

1 РАЗВИТИЕ ТЕОРИИ ПАРЦИАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ ИЗЛУЧЕНИЯ В РАБОТАХ А.Г.СВЕШНИКОВА С 50-Х ПО 70-Е ГОДЫ XX ВЕКА [FOR2]

А.А.Быков

Московский государственный университет им.М.В.Ломоносова,
abykovmsu@gmail.com

1.1 Введение

Задача расчета электромагнитных полей в волноводах и резонаторах сложной формы с неоднородным заполнением является одной из ключевых задач вычислительной электродинамики и, в более общем плане, вычислительной физики. Для решения используются аналитические, асимптотические, численные методы. К числу аналитических отнесем метод разделения переменных, методы теории функций комплексной переменной. К числу асимптотических отнесем коротковолновые асимптотики (в том числе основанные на геометрооптическом приближении), методы разложения в ряд по обратным степеням большого параметра, длинноволновые асимптотики (обычно связываемые с именем Релея), итерационные методы последовательных переотражений. Асимптотические приближения строятся также на основе физических соображений, справедливых в приближении коротких или длинных волн (по сравнению с характерным размером рассеивателя). К числу таковых относится, в частности, метод краевых волн Уфимцева. К численным отнесем метод интегральных уравнений, метод конечных разностей, конечных элементов, обобщенный метод разделения переменных, метод Галеркина. Вариационные методы, основанные на равносильной формулировке задачи рассеяния как задачи экстремума функционала, для которого уравнения Максвелла выполняют роль уравнений Эйлера, выражающих необходимые условия экстремума, также допускают численную реализацию. Значимые результаты, в том числе прикладного характера, получены методом дискретных источников. В формулирование, обоснование, применение этого метода для решения широкого класса практически важных задач значительный вклад внес А.Г.Свешников. Упомянутые численные методы могут также являться основой построения асимптотических методов. Обычно техника построения асимптотических приближений на базе численных методов основана на итерационном решении линейных или нелинейных систем методом простой итерации, методом Ньютона. Асимптотические методы естественно применять для расчета

Введение

волноведущих или резонаторных систем с импедансными границами при условии малой толщины скин слоя (по сравнению с радиусом кривизны импедансной поверхности).

Среди численных методов особое положение занимает метод приведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям ("неполный метод Галеркина НМГ). Концепция метода сформулирована в работах [1], [2]. В этих работах метод был использован для обоснования разрешимости некоторых краевых задач для уравнений с переменными коэффициентами и для разложения в ряд по малому параметру. История создания и развития метода в 30-40 годах изложена в работе [3]. Широкое применение метода в численном эксперименте началось после серии публикаций А.Г.Свешникова [4], [5]. В упомянутых работах метод использовался для расчета рассеяния на неоднородности в полом металлическом волноводе. В работе [4] разработан метод решения краевой задачи с условиями излучения для уравнения

$$\Delta u + \kappa^2 u = 0$$

в области D , огарниченной поверхностью Σ .

Обозначим D_1 – подводящий полубесконечный отрезок волновода с поперечным сечением S_1 , D_3 – принимающий полубесконечный отрезок волновода с поперечным сечением S_3 , оба продольно однородные, D_2 – область, соединяющая D_1 и D_3 . Пусть $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$. Продольную координату в D_1 обозначим z_1 , $z_1 \in (-\infty, 0]$, в D_3 обозначим z_3 , $z_3 \in [0, +\infty)$. Условия излучения сформулированы в [4] в виде заданного представления поля в подводящем и принимающем полубесконечных отрезках волноводов с поперечным сечением соответственно S_1 и S_2 :

$$u(M_1, z) = \sum_{n=1}^{n_1} A_n^{(1)} e^{i\gamma_n^{(1)} z_1} \varphi_n^{(1)}(M_1) + \sum_{n=1}^{+\infty} R_n^{(1)} e^{-i\gamma_n^{(1)} z_1} \varphi_n^{(1)}(M_1) \text{ при } z_1 \leq 0, \quad (1)$$

$$u(M_3, z_3) = \sum_{n=1}^{n_3} B_n^{(3)} e^{i\gamma_n^{(3)} z_3} \varphi_n^{(3)}(M_3) + \sum_{n=1}^{+\infty} T_n^{(3)} e^{-i\gamma_n^{(3)} z_3} \varphi_n^{(3)}(M_3) \text{ при } z_3 \geq 0, \quad (2)$$

где $\{A_n\}$ есть комплексные амплитуды волн, облучающих неоднородный участок D_2 слева, $\{B_n\}$ то же справа,

$$(\gamma_n^{(i)})^2 = \kappa^2 - (\lambda_n^{(i)})^2,$$

$\text{Re} \gamma_n^i \geq 0$, а если $\text{Re} \gamma_n^i = 0$, то $\text{Im} \gamma_n^i \geq 0$, $i \in \{1; 3\}$. Величины $\lambda_n^{(i)}$ есть собственные значения краевой задачи Штурма–Лиувилля

$$\Delta \varphi_n^{(i)} + \lambda_n^i \varphi_n^{(i)} = 0, \quad (x_i, y_i) \in S_i, \quad \varphi_n^{(i)} \Big|_{C_i} = 0,$$

Введение

C_i есть граница S_i , $i \in \{1; 3\}$. В суммах (1) и (2) присутствуют только амплитуды распространяющихся облучающих волн, так что

$$\gamma_1^{(i)} > 0, \dots, \gamma_{n_i}^{(i)} > 0, \gamma_{n_i+k}^{(i)} < 0$$

для всех $k \geq 1$. В областях $D_{1,2,3}$ вводится система координат (ξ_1, ξ_2, ξ_3) , причем якобиан преобразования $(x, y, z) \leftrightarrow (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ отличен от нуля. При этом D_2 переходит в отрезок цилиндра с поперечным сечением S_2 , $\xi_3 \in [a, b]$, области $D_{1,3}$ переходят в полубесконечные цилиндры

$$(\xi_1, \xi_2) \in S_2, \xi_3 \in (-\infty, a]$$

и

$$(\xi_1, \xi_2) \in S_2, \xi_3 \in [b, +\infty)$$

соответственно. В новых координатах равносильная задача

$$L[v] + \kappa^2 \sqrt{g}v = 0,$$

где

$$L[v] = \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left(g^{i,j} \sqrt{g} \frac{\partial v}{\partial \xi_j} \right).$$

Без ограничения общности можно считать, что

$$\frac{\partial g^{i,j}}{\partial \xi_3} = 0$$

при $\xi_3 < a$ и при $\xi_3 > b$ (достаточно будет расширить D_3 , перенеся часть областей $D_{1,3}$ в область D_3).

Пусть $\{\psi_n, \mu_n\}$ есть собственные функции и значения задачи Штурма-Лиувилля

$$\Delta_{\xi_1, \xi_2} \psi_n + \mu_n^2 \psi_n = 0, (\xi_1, \xi_2) \in S_2, \psi_n|_{C_2} = 0,$$

C_2 есть граница S_2 .

Точное решение удовлетворяет бесконечной системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\iint_{S_2} (L[u] + \kappa^2 \sqrt{g}u) \psi_m d\xi_1 d\xi_2 = 0,$$

$\xi_3 \in (a, b)$, и граничным условиям излучения в интегральной форме:

$$\iint_{S_1} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi_3} + i\gamma_m^{(1)} u \right) \varphi_m^{(1)} d\xi_1 d\xi_2 \Big|_{\xi_3=a} = 2iA_m^{(1)} \gamma_m^{(1)},$$

Введение

$$\iint_{S_3} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi_3} - i\gamma_m^{(3)} u \right) \varphi_m^{(3)} d\xi_1 d\xi_2 \Big|_{\xi_3=b} = -2iB_m^{(3)} \gamma_m^{(3)},$$

$m \in \{1, \dots\}$, причем $A_m^{(1)} = 0$ при $m > n_1$, $B_m^{(3)} = 0$ при $m > n_3$.

