Основы математического моделирования: регулярно и сингулярно возмущенные задачи

Асимптотические методы применяются для качественного исследования поведения решений нелинейных задач математической физики в том случае, когда в постановке задачи можно выделить некий малый параметр. Это числовой параметр, как правило, являющийся множителем при каком-нибудь слагаемом в уравнении, который достаточно мал (хотя бы на порядок меньше) по сравнению с множителями при остальных слагаемых. Задачи с малыми параметрами называют *возмущенными* задачами. При этом выделяют регулярно и сингулярно возмущенные задачи.

1 Регулярно возмущенные задачи

В качестве примера регулярно возмущенной задачи рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = f(y,t,\varepsilon),\ t > t_0, \\ y(t_0) = \mu. \end{cases}$$

В этой задаче $\varepsilon > 0$ — достаточно малое число (малый параметр). Пусть функция $f(y,t,\varepsilon)$ является непрерывной и дифференцируемой в некоторой области

$$D = \left\{(t,y,\varepsilon):\ |t-t_0| \leqslant a,\ |y-\mu| \leqslant b,\ |\varepsilon| \leqslant c\right\}.$$

Тогда существует $T > 0$, такое что при $t \in [t_0, T]$ задача имеет единственное решение, непрерывное по t и ε, причем решение имеет вид

$$y(t,\varepsilon) = \overline{y}_0(t) + \alpha(t,\varepsilon),$$

где $\overline{y}_0(t)$ — решение так называемой *вырожденной* задачи:

$$\begin{cases} \dfrac{d\overline{y}_0}{dt} = \overline{f}_0(\overline{y}_0,t),\ t > t_0, \\ \overline{y}_0(t_0) = \mu, \end{cases}$$

где

$$\overline{f}_0(\overline{y}_0, t) = f(\overline{y}_0, t, 0).$$

Вырожденная задача получается из исходной возмущенной, если в ней формально положить $\varepsilon = 0$. Слагаемое $\alpha(t, \varepsilon)$ стремится к нулю при стремлении к нулю параметра ε.

Приведенное выше выражение для решения $y(t, \varepsilon)$ представляет собой так называемую *асимптотическую формулу*. В асимптотических формулах часть слагаемых указывается явно (в данном случае $\overline{y}_0(t)$), а для части слагаемых указывается лишь поведение при $\varepsilon \to 0$.

Смысл представления решения в виде асимптотической формулы состоит в том, что вспомогательные задачи для явно указываемых слагаемых проще исходной возмущенной задачи. Явные слагаемые позволяют оценить поведение решения исходной задачи при достаточно малых значениях параметра ε.

Если в рассматриваемом примере в области D функция $f(y, t, \varepsilon)$ имеет непрерывные производные по y и ε до порядка $(n+1)$ включительно, то

$$y(t, \varepsilon) = \overline{y}_0(t) + \varepsilon\overline{y}_1(t) + ... + \varepsilon^n\overline{y}_n(t) + O(\varepsilon^{n+1}),\ t \in [t_0, T].$$

Часть решения

$$\overline{y}(t) = \overline{y}_0(t) + \varepsilon\overline{y}_1(t) + ... + \varepsilon^n\overline{y}_n(t)$$

называется *регулярной* асимптотикой.

Найти функции $\overline{y}_0(t)$, $\overline{y}_1(t)$, ..., $\overline{y}_n(t)$ можно, подставляя выражение для $y(t, \varepsilon)$ в исходное уравнение и начальное условие и приравнивая слева и справа в соответствующих равенствах слагаемые при одинаковых степенях ε:

$$\begin{cases} \dfrac{d\overline{y}_0}{dt} + \varepsilon\dfrac{d\overline{y}_1}{dt} + ... + \varepsilon^n\dfrac{d\overline{y}_n}{dt} + O(\varepsilon^{n+1}) = f\left(\overline{y}_0(t) + \varepsilon\overline{y}_1(t) + ... + \varepsilon^n\overline{y}_n(t) + O(\varepsilon^{n+1}), t, \varepsilon\right), \\ \overline{y}_0(t_0) + \varepsilon\overline{y}_1(t_0) + ... + \varepsilon^n\overline{y}_n(t_0) + O(\varepsilon^{n+1}) = \mu. \end{cases}$$

