

Экономичные разностные схемы для многомерных задач математической физики: эволюционная факторизация и схемы с суммарной аппроксимацией

В данном разделе будет рассмотрено несколько примеров экономичных разностных схем (в частности, для уравнений теплопроводности), применимых как в двумерном, так и трехмерном случае, в отличие от схемы переменных направлений, применимой только в двумерном случае.

1 Экономичные факторизованные схемы

1.1 Понятие факторизованной схемы

При анализе схемы переменных направлений было показано, что она принадлежит классу факторизованных схем. Напомним, что если разностное уравнение в схеме можно представить в виде

$$Bw_t + Aw = f, \quad (1.1)$$

где A и B — разностные операторы, содержащие производные только по координатам (но не по времени), и оператор B имеет вид $B = B_1 B_2 \dots B_p$, то схема называется факторизованной.

Далее будем считать, что рассматриваемая разностная схема является безусловно устойчивой. Если значения w^j на j -м слое по времени уже известны, то разностное уравнение (1.1) можно переписать в виде:

$$Bw^{j+1} = F^j, \quad F^j = (B - \tau A)w^j + \tau f^j. \quad (1.2)$$

Пусть для вычисления F^j затрачивается число действий $O(N)$, где N — число узлов пространственной сетки на одном слое по времени. Если для решения уравнения (1.2) затрачивается число действий $O(N)$, то рассматриваемая схема экономична.

Пусть рассматриваемая схема является факторизованной, а операторы B_α , $\alpha = 1, 2, \dots, p$ таковы, что для вычисления решения уравнения

$$B_\alpha v = F$$

требуется $O(N)$ действий. Тогда безусловно устойчивая факторизованная схема будет экономичной, так как для ее решения потребуется $O(N)$ действий. В самом деле:

$$B_1 \underbrace{B_2 \dots B_p}_{w_{(1)}} w^{j+1} = F^j \Rightarrow B_1 w_{(1)} = F^j, B_\alpha w_{(\alpha)} = w_{(\alpha-1)}, \alpha = 2, 3, \dots, p,$$

а для решения каждого из вспомогательных уравнений требуется $O(N)$ действий. При этом $w^{j+1} = w_{(p)}$. Вспомогательные значения $w_{(1)}, \dots, w_{(p-1)}$ можно понимать как решения на промежуточных слоях по времени:

$$w_{(1)} = w^{j+\frac{1}{p}}, \dots, w_{(\alpha)} = w^{j+\frac{\alpha}{p}}, \dots, w_{(p-1)} = w^{j+\frac{p-1}{p}}.$$

Первые экономичные схемы составлялись так, чтобы можно было легко исключить промежуточные значения. Это приводило к факторизованной схеме «в целых шагах», связывающей значения w^j и w^{j+1} . Основным недостатком факторизованных схем является то, что они в большинстве своем применимы лишь для прямоугольных областей.

1.2 Схема Кранка - Николсона и ее эволюционная факторизация

Схемой Кранка-Николсона, или «схемой с полусуммой» для абстрактной задачи Коши

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + Lu = f, & t \in (0, T], \\ u|_{t=0} = u_0 \end{cases} \quad (1.3)$$

для функции u со значениями в некотором банаховом пространстве H_0 называется разностная схема вида:

$$\begin{cases} \frac{\hat{w} - w}{\tau} + \Lambda \frac{\hat{w} + w}{2} = \bar{f}, & t_j \in \omega_\tau, \\ w^0 = u_0, \end{cases} \quad (1.4)$$

где w при каждом $t_j = j\tau$ принадлежит некоторому сеточному пространству H_h , разностный оператор Λ аппроксимирует оператор L с погрешностью порядка q , а $\bar{f} = f|_{t_j+0.5\tau}$.

За счет своей симметричности по времени схема Кранка-Николсона обладает вторым порядком погрешности аппроксимации по τ .

Если Λ — положительно определенный оператор, то схема Кранка-Николсона безусловно устойчива по начальным данным. В самом деле, рассмотрим соответствующее однородное разностное уравнение и умножим его скалярно на выражение $\frac{\hat{w} + w}{2}$:

$$\frac{(\hat{w}, \hat{w}) - (w, w)}{2\tau} + \underbrace{\left(\Lambda \frac{\hat{w} + w}{2}, \frac{\hat{w} + w}{2} \right)}_{\geq 0} = 0.$$

Следовательно,

$$\|\hat{w}\| \leq \|w\| \leq \dots \leq \|u_0\|,$$

что и означает безусловную устойчивость по начальным данным.

Предположим, что оператор Λ можно представить в виде суммы положительно определенных операторов, например, $\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3$. Тогда схему можно переписать в эквивалентном виде

$$(E + 0.5\tau\Lambda)w_t + \Lambda w = \bar{f}, \quad (1.5)$$

где E — единичный оператор.

Схема (1.5) безусловно устойчива, но она не является экономичной, так как для осуществления перехода со слоя на слой требуется решать достаточно сложную систему алгебраических уравнений. При этом для оператора $B = (E + 0.5\tau\Lambda)$ нельзя выполнить факторизацию точно. Однако его можно приближенно заменить факторизованным оператором

$$\tilde{B} = (E + 0.5\tau\Lambda_1)(E + 0.5\tau\Lambda_2)(E + 0.5\tau\Lambda_3) = B + O(\tau^2),$$

который отличается от исходного на слагаемое порядка $O(\tau^2)$, по порядку величины совпадающее с погрешностью аппроксимации исходной схемы с полусуммой.

Факторизованная схема с разностным уравнением:

$$(E + 0.5\tau\Lambda_1)(E + 0.5\tau\Lambda_2)(E + 0.5\tau\Lambda_3)w_t + \Lambda w = \bar{f} \quad (1.6)$$

называется *эволюционно-факторизованной*. На достаточно гладких функциях u схема (1.6) будет иметь тот же порядок аппроксимации, что и исходная схема (1.5). При этом схема (1.6) безусловно устойчива, а значит является экономичной.

