

Основы математического моделирования: основные понятие теории разностных схем, схемы бегущего счета для линейных уравнений переноса, спектральный критерий устойчивости.

Большое количество физических задач приводит к краевым либо начально-краевым задачам для линейных или нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. При этом число задач, имеющих аналитическое решение, ограничено. Это задачи в канонических областях, таких как, например, прямоугольник, круг или шар, и как правило, для уравнений с постоянными коэффициентами. На практике часто приходится решать задачи в весьма сложных областях и для уравнений с переменными коэффициентами, зачастую нелинейных. Это приводит к необходимости искать приближенные решения, пользуясь для этого различными численными методами. Достаточно эффективным методом численного решения задач математической физики является метод конечных разностей или метод сеток, позволяющий сводить приближенное решение уравнений в частных производных к решению систем алгебраических уравнений. Системы алгебраических уравнений при этом формулируются для приближенных значений решения в некотором наборе точек (узлов сетки) в расчетной области.

1 Сетки и сеточные функции

Пусть нам нужно найти приближенное решение задачи (краевой или начально-краевой):

$$\begin{cases} L[u] = f(x), & x = (x_1, \dots, x_n) \in G, \\ l[u] = \mu(x), & x \in \Gamma; \quad \bar{G} = G + \Gamma, \end{cases} \quad (1.1)$$

где L — дифференциальный оператор, l — оператор (также в общем случае дифференциальный) всех дополнительных условий (граничных и начальных).

Рассмотрим метод конечных разностей приближенного решения задачи (1.1). Как было сказано выше, численное решение при этом ищется не для всех значений аргумента $x \in \overline{G}$, а на некотором множестве точек, называемом *сеткой*. Сами точки, в которых ищется решение, называются *узлами сетки*.

Сетку в области \overline{G} будем обозначать $\overline{\omega}_h$. Множество всех узлов сетки, лежащих строго внутри G , будем обозначать ω_h и называть внутренними узлами, а множество узлов, попадающих на границу Γ , будем обозначать γ_h и называть граничными узлами.

Рассмотрим простейший пример — сетку на отрезке $x \in [0, 1]$. Расстояние между соседними узлами называется шагом сетки. Если шаг сетки не зависит от номера узла, ее называют *равномерной* (см. рис.1).

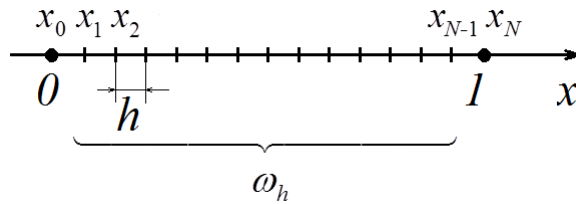


Рис. 1: Равномерная сетка на отрезке

Равномерная сетка на отрезке $x \in [0, 1]$ с шагом h имеет вид:

$$\overline{\omega}_h = \{x_n = h \cdot n, n = 0, 1, \dots, N, h \cdot N = 1\}.$$

Если расстояние между узлами меняется в зависимости от номера узла, то сетку называют *неравномерной*. На практике чаще всего используются так называемые *квазиравномерные* сетки, в которых узлы задаются с помощью некоторой функции:

$$x_n = f(s_n), \text{ где } s_n = hn, n = 0, 1, \dots, N.$$

Необходимость в квазиравномерных сетках возникает, например, если искомое решение резко изменяется в некоторой подобласти, и мы хотим использовать в этой подобласти более мелкий шаг, или если задача ставится в бесконечной или полубесконечной области, а нам нужна сетка с конечным числом узлов. Тогда $f(s)$ выбирают так, чтобы увести последний узел сетки на бесконечность.

Пример 1.1. *Нужно построить сетку на отрезке $x \in [a, b]$, шаг которой сгущается в окрестности левой границы $x = a$.*

Пусть вспомогательный параметр $s \in [0, 1]$. Используем положительную гладкую монотонную функцию

$$f(s) = a + (b - a) \frac{e^{c \cdot s} - 1}{e^c - 1},$$

где $c > 0$ — настроечный параметр. На отрезке $[0, 1]$ вводим равномерную сетку $s_n = n/N$, $n = 0, 1, \dots, N$, и получаем нужную квазиравномерную сетку на отрезке $x \in [a, b]$: $x_n = f(s_n)$.

Пример 1.2. Построить симметричную квазиравномерную сетку на прямой $x \in (-\infty, +\infty)$.

Выберем параметр $s \in [-1, 1]$ и функцию

$$f(s) = \frac{c \cdot s}{(1 - s^2)^m},$$

где $c > 0$ и $m > 0$ — управляющие параметры. Пусть $s_n = n/N$ при $n = -N, -N + 1, \dots, -1, 0, 1, \dots, N$. Тогда $x_n = f(s_n)$ будет искомой квазиравномерной сеткой, шаг которой растет с ростом модуля n . Точки x_{-N} и x_N уходят в минус и плюс бесконечность соответственно.

