

Основы математического моделирования: экономичные разностные схемы для многомерных задач математической физики, схема переменных направлений для уравнения теплопроводности в прямоугольнике.

Как уже было показано на примере одномерных по пространственной переменной задач, явные схемы, в которых оператор, содержащий производные по x , аппроксимируется на слое, где решение уже известно, просты в применении, но являются условно устойчивыми. Для их устойчивости требуется достаточно маленький шаг по времени. Неявные схемы, в которых оператор дифференцирования по пространственной переменной аппроксимируется на новом слое по времени, как правило безусловно устойчивы, но приводят к необходимости решать систему уравнений относительно значений искомой сеточной функции на новом временном слое.

Применение неявных схем для многомерных задач затруднено тем, что получающаяся при этом система для значений искомой функции на новом временном слое может быть достаточно сложной и требовать для своего решения большого числа действий. Поэтому при численном решении многомерных задач часто используют так называемые *экономичные* разностные схемы.

Экономичными разностными схемами называют схемы, сочетающие в себе лучшие качества явной и неявной схем. Они являются безусловно устойчивыми, как неявная схема, и требуют при переходе со слоя на слой затраты числа арифметических операций, линейно пропорционального числу узлов сетки.

Основная идея большинства экономичных схем состоит в сведении перехода со слоя на слой к последовательному решению ряда одномерных задач по каждому из координатных направлений. При этом для каждой из промежуточных задач строится безусловно устой-

чивая схема, требующая для своего решения числа действий, пропорционального числу узлов сетки на каждом временном слое.

1 Метод переменных направлений для уравнения теплопроводности в прямоугольнике

Идею сведения перехода со слоя на слой к двум вспомогательным задачам выражает, например, предложенная в 1955 году Писменом и Рекфордом, а также Дугласом, схема переменных направлений (продольно-поперечная схема) для двумерного уравнения теплопроводности в прямоугольной области. Рассмотрим идею этой схемы на примере линейной задачи с постоянными коэффициентами и граничными условиями Дирихле:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + f(x, y, t), \quad x \in (0, l_x), \quad y \in (0, l_y), \quad t \in (0, T], \\ u|_{x=0} = \mu_1(y, t), \quad u|_{x=l_x} = \mu_2(y, t), \\ u|_{y=0} = \mu_3(x, t), \quad u|_{y=l_y} = \mu_4(x, t). \\ u|_{t=0} = u_0(x, y). \end{array} \right. \quad (1.1)$$

В декартовых координатах оператор Лапласа представляет собой сумму вторых производных по x и y . Возможность разбиения оператора задачи на сумму более простых и лежит в основе метода переменных направлений.

Введем в расчетной области равномерную сетку:

$$x_n = nh_x, \quad n = 0, 1, \dots, N, \quad Nh_x = l_x, \quad y_m = mh_y, \quad m = 0, 1, \dots, M, \quad Mh_y = l_y,$$

$$t_j = j\tau, \quad j = 0, 1, \dots, J, \quad J\tau = T.$$

Заменим операторы $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ их разностными аналогами:

$$\Lambda_1 u = u_{\bar{x}x} = \frac{u_{n-1,m} - 2u_{n,m} + u_{n+1,m}}{h_x^2},$$

$$\Lambda_2 u = u_{\bar{y}y} = \frac{u_{n,m-1} - 2u_{n,m} + u_{n,m+1}}{h_y^2},$$

где использованы обозначения $u_{n,m} = u(x_n, y_m, t)$, u — точное решение исходной задачи. Решение разностной схемы, которую мы построим, будем обозначать w .

Будем осуществлять переход со слоя j на слой $j + 1$ в два этапа. Введем вспомогательный промежуточный слой, который условно обозначим $j + \frac{1}{2}$. Расстояния между слоями j , $j + \frac{1}{2}$ и $j + 1$ равны $\frac{\tau}{2}$.

Пусть значения $w_{n,m}^j$ на слое j уже известны (на самом первом шаге по времени значения $w_{n,m}^0 = u_0(x_n, y_m)$ известны из начального условия). Перейдем на вспомогательный слой $j + \frac{1}{2}$, используя *неявную* схему по переменной x и *явную* по переменной y , то есть заменяя выражение $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ его разностным аналогом, взятым на новом слое $j + \frac{1}{2}$, а выражение $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ — разностным аналогом, взятым на слое j . При этом функцию $f(x, y, t)$ в правой части уравнения аппроксимируем на полуцелом слое. В результате придем к разностному уравнению

$$\frac{w^{j+\frac{1}{2}} - w^j}{0.5\tau} = \Lambda_1 w^{j+\frac{1}{2}} + \Lambda_2 w^j + f^{j+\frac{1}{2}}, \quad 0 < x_n < l_x, \quad 0 < y_m < l_y. \quad (1.2)$$

Как будет показано далее на примере, если дополнить уравнение (1.2) граничными условиями по x , то при каждом фиксированном y_m (то есть, каждом фиксированном значении m) полученную систему (для всех возможных n) можно будет решить методом прогонки.

Переход со слоя $j + \frac{1}{2}$ на новый целый слой $j + 1$ осуществим по *явной* схеме по направлению x и *неявной* по направлению y , по-прежнему аппроксимируя функцию $f(x, y, t)$ на промежуточном полуцелом слое:

$$\frac{w^{j+1} - w^{j+\frac{1}{2}}}{0.5\tau} = \Lambda_1 w^{j+\frac{1}{2}} + \Lambda_2 w^{j+1} + f^{j+\frac{1}{2}}, \quad 0 < x_n < l_x, \quad 0 < y_m < l_y. \quad (1.3)$$

Дополняя эту систему граничными условиями по y , при каждом фиксированном n неизвестные $w_{n,m}^{j+1}$ можно будет найти с помощью метода прогонки.