Для нахождения решения задачи (1.6) она сводится к последовательности одномерных задач:

$$(E + 0.5\tau\Lambda_1)w^{(1)} = -\Lambda w + \bar{f}, \quad (E + 0.5\tau\Lambda_2)w^{(2)} = w^{(1)}, \quad (E + 0.5\tau\Lambda_3)w_t = w^{(2)}.$$

Пусть Γ — граница расчетной области. Если решение уравнения (1.5) удовлетворяет граничным условиям $w|_{\Gamma} = \mu$, то для вспомогательных функций $w^{(1)}$ и $w^{(2)}$ должны

выполняться следующие граничные условия:

$$w^{(2)}|_{\Gamma} = (E + 0.5\tau\Lambda_3)\mu_t, \quad w^{(1)}|_{\Gamma} = (E + 0.5\tau\Lambda_2)(E + 0.5\tau\Lambda_3)\mu_t.$$

1.3 Эволюционно-факторизованная схема для уравнения теплопроводности в трехмерном случае

Построим эволюционно-факторизованную схему для начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности в трехмерном случае:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + f(x, y, z, t), \quad x \in (0, l_x), y \in (0, l_y), z \in (0, l_z), t \in (0, T], \\ u|_{t=0} = \varphi(x, y, z), \\ u|_{x=0} = \mu^{(1)}(y, z, t), \quad u|_{x=l_x} = \mu^{(2)}(y, z, t), \\ u|_{y=0} = \mu^{(3)}(x, z, t), \quad u|_{y=l_y} = \mu^{(4)}(x, z, t), \\ u|_{z=0} = \mu^{(5)}(x, y, t), \quad u|_{z=l_z} = \mu^{(6)}(x, y, t). \end{array} \right.$$

Введем равномерную сетку по каждому из координатных направлений и по времени:

$$x_n = nh_x, \quad h_x = \frac{l_x}{N}, \quad n = 0, 1, \dots, N; \quad y_m = mh_y, \quad h_y = \frac{l_y}{M}, \quad m = 0, 1, \dots, M;$$

$$z_k = kh_z, \quad h_z = \frac{l_z}{K}, \quad k = 0, 1, \dots, K; \quad t_j = j\tau, \quad \tau = \frac{T}{J}, \quad j = 0, 1, \dots, J.$$

Разностная аппроксимация вторых производных на этой сетке имеет вид:

$$u_{\bar{x}x} = \Lambda_1[u] = \frac{u_{n+1,m,k} - 2u_{n,m,k} + u_{n-1,m,k}}{h_x^2},$$

$$u_{\bar{y}y} = \Lambda_2[u] = \frac{u_{n,m+1,k} - 2u_{n,m,k} + u_{n,m-1,k}}{h_y^2},$$

$$u_{\bar{z}z} = \Lambda_3[u] = \frac{u_{n,m,k+1} - 2u_{n,m,k} + u_{n,m,k-1}}{h_z^2}.$$

Обозначим искомую сеточную функцию w , и сначала построим для рассматриваемой задачи схему с полусуммой. Разностная аппроксимация уравнения будет следующей:

$$\frac{w^{j+1} - w^j}{\tau} = a^2(\Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3) \left[\frac{w^{j+1} + w^j}{2} \right] + f^{j+\frac{1}{2}}.$$

Это разностное уравнение аппроксимирует исходное дифференциальное с погрешностью $O(\tau^2) + O(h_x^2) + O(h_y^2) + O(h_z^2)$. Перепишем уравнение в виде

$$w_t - \frac{a^2\tau}{2}(\Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3)w_t = a^2(\Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3)w + f^{j+\frac{1}{2}},$$

где $w_t = \frac{w^{j+1} - w^j}{\tau}$. Оператор $B = E - \frac{a^2\tau}{2}(\Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3)$ приближенно заменим факторизованным:

$$\tilde{B} = \left(E - \frac{a^2\tau}{2}\Lambda_1\right) \left(E - \frac{a^2\tau}{2}\Lambda_2\right) \left(E - \frac{a^2\tau}{2}\Lambda_3\right),$$

отличающимся от B на величину порядка $O(\tau^2)$. При этом получим следующее разностное уравнение

$$\left(E - \frac{a^2\tau}{2}\Lambda_1\right) \underbrace{\left(E - \frac{a^2\tau}{2}\Lambda_2\right) \left(E - \frac{a^2\tau}{2}\Lambda_3\right)}_{=w^{(1)}} w_t = a^2(\Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3)w + f^{j+\frac{1}{2}}.$$

Распишем в явном виде уравнение для вспомогательной функции $w^{(1)}$:

$$\begin{aligned} w_{n,m,k}^{(1)} - \frac{a^2\tau}{2} \frac{w_{n+1,m,k}^{(1)} - 2w_{n,m,k}^{(1)} + w_{n-1,m,k}^{(1)}}{h_x^2} &= f_{n,m,k}^{j+\frac{1}{2}} + \\ + a^2 \left\{ \frac{w_{n+1,m,k}^j - 2w_{n,m,k}^j + w_{n-1,m,k}^j}{h_x^2} + \frac{w_{n,m+1,k}^j - 2w_{n,m,k}^j + w_{n,m-1,k}^j}{h_y^2} + \right. \\ \left. + \frac{w_{n,m,k+1}^j - 2w_{n,m,k}^j + w_{n,m,k-1}^j}{h_z^2} \right\}, \quad n = 1, \dots, N-1, \quad m = 1, \dots, M-1, \quad k = 1, \dots, K-1. \end{aligned}$$

Эту систему необходимо дополнить граничными условиями по x при $m = 1, \dots, M-1$ и $k = 1, \dots, K-1$:

$$\begin{aligned} w_{0,m,k}^{(1)} &= \left(E - \frac{a^2\tau}{2}\Lambda_2\right) \left(E - \frac{a^2\tau}{2}\Lambda_3\right) \mu_t^{(1)}, \\ w_{N,m,k}^{(1)} &= \left(E - \frac{a^2\tau}{2}\Lambda_2\right) \left(E - \frac{a^2\tau}{2}\Lambda_3\right) \mu_t^{(2)}. \end{aligned}$$