Аппроксимация неполного метода Галеркина к решению $u(x, y, z)$ находим в виде функциональной последовательности v_n , каждый элемент которой есть конечная сумма

$$v_n(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \sum_{j=1}^n Z_j(\xi_3) \psi_j(\xi_1, \xi_2).$$

Так как $\{\varphi_n^{(1)}\}$ и $\{\psi_n^{(1)}\}$ – полные ортогональные системы, то

$$\psi_n^{(1)} = \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_{nk} \varphi_k^{(1)}, \quad \psi_n^{(3)} = \sum_{k=1}^{+\infty} \beta_{nk} \varphi_k^{(3)},$$

$$\iint_{S_1} \phi_n^{(1)} \psi_m d\xi_1 d\xi_2 = \alpha_{m,n}, \quad \iint_{S_3} \phi_n^{(3)} \psi_m d\xi_1 d\xi_2 = \beta_{m,n},$$

В сечении $\xi_3 = a$, левее которого среда однородна,

$$\frac{\partial u}{\partial \xi_3} \Big|_{\xi_3=a} = \sum_{n=1}^{n_1} A_n^{(1)} i\gamma_n^{(1)} \varphi_n^{(1)} - \sum_{n=1}^{+\infty} R_n^{(1)} i\gamma_n^{(1)} \varphi_n^{(1)}, \quad (3)$$

ПОЭТОМУ

$$\iint \frac{\partial u}{\partial \xi_3} \Big|_0 \psi_m d\sigma = \sum_{n=1}^{n_1} A_n^{(1)} i\gamma_n^{(1)} \alpha_{m,n} - \sum_{n=1}^{+\infty} R_n^{(1)} i\gamma_n^{(1)} \alpha_{m,n}, \quad (4)$$

и одновременно

$$A_n + R_n = Z_n(a),$$

поэтому условия излучения в левом полубесконечном продольно-однородном волноводе можно записать в виде

$$\iint \frac{\partial u}{\partial \xi_3} \Big|_{\xi_3=a} \psi_m d\sigma = \sum_{n=1}^{n_1} A_n^{(1)} 2i\gamma_n^{(1)} \alpha_{m,n} - \sum_{n=1}^{+\infty} Z_n i\gamma_n^{(1)} \alpha_{m,n}, \quad (5)$$

Аналогично, в правом полубесконечном продольно-однородном волноводе

$$\iint \frac{\partial u}{\partial \xi_3} \Big|_{\xi_3=b} \psi_m d\sigma = - \sum_{n=1}^{n_1} B_n^{(1)} 2i\gamma_n^{(3)} \beta_{m,n} + \sum_{n=1}^{+\infty} Z_n i\gamma_n^{(1)} \alpha_{m,n}, \quad (6)$$

Введение

Заметим также, что имеется возможность выразить коэффициенты разложения по системе $\{\varphi_n^{(1)}\}$ через таковые по системе $\{\psi_n\}$ и обратно, например,

$$Z_n^{(1)} = \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_{k,n} C_k^{(1)}, \quad Z_n^{(3)} = \sum_{k=1}^{+\infty} \beta_{k,n} C_k^{(3)},$$

Коэффициенты суммирования находим из краевой задачи

$$\iint_{S_2} (L[v_n] + \kappa^2 \sqrt{g}) \psi_m d\xi_1 d\xi_2 = 0,$$

$m \in \{1, \dots, n\}$, с граничными условиями (5) и (6).

В работе [5] разработан метод решения задачи рассеяния в нерегулярном волноводе для уравнений Максвелла:

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{H} = -i\kappa \mathbf{E}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} = i\kappa \mathbf{H}, \end{cases} \quad (7)$$

и граничному условию

$$[\mathbf{E} \times \mathbf{H}]|_{\partial D} = 0,$$

и условиям излучения в левом и правом продольно однородных отрезках:

$$\left. \begin{Bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{Bmatrix} \right|_{D_1} = \sum_{n=1}^{+\infty} R_m e^{-i\gamma_n^{(1)} z_1} \begin{Bmatrix} \mathbf{E}_n^{\leftarrow(1)} \\ \mathbf{H}_n^{\leftarrow(1)} \end{Bmatrix} + A_m e^{+i\gamma_n^{(1)} z_1} \begin{Bmatrix} \mathbf{E}_n^{(1)\rightarrow} \\ \mathbf{H}_n^{(1)\rightarrow} \end{Bmatrix}, \quad (8)$$

$z_1 \in (-\infty, 0]$,

$$\left. \begin{Bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{Bmatrix} \right|_{D_3} = \sum_{n=1}^{+\infty} B_m e^{-i\gamma_n^{(3)} z_3} \begin{Bmatrix} \mathbf{E}_n^{\leftarrow(3)} \\ \mathbf{H}_n^{\leftarrow(3)} \end{Bmatrix} + T_m e^{+i\gamma_n^{(3)} z_3} \begin{Bmatrix} \mathbf{E}_n^{(3)\rightarrow} \\ \mathbf{H}_n^{(3)\rightarrow} \end{Bmatrix}, \quad (9)$$

$z_3 \in [0, +\infty)$,

Гладкая замена координат переводит уравнения Максвелла в систему шести скалярных уравнений

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial H_\zeta}{\partial \varphi} - \frac{\partial H_\varphi}{\partial \zeta} = -i\kappa \frac{\sqrt{g}}{\rho} (g^{11} E_\rho + \rho g^{12} E_\varphi + g^{13} E_\zeta), \quad (10)$$

$$\frac{\partial H_\rho}{\partial \zeta} - \frac{\partial H_\zeta}{\partial \rho} = -i\kappa \sqrt{g} (g^{12} E_\rho + \rho g^{22} E_\varphi + g^{23} E_\zeta), \quad (11)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho H_\varphi}{\partial \rho} - \frac{\partial H_\rho}{\partial \varphi} = -i\kappa \frac{\sqrt{g}}{\rho} (g^{13} E_\rho + \rho g^{23} E_\varphi + g^{33} E_\zeta), \quad (12)$$

и трех аналогичным для второго уравнения (7). Граничные условия теперь будут иметь вид

$$E_\varphi|_{\rho=1} = 0, \quad E_\zeta|_{\rho=1} = 0.$$

Введение

Численный метод решения задачи рассеяния на ограниченном неоднородном прозрачном теле в свободном пространстве рассмотрено в работах [6], [7] для скалярного волнового уравнения и для уравнений Максвелла. В цилиндрических координатах метод сформулирован и обоснован в [8], задача рассеяния на поперечно неоднородном цилиндре решена в работе [9]. Выполнен большой цикл работ по задаче рассеяния на периодических решетках [10]. В работе [11] метод приведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям сформулирован в общем виде без привязки к определенной системе координат и к определенному типу граничных условий. В этой работе метод и получил название "Неполный метод Галеркина". В настоящее время метод используется для решения широкого класса задач дифракции на неоднородностях в волноводах и на периодических решетках [12], для расчета собственных волн гофрированных волноводов [13], [14]. Применение НМГ можно найти в зарубежных публикациях, например, [15], [16], [17]. В зарубежных публикациях НМГ именуется обычно "метод моментов" без ссылок на приоритетные работы [6], [7]. Мы ограничиваемся в этом кратком обзоре публикациями 20 века. В наше время НМГ широко применяется научной группой под руководством А.Н.Боголюбова.

Сформулируем основные отличительные черты, обуславливающие выбор метода приведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям (или, по-другому, "неполного метода Галеркина [11]) для решения задач дифракции в резонансном диапазоне.

1. Метод позволяет создать универсальный алгоритм численного решения задач дифракции как на телах с плавной функцией диэлектрической проницаемости $\varepsilon(x, y, z)$, так и на объектах и с резкими границами, в том числе на телах с многослойными покрытиями. Для задач с разрывной функцией $\varepsilon(x, y, z)$ метод дает обобщенное решение задачи, которое слабо сходится к решению задачи Максвелла с правильно поставленными условиями сопряжения полей на границах.
2. Метод позволяет понизить размерность задачи на единицу или на две единицы. В частности, при решении двумерных задач (только такие рассматриваются в нашей работе), метод позволяет построить семейство "координатных функций" (в терминологии [21]), определенных в заполненной неоднородным диэлектриком области, в которой требуется вычислить поля, и удовлетворяющих в этой области уравнениям Максвелла (в смысле выполнения системы соотношений ортогональности для невязки). Для получения решения задачи дифракции достаточно удовлетворить граничным условиям излучения, которые заданы на границе области (которая в двумер-

Обобщенное уравнение Гельмгольца в декартовых координатах

ном случае представляет линию), что и означает понижение порядка. При решении трехмерных задач можно использовать координатные функции от двух "поперечных" координат и получить в итоге краевую задачу для системы обыкновенных линейных дифференциальных уравнений на отрезке.

3. Неполный метод Галеркина позволяет точно поставить и решить задачу рассеяния в неограниченной области с условиями излучения. Метод позволяет построить функциональную последовательность, которая сходится к точному решению в среднем по ограниченной неоднородной области, причем каждый член этой последовательности точно удовлетворяет условиям излучения на линии или поверхности сопряжения ограниченной области с неоднородным диэлектриком и неограниченной области с однородным диэлектриком (удовлетворяющей условию регулярности, которые далее будут сформулированы). Заметим, что классический вариант метода Галеркина для задачи в бесконечной области не применим именно из-за невозможности точного удовлетворения условий излучения.
4. Неполный метод Галеркина позволяет создать корректную модель расчета собственных волн диэлектрических волноводов (оптических световодов), и для расчета периодических (например, гофрированных) планарных волноводов (в частности, решеточных элементов связи). В ограниченной области, занятой неоднородным телом, уравнения Максвелла выполняются в среднем, а условия излучения – точно.
5. Неполный метод Галеркина позволяет привести исходную задачу для уравнений Максвелла с условиями излучения к "жесткой" краевой задаче для системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Численное решение жестких краевых задач приводит к значительному росту погрешностей округления ЭВМ. В применении к электродинамическим проблемам, это приведет к ограничениям на размер неоднородного тела (диаметр которого в результате не может быть значительно больше длины волны). Разработан специальный численный метод решения жестких краевых задач, который снимает ограничения на размеры неоднородного тела [?], [19]. Практически, имеется возможность рассчитывать дифракцию на телах, диаметр которых в несколько десятков раз больше длины волны.

1.2 Обобщенное уравнение Гельмгольца в декартовых координатах

Далее мы продемонстрируем применение неполного метода Галеркина на примере задачи рассеяния электромагнитных волн на локальной неоднородности, находящейся в нерегулярном участке волновода с диэлектрическим заполнением.