На каждом целом слое j по времени граничные условия задачи (1.1) аппроксимируются точно:

$$w_{0,m}^j = \mu_1(y_m, t_j), \quad w_{N,m}^j = \mu_2(y_m, t_j), \quad m = 0, 1, \dots, M,$$

$$w_{n,0}^j = \mu_3(x_n, t_j), \quad w_{n,M}^j = \mu_4(x_n, t_j), \quad n = 0, 1, \dots, N.$$

На полуцелых слоях в случае, когда функции μ_1 и μ_2 *зависят от времени* , граничные условия аппроксимируются несколько сложнее. Связано это с тем, что аппроксимация граничных условий должна быть согласована с используемыми при переходе со слоя на слой разностными уравнениями.

Для того, чтобы получить соответствующие выражения, вычтем из уравнения (1.2) уравнение (1.3). В результате получим равенство, связывающее значения вспомогательной функции $w^{j+\frac{1}{2}}$ со значениями искомой сеточной функции w на слоях j и $j+1$:

$$w^{j+\frac{1}{2}} = \frac{w^j + w^{j+1}}{2} - \frac{\tau}{4}\Lambda_2(w^{j+1} - w^j) = \frac{w^j + w^{j+1}}{2} - \frac{\tau^2}{4}\Lambda_2 w_t, \quad (1.4)$$

которое должно выполняться *на всех узлах сетки вплоть до граничных*. Это равенство позволяет получить граничные условия для $w^{j+\frac{1}{2}}$ при $x_0 = 0$ и $x_N = l_x$:

$$\begin{aligned} w_{0,m}^{j+\frac{1}{2}} &= \frac{w_{0,m}^j + w_{0,m}^{j+1}}{2} - \frac{\tau}{4}\Lambda_2(w_{0,m}^{j+1} - w_{0,m}^j) = \\ &= \frac{\mu_1(y_m, t_j) + \mu_1(y_m, t_{j+1})}{2} - \frac{\tau}{4}\Lambda_2(\mu_1(y_m, t_{j+1}) - \mu_1(y_m, t_j)) = \bar{\mu}_{1,m}^{j+\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

$$w_{N,m}^{j+\frac{1}{2}} = \frac{\mu_2(y_m, t_j) + \mu_2(y_m, t_{j+1})}{2} - \frac{\tau}{4}\Lambda_2(\mu_2(y_m, t_{j+1}) - \mu_2(y_m, t_j)) = \bar{\mu}_{2,m}^{j+\frac{1}{2}}.$$

Заметим, что если функция μ_1 не зависит от t , то $\bar{\mu}_{1,m}^{j+\frac{1}{2}} = \mu_1(y_m)$. Аналогичное утверждение справедливо для функции μ_2 .

Добавляя к системе (1.2) граничные условия для функции $w^{j+\frac{1}{2}}$ при $n = 0$ и $n = N$, при каждом фиксированном $m = 1, 2, \dots, M-1$ получаем систему для $N+1$ неизвестного:

$$w_{0,m}^{j+\frac{1}{2}}, \quad w_{1,m}^{j+\frac{1}{2}}, \quad \dots, \quad w_{N,m}^{j+\frac{1}{2}}$$

которая решается методом прогонки. Для этого при каждом m требуется совершить $O(N+1)$ действий. Когда значения на промежуточном слое найдены, добавляя к системе (1.3) граничные условия для функции w^{j+1} при $m = 0$ и $m = M$, при каждом фиксированном $n = 1, 2, \dots, N-1$ получаем систему для $M+1$ неизвестного:

$$w_{n,0}^{j+1}, \quad w_{n,1}^{j+1}, \quad \dots, \quad w_{n,M}^{j+1},$$

которая также решается прогонкой. Для этого при каждом фиксированном n требуется совершить $O(M+1)$ действий. Завершается переход на новый слой нахождением $w_{0,m}^{j+1}$ и $w_{N,m}^{j+1}$ для всех m из граничных условий. Таким образом, для перехода со слоя j на слой $j+1$ всего необходимо затратить $O((N+1)(M+1))$ действий.

Несмотря на то, что решение задачи осуществляется с использованием промежуточного слоя по времени, для анализа схемы ее удобно представить в виде, в котором промежуточный слой исключен. Для этого подставим выражение (1.4) в уравнение (1.2):

$$\frac{w^{j+1} - w^j}{\tau} - \frac{\tau}{2}\Lambda_2 w_t = \frac{1}{2}\Lambda_1(w^{j+1} + w^j) - \frac{\tau^2}{4}\Lambda_1\Lambda_2 w_t + \Lambda_2 w^j + f^{j+\frac{1}{2}},$$

которое можно переписать в виде:

$$w_t - \frac{\tau}{2}\Lambda_2 w_t - \frac{\tau}{2}\Lambda_1 w_t + \frac{\tau^2}{4}\Lambda_1\Lambda_2 w_t = \Lambda_1 w^j + \Lambda_2 w^j + f^{j+\frac{1}{2}},$$