Функции, заданные на сетке, называют *сеточными* функциями:

$$y_h = y_h(x_n), \quad x_n \in \bar{\omega}_h.$$

Индекс h здесь использован, чтобы подчеркнуть, что речь идет о сеточной, а не обычной функции.

Если мы перейдем от исходной задачи (1.1) для функции $u(x)$ к задаче для сеточной функции y_h , принадлежащей некоторому сеточному функциональному пространству H_h , то необходимо иметь возможность оценивать близость функций $u(x)$ и y_h . Для этого можно использовать два подхода:

1) доопределение сеточной функции в точках, где она не задана, то есть

$$y_h(x_n), \quad x_n \in \bar{\omega}_h \Rightarrow \tilde{y}(x, h), \quad x \in \bar{G};$$

2) проектирование функции $u(x)$ на сетку:

$$u_h(x_n) = \mathcal{P}_h[u] \in H_h,$$

где $\mathcal{P}[\cdot]$ — оператор, преобразующий обычную функцию в сеточную.

Как правило, на практике используется второй подход. В простейшем случае можно взять $u_h(x_n) = \mathcal{P}_h[u] = u(x_n)$, $x_n \in \bar{\omega}_h$. Иногда для того, чтобы получить значения $u_h(x_n)$ в узлах сетки, используется усреднение по окрестности узла, например:

$$u_h(x_n) = \mathcal{P}_h[u] = \frac{1}{2h} \int_{x_n-h}^{x_n+h} u(t) dt = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 u(x_n + s \cdot h) ds.$$

Близость функций u_h и y_h будем оценивать по норме $\|\cdot\|_h$ пространства H_h , называемой сеточной нормой.

Примеры сеточных норм.

1) Сеточный аналог равномерной нормы

$$\|y\|_C = \max_{x \in \bar{G}} |y(x)|,$$

где \bar{G} — замкнутая ограниченная область, имеет вид:

$$\|y_h\|_C = \max_{x \in \bar{\omega}_h} |y_h(x)|,$$

где $\bar{\omega}_h$ — сетка, введенная в области \bar{G} .

2) Сеточный аналог нормы

$$\|y\|_{L_2} = \left(\int_0^1 y^2(x) dx \right)^{1/2}$$

в пространстве L_2 на отрезке $[0, 1]$ в случае равномерной сетки с шагом h , содержащей $N + 1$ узлов $x_n = h \cdot n$, $n = 0, 1, \dots, N$, определяются с помощью интегральной суммы:

$$\|y_h\| = \left(y^2(x_0) \frac{h}{2} + \sum_{n=1}^{N-1} y^2(x_n) h + y^2(x_N) \frac{h}{2} \right)^{1/2}.$$

2 Разностная аппроксимация дифференциальных операторов

После того, как мы ввели сетку и сеточные функции, нужно построить *разностную аппроксимацию* операторов L и l в задаче (1.1), заменяя все производные в выражениях $L[u]$ и $l[u]$ разностными отношениями. В результате получим выражения $L_h[u_h]$ и $l_h[u_h]$, представляющие собой линейные комбинации значений сеточной функции u_h на некотором множестве узлов сетки.

Определение 2.1 *Множество узлов сетки $\bar{\omega}_h$, на котором строится разностный оператор, называется его шаблоном.*

Рассмотрим ряд примеров.

2.1 Разностная аппроксимация первой производной

В качестве первого примера рассмотрим дифференциальный оператор $L[u] = \frac{du}{dx}$ и построим его разностную аппроксимацию на равномерной сетке $\bar{\omega}_h$ с шагом h . В произвольной внутренней точке $x \in \omega_h$ разностные операторы, аппроксимирующие L , можно построить следующими способами:

$$L_h^+[u] = \frac{u(x+h) - u(x)}{h} \quad L_h^-[u] = \frac{u(x) - u(x-h)}{h},$$

$$L_h^\sigma[u] = \sigma L_h^+[u] + (1 - \sigma)L_h^-[u],$$

в частности,

$$L_h^{0.5}[u] = 0.5(L_h^+[u] + L_h^-[u]) = \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h}.$$

Выражение $L_h^+[u]$ называют правой односторонней производной, $L_h^-[u]$ — левой односторонней производной, и $L_h^{0.5}[u]$ — центральной производной. Они используются для построения разностных аппроксимаций дифференциальных операторов более высокого порядка. В дальнейшем изложении будем использовать для этих фундаментальных разностных операторов следующие более краткие обозначения:

$$u_x = L_h^+[u], \quad u_{\bar{x}} = L_h^-[u], \quad u_{\dot{x}} = L_h^{0.5}[u].$$

Заменяя дифференциальный оператор разностным, мы допускаем некоторую ошибку, называемую погрешностью аппроксимации. Пусть $u(x)$ — достаточно гладкая функция (имеет все производные, которые понадобятся далее при использовании формулы Тейлора для оценки погрешности аппроксимации). Тогда при фиксированном x и достаточно малом h имеют место равенства:

$$u(x \pm h) = u(x) \pm hu'(x) + \frac{h^2}{2}u''(x) + O(h^3),$$

где u' и u'' — производные в обычном смысле. Из этих равенств получаем:

$$u_x = \frac{u(x+h) - u(x)}{h} = u'(x) + O(h).$$

Величину $\psi(x, h) = u_x - u'(x)$ называют погрешностью аппроксимации разностным оператором исходного дифференциального оператора (в данном случае, оператором правой односторонней разностной производной оператора обычной производной) в точке x .