Полученную систему можно решить с помощью прогонки по n при каждом фиксированном значении $m = 1, \dots, M-1$ и $k = 1, \dots, K-1$. Общее количество действий при этом линейно пропорционально числу узлов сетки на одном слое по времени. Пусть значения вспомогательной функции $w^{(1)}$ найдены во всех внутренних узлах слоя по времени. Тогда

$$\left(E - \frac{a^2\tau}{2}\Lambda_2\right) \underbrace{\left(E - \frac{a^2\tau}{2}\Lambda_3\right)}_{w^{(2)}} w_t = w^{(1)}.$$

Распишем разностное уравнение для вспомогательной функции $w^{(2)}$ в явном виде:

$$w_{n,m,k}^{(2)} - \frac{a^2\tau}{2} \frac{w_{n,m+1,k}^{(2)} - 2w_{n,m,k}^{(2)} + w_{n,m-1,k}^{(2)}}{h_y^2} = w_{n,m,k}^{(1)},$$

где $n = 1, \dots, N - 1$, $m = 1, \dots, M - 1$ и $k = 1, \dots, K - 1$. Эту систему необходимо дополнить граничными условиями по y :

$$w_{n,0,k}^{(2)} = \left(E - \frac{a^2 \tau}{2} \Lambda_3 \right) \mu_t^{(3)}, \quad w_{n,M,k}^{(2)} = \left(E - \frac{a^2 \tau}{2} \Lambda_3 \right) \mu_t^{(4)}.$$

Как и для первой вспомогательной функции, полученная система решается прогонкой, но в данном случае по m , при каждом фиксированном $n = 1, \dots, N - 1$ и $k = 1, \dots, K - 1$. Опять же, затрачиваемое для этого число действий пропорционально числу узлов на слое по времени.

Когда значения вспомогательной функции $w^{(2)}$ найдены, можно осуществить переход на слой $j + 1$, пользуясь уравнением

$$\left(E - \frac{a^2 \tau}{2} \Lambda_3 \right) w_t = w^{(2)}.$$

Распишем его в явном виде:

$$w_{n,m,k}^{j+1} - \frac{a^2 \tau}{2} \frac{w_{n,m,k+1}^{j+1} - 2w_{n,m,k}^{j+1} + w_{n,m,k-1}^{j+1}}{h_z^2} = w_{n,m,k}^{(2)} \tau +$$

$$+ w_{n,m,k}^j - \frac{a^2 \tau}{2} \frac{w_{n,m,k+1}^j - 2w_{n,m,k}^j + w_{n,m,k-1}^j}{h_z^2},$$

где $n = 1, \dots, N - 1$, $m = 1, \dots, M - 1$ и $k = 1, \dots, K - 1$. Эту систему нужно дополнить граничными условиями по z :

$$w_{n,m,0}^{j+1} = \mu^{(5)}(x_n, y_m, t_{j+1}), \quad w_{n,m,K}^{j+1} = \mu^{(6)}(x_n, y_m, t_{j+1}),$$

и тогда ее можно будет решить прогонкой по k при каждом фиксированном $n = 1, \dots, N - 1$ и $m = 1, \dots, M - 1$.

Для того, чтобы завершить переход на слой $j + 1$, нужно достроить $w_{0,m,k}^{j+1}$, $w_{N,m,k}^{j+1}$, $w_{n,0,k}^{j+1}$ и $w_{n,M,k}^{j+1}$ из граничных условий.

В качестве примера рассмотрим задачу в кубе $x \in [0, 1]$, $y \in [0, 1]$, $z \in [0, 1]$ при $t \in [0, 1]$ со смешанными граничными условиями:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + \sin \pi z [(1 + \pi^2 t)(x^2 + y^2) - 4t], \\ u|_{t=0} = \sin \frac{\pi x}{2} \sin 2\pi z, \\ u|_{x=0} = ty^2 \sin \pi z, \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=1} = 2t \sin \pi z, \\ \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=1} = 2t \sin \pi z, \\ u|_{z=0} = 0, \quad u|_{z=1} = 0. \end{array} \right. \quad (1.7)$$

Ее аналитическое решение имеет вид:

$$u = e^{-\frac{17\pi^2 t}{4}} \sin \frac{\pi x}{2} \sin 2\pi z + t(x^2 + y^2) \sin \pi z.$$

Введем сетку с фиктивными узлами, чтобы получить второй порядок погрешности аппроксимации производных на границе:

$$\begin{aligned} x_n &= nh_x, \quad n = 0, \dots, N, \quad Nh_x = 1 + \frac{h_x}{2} \Rightarrow h_x = \frac{1}{N - 1/2}, \\ y_m &= -\frac{h_y}{2} + mh_y, \quad m = 0, \dots, M, \quad -\frac{h_y}{2} + Mh_y = 1 + \frac{h_y}{2} \Rightarrow h_y = \frac{1}{M - 1}, \\ z_k &= kh_z, \quad k = 0, \dots, K, \quad h_z = \frac{1}{K}, \quad t_j = j\tau, \quad j = 0, \dots, J, \quad \tau = \frac{1}{J}. \end{aligned}$$

Явный вид граничных условий для вспомогательной функции $w^{(1)}$:

$$\begin{aligned} w_{0,m,k}^{(1)} &= \left(E - \frac{\tau}{2}\Lambda_2\right) \left(E - \frac{\tau}{2}\Lambda_3\right) [y_m^2 \sin \pi z_k] = \\ &= (y_m^2 - \tau) \left(\sin \pi z_k - \frac{\tau \sin \pi z_{k+1} - 2 \sin \pi z_k + \sin \pi z_{k-1}}{h_z^2} \right), \\ \frac{w_{N,m,k}^{(1)} - w_{N-1,m,k}^{(1)}}{h_x} &= \left(E - \frac{\tau}{2}\Lambda_2\right) \left(E - \frac{\tau}{2}\Lambda_3\right) [2 \sin \pi z_k] = \\ &= 2 \left(\sin \pi z_k - \frac{\tau \sin \pi z_{k+1} - 2 \sin \pi z_k + \sin \pi z_{k-1}}{h_z^2} \right). \end{aligned}$$