Исследуемая волноведущая система состоит из подводящего прямоугольного регулярного нагруженного полубесконечного волновода, прямолинейного отрезка с неоднородным диэлектрическим заполнением, изогнутого участка волновода с неоднородным заполнением, ещё одного прямолинейного отрезка с неоднородным диэлектрическим заполнением, и принимающего прямоугольного регулярного нагруженного полубесконечного волновода. Под нагруженным волноводом мы понимаем волновод, внутри которого расположен диэлектрический сердечник.

1.2.1 Постановка задачи о рассеянии на локальной неоднородности в нагруженной волноводной системе

Волновод состоит из трех секций. Секция I занимает в декартовой координатной системе (x_1, y_1) область

$$G_1 = (-\infty, x_{1b}) \times (0, b),$$

с границей

$$\partial G_1 = \partial G_{11} \cup \partial G_{12} \cup \partial G_{13},$$

$$\partial G_{11} = (-\infty, x_{1b}] \times \{0\},$$

$$\partial G_{12} = \{x_{1b}\} \times [0; b],$$

$$\partial G_{13} = (-\infty, x_{1b}] \times \{b\}$$

в декартовой системе (x_1, y_1) . Мы указываем сначала координату x_1 , затем y_1 . Диэлектрическая проницаемость $\rho(x_1, y_1)$ есть кусочно гладкая функция в G_1 , причем $\rho(x_1, y_1) = \rho_1(y_1)$ при $x_1 < x_{1a}$, а в прямоугольнике $G_{12} = (x_{1a}, x_{1b}) \times (0, b)$ верно $\text{Im}\rho(x_1, y_1) \geq 0$. Комплексная амплитуда электрического поля $u(x_1, y_1) = E_z(x_1, y_1)$ удовлетворяет уравнению

$$u''_{x_1 x_1} + u''_{y_1 y_1} - \zeta^2 u + \kappa^2 \rho(x_1, y_1) u = -f(x_1, y_1), \quad (13)$$

$(x_1, y_1) \in G_1$, с граничными условиями

$$u|_{\partial G_{11}} = 0, \quad u|_{\partial G_{13}} = 0 \quad (14)$$

и с условиями излучения в области $G_{11} = (-\infty, x_{1a}) \times (0, b)$. Слагаемое $-\zeta^2 u$ соответствует возможной зависимости поля от z по закону

$$u(x_1, y_1, z) = u(x_1, y_1) e^{\pm i\zeta z}$$

или по закону

$$u(x_1, y_1, z) = u(x_1, y_1) \sin \frac{\pi m z}{c},$$

это позволяет включить задачу о распространении волн в трехмерной области $G \times (z_a, z_b)$ или $\Pi \times (-\infty, +\infty)$.

Секция III занимает область

$$G_3 = (x_{3a}, +\infty) \times (0, b)$$

с границей

$$\partial G_3 = \partial G_{31} \cup \partial G_{32} \cup \partial G_{33},$$

$$\partial G_{31} = [x_{3a}, +\infty) \times \{0\}, \quad \partial G_{32} = \{x_{3a}\} \times [0; b], \quad \partial G_{33} = [x_{3a}, +\infty) \times \{b\}.$$

Уравнение и граничные условия аналогичны (13) и (14), только теперь используем декартовы координаты (x_3, y_3) , система (x_3, y_3) смещена и повернута относительно (x_1, y_1) . Диэлектрическая проницаемость $\rho(x_3, y_3)$ задана в G_3 , причем $\rho(x_3, y_3) = \rho_3(y_3)$ при $x_3 > x_{3b}$, а в прямоугольнике $G_{31} = (x_{3a}, x_{3b}) \times (0, b)$ верно $\text{Im}\rho(x_3, y_3) \geq 0$.

Секция II занимает область, которую мы зададим в полярной системе координат:

$$G_2 = (r_a, r_b) \times (\varphi_a, \varphi_b),$$

причем $r_b - r_a = b$. Граница секции II состоит из четырех кривых:

$$\partial G_{21} = \{r_a\} \times (\varphi_a, \varphi_b), \quad \partial G_{22} = \{r_b\} \times (\varphi_a, \varphi_b), \quad (15)$$

$$\partial G_{23} = [r_a, r_b] \times \{\varphi_a\}, \quad \partial G_{24} = [r_a, r_b] \times \{\varphi_b\}, \quad (16)$$

мы указываем сначала координату r , затем φ , здесь $x = x_2 = r \cos \varphi$, $y = y_2 = r \sin \varphi$. Система координат (x_2, y_2) смещена и повернута относительно $(x_{1;3}, y_{1;3})$.

Диэлектрическая проницаемость $\rho(x, y)$ задана в G_2 , причем $\text{Im}\rho(x, y) \geq 0$.

Граница G_{23} секции II сопрягается с границей G_{12} секции I, граница G_{24} секции II сопрягается с границей G_{32} секции III.

Мы найдем решение

$$u \in C^2(G) \cap C(\bar{G}).$$

На линиях разрыва условия сопряжения будут выполнены в среднем.

1.2.2 Рассеяние на локальной неоднородности в прямоугольном нагруженном волноводе

Во всех трех секциях мы используем неполный метод Галеркина [6] для построения решения задачи (13) со всеми дополнительными условиями, в том числе условиями на границах, условиями излучения, условиями сопряжения.

Мы рассмотрим сначала "ключевую" задачу о рассеянии электромагнитных волн ТЕ поляризации в прямоугольном нагруженном волноводе, после чего применим ее к каждой секции и добавим условия сопряжения. Называем нагруженным регулярным волноводом прямоугольный волновод с продольно-однородным, поперечно-неоднородным диэлектрическим заполнением. Такие волноводы применяются как в микроволновой технике с длинами волн от миллиметровых до сантиметровых, также и в оптической технике с длинами волн от сотен нанометров до нескольких микрометров. Найдем решение уравнения

$$u''_{xx} + u''_{yy} - \varsigma^2 u + \kappa^2 \rho(x, y) u = -f(x, y), \quad (17)$$

$(x, y) \in G,$

$$G = (-\infty, +\infty) \times (0, b),$$

с граничными условиями

$$(\alpha_1 u'_y - \beta_1 u)|_{y=0} = 0, \quad (\alpha_2 u'_y + \beta_2 u)|_{y=b} = 0 \quad (18)$$

и с условиями излучения, которые далее сформулируем. Пусть

$$\rho(x, y) = \begin{cases} \rho_1(y) & \text{при } x \in (-\infty, x_a), \\ \rho_2(x, y) & \text{при } x \in (x_a, x_b), \\ \rho_2(y) & \text{при } x \in (x_b, +\infty), \end{cases}$$

$\rho_{1;3}(y)$ – вещественные функции, $\text{Im} \rho_2 \geq 0$. Решение построим как предел функциональной последовательности $u^{(N)}(x, y)$, $N = 1, 2, \dots$, при $N \rightarrow +\infty$. Очередной член этой последовательности будем искать в виде

$$u^{(N)}(x, y) = \sum_{n=1}^N X_n^{(N)}(x) \vartheta_n(y), \quad (19)$$

Пусть $\varrho(y)$ есть кусочно-гладкая на отрезке $[0, b]$ функция, $\varrho(y) > 0$ на всех своих промежутках непрерывности, значение в точках разрыва можно задать произвольно. Пусть $\{\vartheta_n(y)\}$, $n \in \{1; \dots\}$ есть полная ортогональная с весом ϱ система собственных функций задачи Штурма–Лиувилля

$$\begin{cases} \vartheta''_{yy} + \mu^2 \vartheta = 0, \\ (\alpha_1 \vartheta'_y - \beta_1 \vartheta)|_{y=0} = 0, \quad (\alpha_2 \vartheta'_y + \beta_2 \vartheta)|_{y=b} = 0 \end{cases}$$

Чтобы найти $\{X_n^{(N)}(x)\}$, $n \in \{1, 2, \dots, N\}$, потребуем выполнения условий ортогональности

$$\int_0^b \vartheta_m(y) (u''_{xx} + u''_{yy} - \varsigma^2 u + \kappa^2 \rho(x, y) u + f(x, y)) \varrho(y) dy = 0 \quad (20)$$

для всех $m \in \{1, \dots, N\}$, $x \in (x_a, x_b)$. Пусть

$$\langle \vartheta_m | \rho | \vartheta_n \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^b \vartheta_m(y) \rho(x, y) \vartheta_n(y) \varrho(y) dy, \quad (21)$$

$$\langle \vartheta_m | f \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^b \vartheta_m(y) \varrho(y) f(x, y) dy. \quad (22)$$

Из условий ортогональности

$$\langle \vartheta_m | 1 | \vartheta_n \rangle = \|\vartheta_m\|^2 \delta(m, n),$$

получим систему линейных ОДУ

$$\begin{aligned} \|\vartheta_m\|^2 \frac{d^2 X_m}{dx^2} - (\mu_m^2 + \varsigma^2) \|\vartheta_m\|^2 X_m + \\ + \kappa^2 \sum_{n=1}^N \langle \vartheta_m | \rho | \vartheta_n \rangle X_n + \langle \varphi_m | f \rangle = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

на промежутке $x \in (x_a, x_b)$.