Если $\psi(x, h) = O(h^p)$, то говорят, что в точке x разностный оператор аппроксимирует дифференциальный с порядком погрешности p . Очевидно, что для правой односторонней производной $\psi(x, h) = O(h)$, то есть $p = 1$.

Аналогично получаем:

$$u_{\bar{x}} = \frac{u(x) - u(x-h)}{h} = u'(x) + O(h) \Rightarrow \psi(x, h) = u_{\bar{x}} - u'(x) = O(h);$$

$$u_{\dot{x}} = \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h} = u'(x) + O(h^2) \Rightarrow \psi(x, h) = u_{\dot{x}} - u'(x) = O(h^2).$$

Таким образом, односторонние разностные производные u_x и $u_{\bar{x}}$ аппроксимируют первую производную в точке x с первым порядком погрешности, а симметричная разностная производная $u_{\dot{x}}$ — со вторым.

Задание. Пусть на отрезке $[0, 1]$ задана равномерная сетка

$$x_i = ih, \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad Nh = 1.$$

Определите, аппроксимирует ли разностное отношение $L_h[u]$ выражение $L[u]$ в указанной точке, и если да, то с каким порядком погрешности:

а) $L_h[u] = \frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{h}$, $L[u] = \frac{du}{dx}$ в точке $x = x_i + \frac{h}{2}$;

б) $L_h[u] = \frac{2u(x_{i+1}) - u(x_i) - u(x_{i-1}))}{3h}$, $L[u] = \frac{du}{dx}$ в точке $x = x_i$;

в) $L_h[u] = \frac{u(x_{i+1}) - u(x_{i-1}))}{h}$, $L[u] = \frac{du}{dx}$ в точке $x = x_{i+1}$.

Иногда (особенно при аппроксимации граничных условий в задачах) бывает удобно использовать «трехточечную» первую разностную производную, аппроксимирующую $u'(x)$ со вторым порядком погрешности:

$$\begin{aligned} L_h^{\sigma,+}[u] &= \sigma \frac{u(x+h) - u(x)}{h} + (1-\sigma) \frac{u(x+2h) - u(x+h)}{h} = \\ &= \frac{\sigma}{h} \left(u(x) + hu'(x) + \frac{h^2}{2}u''(x) + O(h^3) - u(x) \right) + \\ &+ \frac{1-\sigma}{h} \left(u(x) + 2hu'(x) + 2h^2u''(x) - u(x) - hu'(x) - \frac{h^2}{2}u''(x) + O(h^3) \right) = \\ &= u'(x) + \frac{h}{2}(3-2\sigma)u''(x) + O(h^2). \end{aligned}$$

Выбирая $\sigma = 3/2$, получаем

$$L_h^{3/2,+}[u(x)] = \frac{4u(x+h) - 3u(x) - u(x+2h)}{2h}, \quad \psi(x, h) = L_h^{3/2,+}[u(x)] - u'(x) = O(h^2).$$

Аналогично можно получить

$$L_h^{3/2,-}[u(x)] = \frac{3u(x) - 4u(x-h) + u(x-2h)}{2h}, \quad \psi(x, h) = L_h^{3/2,-}[u(x)] - u'(x) = O(h^2).$$

2.2 Разностная аппроксимация второй производной

Рассмотрим теперь разностную аппроксимацию второй производной $L[u] = \frac{d^2u}{dx^2}$ на равномерной сетке с шагом h . Для произвольной достаточно гладкой в окрестности точки x функции $u(x)$ при достаточно малом h справедливы равенства:

$$\begin{aligned}u(x+h) &= u(x) + hu'(x) + 0.5h^2u''(x) + \frac{h^3}{6}u'''(x) + O(h^4), \\u(x-h) &= u(x) - hu'(x) + 0.5h^2u''(x) - \frac{h^3}{6}u'''(x) + O(h^4).\end{aligned}$$

Сложив эти равенства и разделив результат на h^2 , получим:

$$\frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} = u''(x) + O(h^2).$$

Следовательно, разностный оператор

$$L_h[u] = \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2}$$

аппроксимирует $u''(x)$ в точке x со вторым порядком погрешности.

Оператор $L_h[u]$ можно переписать следующим образом:

$$L_h[u] = \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} = \frac{u_x(x) - u_{\bar{x}}(x)}{h} = u_{\bar{x}x}.$$

Это обозначение достаточно часто используется в теории разностных схем.

Подведем промежуточный итог и сформулируем определение погрешности аппроксимации оператора в узле сетки и на всей сетке. Пусть V — класс достаточно гладких функций, заданных в окрестности точки x , содержащей при $|h| < h_0$ шаблон разностного оператора L_h , и u — произвольная функция из класса V .