Явный вид граничных условий для вспомогательной функции $w^{(2)}$:

$$\frac{w_{n,1,k}^{(2)} - w_{n,0,k}^{(2)}}{h_y} = 0,$$

$$\frac{w_{n,M,k}^{(2)} - w_{n,M-1,k}^{(2)}}{h_y} = \left(E - \frac{\tau}{2}\Lambda_3\right) [2 \sin \pi z_k] = 2 \left(\sin \pi z_k - \frac{\tau \sin \pi z_{k+1} - 2 \sin \pi z_k + \sin \pi z_{k-1}}{h_z^2} \right).$$

После того, как найдены значения $w_{n,m,k}^{j+1}$ для $n = 1, \dots, N - 1$, $m = 1, \dots, M - 1$, $k = 0, \dots, K$, воспользуемся граничными условиями, чтобы завершить переход на слой $j + 1$:

$$\begin{cases} w_{n,0,k}^{j+1} = w_{n,1,k}^{j+1}, \\ w_{n,M,k}^{j+1} = w_{n,M-1,k}^{j+1} + 2t_{j+1}h_y \sin \pi z_k, \end{cases} \quad \text{где } k = 0, 1, \dots, K, \quad n = 1, \dots, N - 1;$$

$$\begin{cases} w_{0,m,k}^{j+1} = t_{j+1}y_m^2 \sin \pi z_k, \\ w_{N,m,k}^{j+1} = w_{N-1,m,k}^{j+1} + 2t_{j+1}h_x \sin \pi z_k, \end{cases} \quad \text{где } k = 0, 1, \dots, K, \quad m = 0, 1, \dots, M.$$

Результаты расчетов по описанной схеме для $N = M = K = J = 100$ приведены на рисунках 1 и 2.

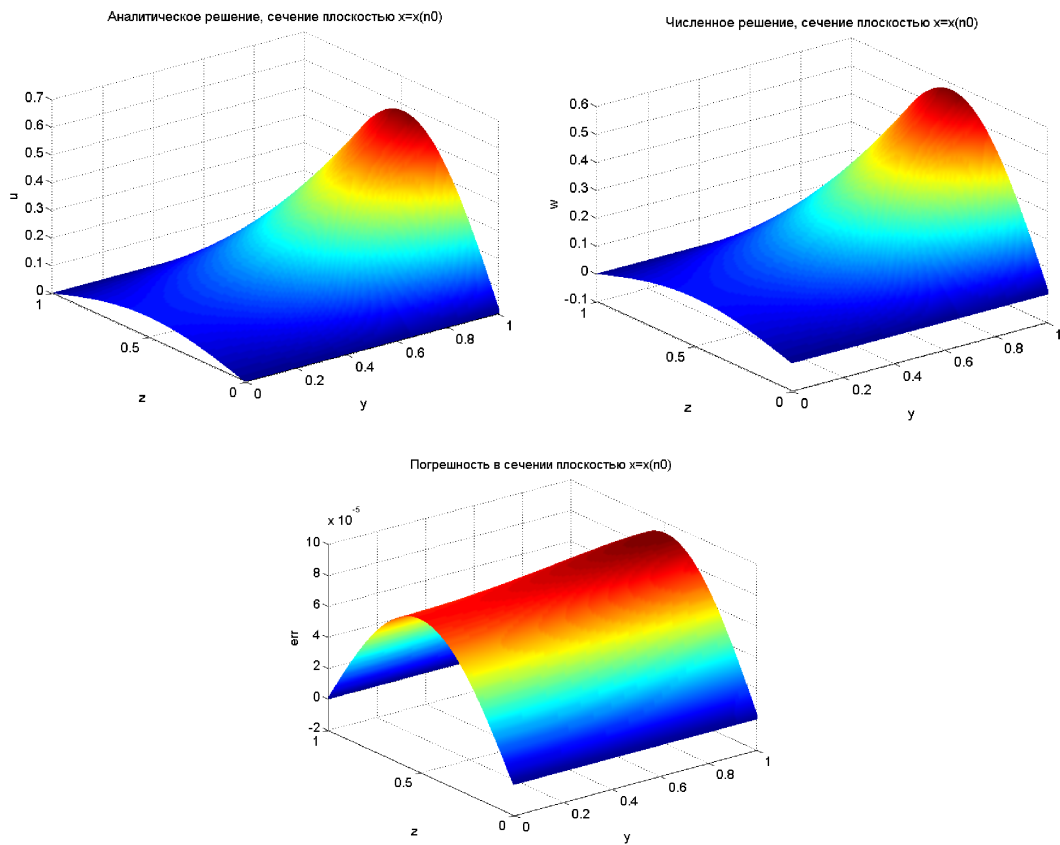


Рис. 1: Аналитическое и численное решения при $t = 0.5$ в сечении $x = 0.392$ ($n_0 = 40$)

