vec{c}\right) = \begin{cases} hS, & \text{если } \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ — правая тройка,} \\ -hS, & \text{если } \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ — левая тройка,} \end{cases}$$

т.е.

$$\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) = \begin{cases} V, & \text{если } \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ — правая тройка,} \\ -V, & \text{если } \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ — левая тройка.} \end{cases}$$

Если же векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ компланарны, то $\left[\vec{a}, \vec{b}\right] \perp \vec{c}$, поэтому $\left(\left[\vec{a}, \vec{b}\right], \vec{c}\right) = 0$. Теорема доказана.

Свойства смешанного произведения

1^0. Для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ выполняется $\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) = \left(\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}\right) = \left(\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}\right)$.

Доказательство. Если векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ компланарны, то их смешанные произведения в любом порядке равны нулю. Если же векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ некомпланарны, то параллелепипеды, построенные на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, на векторах $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{a}$ и на векторах $\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}$, равны, и все эти тройки векторов либо правые, либо левые одновременно, поэтому равенство смешанных произведений следует из теоремы 4.2.

2^0. Для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ выполняется $\left(\left[\vec{a}, \vec{b}\right], \vec{c}\right) = \left(\vec{a}, \left[\vec{b}, \vec{c}\right]\right)$.

Доказательство. По определению смешанного произведения, по свойству **1^0** смешанного произведения и по перестановочному свойству скалярного произведения

$$\left(\left[\vec{a}, \vec{b}\right], \vec{c}\right) = \left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) = \left(\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}\right) = \left(\left[\vec{b}, \vec{c}\right], \vec{a}\right) = \left(\vec{a}, \left[\vec{b}, \vec{c}\right]\right), \qquad \text{ч. т. д.}$$

3^0. Необходимым и достаточным условием компланарности трёх векторов является равенство нулю их смешанного произведения. (Это следует из теоремы 4.2.)

4^0. Линейность смешанного произведения по каждому аргументу. Т.е. для любых векторов и для любого числа λ выполняется

$$\left(\vec{a}_1+\vec{a}_2,\vec{b},\vec{c}\right)=\left(\vec{a}_1,\vec{b},\vec{c}\right)+\left(\vec{a}_2,\vec{b},\vec{c}\right),\qquad \left(\vec{a},\vec{b}_1+\vec{b}_2,\vec{c}\right)=\left(\vec{a},\vec{b}_1,\vec{c}\right)+\left(\vec{a},\vec{b}_2,\vec{c}\right),$$
$$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}_1+\vec{c}_2\right)=\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}_1\right)+\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}_2\right),\qquad \left(\lambda\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\left(\vec{a},\lambda\vec{b},\vec{c}\right)=\left(\vec{a},\vec{b},\lambda\vec{c}\right)=\lambda\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right).$$

Доказательство. Линейность по третьему аргументу следует из определения смешанного произведения и линейности скалярного произведения. Линейность по остальным аргументам следует из линейности по третьему аргументу и свойства **1^0** смешанного произведения, т.к. аргументы можно переставить таким образом, что нужные векторы окажутся на третьем месте.

Теорема 4.3. Векторное произведение линейно по каждому аргументу, т.е. для любых векторов и для любого числа λ выполняется

$$\left[\vec{a}_1+\vec{a}_2,\vec{b}\right]=\left[\vec{a}_1,\vec{b}\right]+\left[\vec{a}_2,\vec{b}\right],\ \ \left[\vec{a},\vec{b}_1+\vec{b}_2\right]=\left[\vec{a},\vec{b}_1\right]+\left[\vec{a},\vec{b}_2\right],$$
$$\left[\lambda\vec{a},\vec{b}\right]=\left[\vec{a},\lambda\vec{b}\right]=\lambda\left[\vec{a},\vec{b}\right].$$

Доказательство. Докажем равенство $\left[\vec{a}_1+\vec{a}_2,\vec{b}\right]=\left[\vec{a}_1,\vec{b}\right]+\left[\vec{a}_2,\vec{b}\right]$, остальные равенства доказываются аналогично. Пусть

$$\vec{c}=\left[\vec{a}_1+\vec{a}_2,\vec{b}\right]-\left[\vec{a}_1,\vec{b}\right]-\left[\vec{a}_2,\vec{b}\right].$$

Тогда по свойствам линейности скалярного произведения и смешанного произведения

$$(\vec{c},\vec{c})=\left(\left[\vec{a}_1+\vec{a}_2,\vec{b}\right]-\left[\vec{a}_1,\vec{b}\right]-\left[\vec{a}_2,\vec{b}\right],\vec{c}\right)=\left(\left[\vec{a}_1+\vec{a}_2,\vec{b}\right],\vec{c}\right)-\left(\left[\vec{a}_1,\vec{b}\right],\vec{c}\right)-\left(\left[\vec{a}_2,\vec{b}\right],\vec{c}\right)=$$
$$=\left(\vec{a}_1+\vec{a}_2,\vec{b},\vec{c}\right)-\left(\vec{a}_1,\vec{b},\vec{c}\right)-\left(\vec{a}_2,\vec{b},\vec{c}\right)=0,$$