Определение 2.2 Величина $\psi(x, h) = L_h[u](x) - L[u](x)$ называется погрешностью разностной аппроксимации оператором L_h дифференциального оператора L в точке x .

Определение 2.3 Величина $\|\psi(x, h)\|$, где $\|\cdot\|$ — некоторая сеточная норма, называется погрешностью разностной аппроксимации оператором L_h дифференциального оператора L на сетке $\bar{\omega}_h$.

Определение 2.4 Говорят, что разностный оператор L_h аппроксимирует дифференциальный оператор L с порядком $p > 0$ в точке x , если для погрешности аппроксимации имеет место равенство:

$$\psi(x, h) = O(h^p)$$

при любой функции $u(x) \in V$.

Определение 2.5 Говорят, что разностный оператор L_h аппроксимирует дифференциальный оператор L с порядком $p > 0$ на сетке $\bar{\omega}_h$, если для погрешности аппроксимации имеет место равенство:

$$\|\psi(x, h)\| = O(h^p)$$

при любой функции $u(x) \in V$, где $\|\cdot\|$ — некоторая сеточная норма.

3 Разностная аппроксимация уравнения. Разностная схема.

Перейдем к построению так называемой *разностной схемы* для задачи (1.1). Для этого введем понятие разностной аппроксимации уравнения. Заменяем в уравнении $L[u] = f$ оператор L соответствующим разностным оператором L_h , а правую часть f сеточной функцией $\varphi_h = \mathcal{P}_h[f]$. При этом получим уравнение

$$L_h[y_h] = \varphi_h. \quad (3.1)$$

Здесь y_h — некоторая сеточная функция, в общем случае не равная $u_h = \mathcal{P}_h[u]$, где u — решение исходного дифференциального уравнения.

Перепишем уравнение (3.1) в виде $L_h[y_h] - \varphi_h = 0$ и подставим в его левую часть решение исходного дифференциального уравнения вместо функции y_h . В общем случае результат не будет равен нулю:

$$L_h[u] - \varphi_h = \psi_L(x, h).$$

Величина $\psi_L(x, h)$ называется погрешностью аппроксимации разностным уравнением (3.1) исходного дифференциального в точке x . Еще раз подчеркнем, что здесь, в отличие от погрешности аппроксимации оператора, u является не произвольной гладкой функцией, а *решением исходного дифференциального уравнения*.

Рассмотрим подробнее величину $\psi_L(x, h)$:

$$\begin{aligned} \psi_L(x, h) &= L_h[u] - \varphi_h - \underbrace{(L[u] - f)}_{\text{это } 0} = \\ &= \underbrace{(L_h[u] - L[u])}_{\text{погрешность аппроксимации оператора}} + \underbrace{(f - \varphi_h)}_{\text{погрешность аппроксимации функции } f}. \end{aligned}$$

Аналогично построим разностную аппроксимацию дополнительных условий $l[u] = \mu$ исходной задачи. Пусть $\chi_h = \mathcal{P}_h[\mu]$. В результате получим систему алгебраических уравнений для сеточной функции y_h :

$$\begin{cases} L_h[y_h] = \varphi_h(x), & x \in \omega_h, \\ l_h[y_h] = \chi_h(x), & x \in \gamma_h. \end{cases} \quad (3.2)$$

Определение 3.1 Семейство уравнений (3.2) относительно значений функции y_h в узлах сетки, зависящее от параметра h , называется разностной схемой для задачи (1.1).

В общем случае мы допускаем некоторую погрешность как при аппроксимации уравнения, так и дополнительных условий. Пусть

$$\psi_L(x, h) = L_h[u] - \varphi_h, \quad \|\psi_L(x, h)\| = O(h^{p_1}),$$

$$\psi_l(x, h) = l_h[u] - \chi_h, \quad \|\psi_l(x, h)\| = O(h^{p_2}),$$

то есть, погрешность аппроксимации уравнения имеет порядок p_1 , а дополнительных условий — порядок p_2 . Тогда вся схема будет иметь порядок погрешности $p = \min\{p_1, p_2\}$. Это означает, что уравнение и дополнительные условия желательно аппроксимировать с одним и тем же порядком погрешности.

Предположим, что решение разностной схемы (3.2) найдено. Возникает вопрос: с какой точностью в зависимости от h сеточная функция y_h приближает решение $u(x)$ исходной задачи (1.1) и приближает ли вообще? Наша цель заключается в том, чтобы разность между y_h и $u_h = \mathcal{P}_h[u]$ стремилась к нулю при стремлении h к нулю.

Определение 3.2 Разностная схема (3.2) называется сходящейся, если

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|y_h - u_h\| = 0.$$

Говорят, что схема (3.2) имеет порядок точности $p > 0$, если

$$\|y_h - u_h\| = O(h^p).$$

Определение 3.3 Разностная схема (3.2) называется поставленной корректно, если при всех достаточно малых $|h| \leq h_0$:

- 1) она однозначно разрешима для любых входных данных φ_h и χ_h ;
- 2) решения y_h непрерывно зависят от входных данных φ_h и χ_h равномерно по h .