Функцию в правой части уравнения раскладываем по формуле Тейлора по параметру ε:

$$f(\overline{y}_0(t) + \varepsilon\overline{y}_1(t) + ... + \varepsilon^n\overline{y}_n(t) + O(\varepsilon^{n+1}), t, \varepsilon) =$$

$$= \overline{f}_0(\overline{y}_0, t) + \varepsilon\overline{f}_1(\overline{y}_0, \overline{y}_1, t) + ... + \varepsilon^n\overline{f}_n(\overline{y}_0, ..., \overline{y}_n, t) + O(\varepsilon^{n+1}),$$

где

$$\overline{f}_0(\overline{y}_0, t) = f(\overline{y}_0, t, 0), \quad \overline{f}_1(\overline{y}_0, \overline{y}_1, t) = f_y(\overline{y}_0, t, 0) \cdot \overline{y}_1 + f_\varepsilon(\overline{y}_0, t, 0),$$

и так далее. Приравнивая слагаемые при одинаковых степенях ε, получаем набор более простых задач, чем исходная:

$$\begin{cases} \dfrac{d\overline{y}_0}{dt} = \overline{f}_0(\overline{y}_0, t), \\ \overline{y}_0(t_0) = \mu, \end{cases}$$

$$
\begin{cases}
\dfrac{d\overline{y}_1}{dt} = \overline{f}_1(\overline{y}_0, \overline{y}_1, t), \\
\overline{y}_0(t_0) = 0,
\end{cases}
$$

и так далее. Первая из этих задач (для функции $\overline{y}_0(t)$) представляет собой вырожденную задачу.

Задачи, в которых при $\varepsilon \to 0$ решение стремится к решению вырожденной задачи *во всей расчетной области*, называются регулярно возмущенными.

Проиллюстрируем описанную методику на примере задачи Коши

$$
\begin{cases}
\dfrac{dy}{dt} = a(t) \cdot y + b(t) + \varepsilon \cdot c(t) \cdot y^2, \\
y(0) = 0,
\end{cases}
$$

где ε — достаточно малое число.

Найдем первые два слагаемых в асимптотическом представлении решения:

$$
y(t, \varepsilon) = \overline{y}_0(t) + \varepsilon \overline{y}_1(t) + O(\varepsilon^2).
$$

Задача для $\overline{y}_0(t)$ (вырожденная задача):

$$
\begin{cases}
\dfrac{d\overline{y}_0}{dt} = a(t) \cdot \overline{y}_0 + b(t), \\
\overline{y}_0(0) = 0.
\end{cases}
$$

Общее решение неоднородного уравнения имеет вид:

$$
\overline{y}_0(t) = C \cdot \exp\left\{ \int\limits_0^t a(t')dt' \right\} + \int\limits_0^t b(\tau) \exp\left\{ \int\limits_\tau^t a(t')dt' \right\} d\tau,
$$

где C — константа. Подставляя решение в начальное условие, получаем $C = 0$. Итак, нулевое приближение решения имеет вид:

$$
\overline{y}_0(t) = \int\limits_0^t b(\tau) \exp\left\{ \int\limits_\tau^t a(t')dt' \right\} d\tau.
$$

Для $\overline{y}_1(t)$ получаем задачу:

$$
\begin{cases}
\dfrac{d\overline{y}_1}{dt} = a(t) \cdot \overline{y}_1 + c(t) \cdot \overline{y}_0^2(t), \\
\overline{y}_1(0) = 0.
\end{cases}
$$

Ее решение имеет вид:

$$
\overline{y}_1(t) = \int\limits_0^t c(\tau) \cdot \overline{y}_0^2(\tau) \exp\left\{ \int\limits_\tau^t a(t')dt' \right\} d\tau.
$$

2 Сингулярно возмущенные задачи

Прежде всего рассмотрим пример возмущенной задачи Коши, допускающей аналитическое решение:

$$\begin{cases} \varepsilon \dfrac{dy}{dt} = -y + t, \;\; t > 0 \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Ее решение имеет вид:

$$y(t) = \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_0^t t' \exp\left\{ \int\limits_{t'}^{t} \frac{d\tau}{\varepsilon} \right\} dt' + \exp\left\{ -\int\limits_0^t \frac{d\tau}{\varepsilon} \right\} = (1+\varepsilon)e^{-t/\varepsilon} + t - \varepsilon.$$