1.2.3 Матричные обозначения

Пусть

$$\Theta(y) \stackrel{\text{def}}{=} (\vartheta_1(y), \vartheta_2(y), \dots, \vartheta_N(y))^T,$$

$$X(x) \stackrel{\text{def}}{=} (X_1(x), X_2(x), \dots, X_N(x))^T,$$

верхний индекс $*(N)$ далее не ставим. Очередной член функциональной последовательности $u(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} u^{(N)}(x, y)$ запишем в виде

$$u(x, y) = \Theta^T(y) X(x).$$

Тогда

$$u''_{xx} = \Theta^T(y) X''_{xx}, \quad u''_{yy} = -\Theta^T(y) \mathcal{M}^2 X(x),$$

где

$$\mathcal{M} \stackrel{\text{def}}{=} \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_N),$$

найдем из условий ортогональности невязки, которые примут вид

$$\langle \Theta | 1 | \Theta^T \rangle X'' - (\mathcal{M}^2 + \varsigma^2) \langle \Theta | 1 | \Theta^T \rangle X + \kappa^2 \langle \Theta | \rho | \Theta^T \rangle X = -\langle \Theta | f \rangle, \quad (24)$$

где

$$\langle \Theta | v(y) | \Theta^T \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^b \Theta(y) v(y) \Theta^T(y) \varrho(y) dy, \quad (25)$$

$$\langle \Theta | f \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^b \Theta(y) f(x, y) \varrho(y) dy. \quad (26)$$

1.2.4 Условия излучения

Пусть секции I и III волновода являются регулярными, т.е.

$$\rho(x, y) = \rho_1(y) \text{ при } x \leq x_a, \quad (27)$$

$$\rho(x, y) = \rho_3(y) \text{ при } x \geq x_b, \quad (28)$$

Область I: $x \leq x_a$

$$\langle \Theta | 1 | \Theta^T \rangle X'' - (\mathcal{M}^2 + \varsigma^2) \langle \Theta | 1 | \Theta^T \rangle X + \kappa^2 \langle \Theta | \rho_1 | \Theta^T \rangle X = 0. \quad (29)$$

Решение уравнения (29) будем искать в виде $X(x) = Ze^{\pm i\gamma x}$. Для вектора Z получим задачу на собственные значения

$$(\kappa^2 \langle \Theta | \rho_1 | \Theta^T \rangle - (\mathcal{M}^2 + \varsigma^2) \langle \Theta | 1 | \Theta^T \rangle) Z = Z\gamma^2, \quad (30)$$

Обозначим $\{\gamma_j\}$ собственные значения, $\{Z_j\}$ собственные векторы. Матрица (??) симметрическая, функция $\rho_1(y)$ вещественная, поэтому можно выбрать ветвь корня так, чтобы было верно условие $\text{Re}\gamma_j \geq 0, \text{Im}\gamma_j \geq 0$.

$$\Gamma_1^2 = \text{eigenvals}(\kappa^2 \langle \Theta | \rho_1 | \Theta^T \rangle - \mathcal{M}^2), \quad (31)$$

$$\mathcal{Z}_1 = \{Z_1, \dots, Z_N\}. \quad (32)$$

Общее решение (29) имеет вид

$$X = \mathcal{Z}_1 e^{i\Gamma_1(x-x_a)} A_1 + \mathcal{Z}_1 e^{-i\Gamma_1(x-x_a)} B_1, \quad (33)$$

$x < x_a$, где A_1 – вектор комплексных амплитуд парциальных волн, бегущих в правом направлении, B_1 – то же в левом направлении. Так как

$$X'_x = \mathcal{Z}_1 i\Gamma_1 e^{i\Gamma_1(x-x_a)} A_1 - \mathcal{Z}_1 i\Gamma_1 e^{-i\Gamma_1(x-x_a)} B_1, \quad (34)$$

$$\mathcal{Z}_1^{-1} X(x) = e^{i\Gamma_1(x-x_a)} A_1 + e^{-i\Gamma_1(x-x_a)} B_1, \quad (35)$$

$$\mathcal{Z}_1^{-1} X'(x) = i\Gamma_1 e^{i\Gamma_1(x-x_a)} A_1 - i\Gamma_1 e^{-i\Gamma_1(x-x_a)} B_1, \quad (36)$$

$$i\Gamma_1 \mathcal{Z}_1^{-1} X(0) = i\Gamma_1 (A_1 + B_1), \quad (37)$$

$$\mathcal{Z}_1^{-1} X'(0) = i\Gamma_1 (A_1 - B_1), \quad (38)$$

то условия излучения для секции I можно записать в виде условия заданных комплексных амплитуд волн, приходящих слева направо из секции I к неоднородной области II:

$$i\Gamma_1 \mathcal{Z}_1^{-1} X(x_a) + \mathcal{Z}_1^{-1} X'_x|_{x=x_a} = 2i\Gamma_1 A_1. \quad (39)$$

Амплитуды рассеянных волн можно найти из равенства

$$i\Gamma_1 \mathcal{Z}_1^{-1} X(x_a) - \mathcal{Z}_1^{-1} X'_x|_{x=x_a} = 2i\Gamma_1 B_1. \quad (40)$$

Область III: $x \geq x_b$

Для секции III аналогично запишем условия излучения:

$$i\Gamma_3 \mathcal{Z}_3^{-1} X(x_b) - \mathcal{Z}_3^{-1} X'(x_b) = 2i\Gamma_3 B_3, \quad (41)$$

амплитуды рассеянных волн можно найти из равенства

$$i\Gamma_3 \mathcal{Z}_3^{-1} X(x_b) + \mathcal{Z}_3^{-1} X'(x_b) = 2i\Gamma_3 A_3. \quad (42)$$

Основная краевая задача

$$\vartheta_n(y) = \sqrt{\frac{2}{b}} \sin(\mu_n y), \quad \mu_n = \frac{\pi n}{b}.$$

Таким образом, основная краевая задача для расчета очередного члена функциональной последовательности, представляющей решение задачи рассеяния на локальной неоднородности, имеет вид

$$\begin{cases} X''_{xx} - \mathcal{M}^2 X + \kappa^2 \langle \Theta | \rho | \Theta^T \rangle X = \langle \Theta | f \rangle, & x \in (x_a, x_b), \\ i\Gamma_1 \mathcal{Z}_1^{-1} X(x_a) + \mathcal{Z}_1^{-1} X'|_{x=x_a} = 2i\Gamma_1 A_1, \\ i\Gamma_3 \mathcal{Z}_3^{-1} X(x_b) - \mathcal{Z}_3^{-1} X'|_{x=x_b} = 2i\Gamma_3 B_3, \end{cases} \quad (43)$$

$$i\Gamma_1 \mathcal{Z}_1^{-1} X(x_a) + \mathcal{Z}_1^{-1} X'|_{x=x_a} = 2i\Gamma_1 A_1,$$

$$i\Gamma_3 \mathcal{Z}_3^{-1} X(x_b) - \mathcal{Z}_3^{-1} X'|_{x=x_b} = 2i\Gamma_3 B_3,$$

где A_1 есть заданные комплексные амплитуды парциальных волн, облучающих нерегулярный участок с левой стороны, B_3 есть то же для парциальных волн, облучающих нерегулярный участок с правой стороны.

Из результатов [4], [5] следует **Теорема 1** Пусть в области D_2 найдется круг (сколь угодно малого радиуса), в котором $\text{Im}\rho(x, y) \geq \rho_0$, $\rho_0 > 0$. Тогда для любого N задача (24) имеет единственное решение. Если $\rho(x, y)$ непрерывная функция, то $|u^{(N)} - u| \rightarrow 0$ при $N \rightarrow +\infty$. Векторы коэффициентов рассеяния A_3^N , B_1^N сходятся к точным значениям в норме l^2 .

1.2.5 Рассеяние на ограниченном теле в регулярном волноводе с однородным заполнением

Если в областях G_1 и G_3 среда не только продольно-однородна, но и поперечно-однородна:

$$\rho(x, y) = \rho_1 = \text{const при } x \leq x_a, \quad (44)$$

$$\rho(x, y) = \rho_3 = \text{const при } x \geq x_b, \quad (45)$$

то решение задачи с граничными условиями и условиями излучения

$$\begin{cases} u''_{xx} + u''_{yy} - \zeta^2 u + \kappa^2 \rho(x, y) u = -f, \\ -\infty < x < +\infty, \quad 0 < y < b, \\ u|_{y=0} = 0, \quad u|_{y=b} = 0. \end{cases} \quad (46)$$

можно найти из краевой задачи, в которой граничные условия расщепляются на серию не связанных между собой скалярных условий третьего рода. Собственные значения и векторы задач (30) находятся в явном виде:

$$\begin{aligned} \gamma_m^{(1)} &= \sqrt{\kappa^2 \rho_1 - \mu_m^2}, \quad \operatorname{Re} \gamma_m^{(1)} \geq 0, \quad \operatorname{Im} \gamma_m^{(1)} \geq 0, \\ \gamma_m^{(3)} &= \sqrt{\kappa^2 \rho_3 - \mu_m^2}, \quad \operatorname{Re} \gamma_m^{(3)} \geq 0, \quad \operatorname{Im} \gamma_m^{(3)} \geq 0, \end{aligned}$$