или же более кратко:

$$(E - 0.5\tau\Lambda_1)(E - 0.5\tau\Lambda_2)w_t = \Lambda w^j + f^{j+\frac{1}{2}}, \quad (1.5)$$

где E — единичный оператор, $\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2$ — разностная аппроксимация оператора Лапласа, $w_t = \frac{w^{j+1} - w^j}{\tau}$. Итак, сеточная функция w является решением разностного уравнения

$$Bw_t = \Lambda w^j + f^{j+\frac{1}{2}}, \quad (1.6)$$

где $B = B_1 B_2$, $B_i = E - 0.5\tau\Lambda_i$, $i = 1, 2$. Разностные схемы вида (1.6), в которых оператор B представляет собой произведение нескольких операторов, называются факторизованными схемами. Таким образом, схема переменных направлений является примером факторизованной схемы. Удобны факторизованные схемы тем, что решение сводится к последовательному относительно простому "обращению" операторов B_i , являющихся множителями в B . Первые разработанные экономичные схемы строились именно как факторизованные.

Исследуем схему переменных направлений на устойчивость по начальным данным методом гармоник. Рассмотрим задачу Коши для однородного уравнения (1.5) с начальным условием специального вида:

$$w_{n,m}^0 = e^{i(qx_n + py_m)} = e^{i(\alpha_q n + \beta_p m)},$$

где i — мнимая единица, q, p — произвольные вещественные числа, $\alpha_q = qh_x$, $\beta_p = ph_y$. Тогда на слое j решение такой задачи Коши будет иметь вид:

$$w_{n,m}^j = \lambda_{q,p}^j e^{i(\alpha_q n + \beta_p m)}, \quad (1.7)$$

где $\lambda_{q,p}$ — множители роста.

Найдем явный вид множителей роста, подставляя выражения (1.7) в однородное уравнение (1.5):

$$(E - 0.5\tau\Lambda_1)(E - 0.5\tau\Lambda_2) \frac{\lambda_{q,p}^{j+1} - \lambda_{q,p}^j}{\tau} e^{i(\alpha_q n + \beta_p m)} = \lambda_{q,p}^j \Lambda e^{i(\alpha_q n + \beta_p m)}. \quad (1.8)$$

Так как

$$\Lambda_1 e^{i(\alpha_q n + \beta_p m)} = e^{i(\alpha_q n + \beta_p m)} \frac{e^{i\alpha_q} - 2 + e^{-i\alpha_q}}{h_x^2} = -e^{i(\alpha_q n + \beta_p m)} \frac{4}{h_x^2} \sin^2 \frac{\alpha_q}{2},$$

$$\Lambda_2 e^{i(\alpha_q n + \beta_p m)} = -e^{i(\alpha_q n + \beta_p m)} \frac{4}{h_y^2} \sin^2 \frac{\beta_p}{2},$$

то, подставляя эти выражения в уравнение (1.8) и сокращая на $\lambda_{q,p}^j e^{i(\alpha_q n + \beta_p m)}$, получаем следующее уравнение для множителей роста:

$$\frac{\lambda_{q,p} - 1}{\tau} \left(1 + \frac{2\tau}{h_x^2} \sin^2 \frac{\alpha_q}{2}\right) \left(1 + \frac{2\tau}{h_y^2} \sin^2 \frac{\beta_p}{2}\right) = -4 \left(\frac{1}{h_x^2} \sin^2 \frac{\alpha_q}{2} + \frac{1}{h_y^2} \sin^2 \frac{\beta_p}{2}\right),$$

из которого находим

$$\lambda_{q,p} = \frac{\left(1 - \frac{2\tau}{h_x^2} \sin^2 \frac{\alpha_q}{2}\right) \left(1 - \frac{2\tau}{h_y^2} \sin^2 \frac{\beta_p}{2}\right)}{\left(1 + \frac{2\tau}{h_x^2} \sin^2 \frac{\alpha_q}{2}\right) \left(1 + \frac{2\tau}{h_y^2} \sin^2 \frac{\beta_p}{2}\right)}.$$

Так как для любого вещественного γ и любого положительного η справедливы неравенства

$$-1 \leq \frac{1 - \eta \sin^2 \gamma}{1 + \eta \sin^2 \gamma} \leq 1,$$

для множителей роста имеет место оценка $|\lambda_{q,p}| \leq 1$ при всех p, q . Следовательно, для схемы переменных направлений выполнено спектральное условие устойчивости при любом соотношении шагов τ, h_x и h_y .

Найдем порядок погрешности аппроксимации схемы переменных направлений. Пусть u — точное решение задачи (1.1), w — решение задачи (1.2)-(1.3). Рассмотрим сеточную функцию $z = w - u$. В начальный момент времени и на границе области погрешность z равна нулю, так как начальные и граничные условия аппроксимируются точно. Во внутренних узлах она удовлетворяет разностному уравнению:

$$(E - 0.5\tau\Lambda_1)(E - 0.5\tau\Lambda_2)z_t = \Lambda z^j + \psi_{n,m}^{j+\frac{1}{2}},$$

где ψ — погрешность аппроксимации, которая имеет вид:

$$\psi_{n,m}^{j+\frac{1}{2}} = \Lambda u^j - (E - 0.5\tau\Lambda_1)(E - 0.5\tau\Lambda_2)u_t + f_{n,m}^{j+\frac{1}{2}} = 0.5\Lambda(u^j + u^{j+1}) - u_t - \underbrace{\frac{\tau^2}{4}\Lambda_1\Lambda_2 u_t}_{O(\tau^2)} + f_{n,m}^{j+\frac{1}{2}}.$$