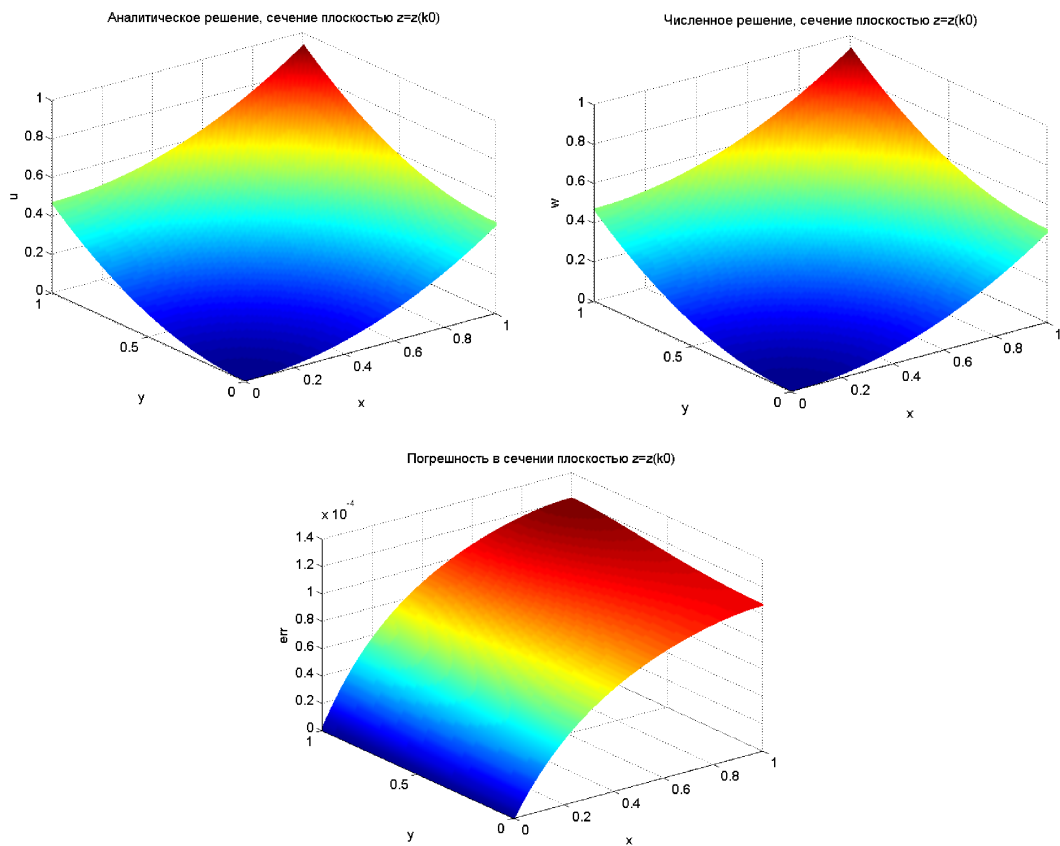


Рис. 2: Аналитическое и численное решения при $t = 0.5$ в сечении $z = 0.39$ ($k_0 = 40$)

2 Метод суммарной аппроксимации

2.1 Суммарная аппроксимация

Экономичные факторизованные схемы применимы в предположении, что область G изменения аргумента $x = (x_1, x_2, \dots, x_p)$ есть p -мерный параллелепипед. Кроме того, в случае уравнения с переменными коэффициентами аппроксимация граничных условий в факторизованных схемах может быть весьма проблематичной. Общим методом получения экономичных схем, пригодных для уравнений с переменными и даже разрывными коэффициентами, для квазилинейных нестационарных уравнений в случае произвольной области любого числа измерений является *метод расщепления и суммарной аппроксимации*.

Рассмотрим, например, задачу:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f(x, t), & x = (x_1, x_2, \dots, x_p) \in G, \quad t > 0, \\ u|_{\Gamma} = \mu(x, t), & t \geq 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \bar{G}, \end{cases} \quad (2.1)$$

где

$$Lu = \sum_{\alpha=1}^p L_{\alpha}u, \quad L_{\alpha}u = \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left(k_{\alpha}(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_{\alpha}} \right), \quad k_{\alpha} \geq C > 0.$$

В случае, когда коэффициенты k_{α} и функция f зависят также и от решения $u(x, t)$:

$$k_{\alpha} = k_{\alpha}(x, t, u), \quad f = f(x, t, u),$$

соответствующее уравнение теплопроводности называется квазилинейным.

Отход от классического понятия аппроксимации разностной схемой исходной задачи и замена его более слабым условием суммарной аппроксимации приводит к так называемым *аддитивным схемам*.

Аддитивные схемы имеют две основных черты:

- 1) переход со слоя j на слой $j + 1$ осуществляется при помощи ряда вспомогательных (промежуточных) обычных (двухслойных, трехслойных и т.д.) схем;
- 2) погрешность аппроксимации аддитивной схемы определяется как сумма невязок для всех промежуточных схем, то есть аддитивная схема обладает суммарной аппроксимацией.

Каждая из промежуточных схем цепочки может не аппроксимировать исходную задачу, аппроксимация достигается за счет суммирования всех невязок.

2.2 Сведение многомерной задачи к цепочке одномерных задач

Пусть оператор L таков, что его можно представить в виде суммы одномерных операторов:

$$L = L_1 + L_2 + \dots + L_p.$$

Поставим в соответствие задаче (2.1) цепочку одномерных уравнений (первую цепочку). Для этого уравнение

$$Pu = \frac{\partial u}{\partial t} - Lu - f = 0$$

перепишем в виде:

$$\sum_{\alpha=1}^p P_\alpha u = 0, \quad P_\alpha u = \frac{1}{p} \frac{\partial u}{\partial t} - L_\alpha u - f_\alpha,$$

где $f_\alpha(x, t)$, $\alpha = 1, 2, \dots, p$ — произвольные функции, обладающие той же гладкостью, что и $f(x, t)$, и удовлетворяющие условию:

$$f_1 + f_2 + \dots + f_p = f.$$

На отрезке $0 \leq t \leq T$ введем равномерную сетку $\bar{\omega}_\tau = \{t_j = j\tau, j = 0, 1, \dots, J\}$. Каждый интервал $[t_j, t_{j+1}]$ разобьем на p частей, вводя точки

$$t_{j+\frac{\alpha}{p}} = t_j + \frac{\alpha}{p}\tau, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p-1,$$

и обозначим как Δ_α полуинтервалы $t_{j+\frac{\alpha-1}{p}} < t \leq t_{j+\frac{\alpha}{p}}$.