условия излучения примут форму

$$a_m^{(1)} = (2i\gamma_m^{(1)})^{-1} \int_0^b \sqrt{\frac{2}{b}} \sin \mu_m y \cdot (i\gamma_m^{(1)} u + u'_x) \Big|_{x=x_a} dy, \quad (47)$$

$$b_m^{(3)} = (2i\gamma_m^{(3)})^{-1} \int_0^b \sqrt{\frac{2}{b}} \sin \mu_m y \cdot (i\gamma_m^{(3)} u - u'_x) \Big|_{x=x_b} dy, \quad (48)$$

$$\mu_m = \frac{\pi m}{b},$$

где $a_m^{(1)}$ и $b_m^{(3)}$ есть заданные комплексные амплитуды облучающих волн слева (a_m) и справа (b_m). Краевая задача будет записана так:

$$\begin{cases} \frac{d^2 X_m}{dx^2} - \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2 + \kappa^2 \sum_{n=1}^N \langle \varphi_m | \rho_2 | \varphi_n \rangle X_n^{(N)} = -\langle \varphi_m | f \rangle, \\ x \in (0, a), \\ \left(i\gamma_m^{(1)} X_m^{(N)} + \frac{dX_m^{(N)}}{dx} \right) \Big|_{x=x_a} = 2i\gamma_m^{(1)} a_m^{(1)}, \quad m \in \{1; \dots; N\}, \\ \left(i\gamma_m^{(3)} X_m^{(N)} - \frac{dX_m^{(N)}}{dx} \right) \Big|_{x=x_b} = 2i\gamma_m^{(3)} b_m^{(3)}, \quad m \in \{1; \dots; N\}. \end{cases} \quad (49)$$

1.3 Область нерегулярного волновода

Теперь опишем методику решения обобщенного уравнения Гельмгольца в нерегулярном волноводе (изогнутом волноводе переменного сечения с неоднородным заполнением). Используя замену координат [6], уравнение (17) можно привести к аналогичному уравнению в прямоугольной области $\xi \in (\xi_a, \xi_b)$, $\eta \in (\eta_a, \eta_b)$ с тензорной (вообще говоря) функцией плотности

среды $\hat{\rho}(\xi, \eta)$. Если использовать конформное отображение, то можно найти такое преобразование координат, что в новых координатах плотность среды будет скалярной функцией. Для наших целей достаточно преобразовать уравнение (17) к полярным координатам.

1.3.1 Решение уравнения Гельмгольца в полярных координатах

Теперь построим решение в секции II:

$$r \in [r_a, r_b], \quad \varphi \in [\varphi_a, \varphi_b].$$

Компонента $u = E_z$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} - \zeta^2 u + \kappa^2 \rho(r, \varphi) u = -f(r, \varphi) \quad (50)$$

и сформулированным ранее граничным условиям на ∂G_{21} , ∂G_{23} . Граничные условия на ∂G_{22} , ∂G_{24} сформулируем далее как условия проекционного сшивания полей. Пусть $\zeta(y)$ есть кусочно-гладкая на отрезке $[r_a, r_b]$ функция, $\zeta(y) > 0$ на всех своих промежутках непрерывности, значение в точках разрыва можно задать произвольно. Пусть $\{\psi_n(y)\}$, $n \in \{1; \dots\}$ есть полная ортогональная с весом ζ система собственных функций задачи Штурма–Лиувилля

$$\begin{cases} \psi''_{rr} + \mu^2 \psi = 0, \\ (\alpha_1 \psi'_r - \beta_1 \psi)|_{r=r_a} = 0, \quad (\alpha_2 \psi'_r + \beta_2 \psi)|_{r=r_b} = 0 \end{cases}$$

Решение уравнения (50) ищем в виде

$$u(r, \varphi) = \sum_{n=1}^N \psi_n(r) Y_n(\varphi).$$

Чтобы найти $\{Y_n^{(N)}(\varphi)\}$, $n \in \{1, 2, \dots, N\}$, потребуем выполнения условий ортогональности

$$\int_{r_a}^{r_b} \psi_m(r) \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} - \zeta^2 u + \kappa^2 \rho(r, \varphi) u + f(r, \varphi) \right] \zeta(r) dr = 0 \quad (51)$$

для всех $m \in \{1, \dots, N\}$, $r \in (r_a, r_b)$.

$$\begin{aligned} \int_{r_a}^{r_b} \psi_m(r) \sum_{n=1}^N \left[\frac{1}{r} (r(\psi_n)'_r)'_r Y_n(\varphi) + \frac{1}{r^2} \psi_n(r) (Y_n)''_{\varphi\varphi} - \right. \\ \left. - \zeta^2 \psi_n(r) Y_n(\varphi) + \kappa^2 \rho(r, \varphi) \psi_n(r) Y_n(\varphi) \right] \zeta(r) dr = 0, \quad (52) \end{aligned}$$

Область нерегулярного волновода

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^N \left[\int_{r_a}^{r_b} \psi_m(r) \frac{1}{r} (r(\psi_n)'_r)'_r \zeta(r) dr \right] Y_n(\varphi) + \\ & + \sum_{n=1}^N \left[\int_{r_a}^{r_b} \psi_m(r) \frac{1}{r^2} \psi_n(r) \zeta(r) dr \right] (Y_n)''_{\varphi\varphi} - \\ & - \varsigma^2 \sum_{n=1}^N \left[\int_{r_a}^{r_b} \psi_m(r) \psi_n(r) \zeta(r) dr \right] Y_n(\varphi) + \\ & + \kappa^2 \sum_{n=1}^N \left[\int_{r_a}^{r_b} \psi_m(r) \rho(r, \varphi) \psi_n(r) \zeta(r) dr \right] Y_n(\varphi) = 0, \quad (53) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & - \sum_{n=1}^N \langle (r^{-1} \psi_m \zeta(r))'_r | \zeta^{-1} | r(\psi_n)'_r \rangle Y_n(\varphi) + \sum_{n=1}^N \langle \psi_m(r) | r^{-2} | \psi_n(r) \rangle (Y_n)''_{\varphi\varphi} - \\ & - \varsigma^2 \sum_{n=1}^N \langle \psi_m | 1 | \psi_n \rangle Y_n(\varphi) + \kappa^2 \sum_{n=1}^N \langle \psi_m | \rho(r, \varphi) | \psi_n \rangle Y_n(\varphi) = 0, \quad (54) \end{aligned}$$

основная система линейных обыкновенных дифференциальных уравнений неполного метода Галеркина примет вид

$$\begin{aligned} & \langle \Psi(r) | r^{-2} | \Psi^T(r) \rangle Y''_{\varphi\varphi} - \langle (r^{-1} \Psi(r) \zeta(r))'_r | \zeta^{-1} | r \Psi_r'^T \rangle Y(\varphi) - \\ & - \varsigma^2 \langle \Psi | 1 | \Psi^T \rangle Y(\varphi) + \kappa^2 \langle \Psi(r) | \rho(r, \varphi) | \Psi^T(r) \rangle Y(\varphi) = 0. \quad (55) \end{aligned}$$

1.3.2 Решение уравнения Гельмгольца методом преобразования координат

В работах [4], [5] разработан метод преобразования координат для решения задачи рассеяния на локальной неоднородности в нерегулярном волноводе. Покажем, как этот метод может быть применен к задаче, рассматриваемой в данной работе. Рассмотрим уравнение

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} - \varsigma^2 u + \kappa^2 \rho u = 0,$$

в области

$$r \in [r_a, r_b], \quad \varphi \in [\varphi_a, \varphi_b].$$

Замена

$$u(r, \varphi) = v \cdot r^\mu$$

приводит к уравнению

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + r^{-1}(2\mu + 1)\frac{\partial v}{\partial r} + \mu^2 r^{-2}v + r^{\mu-2}\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} - \varsigma^2 v + \kappa^2 \rho v = 0,$$

которое при $\mu = -\frac{1}{2}$ конвертируется в уравнение Гельмгольца в прямоугольной области, причем диэлектрическая проницаемость меняется:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} - \left(\varsigma^2 - \frac{1}{4r^2}\right)v + \kappa^2 \rho v = 0,$$

1.4 Проекционное сшивание области изогнутого канала и полубесконечной полосы

Сформулируем алгоритм проекционного сшивания полей на одной из двух границ сопряжения. В полуполосе

$$G_1 = \{x \in (-\infty, x_a)\} \times \{y \in (0, b)\}$$

используем полную ОНС

$$\vartheta_n(y) = \sqrt{\frac{2}{b}} \sin \nu_n y,$$

$n \in \{1, \dots\}$, причем

$$\nu_n = \frac{\pi n}{b}.$$

В области изогнутого канала

$$G_2 = \{\varphi \in (\varphi_a, \varphi_b)\} \times \{r \in (r_a, r_b)\},$$

$r_b - r_a = b$, используем полную ОНС

$$\psi_n(r) = \sqrt{\frac{2}{r_b - r_a}} \sin \nu_n(r - r_a), \quad (r, \varphi) \in D. \quad (56)$$

Пусть G_1 и G_2 расположены так, что отрезок $x = x_a$, $y \in [0, b]$ совпадает с отрезком $\varphi = \varphi_a$, $r \in [r_a, r_b]$. В G_1 решение представляем суммой

$$u(x, y) = \Theta^T(y) \mathcal{Z}_1 e^{i\Gamma_1(x-x_0)} A + \Theta^T(y) \mathcal{Z}_1 e^{-i\Gamma_1(x-x_0)} B, \quad (57)$$

$$u(x, y) = \Theta^T(y) X(x),$$

$$u'_x(x, y) = \Theta^T(y) X'_x(x),$$

в G_2 решение представляем суммой

$$u(r, \varphi) = \sum_{n=1}^N \psi_n(r) Y_n(\varphi) = \Psi^T(r) Y(\varphi), \quad (58)$$