Свойство равномерной по h непрерывной зависимости решения y_h от φ_h и χ_h называется *устойчивостью схемы* (3.2). Это означает, что при всех достаточно малых $|h| \leq h_0$ найдутся такие числа $M_1 > 0$ и $M_2 > 0$, не зависящие ни от h , ни от входных данных, что

$$\|y_h\|_{(1)} \leq M_1 \|\varphi_h\|_{(2)} + M_2 \|\chi_h\|_{(3)}. \quad (3.3)$$

В неравенстве (3.3) индексы 1, 2 и 3 говорят о том, что сеточные нормы в выражениях в правой и левой части неравенства могут быть разными.

Если система (3.2) линейная, то исходя из аппроксимации и устойчивости разностной схемы можно сделать вывод о ее сходимости. В самом деле, пусть L_h и l_h — линейные операторы, а $z_h = u_h - y_h$. Тогда

$$L_h[z_h] = L_h[u_h] - L_h[y_h] = L_h[u_h] - \varphi_h = \psi_L,$$

где ψ_L — погрешность аппроксимации уравнения. Аналогично получаем $l_h[z_h] = \psi_l$, где ψ_l — погрешность аппроксимации дополнительных условий. Это означает, что z_h удовлетворяет задаче

$$\begin{cases} L_h[z_h] = \psi_L(x, h), & x \in \omega_h, \\ l_h[z_h] = \psi_l(x, h), & x \in \gamma_h, \end{cases} \quad (3.4)$$

которая отличается от (3.2) только правыми частями уравнения и дополнительных условий.

Если схема (3.2) устойчивая, то выполняется неравенство (3.3). Но тогда

$$\|z_h\|_{(1)} \leq M_1 \|\psi_L\|_{(2)} + M_2 \|\psi_l\|_{(3)}.$$

Если схема (3.2) аппроксимирует исходную задачу с порядком погрешности p , то $\|\psi_L\|_{(2)} = O(h^p)$ и $\|\psi_l\|_{(3)} = O(h^p)$. Следовательно, $\|z_h\|_{(1)} = O(h^p)$, то есть, схема сходится и имеет порядок точности p .

4 Примеры построения разностных схем для линейного уравнения переноса

Проиллюстрируем построение разностных схем на примере начально-краевой задачи для линейного уравнения переноса:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + c(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} = f(x, t), & x \in (0, l], t \in (0, T], \\ u(x, 0) = \varphi(x), & u(0, t) = \mu(t), \end{cases}$$

где функция $c(x, t)$ представляет собой скорость переноса, а функция $f(x, t)$ описывает источники и стоки.

Будем рассматривать разностные схемы для уравнения переноса на равномерной сетке с шагом h по переменной x и шагом τ по переменной t :

$$x_n = n \cdot h, \quad n = 0, 1, \dots, N, \quad t_j = j \cdot \tau, \quad j = 0, 1, \dots, J.$$

Так как рассматриваемое уравнение переноса является дифференциальным уравнением в частных производных первого порядка, то для его аппроксимации необходимо использовать шаблон, содержащий узлы сетки, принадлежащие как минимум двум временным и двум пространственным слоям. Четыре основных шаблона, используемых при аппроксимации дифференциального оператора $L = \frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x}$, представлены на рис. 2.

В случае а) разностный оператор $L_{h\tau}$, аппроксимирующий дифференциальный оператор L , имеет вид:

$$L_{h\tau}[u] = \frac{u_n^{j+1} - u_n^j}{\tau} + c_n^j \frac{u_n^j - u_{n-1}^j}{h}.$$

Для любой гладкой функции $u(x, t)$ разностное выражение $L_{h\tau}[u]$ аппроксимирует выражение $L[u]$ в точке (x_n, t_j) с погрешностью $O(\tau) + O(h)$:

$$L_{h\tau}[u] = \left(\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Big|_{x_n, t_j} + O(\tau) + O(h).$$

Следовательно, разностное уравнение $L_{h\tau}[y] = \varphi$, где $\varphi_n^j = f(x_n, t_j)$, аппроксимирует уравнение переноса с погрешностью $O(\tau) + O(h)$.

В случае б) разностный оператор $L_{h\tau}$ имеет вид:

$$L_{h\tau}[u] = \frac{u_n^{j+1} - u_n^j}{\tau} + c_n^{j+1} \frac{u_n^{j+1} - u_{n-1}^{j+1}}{h},$$

и выражение $L_{h\tau}[u]$ аппроксимирует $L[u]$ в точке (x_n, t_{j+1}) с погрешностью $O(\tau) + O(h)$:

$$L_{h\tau}[u] = \left(\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Big|_{x_n, t_{j+1}} + O(\tau) + O(h).$$

Следовательно, разностное уравнение $L_{h\tau}[y] = \varphi$, где $\varphi_n^j = f(x_n, t_{j+1})$, аппроксимирует уравнение переноса с погрешностью $O(\tau) + O(h)$.