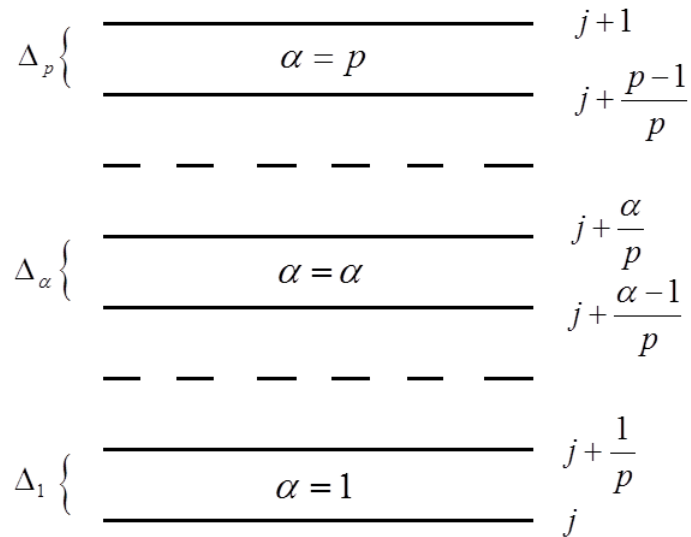


Рис. 3: Разбиение интервала $[t_j, t_{j+1}]$ вспомогательными слоями

Прежде всего, рассмотрим вспомогательную *дифференциальную* задачу для функции $v(x, t)$:

$$\begin{aligned}
& v|_{t=0} = u_0(x), \\
& \begin{cases} P_1 v_{(1)} = 0, & x \in G, \quad t \in (t_j, t_{j+1/p}] \\ v_{(1)}|_{t=t_j} = v|_{t=t_j}, \quad v_{(1)}|_{\partial G} = \mu(x, t), \end{cases} \\
& \begin{cases} P_2 v_{(2)} = 0, & x \in G, \quad t \in (t_{j+1/p}, t_{j+2/p}] \\ v_{(2)}|_{t=t_{j+1/p}} = v_{(1)}|_{t=t_{j+1/p}}, \quad v_{(2)}|_{\partial G} = \mu(x, t), \end{cases} \\
& \dots \\
& \begin{cases} P_p v_{(p)} = 0, & x \in G, \quad t \in (t_{j+(p-1)/p}, t_{j+1}] \\ v_{(p)}|_{t=t_{j+(p-1)/p}} = v_{(p-1)}|_{t=t_{j+(p-1)/p}}, \quad v_{(p)}|_{\partial G} = \mu(x, t), \end{cases} \\
& v|_{t=t_{j+1}} = v_{(p)}|_{t=t_{j+1}}.
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Первый возникающий вопрос: как связано решение исходной задачи для функции u и вспомогательной задачи для функции v ? В простейшем случае уравнения с постоянными коэффициентами функции u и v совпадают при $t = t_j$, $j = 0, 1, \dots, J$. В общем случае для ответа на этот вопрос нужно получить обобщенную постановку исходной задачи, то есть, представить ее в виде абстрактной задачи Коши:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + Au = F(t), & t > 0, \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{2.3}$$

для функции u со значениями в банаховом пространстве H_0 . Если возникающий при этом оператор A является линейным, если его область определения всюду плотна в H_0 , и он представим в виде суммы $A = \sum_{\alpha=1}^p A_\alpha$, то решение $v(t_j) = v_{(p)}(t_j)$, $t_j = j\tau$, цепочки уравнений

$$\frac{1}{p} \frac{dv_{(\alpha)}}{dt} + A_\alpha v_\alpha = F_\alpha, \quad t_{j+\frac{\alpha-1}{p}} < t \leq t_{j+\frac{\alpha}{p}}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p,$$

с начальными условиями $v_{(1)}(0) = u_0$ и условиями сопряжения

$$v_{(1)}(t_j) = v(t_j), \quad j = 1, 2, \dots,$$

$$v_{(\alpha)}(t_{j+\frac{\alpha-1}{p}}) = v_{(\alpha-1)}(t_{j+\frac{\alpha-1}{p}}), \quad j = 0, 1, \dots, \quad \alpha = 2, 3, \dots, p,$$

где $F = \sum_{\alpha=1}^p F_\alpha$, связано с решением задачи Коши (2.3) соотношением

$$\|v(t_j) - u(t_j)\| = O(\tau), \quad j = 1, 2, \dots$$

Перейдем к построению аддитивной разностной схемы. Каждое из уравнений

$$P_\alpha v_{(\alpha)} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{p} \frac{\partial v_{(\alpha)}}{\partial t} = L_\alpha v_{(\alpha)} + f_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p, \quad (2.4)$$

заменяем его разностной аппроксимацией

$$\Pi_\alpha y_{(\alpha)} = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p, \quad (2.5)$$

где

$$y_{(1)}^j = y^j, \quad y_{(2)}^{j+\frac{1}{p}} = y_{(1)}^{j+\frac{1}{p}}, \quad \dots, \quad y_{(\alpha)}^{j+\frac{\alpha-1}{p}} = y_{(\alpha-1)}^{j+\frac{\alpha-1}{p}}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p,$$

и учтем граничные условия задачи:

$$y_{(\alpha)}^{j+\frac{\alpha}{p}} = \mu^{j+\frac{\alpha}{p}}, \quad x \in \gamma_h,$$

где γ_h — множество граничных узлов.

В простейшем случае (2.5) — это двухслойные неявные схемы, связывающие значения $y_{(\alpha)} = y^{j+\frac{\alpha}{p}}$ и $y_{(\alpha-1)} = y^{j+\frac{\alpha-1}{p}}$.

Пусть схемы (2.5) аппроксимируют уравнения (2.4) в обычном смысле, так что погрешность аппроксимации

$$\Psi_\alpha = \Pi_\alpha u^{j+\frac{\alpha}{p}} - (P_\alpha u)^{j+\frac{\alpha}{p}}$$

в некоторой норме стремится к нулю при стремлении шагов сетки к нулю.