откуда по свойству скалярного произведения $\vec{c}=\vec{0}$, поэтому

$$\left[\vec{a}_1+\vec{a}_2,\vec{b}\right]=\left[\vec{a}_1,\vec{b}\right]+\left[\vec{a}_2,\vec{b}\right],\qquad \text{ч. т. д.}$$

Теорема 4.4. Пусть $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$ — *правый ортонормированный базис* в пространстве, $\vec{a}=x_1\vec{\imath}+y_1\vec{\jmath}+z_1\vec{k}$, $\vec{b}=x_2\vec{\imath}+y_2\vec{\jmath}+z_2\vec{k}$. Тогда

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\begin{vmatrix}\vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix},$$

т.е. $\left[\vec{a},\vec{b}\right]=(y_1z_2-y_2z_1)\vec{\imath}+(x_2z_1-x_1z_2)\vec{\jmath}+(x_1y_2-x_2y_1)\vec{k}$.

Доказательство. Используя свойства векторного произведения и равенства $[\vec{\imath},\vec{\jmath}]=\vec{k}$, $\quad[\vec{\jmath},\vec{k}]=\vec{\imath}$, $\quad[\vec{k},\vec{\imath}]=\vec{\jmath}$,

справедливые для правого ортонормированного базиса, получим

$$[\vec{a},\vec{b}] = [x_1\vec{\imath} + y_1\vec{\jmath} + z_1\vec{k}, x_2\vec{\imath} + y_2\vec{\jmath} + z_2\vec{k}] =$$
$$= x_1x_2\underbrace{[\vec{\imath},\vec{\imath}]}_{\vec{0}} + x_1y_2\underbrace{[\vec{\imath},\vec{\jmath}]}_{\vec{k}} + x_1z_2\underbrace{[\vec{\imath},\vec{k}]}_{-\vec{\jmath}} + y_1x_2\underbrace{[\vec{\jmath},\vec{\imath}]}_{-\vec{k}} + y_1y_2\underbrace{[\vec{\jmath},\vec{\jmath}]}_{\vec{0}} + y_1z_2\underbrace{[\vec{\jmath},\vec{k}]}_{\vec{\imath}} + z_1x_2\underbrace{[\vec{k},\vec{\imath}]}_{\vec{\jmath}} +$$
$$+ z_1y_2\underbrace{[\vec{k},\vec{\jmath}]}_{-\vec{\imath}} + z_1z_2\underbrace{[\vec{k},\vec{k}]}_{\vec{0}} = (y_1z_2 - y_2z_1)\vec{\imath} + (x_2z_1 - x_1z_2)\vec{\jmath} + (x_1y_2 - x_2y_1)\vec{k}, \qquad \text{ч. т. д.}$$

Замечание. В левом ортонормированном базисе будет справедлива формула

$$[\vec{a},\vec{b}] = -\begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

Теорема 4.5. Пусть $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$ — *правый ортонормированный базис* в пространстве, $\vec{a} = x_1\vec{\imath} + y_1\vec{\jmath} + z_1\vec{k}$, $\vec{b} = x_2\vec{\imath} + y_2\vec{\jmath} + z_2\vec{k}$, $\vec{c} = x_3\vec{\imath} + y_3\vec{\jmath} + z_3\vec{k}$. Тогда

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Доказательство. По теоремам 4.1 и 4.4

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = ([\vec{a},\vec{b}],\vec{c}) = (y_1z_2 - y_2z_1)x_3 + (x_2z_1 - x_1z_2)y_3 + (x_1y_2 - x_2y_1)z_3 =$$
$$= \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}, \qquad \text{ч. т. д.}$$

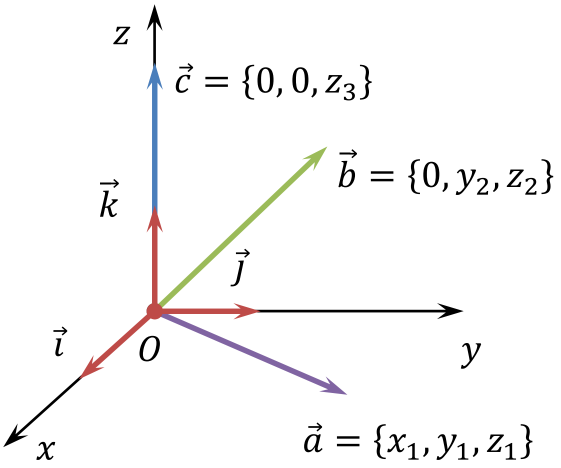
Двойное векторное произведение

Определение. *Двойным векторным произведением* трёх векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ называется вектор $[\vec{a},[\vec{b},\vec{c}]]$.

Теорема 4.6. Для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ справедлива формула

$$[\vec{a},[\vec{b},\vec{c}]] = \vec{b}(\vec{a},\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a},\vec{b})$$ («абц равно бац минус цаб»).