Если функция $u(x, u, t)$ является достаточно гладкой и существует число $M > 0$, такое что:

$$\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right| \leq M, \quad \left|\frac{\partial^5 u}{\partial x^2 \partial y^2 \partial t}\right| \leq M, \quad \left|\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right| \leq M, \quad \left|\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\right| \leq M$$

в расчетной области, то

$$0.5(u^j + u^{j+1}) = u^{j+\frac{1}{2}} + O(\tau^2), \quad 0.5\Lambda(u^j + u^{j+1}) = \Lambda u^{j+\frac{1}{2}} + O(\tau^2) = \Delta u^{j+\frac{1}{2}} + O(h_x^2) + O(h_y^2) + O(\tau^2),$$

$$u_t = \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=t_{j+\frac{1}{2}}} + O(\tau^2),$$

а выражение $\Lambda_1 \Lambda_2 u_t$ ограничено. Следовательно,

$$\psi_{n,m}^{j+\frac{1}{2}} = \underbrace{\left(\Delta u - \frac{\partial u}{\partial t} + f \right) \Big|_{(x_n, y_m, t_{j+\frac{1}{2}})}}_{=0} + O(h_x^2) + O(h_y^2) + O(\tau^2) = O(h_x^2) + O(h_y^2) + O(\tau^2).$$

Таким образом, схема переменных направлений имеет погрешность аппроксимации $O(h_x^2) + O(h_y^2) + O(\tau^2)$, а значит, в силу линейности и безусловной устойчивости, она сходится и имеет второй порядок точности по координатам и времени. Так как для ее реализации требуется число действий, пропорциональное числу узлов сетки, схема является экономичной.

2 Пример реализации схемы переменных направлений

Используем схему переменных направлений для численного решения следующей начально-краевой задачи:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = 4\Delta u + e^t \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{4}\right), \quad x \in (0, 1), \quad y \in (0, 2), \quad t \in (0, T], \\ \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = y, \quad u|_{x=1} = y + 1, \\ u|_{y=0} = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=2} = x, \\ u|_{t=0} = xy + 1. \end{array} \right. \quad (2.1)$$

Аналитическое решение этой задачи имеет вид:

$$u = xy + 1 + \frac{e^t - e^{-\frac{5\pi^2}{4}t}}{1 + 5\pi^2/4} \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{4}\right).$$

Введем в расчетной области равномерную сетку, используя фиктивные узлы в окрестности границ, на которых заданы условия Неймана:

$$x_n = -\frac{h_x}{2} + nh_x, \quad n = 0, 1, \dots, N, \quad -\frac{h_x}{2} + Nh_x = 1 \rightarrow h_x = \frac{1}{N - 1/2},$$

$$y_m = mh_y, \quad m = 0, 1, \dots, M, \quad Mh_y = 2 + \frac{h_y}{2} \rightarrow h_y = \frac{2}{M - 1/2},$$

$$t_j = j\tau, \quad j = 0, 1, \dots, J, \quad \tau = \frac{T}{J}.$$

Начальное условие задачи (2.1) аппроксимируется точно:

$$w_{n,m}^0 = x_n y_m + 1, \quad n = 0, 1, \dots, N, \quad m = 0, 1, \dots, M.$$

Граничные условия задачи (2.1) на каждом временном слое j аппроксимируем следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{w_{1,m}^j - w_{0,m}^j}{h_x} &= y_m, \quad w_{N,m}^j = y_m + 1, \quad m = 0, 1, \dots, M, \\ w_{n,0}^j &= 1, \quad \frac{w_{n,M}^j - w_{n,M-1}^j}{h_y} = x_n, \quad n = 0, 1, \dots, N. \end{aligned}$$

При этом условия Дирихле аппроксимируются точно, а условия Неймана за счет выбора сетки аппроксимируются со вторым порядком погрешности аппроксимации, так как соответствующие разностные первые производные оказываются центральными относительно точек $x = 0$ и $y = 2$.

После того как начальные условия заданы, будем осуществлять переход со слоя j на слой $j + 1$ через вспомогательный слой $j + \frac{1}{2}$ в соответствии со схемой переменных направлений. Заметим, что в рассматриваемой задаче функции в правых частях граничных условий не зависят от времени, поэтому на промежуточных слоях их не требуется преобразовывать.

Рассмотрим переход со слоя j на слой $j + \frac{1}{2}$. Соответствующая система уравнений имеет вид:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{w_{n,m}^{j+\frac{1}{2}} - w_{n,m}^j}{0.5\tau} &= \frac{4}{h_x^2} \left(w_{n+1,m}^{j+\frac{1}{2}} - 2w_{n,m}^{j+\frac{1}{2}} + w_{n-1,m}^{j+\frac{1}{2}} \right) + \frac{4}{h_y^2} \left(w_{n,m+1}^j - 2w_{n,m}^j + w_{n,m-1}^j \right) + \\ &+ e^{t_j+0.5\tau} \cos\left(\frac{\pi x_n}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi y_m}{4}\right), \quad n = 1, 2, \dots, N-1, \quad m = 1, 2, \dots, M-1, \\ \frac{w_{1,m}^{j+\frac{1}{2}} - w_{0,m}^{j+\frac{1}{2}}}{h_x} &= y_m, \quad w_{N,m}^{j+\frac{1}{2}} = y_m + 1, \quad m = 1, \dots, M-1. \end{aligned} \right. \quad (2.2)$$