Вырожденная задача (при $\varepsilon = 0$):

$$0 = -\overline{y}_0(t) + t \;\; \Rightarrow \;\; \overline{y}_0(t) = t.$$

В данном случае первое отличие от рассмотренной ранее регулярно возмущенной задачи заключается в том, что для функции $\overline{y}_0(t)$ получается алгебраическое, а не дифференциальное уравнение, поэтому $\overline{y}_0(t)$ не обязано удовлетворять начальному условию задачи. В данном случае

$$\overline{y}_0(0) = 0 \neq 1.$$

Второе отличие заключается в том, что в точном решении помимо регулярной асимптотики $(t - \varepsilon)$ появляется часть $(1+\varepsilon)e^{-t/\varepsilon}$, зависящая от $\tau = \dfrac{t}{\varepsilon}$. Поэтому решение в данном случае в виде

$$y(t,\varepsilon) = \overline{y}_0(t) + \varepsilon\overline{y}_1(t) + ... + \varepsilon^n \overline{y}_n(t) + O(\varepsilon^{n+1})$$

представить нельзя.

Слагаемое $\pi(\tau) = (1+\varepsilon)e^{-t/\varepsilon}$, где $\tau = \dfrac{t}{\varepsilon}$, обеспечивает выполнение начального условия при $t = 0$, и достаточно быстро стремится к нулю с ростом t. При этом решение возмущенной задачи стремится к решению вырожденной при $\varepsilon \to 0$ в области $t > 0$.

Рассмотренный пример — это частный случай сингулярно возмущенных задач. Основное отличие сингулярно возмущенных задач от регулярно возмущенных заключается в том, что их решение не стремится регулярно к решению вырожденной задачи *во всей расчетной области* при $\varepsilon \to 0$. Поэтому в сингулярно возмущенных задачах для построения асимптотики недостаточно регулярной части

$$\overline{y}(t) = \overline{y}_0(t) + \varepsilon\overline{y}_1(t) + ... + \varepsilon^n \overline{y}_n(t),$$

и приходится вводить дополнительные слагаемые, например, вида:

$$\pi(\tau) = \pi_0(\tau) + \varepsilon\pi_1(\tau) + ... + \varepsilon^n\pi_n(\tau),$$

где $\tau = \dfrac{t-t_0}{\varepsilon}$, если мы рассматриваем задачу Коши с начальными условиями при $t = t_0$. Переменную τ в теории сингулярных возмущений называю «растянутой».

Рассмотрим более общий случай сингулярно возмущенной задачи Коши:

$$\begin{cases} \varepsilon\dfrac{dy}{dt} = f(y,t), \ \ t > t_0, \\ y(t_0) = \mu, \end{cases}$$

где $f(y,t)$ — достаточно гладкая функция своих аргументов.

Из сказанного выше следует, что асимптотику решения нужно искать в виде:

$$y(t,\varepsilon) = \overline{y}(t,\varepsilon) + \pi(\tau,\varepsilon) + \alpha(t,\varepsilon),$$

где $\overline{y}(t,\varepsilon)$ — регулярная часть асимптотики, $\pi(\tau,\varepsilon)$ — погранслойная часть асимптотики, достаточно быстро убывающая с ростом τ, $\alpha(t,\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Подставим $y(t,\varepsilon)$ в задачу, учитывая, что

$$\tau = \frac{t-t_0}{\varepsilon} \ \ \Rightarrow \ \ \frac{d}{dt} = \frac{1}{\varepsilon}\frac{d}{d\tau}.$$

В результате получаем:

$$\begin{cases} \varepsilon\dfrac{d\overline{y}}{dt} + \dfrac{d\pi}{d\tau} + \varepsilon\dfrac{d\alpha}{dt} = f(\overline{y}(t,\varepsilon) + \pi(\tau,\varepsilon) + \alpha(t,\varepsilon), t), \ \ t > t_0, \\ \overline{y}(t_0,\varepsilon) + \pi(0,\varepsilon) + \alpha(t_0,\varepsilon) = \mu. \end{cases}$$

Так как слагаемое $\pi(\tau,\varepsilon)$ играет роль только при достаточно малых τ, то есть при t в окрестности t_0, а при $t > t_0$ основную роль в асимптотике решения играет слагаемое $\overline{y}(t,\varepsilon)$, выделим в правой части уравнения слагаемое $f(\overline{y}(t,\varepsilon),t)$:

$$f(\overline{y}(t,\varepsilon) + \pi(\tau,\varepsilon) + \alpha(t,\varepsilon), t) = f(\overline{y}(t,\varepsilon), t) + \left\{f(\overline{y}(t,\varepsilon) + \pi(\tau,\varepsilon) + \alpha(t,\varepsilon), t) - f(\overline{y}(t,\varepsilon), t)\right\}.$$