Доказательство. Введём правую прямоугольную систему координат в пространстве так, чтобы вектор $\vec{c}$ лежал на оси Oz, а вектор $\vec{b}$ — в плоскости Oyz:



Тогда

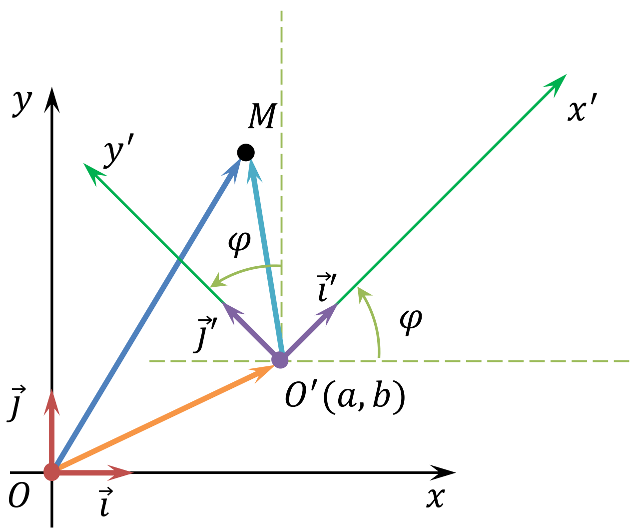
$$[\vec{b}, \vec{c}] = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 0 & y_2 & z_2 \\ 0 & 0 & z_3 \end{vmatrix} = \{y_2 z_3, 0, 0\}, \qquad \left[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]\right] = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ y_2 z_3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \{0, y_2 z_1 z_3, -y_1 y_2 z_3\}.$$

С другой стороны,

$$(\vec{a}, \vec{c}) = z_1 z_3, \qquad (\vec{a}, \vec{b}) = y_1 y_2 + z_1 z_2, \qquad \vec{b}(\vec{a}, \vec{c}) = \{0, y_2 z_1 z_3, z_1 z_2 z_3\},$$
$$\vec{c}(\vec{a}, \vec{b}) = \{0, 0, y_1 y_2 z_3 + z_1 z_2 z_3\}, \qquad \vec{b}(\vec{a}, \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}, \vec{b}) = \{0, y_2 z_1 z_3, -y_1 y_2 z_3\},$$

и мы убеждаемся, что $\left[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]\right] = \vec{b}(\vec{a}, \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}, \vec{b})$. Теорема доказана.

Преобразование прямоугольных координат на плоскости



Рассмотрим на плоскости две декартовых системы координат:

1) старая система координат — начало отсчёта O, базис $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$, координатные оси Ox и Oy;

2) новая система координат — начало отсчёта O', базис $\vec{\imath}', \vec{\jmath}'$, координатные оси $O'x'$ и $O'y'$.

Пусть точка O' имеет координаты (a, b) в старой системе координат. Тогда $\overrightarrow{OO'} = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath}$.

Рассмотрим произвольную точку M на плоскости. Пусть она имеет координаты (x, y) в старой системе координат и координаты (x', y') в новой системе координат. Тогда

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}, \qquad \overrightarrow{O'M} = x'\vec{\imath}' + y'\vec{\jmath}'.$$

Разложим векторы $\vec{\imath}', \vec{\jmath}'$ по старому базису:

$$\vec{\imath}' = a_{11}\vec{\imath} + a_{12}\vec{\jmath}, \quad \vec{\jmath}' = a_{21}\vec{\imath} + a_{22}\vec{\jmath}.$$

Заметим, что $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$. Подставив сюда выражения для $\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{O'M}, \vec{\imath}', \vec{\jmath}'$, получим

$$x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath} + x'(a_{11}\vec{\imath} + a_{12}\vec{\jmath}) + y'(a_{21}\vec{\imath} + a_{22}\vec{\jmath}),$$

откуда

$$x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} = (a + a_{11}x' + a_{21}y')\vec{\imath} + (b + a_{12}x' + a_{22}y')\vec{\jmath}.$$

Тогда в силу единственности разложения вектора по базису $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ справедливы равенства

$$\boxed{\begin{aligned} x &= a + a_{11}x' + a_{21}y', \\ y &= b + a_{12}x' + a_{22}y', \end{aligned}}$$

связывающие старые координаты точки M с её новыми координатами.

Пусть и старая, и новая система координат являются правыми. Тогда новая система координат получена из старой с помощью сдвига начала координат в точку O' и поворота координатных осей на угол φ против часовой стрелки. Тогда (см. рисунок)

$$\vec{\imath}' = \cos\varphi\,\vec{\imath} + \sin\varphi\,\vec{\jmath}, \quad \vec{\jmath}' = -\sin\varphi\,\vec{\imath} + \cos\varphi\,\vec{\jmath},$$

откуда

$$a_{11} = \cos\varphi, \qquad a_{12} = \sin\varphi, \qquad a_{21} = -\sin\varphi, \qquad a_{22} = \cos\varphi.$$

Тогда формулы преобразования координат принимают вид

$$\boxed{\begin{aligned} x &= a + x'\cos\varphi - y'\sin\varphi, \\ y &= b + x'\sin\varphi + y'\cos\varphi. \end{aligned}}$$