При каждом фиксированном $m = 1, 2, \dots, M-1$ систему (2.2) можно переписать следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} w_{0,m}^{j+\frac{1}{2}} = w_{1,m}^{j+\frac{1}{2}} - h_x y_m, \\ \frac{2\tau}{h_x^2} w_{n-1,m}^{j+\frac{1}{2}} - \left(\frac{4\tau}{h_x^2} + 1 \right) w_{n,m}^{j+\frac{1}{2}} + \frac{2\tau}{h_x^2} w_{n+1,m}^{j+\frac{1}{2}} = - \left(w_{n,m}^j + \frac{2\tau}{h_y^2} (w_{n,m+1}^j - 2w_{n,m}^j + w_{n,m-1}^j) + \right. \\ \left. + \frac{\tau}{2} e^{t_j+0.5\tau} \cos\left(\frac{\pi x_n}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi y_m}{4}\right) \right), \quad n = 1, \dots, N-1, \\ w_{N,m}^{j+\frac{1}{2}} = y_m + 1, \end{array} \right.$$

или, что то же самое:

$$\left\{ \begin{array}{l} w_{0,m}^{j+\frac{1}{2}} = w_{1,m}^{j+\frac{1}{2}} + \nu_1^x, \\ A^x w_{n-1,m}^{j+\frac{1}{2}} - C^x w_{n,m}^{j+\frac{1}{2}} + B^x w_{n+1,m}^{j+\frac{1}{2}} = -F_n^x, \quad n = 1, \dots, N-1, \\ w_{N,m}^{j+\frac{1}{2}} = \nu_2^x, \end{array} \right. \quad (2.3)$$

где

$$A^x = B^x = \frac{2\tau}{h_x^2}, \quad C^x = \frac{4\tau}{h_x^2} + 1, \quad \nu_1^x = -h_x y_m, \quad \nu_2^x = y_m + 1, \\ F_n^x = w_{n,m}^j + \frac{2\tau}{h_y^2} (w_{n,m+1}^j - 2w_{n,m}^j + w_{n,m-1}^j) + \frac{\tau}{2} e^{t_j+0.5\tau} \cos\left(\frac{\pi x_n}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi y_m}{4}\right).$$

Система (2.3) имеет трехдиагональную матрицу и может быть решена методом прогонки.

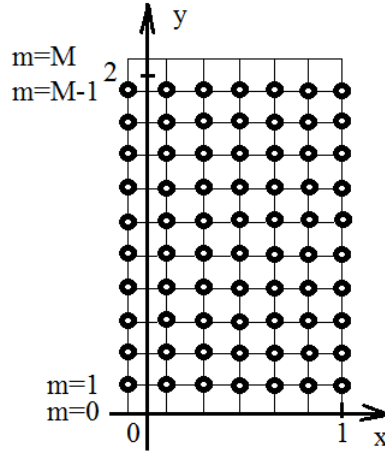


Рис. 1: Результат перехода на слой $j + 1/2$. Точками обозначены узлы сетки, в которых решение найдено.

Таким образом, для того чтобы найти функцию $w_{n,m}^{j+\frac{1}{2}}$ на вспомогательном полуцелом слое, необходимо при каждом фиксированном $m = 1, \dots, M-1$ решить свою систему (2.3).

При этом мы получим значения $w_{n,m}^{j+\frac{1}{2}}$ для всех $n = 0, 1, \dots, N$ и $m = 1, 2, \dots, M - 1$. Вычислять значения функции $w_{n,m}^{j+\frac{1}{2}}$ при $m = 0$ и $m = M$ нет необходимости, поскольку, как мы увидим дальше, они при переходе с вспомогательного слоя $j + \frac{1}{2}$ на слой $j + 1$ не используются.

Рассмотрим теперь переход со слоя $j + \frac{1}{2}$ на новый целый слой $j + 1$. Будем осуществлять этот переход по явной схеме по направлению x и по неявной по направлению y . В результате придем к следующей системе:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{w_{n,m}^{j+1} - w_{n,m}^{j+\frac{1}{2}}}{0.5\tau} = \frac{4}{h_x^2} \left(w_{n+1,m}^{j+\frac{1}{2}} - 2w_{n,m}^{j+\frac{1}{2}} + w_{n-1,m}^{j+\frac{1}{2}} \right) + \frac{4}{h_y^2} \left(w_{n,m+1}^{j+1} - 2w_{n,m}^{j+1} + w_{n,m-1}^{j+1} \right) + \\ \quad + e^{t_j+0.5\tau} \cos\left(\frac{\pi x_n}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi y_m}{4}\right), \quad n = 1, 2, \dots, N - 1, \quad m = 1, 2, \dots, M - 1, \\ w_{n,0}^{j+1} = 1, \quad \frac{w_{n,M}^{j+1} - w_{n,M-1}^{j+1}}{h_y} = x_n. \quad n = 1, \dots, N - 1. \end{array} \right. \quad (2.4)$$

Как можно видеть, значения $w_{n,m}^{j+\frac{1}{2}}$ в этой системе используются только при $m = 1, \dots, M - 1$, а именно они и были найдены из предыдущей системы. Значения $w_{n,0}^{j+\frac{1}{2}}$ и $w_{n,M}^{j+\frac{1}{2}}$ не используются, поэтому их и не нужно находить.