Покажем, что система разностных уравнений (2.5) является аддитивной схемой, обладающей суммарной аппроксимацией. Выражение $\Pi_\alpha u^{j+\frac{\alpha}{p}}$, где u — решение исходной задачи, представляет собой невязку схемы (2.5) при фиксированном α . Обозначим ее как ψ_α и выразим через погрешность аппроксимации схемы (2.5):

$$\psi_\alpha = (P_\alpha u)^{j+\frac{\alpha}{p}} + \Psi_\alpha.$$

Пользуемся тем, что

$$(P_\alpha u)^{j+\frac{\alpha}{p}} = (P_\alpha u)^{j+\frac{1}{2}} + O(\tau),$$

получаем

$$\psi_\alpha = \dot{\psi}_\alpha + \psi_\alpha^*, \quad \dot{\psi}_\alpha = (P_\alpha u)^{j+\frac{1}{2}}, \quad \psi_\alpha^* = \Psi_\alpha + O(\tau),$$

причем $\|\psi_\alpha^*\| \rightarrow 0$ при стремлении шагов сетки к нулю, где $\|\cdot\|$ — некоторая норма в пространстве сеточных функций, заданных на ω_h , и

$$\sum_{\alpha=1}^p \dot{\psi}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^p (P_\alpha u)^{j+\frac{1}{2}} = (Pu)^{j+\frac{1}{2}} = 0.$$

Считая погрешностью аддитивной схемы (2.5) сумму невязок для всех промежуточных схем:

$$\psi = \sum_{\alpha=1}^p \Pi_{\alpha} u^{j+\frac{\alpha}{p}} = \sum_{\alpha=1}^p \psi_{\alpha},$$

получаем оценку:

$$\|\psi\| = \left\| \sum_{\alpha=1}^p \psi_{\alpha} \right\| = \left\| \sum_{\alpha=1}^p \psi_{\alpha}^* \right\| \rightarrow 0$$

при стремлении к нулю шагов сетки. Таким образом, схема обладает суммарной аппроксимацией, если каждая из схем (2.5) аппроксимирует соответствующее уравнение (2.4) в обычном смысле.

Суммарная аппроксимация разностной схемой исходной задачи гарантируется выполнением двух условий:

- 1) оператор L есть сумма $L = L_1 + L_2 + \dots + L_p$;
- 2) правая часть f есть сумма $f = f_1 + f_2 + \dots + f_p$.

Эти условия можно ослабить, положив:

$$Lu - \sum_{\alpha=1}^p L_{\alpha}u = O(\tau), \quad f - \sum_{\alpha=1}^p f_{\alpha} = O(\tau).$$

2.3 Локально-одномерная схема для уравнения теплопроводности

Операторы L_{α} в вспомогательной задаче (2.2) будем называть одномерными, если L_{α} содержат производные лишь по переменной x_{α} . Соответствующая аддитивная схема при этом называется локально-одномерной.

Рассмотрим локально одномерную схему для задачи (1.7). Вспомогательная задача для функции v имеет вид:

$$\begin{cases} v|_{t=0} = \sin \frac{\pi x}{2} \sin 2\pi z, \\ \frac{1}{3} \frac{\partial v_{(1)}}{\partial t} = \frac{\partial^2 v_{(1)}}{\partial x^2} + \frac{1}{3} \sin \pi z [(1 + \pi^2 t)(x^2 + y^2) - 4t], \quad t \in (t_j, t_{j+1/3}], \\ v_{(1)}|_{x=0} = ty^2 \sin \pi z, \quad \frac{\partial v_{(1)}}{\partial x} \Big|_{x=1} = 2t \sin \pi z, \\ v_{(1)}|_{t=t_j} = v|_{t=t_j}, \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{3} \frac{\partial v_{(2)}}{\partial t} = \frac{\partial^2 v_{(2)}}{\partial y^2} + \frac{1}{3} \sin \pi z [(1 + \pi^2 t)(x^2 + y^2) - 4t], \quad t \in (t_{j+1/3}, t_{j+2/3}), \\ \frac{\partial v_{(2)}}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0, \quad \frac{\partial v_{(2)}}{\partial y} \Big|_{y=1} = 2t \sin \pi z, \\ v_{(2)} \Big|_{t=t_{j+1/3}} = v_{(1)} \Big|_{t=t_{j+1/3}}, \end{array} \right. \quad (2.6)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{3} \frac{\partial v_{(3)}}{\partial t} = \frac{\partial^2 v_{(3)}}{\partial z^2} + \frac{1}{3} \sin \pi z [(1 + \pi^2 t)(x^2 + y^2) - 4t], \quad t \in (t_{j+2/3}, t_{j+1}), \\ v_{(3)} \Big|_{z=0} = v_{(3)} \Big|_{z=1} = 0, \\ v_{(3)} \Big|_{t=t_{j+2/3}} = v_{(2)} \Big|_{t=t_{j+2/3}}, \\ \frac{\partial v_{(3)}}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0, \quad \frac{\partial v_{(3)}}{\partial y} \Big|_{y=1} = 2t \sin \pi z, \\ v_{(3)} \Big|_{x=0} = ty^2 \sin \pi z, \quad \frac{\partial v_{(3)}}{\partial x} \Big|_{x=1} = 2t \sin \pi z, \end{array} \right.$$

$$v \Big|_{t=t_{j+1}} = v_{(3)} \Big|_{t=t_{j+1}}.$$

Будем использовать ту же сетку, что и в эволюционно-факторизованной схеме. При этом каждую из вспомогательных задач будем последовательно решать с помощью неявных схем.

Результаты расчетов по локально-одномерной схеме для $N = M = K = J = 100$ приведены на рисунках 4 и 5.