В случае в) разностный оператор $L_{h\tau}$ имеет вид:

$$L_{h\tau}[u] = \frac{u_n^{j+1} - u_n^j}{\tau} + c_n^{j+1} \frac{u_{n+1}^{j+1} - u_n^{j+1}}{h}.$$

Выражение $L_{h\tau}[u]$ аппроксимирует $L[u]$ в точке (x_n, t_{j+1}) с погрешностью $O(\tau) + O(h)$:

$$L_{h\tau}[u] = \left(\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Big|_{x_n, t_{j+1}} + O(\tau) + O(h).$$

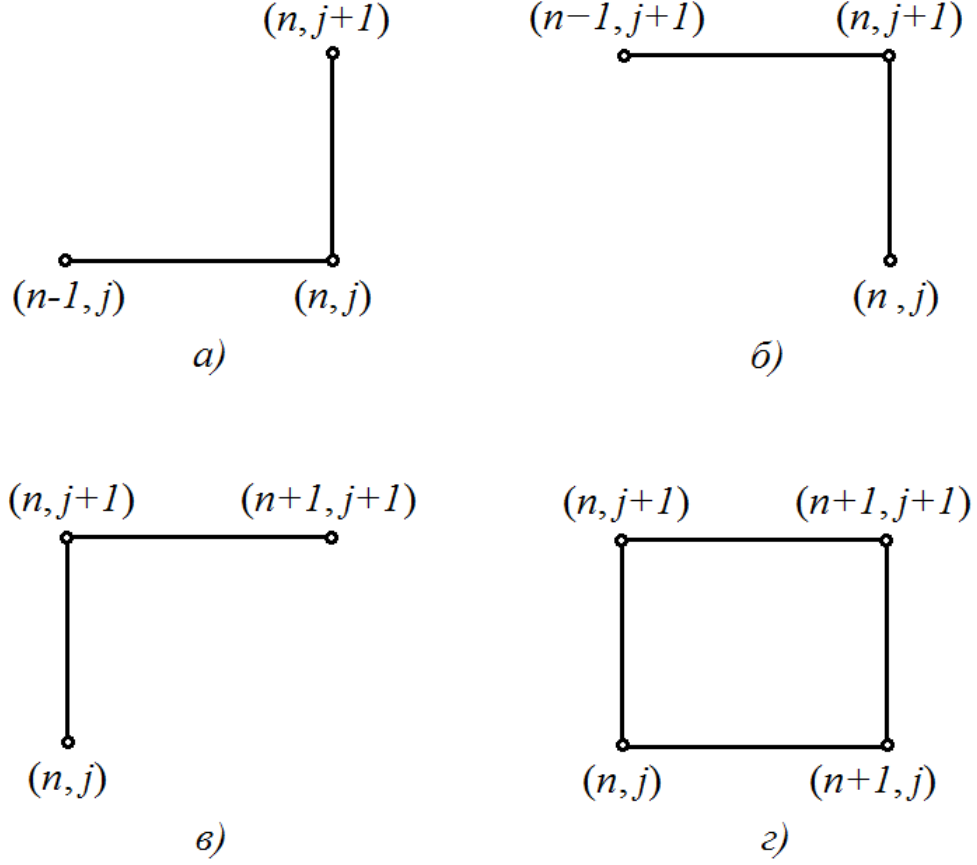


Рис. 2: Основные шаблоны в схемах бегущего счета

Следовательно, разностное уравнение $L_{h\tau}[y] = \varphi$, где $\varphi_n^j = f(x_n, t_{j+1})$, аппроксимирует уравнение переноса с погрешностью $O(\tau) + O(h)$.

В случае г) производная $\frac{\partial u}{\partial t}$ аппроксимируется как среднее арифметическое односторонних разностных производных по t , взятых при $x = x_n$ и $x = x_{n+1}$, а производная $\frac{\partial u}{\partial x}$ — как среднее арифметическое разностных производных по x , взятых на слоях j и $j + 1$:

$$L_{h\tau}[u] = \frac{1}{2} \left(\frac{u_n^{j+1} - u_n^j}{\tau} + \frac{u_{n+1}^{j+1} - u_{n+1}^j}{\tau} \right) + \frac{c(x_n + 0.5h, t_j + 0.5\tau)}{2} \left(\frac{u_{n+1}^{j+1} - u_n^{j+1}}{h} + \frac{u_{n+1}^j - u_n^j}{h} \right).$$

Для любой гладкой функции $u(x, t)$ разностное выражение $L_{h\tau}[u]$ за счет своей симметрии аппроксимирует $L[u]$ в центральной точке шаблона $(x_n + 0.5h, t_j + 0.5\tau)$ с погрешностью второго порядка по τ и h :

$$L_{h\tau}[u] = \left(\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Big|_{x_n+0.5, t_j+0.5} + O(\tau^2) + O(h^2).$$

Следовательно, разностное уравнение $L_{h\tau}[y] = \varphi$, где $\varphi_n^j = f(x_n + 0.5h, t_j + 0.5\tau)$, аппроксимирует уравнение переноса с погрешностью $O(\tau^2) + O(h^2)$.