При каждом фиксированном $n = 1, 2, \dots, N - 1$ систему (2.4) можно переписать в виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} w_{n,0}^{j+1} = 1, \\ \frac{2\tau}{h_y^2} w_{n,m-1}^{j+1} - \left(\frac{4\tau}{h_y^2} + 1 \right) w_{n,m}^{j+1} + \frac{2\tau}{h_y^2} w_{n,m+1}^{j+1} = - \left(w_{n,m}^{j+\frac{1}{2}} + \frac{2\tau}{h_x^2} \left(w_{n+1,m}^{j+\frac{1}{2}} - 2w_{n,m}^{j+\frac{1}{2}} + w_{n-1,m}^{j+\frac{1}{2}} \right) + \right. \\ \quad \left. + \frac{\tau}{2} e^{t_j+0.5\tau} \cos\left(\frac{\pi x_n}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi y_m}{4}\right) \right), \quad m = 1, \dots, M - 1, \\ w_{n,M}^{j+1} = w_{n,M-1}^{j+1} + x_n h_y, \end{array} \right.$$

или, что то же самое, в виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} w_{n,0}^{j+1} = \nu_1^y, \\ A^y w_{n,m-1}^{j+1} - C^y w_{n,m}^{j+1} + B^y w_{n,m+1}^{j+1} = -F_m^y, \quad m = 1, \dots, M - 1, \\ w_{n,M}^{j+1} = w_{n,M-1}^{j+1} + \nu_2^y, \end{array} \right. \quad (2.5)$$

где

$$A^y = B^y = \frac{2\tau}{h_y^2}, \quad C^y = \frac{4\tau}{h_y^2} + 1, \quad \nu_1^y = 1, \quad \nu_2^y = x_n h_y,$$

$$F_m^y = w_{n,m}^{j+\frac{1}{2}} + \frac{2\tau}{h_x^2} \left(w_{n+1,m}^{j+\frac{1}{2}} - 2w_{n,m}^{j+\frac{1}{2}} + w_{n-1,m}^{j+\frac{1}{2}} \right) + \frac{\tau}{2} e^{t_j+0.5\tau} \cos\left(\frac{\pi x_n}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi y_m}{4}\right).$$

Система (2.5) имеет трехдиагональную матрицу и может быть решена методом прогонки. И так, для того чтобы перейти с вспомогательного слоя $j + \frac{1}{2}$ на новый целый слой $j + 1$ необходимо для каждого фиксированного $n = 1, 2, \dots, N - 1$ решить свою систему (2.5). В результате мы получим значения $w_{n,m}^{j+1}$ при всех $n = 1, 2, \dots, N - 1$ и $m = 0, 1, \dots, M$.

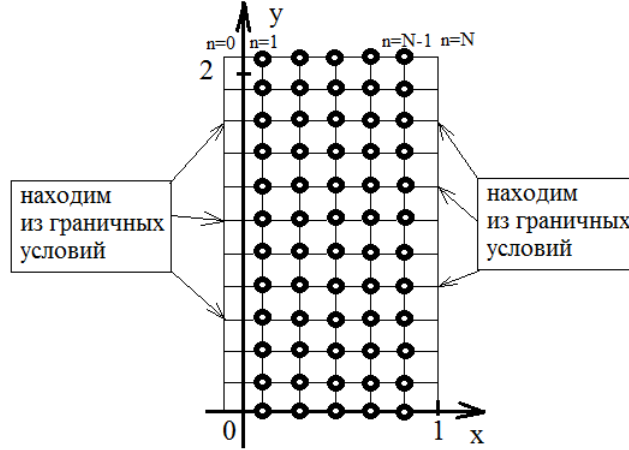


Рис. 2: Результат перехода на слой $j + 1$. Точками обозначены узлы сетки, в которых решение найдено.

Для того чтобы завершить переход на слой $j + 1$, необходимо найти значения функции $w_{n,m}^{j+1}$ при $n = 0$ и $n = N$. Для этого воспользуемся граничными условиями:

$$w_{0,m}^{j+1} = w_{1,m}^{j+1} - h_x y_m, \quad w_{N,m}^{j+1} = y_m + 1, \quad m = 0, 1, \dots, M.$$

Аналитическое решение задачи (2.1) и ее численное решение при $N = 100$, $M = 200$, $\tau = 0.01$ с помощью схемы переменных направлений для нескольких моментов времени представлены на рис. 3 - 5.