Разделим уравнение на две части:

$$\varepsilon\frac{d\overline{y}}{dt} = f(\overline{y}, t)$$

и

$$\frac{d\pi}{d\tau} = f(\overline{y}(t_0+\varepsilon\tau,\varepsilon) + \pi(\tau,\varepsilon) + \alpha, t_0+\varepsilon\tau) - f(\overline{y}(t_0+\varepsilon\tau,\varepsilon), t_0+\varepsilon\tau) = \pi_f(\tau,\pi,\varepsilon),$$

где в правой части уравнения для $\pi(\tau,\varepsilon)$ везде вместо t подставлено его выражение через τ: $t = t_0 + \varepsilon\tau$. К уравнению для $\pi(\tau,\varepsilon)$ добавляем начальные условия:

$$\overline{y}(t_0) + \pi(0,\varepsilon) = \mu.$$

Далее регулярную и погранслойную части асимптотики представляем в виде степенных рядов по параметру ε:

$$\overline{y}(t,\varepsilon) = \overline{y}_0(t) + \varepsilon\overline{y}_1(t) + ...,$$

$$\pi(\tau,\varepsilon) = \pi_0(\tau) + \varepsilon\pi_1(\tau) + ...,$$

подставляем эти выражения в соответствующие уравнения и приравниваем в полученных равенствах справа и слева выражения с одинаковыми степенями параметра ε.

Рассмотрим сначала регулярную часть асимптотики:

$$\varepsilon\frac{d\overline{y}_0}{dt} + \varepsilon^2\frac{d\overline{y}_1}{dt} + ... = f(\overline{y}_0 + \varepsilon\overline{y}_1 + ..., t) = f(\overline{y}_0, t) + \varepsilon \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{y=\overline{y}_0} \cdot \overline{y}_1 + ...$$

Приравнивая слагаемые при ε^0, получаем вырожденное уравнение

$$0 = f(\overline{y}_0, t).$$

Предположим, что это уравнение имеет корни. Тогда из него должно быть найдено $\overline{y}_0(t)$.

Приравнивая слагаемые при ε^1, получаем уравнение для $\overline{y}_1(t)$:

$$\frac{d\overline{y}_0}{dt} = \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{y=\overline{y}_0} \cdot \overline{y}_1.$$

Если $\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{y=\overline{y}_0} \neq 0$, то

$$\overline{y}_1 = \left(\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{y=\overline{y}_0}\right)^{-1} \frac{d\overline{y}_0}{dt}.$$

Для достаточно гладкой функции этот процесс можно продолжать. При этом для слагаемых в регулярной части асимптотики получаются алгебраические уравнения, поэтому в общем случае регулярная часть не удовлетворяет дополнительным условиям задачи.

Рассмотрим ситуацию, когда вырожденное уравнение $f(y,t) = 0$ имеет несколько простых корней $y = \varphi_i(t)$, $i = 1, ..., N$, причем эти корни изолированные, то есть, графики функций $y = \varphi_i(t)$ не пересекаются.

Если при переходе через корень φ_i знак функции $f(y,t)$ меняется с «+» на «-», то интегральные кривые исходной сингулярно возмущенной задачи Коши «притягиваются» к этому корню, если начальное условие лежит в его *области влияния*.При этом корень φ_i называется *устойчивым корнем вырожденного уравнения*. Для дифференцируемой по y функции $f(y,t)$ условие устойчивости корня можно записать следующим образом:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{y=\varphi_i} < 0.$$