Разностные схемы для уравнения переноса, в которых для аппроксимации дифференциального оператора используется один из шаблонов, приведенных на рис. 2, называются схемами *бегающего счета*.

Для того, чтобы получить разностную схему для рассматриваемой задачи, разностное уравнение нужно дополнить начальными и граничными условиями. Построим, например, схему в соответствии с шаблоном (а):

$$\begin{cases} \frac{y_n^{j+1} - y_n^j}{\tau} + c_n^j \frac{y_n^j - y_{n-1}^j}{h} = f_n^j, & n = 1, \dots, N, \quad j = 0, \dots, J - 1, \\ y_n^0 = \varphi_n, & n = 0, 1, \dots, N, \\ y_0^j = \mu^j, & j = 0, \dots, J. \end{cases} \quad (4.1)$$

При использовании других шаблонов начальные и граничные условия аппроксимируются также. Заметим, что в данном случае погрешность аппроксимации схемы определяется только погрешностью аппроксимации дифференциального уравнения, так как начальные и граничные условия не содержат производных и аппроксимируются точно.

Для решения полученной системы достаточно сначала задать все значения y_0^j , $j = 0, 1, \dots, J$ и y_n^0 , $n = 0, 1, \dots, N$. Затем в цикле по $j = 0, 1, \dots, J - 1$ из разностного уравнения переноса выражаем y_n^{j+1} при всех $n = 1, 2, \dots, N$, так как все остальные слагаемые в этом уравнении на каждом шаге цикла оказываются уже известными.

Исследуем схему (4.1) на устойчивость с помощью метода гармоник (спектрального метода). Для этого рассмотрим соответствующее *однородное* уравнение, заменив функцию $c(x, t)$ на константу C , со специального вида начальным условием:

$$\begin{aligned} \frac{y_n^{j+1} - y_n^j}{\tau} + C \frac{y_n^j - y_{n-1}^j}{h} &= 0, \\ y_n^0 &= e^{iqx_n} = e^{i\alpha_q n}, \end{aligned}$$

где i — мнимая единица, q — произвольное вещественное число, $\alpha_q = qh$. Тогда при $j = 0$ получаем:

$$\frac{y_n^1 - e^{i\alpha_q n}}{\tau} + C \frac{e^{i\alpha_q n} - e^{i\alpha_q(n-1)}}{h} = 0 \Rightarrow y_n^1 = \underbrace{\left(1 - C \frac{\tau}{h} (1 - e^{-i\alpha_q})\right)}_{\lambda_q} e^{i\alpha_q n}.$$

Итак, $y_n^1 = \lambda_q e^{i\alpha_q n}$. Подставляя это выражение в уравнение при $j = 1$, получаем $y_n^2 = \lambda_q^2 e^{i\alpha_q n}$, и так далее. На произвольном слое j имеем $y_n^j = \lambda_q^j e^{i\alpha_q n}$. Числа λ_q называются множителями роста.

Если рассматриваемая схема устойчива по начальным данным, то существует число $M > 0$, не зависящее ни от шагов сетки, ни от вида начальных данных, такое что:

$$\|y_n^j\| \leq M \|y_n^0\|. \quad (4.2)$$

Будем использовать норму

$$\|y^j\| = \max_{n=1,\dots,N} |y_n^j|.$$

Тогда $\|y^0\| = 1$, и неравенство (4.2) принимает вид

$$|\lambda_q|^j \leq M,$$

для любого $j = 1, 2, \dots, J$. Это условие будет выполнено, если существует число $Q \geq 0$, такое что при любом числе q справедливо неравенство:

$$|\lambda_q| \leq 1 + Q\tau. \quad (4.3)$$

В самом деле, так как $1 + Q\tau \leq e^{Q\tau}$, то

$$|\lambda_q|^j \leq e^{Qj\tau} = e^{Qt_j} \leq e^{QT},$$

где e^{QT} — число, не зависящее ни от шагов сетки, ни от начальных данных. Таким образом, если схема устойчива, то должно выполняться условие (4.3). Это условие называется *необходимым спектральным условием устойчивости схемы*. Достаточным для устойчивости оно не является, но как правило дает те же соотношения на шаги τ и h , что и более аккуратные методы исследования на устойчивость.

Если множители роста λ_q явно не зависят от τ , то необходимое спектральное условие устойчивости принимает вид

$$|\lambda_q| \leq 1. \quad (4.4)$$

В нашем случае $\lambda_q = 1 - r + re^{-i\alpha q}$, где $r = \frac{C\tau}{h}$. Если τ пропорционально h , то r — постоянное число, и если схема устойчива, должно выполняться неравенство (4.4).

Спектр λ_q при всех возможных q от минус до плюс бесконечности в случае $C > 0$ заполняет окружность радиуса r с центром в точке $(1 - r)$. Он представлен на рисунке 3.