но теперь производная по нормали равна

$$u'_x(r, \varphi)|_{\varphi=0} = \sum_{n=1}^N \psi_n(r) \frac{1}{r} (Y_n)'_{\varphi} = \Psi^T(r) \frac{1}{r} Y'_{\varphi}|_{\varphi=0},$$

Используем проекционную систему, совпадающую с координатной системой. Условия проекционного сшивания поля и нормальной производной на границе сопряжения запишем в виде

$$\begin{cases} \int_0^b \Theta(y) \varrho(y) \Theta^T(y) X(x)|_{x=0} dy = \int_{r_a}^{r_b} \Psi(r) \varrho(r) (\Psi^T(r) Y(\varphi))|_{\varphi=0} dr, \\ \int_0^b \Theta(y) \varrho(y) \Theta^T(y) X'_x(x)|_{x=0} dy = \int_{r_a}^{r_b} \Psi(r) \varrho(r) \frac{1}{r} \Psi^T(r) Y'_{\varphi}|_{\varphi=\varphi_0} dr, \end{cases}$$

в векторно-матричной форме

$$\begin{aligned} \langle \Theta(y) | \varrho(y) | \Theta^T(y) \rangle X(x_0) &= \langle \Psi(r) | \varrho(r) | \Psi^T(r) \rangle Y(\varphi_0), \\ \langle \Theta(y) | \varrho(y) | \Theta^T(y) \rangle X'_x(x)|_{x=0} &= \left\langle \Psi(r) \left| \frac{\varrho(r)}{r} \right| \Psi^T(r) \right\rangle Y'_{\varphi}|_{\varphi=\varphi_0}. \end{aligned}$$

2 Расчет изгиба нагруженного волновода [num]

Неполный метод Галеркина был применен для расчета изгиба нагруженного волновода на 90° . Основная задача состоит в достижении максимально возможного значения коэффициента прохождения заданной возбуждающей моды при заданном ограничении на размер переходного участка нерегулярного волновода, соединяющего два продольно однородных регулярных участка.

2.1 Изгиб маломодового волновода с диэлектрическим заполнением

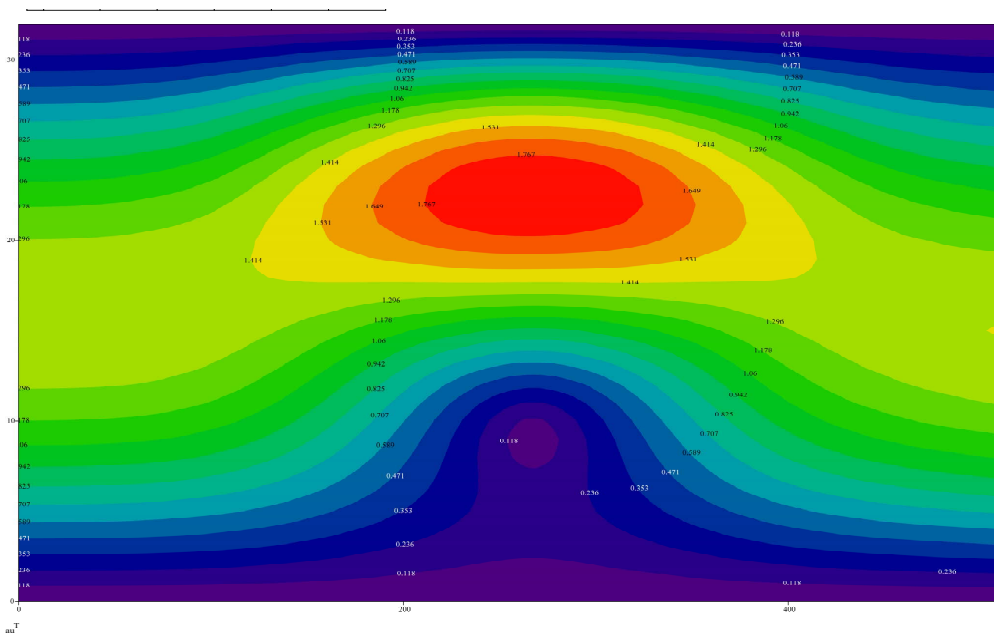
Для одномодового и двумодового волновода высокое значение коэффициента трансформации по мощности (больше 0,999) можно получить без диэлектрического заполнения.

Изгиб многомодового волновода с диэлектрическим заполнением

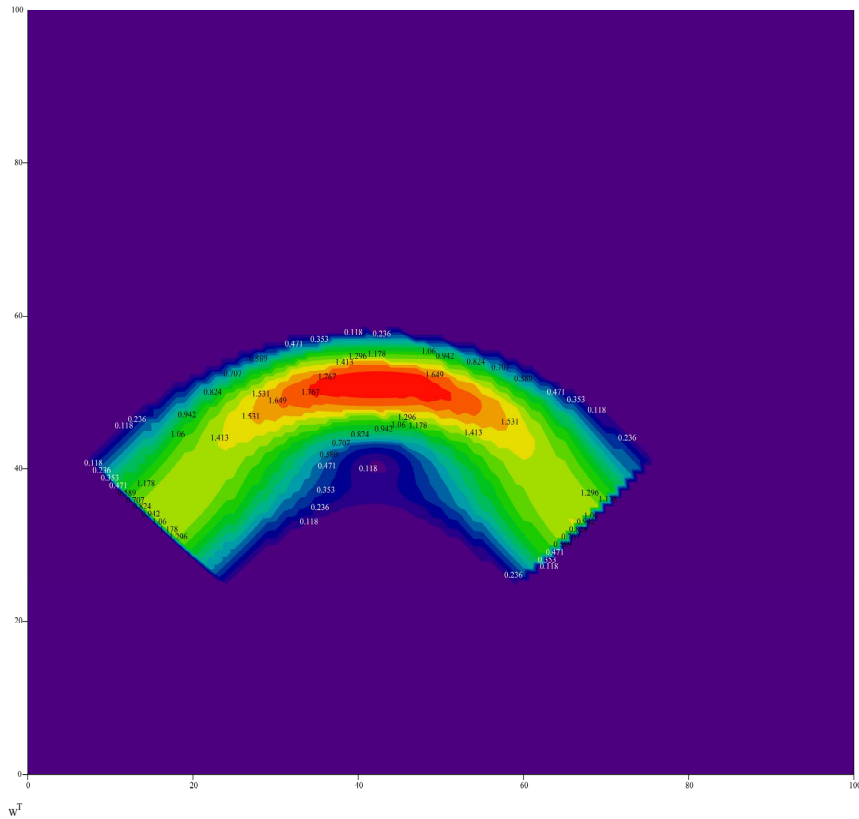
★ Расчет изгиба двумодового волновода с диэлектрическим заполнением. Угол изгиба 90° , ширина волновода постоянна и равна 1, $\kappa = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{25\pi}{10}$, эквивалентный радиус изгиба $R = 1,0$. На рисунке изображено поле в виртуальной декартовой системе координат, в которой волновод занимает полосу с прямолинейными границами.

★ SDGM-Guide-mcd-2D-Loaded-Bending-2022/SDGM-Guide-Loaded-2022-x25.xmcd

Диэлектрическая проницаемость. На рисунке изображено поле в виртуальной декартовой системе координат, в которой волновод занимает полосу с прямолинейными границами.



Тот же рисунок в оригинальной декартовой системе координат.



2.2 Изгиб многомодового волновода с диэлектрическим заполнением

Для многомодового волновода высокое значение коэффициента трансформации по мощности (больше 0,999) получить без диэлектрического заполнения невозможно. За счёт внутренних переотражений возникают как отраженные назад моды, так и старшие моды принимающего участка.