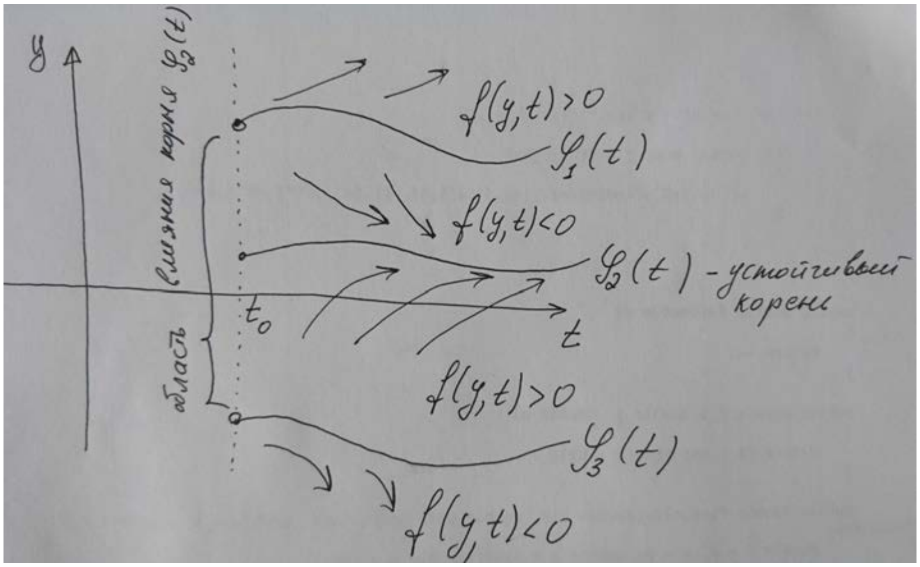

Рис. 1: Корни вырожденного уравнения и область влияния

Областью влияния устойчивого корня φ_i вырожденного уравнения называется множество начальных значений μ, при которых решение задачи будет стремиться к $\varphi_i(t)$ с ростом t.

Если μ принадлежит области влияния устойчивого корня $\varphi_i(t)$, то

$$\overline{y}_0(t) = \varphi_i(t).$$

Рассмотрим теперь погранслойную часть асимптотики:

$$\frac{d\pi_0}{d\tau} + \varepsilon\frac{d\pi_1}{d\tau} + ... = \pi_f(\tau, \pi, \varepsilon) = \pi_{f,0}(\tau, \pi_0) + \varepsilon\pi_{f,1}(\tau, \pi_0, \pi_1) + ...$$

Приравнивая справа и слева слагаемые с одинаковыми степенями ε, получаем задачи:

$$\begin{cases} \dfrac{d\pi_0}{d\tau} = \pi_{f,0}(\tau, \pi_0), \ \ \tau > 0 \\ \overline{y}_0(t_0) + \pi_0(0) = \mu, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d\pi_1}{d\tau} = \pi_{f,1}(\tau, \pi_0, \pi_1), \ \ \tau > 0 \\ \overline{y}_1(t_0) + \pi_1(0) = 0, \end{cases}$$

и так далее.

Пример 2.1. *Найти приближенное решение задачи*

$$\begin{cases} \varepsilon\dfrac{dy}{dt} = y^2 - t^2, \ \ t \in (1, 2] \\ y(1, \varepsilon) = 0 \end{cases}$$

с точностью до $O(\varepsilon)$.

Представим искомое решение в виде

$$y(t,\varepsilon) = \overline{y}_0(t) + \pi_0(\tau) + O(\varepsilon),$$

где $\tau = \dfrac{t-1}{\varepsilon}$. Слагаемое $\overline{y}_0(t)$ находим из вырожденного уравнения:

$$0 = \overline{y}_0^2(t) - t^2 \;\; \Rightarrow \;\; \varphi_{1,2} = \pm t.$$

Проверим корни вырожденного уравнения на устойчивость:

$$f(y,t) = y^2 - t^2 \;\; \Rightarrow \;\; \frac{\partial f}{\partial y} = 2y \;\; \Rightarrow \;\; \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\varphi_1 = t} = 2t > 0, \;\; \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\varphi_2 = -t} = -2t < 0.$$

Следовательно, $\varphi_1 = t$ — неустойчивый корень, а $\varphi_2 = -t$ — устойчивый корень при $t \in [1,2]$. Таким образом, $\overline{y}_0(t) = -t$.

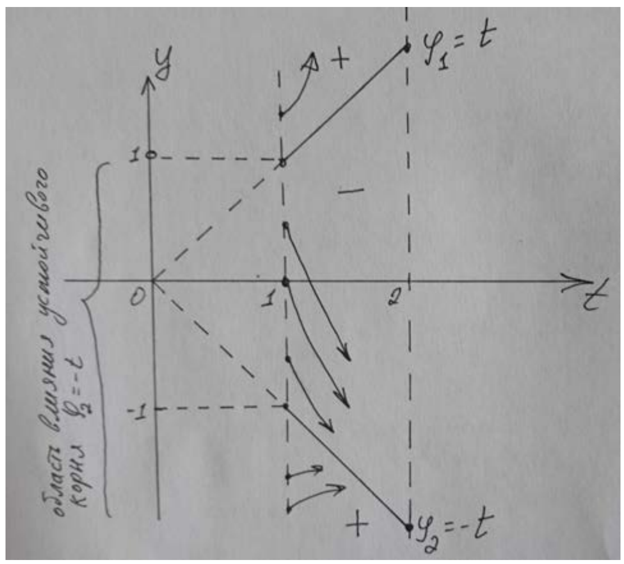

Рис. 2: Корни вырожденного уравнения и область влияния

Область влияния устойчивого корня $\varphi_2 = -t$: $\mu \in (-\infty, 1)$. Начальное условие рассматриваемой задачи попадает в область влияния φ_2.