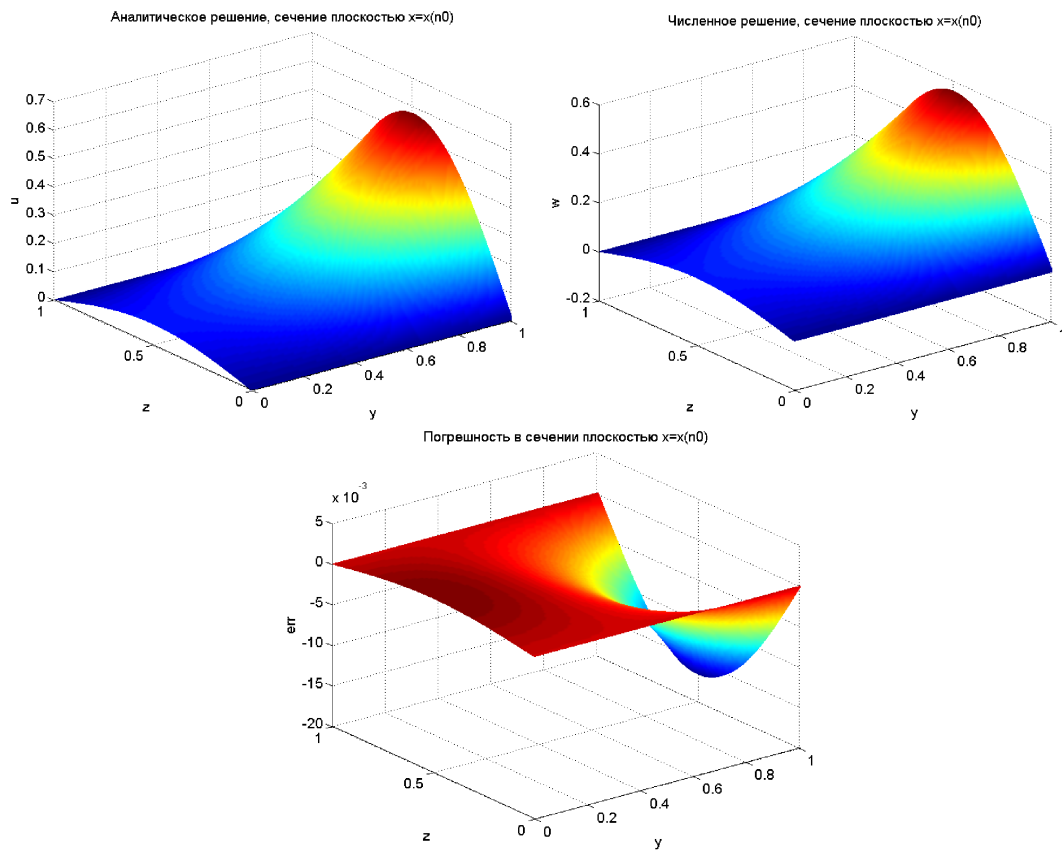


Рис. 4: Аналитическое и численное решения при $t = 0.5$ в сечении $x = 0.392$ ($n_0 = 40$)

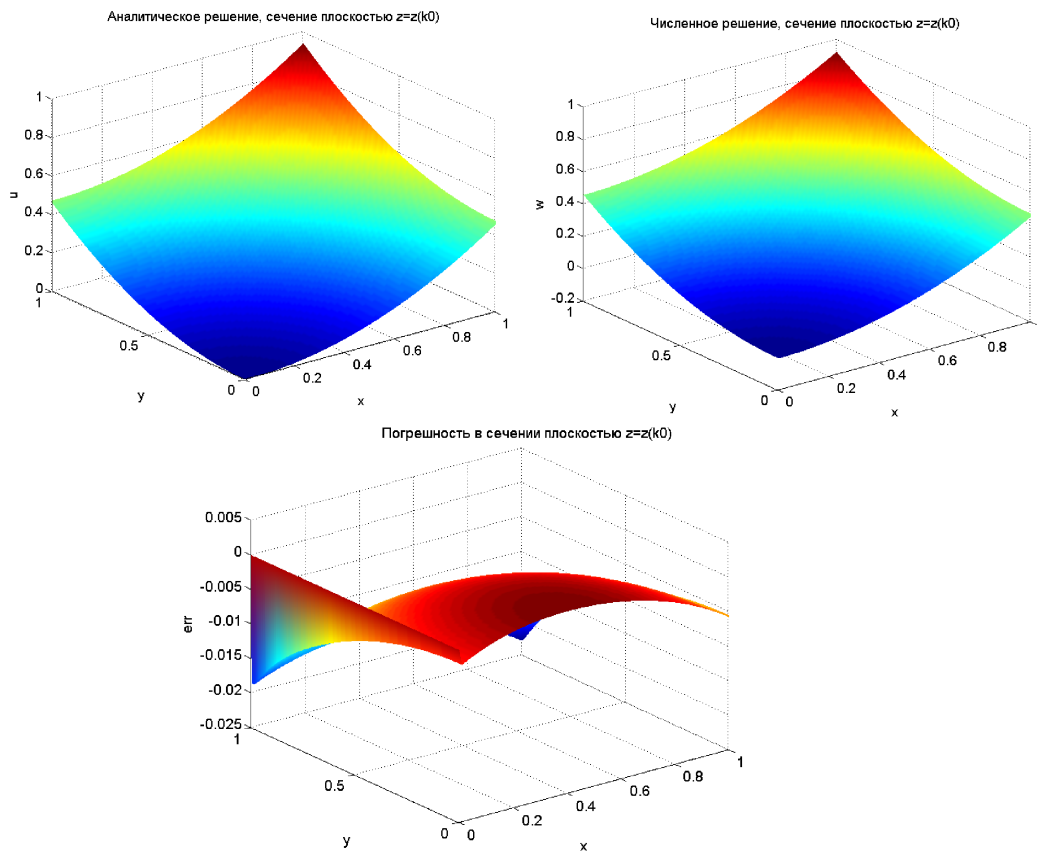


Рис. 5: Аналитическое и численное решения при $t = 0.5$ в сечении $z = 0.39$ ($k_0 = 40$)