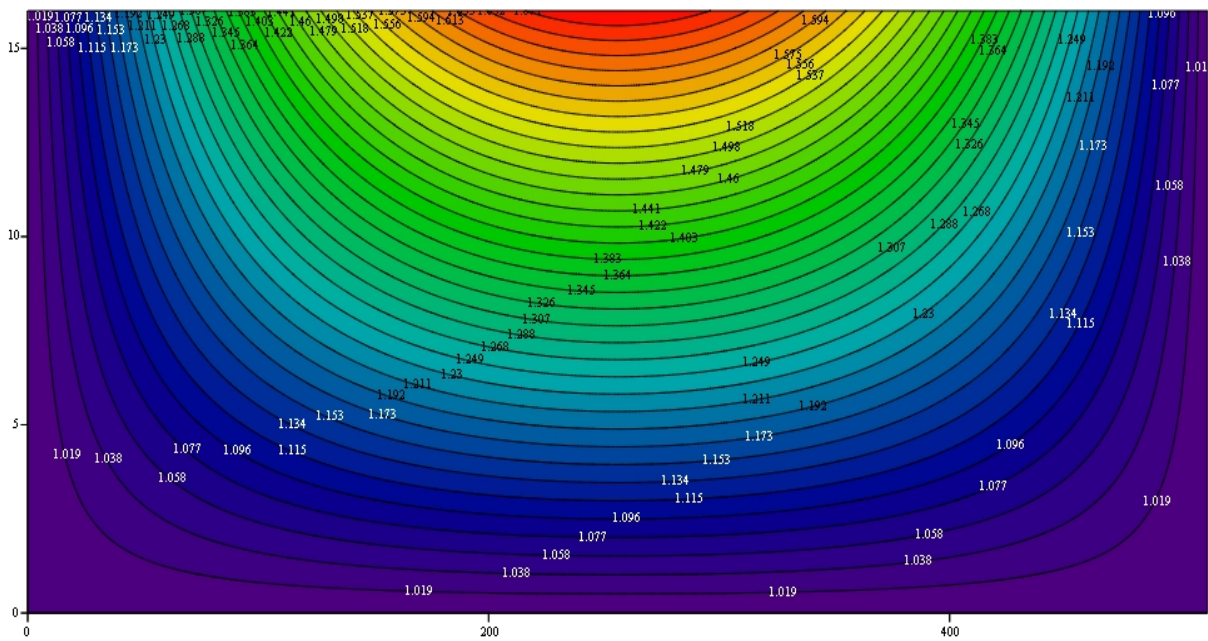
2.2.1 Расчет изгиба с большим радиусом многомодового волновода с диэлектрическим заполнением

★ Расчет изгиба многомодового волновода с диэлектрическим заполнением. Угол изгиба 90° , ширина волновода постоянна и равна 1, $\kappa = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{59\pi}{16}$, эквивалентный радиус изгиба $R = 5$. На рисунке изображено поле в виртуальной декартовой системе координат, в которой волновод занимает полосу с прямолинейными границами.

★ SDGM-Guide-mcd-2D-Loaded-Bending-2022/SDGM-Guide-Loaded-2022-x11.xmcd

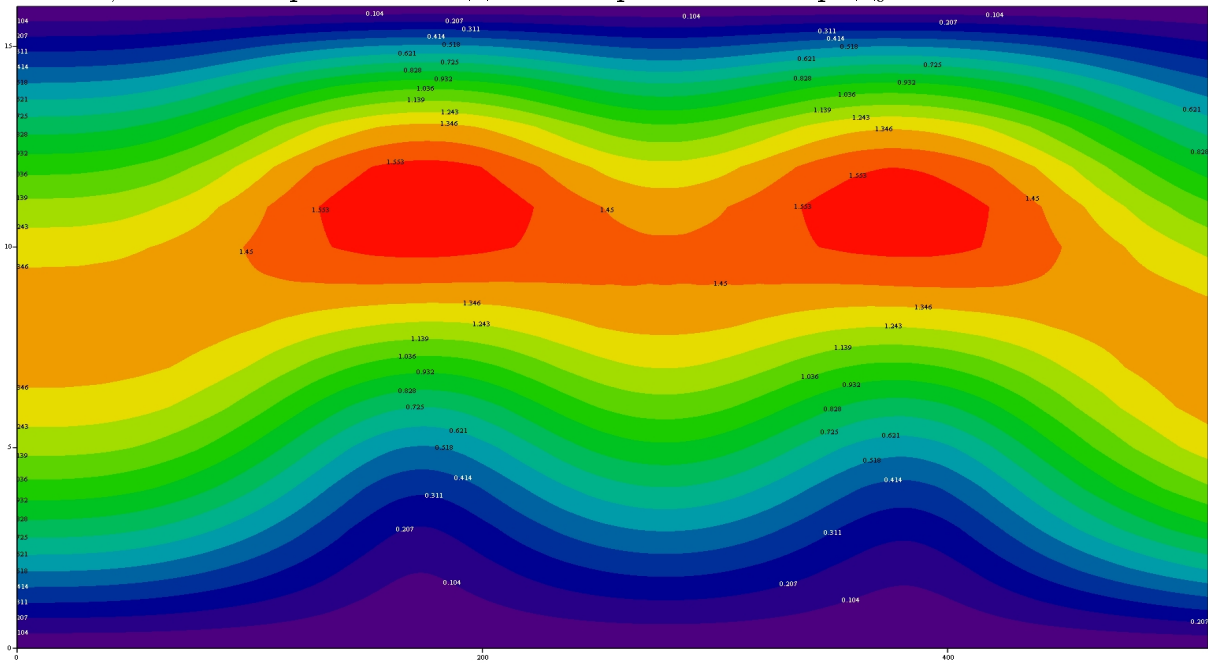
Эквивалентная плотность среды после замены координат

Изгиб многомодового волновода с диэлектрическим заполнением



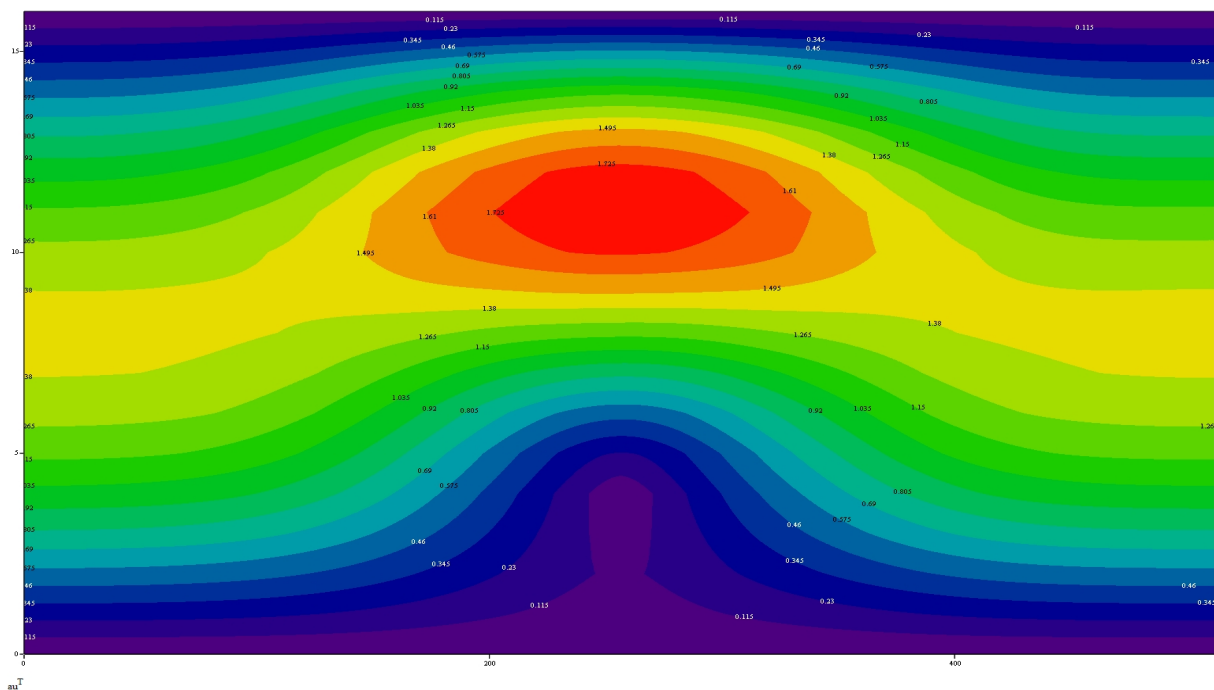
E_{jk}^T

Поле для многомодового нагруженного волновода с большим радиусом изгиба, оптимизированного для поворота на 90 градусов:



u_{jk}^T

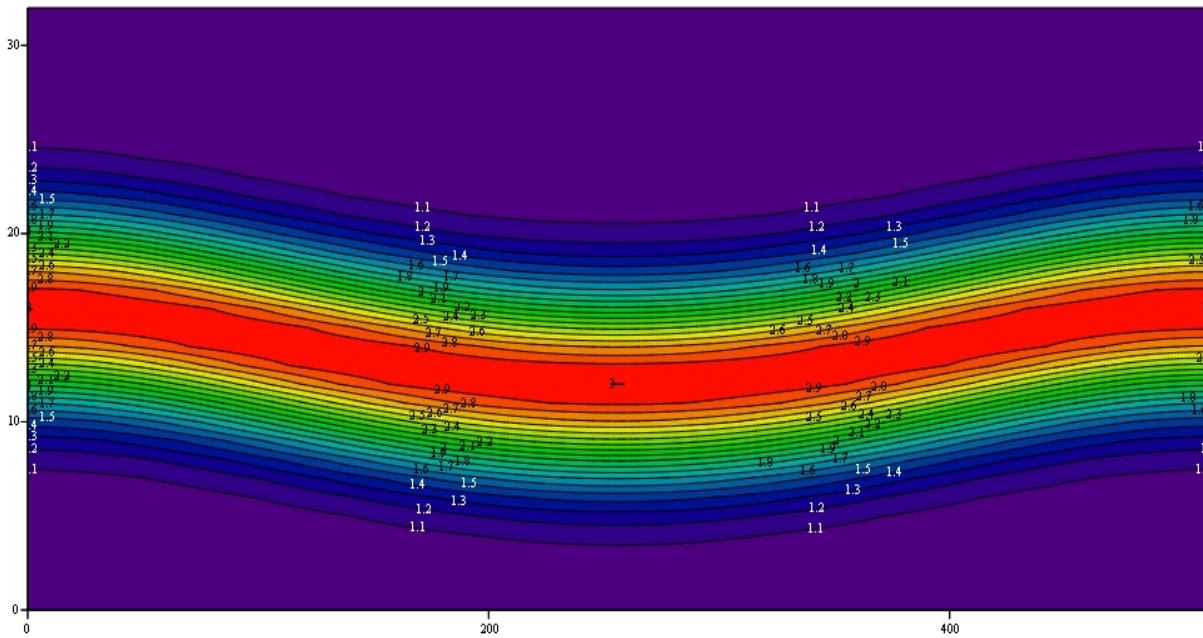
Поле для многомодового (2 моды) нагруженного волновода, оптимизированного для поворота на 90 градусов. На рисунке изображено поле в виртуальной декартовой системе координат, в которой волновод занимает полосу с прямолинейными границами.