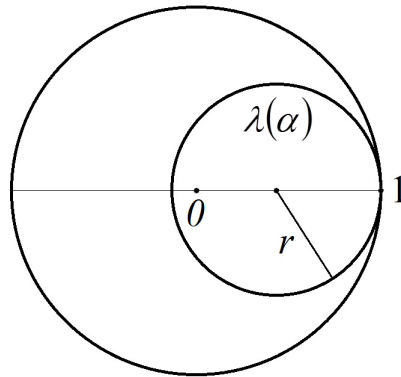


Рис. 3: Множители роста в схеме (4.1) при $C > 0$, $0 < r \leq 1$

Значения λ_q будут оставаться в пределах круга единичного радиуса с центром в начале координат, если $r \leq 1$. В результате приходим к условию устойчивости схемы

$$C\tau \leq h,$$

называемому условию Куранта. Мы получили его как необходимое, но оно является и достаточным условием устойчивости рассматриваемой схемы для уравнения с постоянной скоростью переноса $C > 0$.

В случае $C < 0$ множители роста лежат вне единичной окружности при любом соотношении шагов τ и h (см. рис. 4), то есть схема (4.1) абсолютно неустойчива, и пользоваться ею нельзя.

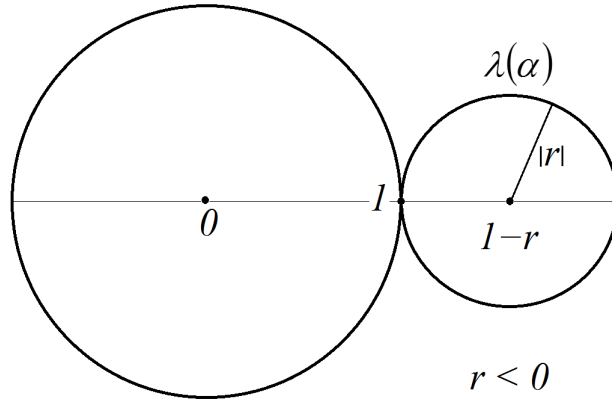


Рис. 4: Множители роста в схеме (4.1) при $C < 0$

Замечание 4.1 В случае $C < 0$ можно построить аналог схемы (4.1), если вместо шаблона а) использовать его зеркальное отображение относительно $x = x_n$ (см. рис.5).

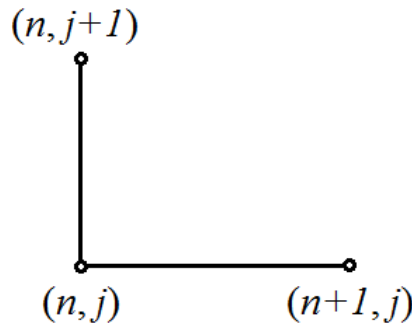


Рис. 5: Аналог шаблона а) в случае $C < 0$

Соответствующая схема имеет вид

$$\begin{cases} \frac{y_n^{j+1} - y_n^j}{\tau} + c_n^j \frac{y_{n+1}^j - y_n^j}{h} = f_n^j, & n = 0, 1, \dots, N-1, \quad j = 0, 1, \dots, J-1, \\ y_N^j = \mu(t_j), & j = 0, 1, \dots, J, \\ y_n^0 = \varphi(x_n), & n = 0, 1, \dots, N. \end{cases} \quad (4.5)$$

Граничное условие здесь задано при $n = N$, так как по смыслу, если перенос происходит в отрицательном направлении оси Ox , граничные условия должны задаваться на правой границе расчетной области. В случае постоянной скорости переноса $C < 0$ схема (4.5) устойчива при выполнении условия Куранта $|C|\tau \leq h$.

Если скорость переноса является функцией координат и времени, то схема (4.1) будет устойчивой, если во всех узлах сетки $c_n^j \geq 0$ и выполнено условие

$$c_n^j \tau \leq h$$

при всех n и j . Аналогично, если всюду в расчетной области $c_n^j \leq 0$, то схема (4.5) будет устойчивой, если

$$|c_n^j| \tau \leq h$$

при всех n и j .

Если в расчетной области функция $c(x, t)$ меняет знак, то в тех узлах, где $c(x, t) \geq 0$, уравнение следует аппроксимировать, как в схеме (4.1), а в тех узлах, где $c(x, t) < 0$, как в схеме (4.5).

Замечание 4.2 *Описанный выше спектральный метод исследования схем на устойчивость применим не только для уравнений переноса. Его можно использовать для любых линейных схем на равномерной сетке.*

Задание: используя спектральный метод, покажите, что

- 1) схема, построенная с помощью шаблона (б), безусловно устойчива, если $c(x, t) \geq 0$ всюду в расчетной области, и устойчива при выполнении условия $|c|\tau \geq h$, если $c(x, t) < 0$;
- 2) схема, построенная с помощью шаблона (в), безусловно устойчива, если $c(x, t) \leq 0$ всюду в расчетной области, и устойчива при выполнении условия $c\tau \geq h$, если $c(x, t) > 0$;
- 3) схема, построенная с помощью шаблона (г), безусловно устойчивая.