Получим задачу для слагаемого $\pi_0(\tau)$. Правая часть в задаче для погранслойной части асимптотики:

$$\pi_f = \left\{ (\underbrace{\overline{y}_0(t)}_{-t} + \pi_0(\tau) + O(\varepsilon))^2 - t^2 \right\} - \underbrace{\left\{ \overline{y}_0^2(t) - t^2 \right\}}_{=0} = \{t = 1 + \varepsilon\tau\} =$$

$$= (-1 - \varepsilon\tau + \pi_0(\tau) + O(\varepsilon))^2 - (1+\varepsilon\tau)^2 = (-1 + \pi_0(\tau))^2 - 1 + O(\varepsilon).$$

В правую часть задачи для $\pi_0(\tau)$ идет слагаемое при ε^0 из этого выражения:

$$\begin{cases} \dfrac{d\pi_0}{d\tau} = (-1 + \pi_0(\tau))^2 - 1, \\ -1 + \pi_0(0) = 0. \end{cases}$$

Для удобства введем вспомогательную функцию $z(\tau) = -1 + \pi_0(\tau)$. Она является решением задачи:

$$\begin{cases} \dfrac{dz}{d\tau} = z^2 - 1, \\ z(0) = 0. \end{cases}$$

Интегрируем уравнение с учетом начального условия:

$$\int\limits_0^z \frac{d\eta}{\eta^2 - 1} = \tau \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\ln\left|\frac{z-1}{z+1}\right| = \tau \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\ln\frac{1-z}{z+1} = \tau \quad \Rightarrow$$

$$1 - z = (1+z)e^{2\tau} \quad \Rightarrow \quad z = \frac{e^{-2\tau} - 1}{1 + e^{-2\tau}} \quad \Rightarrow \quad \pi_0(\tau) = 1 + z(\tau) = \frac{2e^{-2\tau}}{1 + e^{-2\tau}}.$$

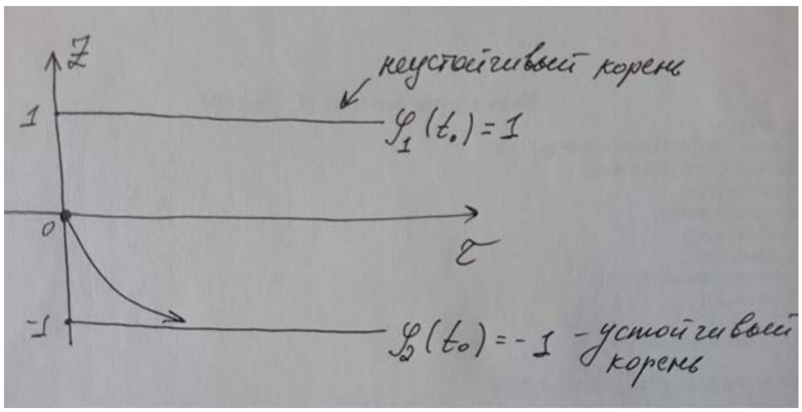

Рис. 3: Поведение функции $z(\tau)$

Окончательно получаем:

$$y(t, \varepsilon) = -t + \frac{2e^{-2(t-1)/\varepsilon}}{1 + e^{-2(t-1)/\varepsilon}} + O(\varepsilon).$$

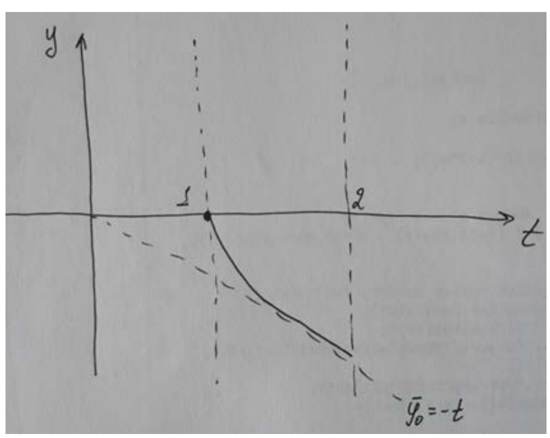

Рис. 4: Вид решения