Изгиб многомодового волновода с диэлектрическим заполнением**2.2.2 Расчет изгиба с малым радиусом многомодового волновода с диэлектрическим заполнением**

★ Расчет изгиба многомодового волновода с диэлектрическим заполнением. Угол изгиба 90° , ширина волновода постоянна и равна 1, $\kappa = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{45\pi}{10}$, эквивалентный радиус изгиба $R = 1,2$. Диэлектрический сердечник расположен так, чтобы максимизировать коэффициент прохождения возбуждающей моды. На рисунке изображено поле в виртуальной декартовой системе координат, в которой волновод занимает полосу с прямолинейными границами.

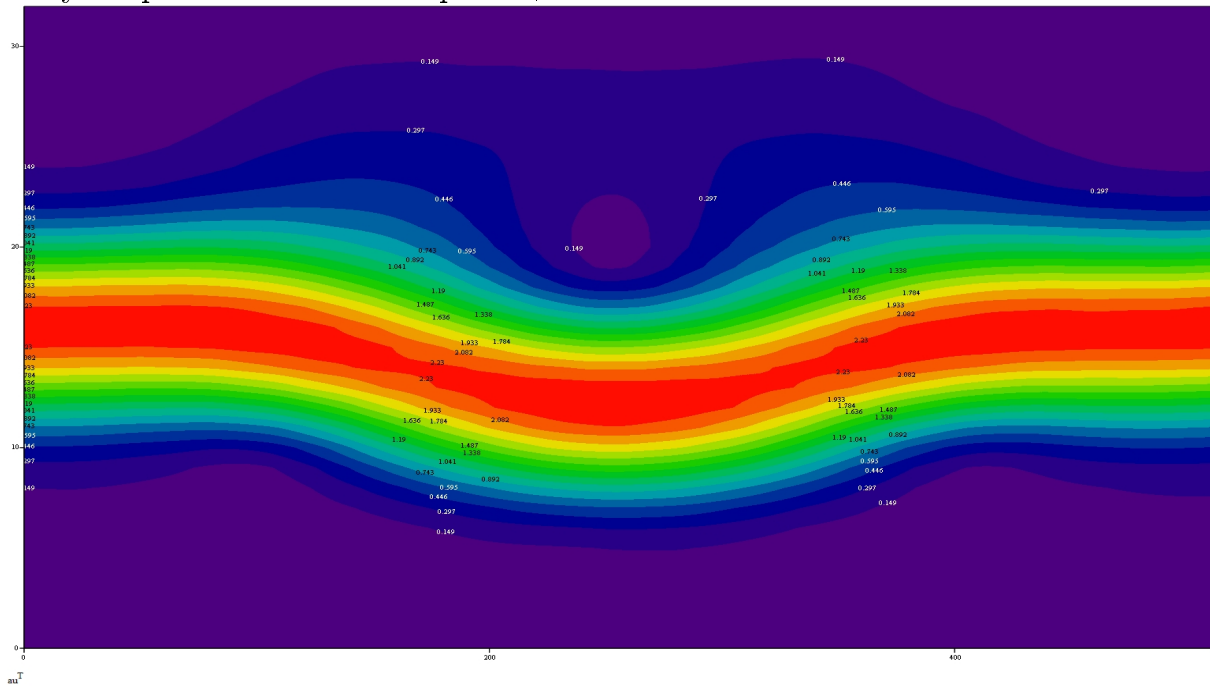
★ SDGM-Guide-mcd-2D-Loaded-Bending-2022/SDGM-Guide-Loaded-2022-x16m.xmcd

Диэлектрическая проницаемость. На рисунке изображено поле в виртуальной декартовой системе координат, в которой волновод занимает полосу с прямолинейными границами.



$|E|^2$

Поле для многомодового (4 модс) нагруженного волновода, оптимизированного для поворота на 90 градусов. На рисунке изображено поле в виртуальной декартовой системе координат, в которой волновод занимает полосу с прямолинейными границами.



$|H|^2$

3 Практическое применение неполного метода Галеркина []

Неполный метод Галеркина был применен для решения большого числа практически важных задач, в том числе:

1. Задача синтеза волноводного трансформатора, преобразующего направляемую моду заданного типа в направляемую волну другого типа.
2. Частным случаем является оптимизация волноводного трансформатора для преобразования основной моды при перемене сечения волновода с фланцем.
3. Задача об излучении волноводной моды в открытое пространство с рупорным переходом, оптимизация рупорного излучателя.
4. Задача синтеза безэхового покрытия измерительной камеры с периодически расположенными призматическими поглощающими элементами.
5. Синтез управляемой решетки с периодически расположенными активными элементами.
6. Анализ и синтез оптического волнового трансформатора, поверхностного приемника с периодически модулированной поверхностью.
7. Расчет поля в волноводно–лестничной системе, применяемой в электровакуумных приборах с электронным пучком.

Автор благодарен А.Г.Свешникову за многолетнюю поддержку на протяжении почти полувека.

Список литературы

1. Канторович Л.В. Использование идеи метода Галеркина в методе приведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям. // Прикл. матем. и механ., 1942. Т.6. N1. С.31-40.
2. Schelkunoff S. Conversion of Maxwell's equations into generalized telegraphist's equations. // Bell Syst. Techn. J., 1955. V.34. N 5. PP.995-1043.
3. Канторович Л.В. Мой путь в науке. // Успехи матем. наук, 1987. Т.42. N 2(254). С.31-40.

4. Свешников А.Г. К обоснованию метода расчета нерегулярных волноводов. 1963. ЖВМ. Т.3. №1. С.170-179.
5. Свешников А.Г. К обоснованию метода расчета распространения электромагнитных колебаний в нерегулярных волноводах. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1963. Т.3. N2. С.314–326.
6. Свешников А.Г. Дифракция на ограниченном теле. // Докл АН СССР, 1969. Т.184. N1. С.63–65.
7. Свешников А.Г., Ильинский А.С. Прямой метод для задач дифракции на локально неоднородном теле. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1971. Т.11. N 4. С.960-969.
8. Свешников А.Г., Ильинский А.С., Павлов А.Л. Дифракция плоской волны на идеально проводящем цилиндре в неоднородной среде. // Радиотехн. и электроника, 1972. Т.17. N7. С.1387-1391.
9. Павлов А.Л. Рассеяние волн, возбуждаемых локальной системой источников, на неоднородном теле. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1974. Т.14. N 2. С.509-512.
10. Ильинский А.С. Метод исследования задач дифракции волн на периодической структуре. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1974. Т.14. N 4. С.1063-1067.
11. Свешников А.Г. Неполный метод Галеркина. // Докл. АН СССР, 1977. Т.236. N 5. С.1076–1079.
12. Копенкин А.Н., Кураев А.А., Слепян А.Я., Слепян Г.Я., Черепенин В.А. Метод решения двумерных задач дифракции на периодических структурах. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1987. Т.27. N12. С.1894-1900.
13. Альховский Э.А., Асафьев В.И., Ильинский А.С., Цибизов Н.К. Исследование зависимости затухания в круглых гофрированных волноводах с малыми потерями от параметров гофра. // Радиотехн. и электроника, 1987. Т.32. N 5. С.1103-1105.
14. Быков А.А. Прямой проекционный метод расчета собственных волн двумерного гофрированного волновода. // Изв. ВУЗов, Радиофизика, 1982. Т.25. N 6. С.695-701.
15. Mur G. A differential-equation method for the computation of the electromagnetic scattering by an inhomogeneity in a cylindrical waveguide. // J. Engineering Math., 1978. V.12. N 2. PP.157-175.

-
16. Mei K.K. Unimoment method for electromagnetic wave scattering. // J. Electromagnetic waves Appl, 1987. V.1. N 3. PP.201-222.
 17. Moharam M.G., Gaylord T.K. Rigorous coupled-wave analysis of metallic surface-relief gratings. // J. Optical Soc. of America, Part A, 1986. V.3. N 11. PP.1780-1787.
 18. Быков А.А. Устойчивый численный метод решения краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. // Докл. АН СССР, 1980. Т.251. N 5. С.1040-1044.
 19. Быков А.А. Метод прогонки для решения жёстких краевых задач для систем линейных разностных уравнений. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1989. Т.29. N3. С.355–370.
 20. Быков А.А. Computer modeling in electrodynamics: Galerkin method. 6-я Международная конференция Акустооптические и радиолокационные методы измерений и обработки информации (ARMIMP-2013), Proceedings, ИРЭ РАН, pp.24-34.
 21. Н.Н. Гавурин. Численные методы. М.: Наука, 1971.