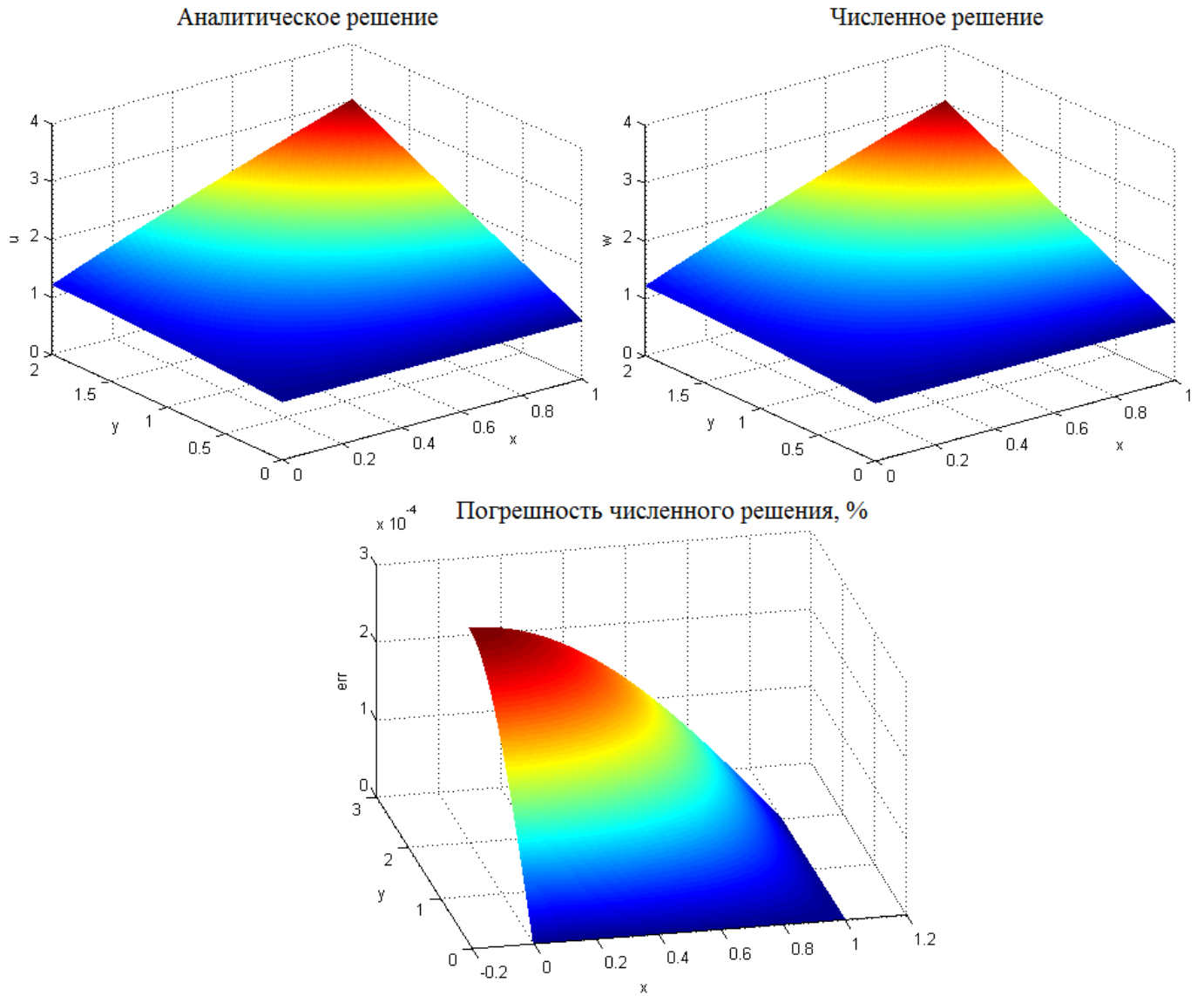


Рис. 3: Аналитическое и численное решение задачи (2.1) в момент времени $t_{100} = 1$

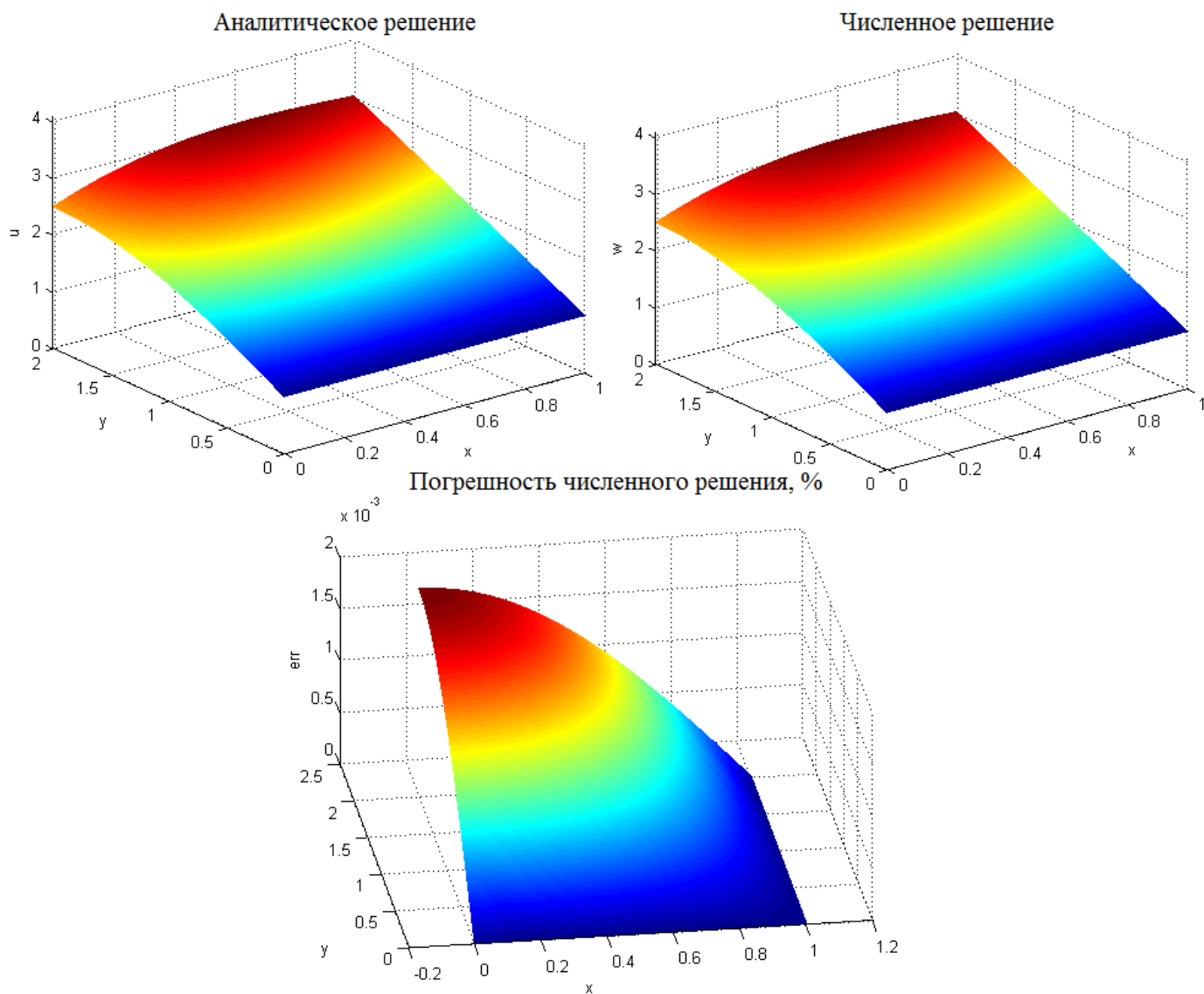


Рис. 4: Аналитическое и численное решение задачи (2.1) в момент времени $t_{300} = 3$

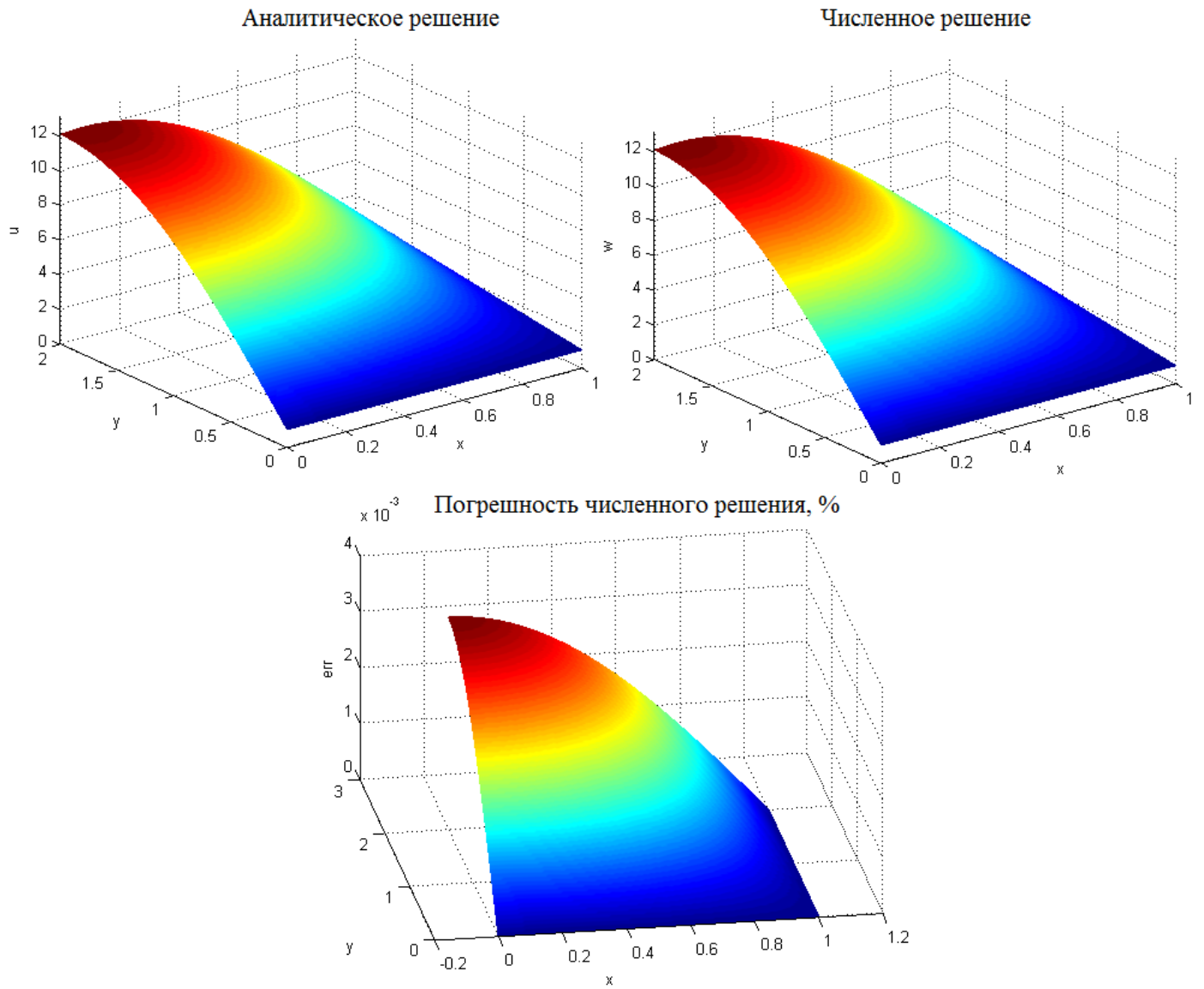


Рис. 5: Аналитическое и численное решение задачи (2.1) в момент времени $t_{500} = 5$